ARŞİMED'İN KÜRELERİ*

Ali Sinan Sertöz

Bir kürenin hacmini ilk merak eden kişi kimdi bilemiyoruz ama bunu hesap etmeye cüret edecek kadar merak eden ilk kişinin Sicilyalı Arşimed olduğunu biliyoruz. Bugün böyle bir hacmi hesaplamak için integral teknikleri kullanıyoruz. Oysa integral hesap Arşimed'den yaklaşık 1900 yıl sonra icat edilecektir. Elektiriğin kullanıma girmesine 2100 yıl, penisilinin icadına 2150 yıl, bilgisayar haberleşme ağlarının yayılmasına ise yaklaşık 2200 yıl vardır. Hatta tarihin akışını ve dünyanın siyasi yapısını değiştirecek son iki peygamberden ilkinin doğmasına bile daha bir kaç yüzyıl vardır... Roma Kartaca savaşları hâlâ sürmektedir. Nitekim bu savaşlarda taraf tutmak zorunda olan Sicilya krallığı ölümcül bir yanlış yapıp Kartaca'nın tarafını tutar. Roma donanmasının uzun süren kuşatmasından sonra Sicilya düşer ve o karışıklıkta bir asker Arşimed'i öldürür. Vasiyeti üzerine mezar taşına silindir içine sokulmuş bir küre çizilir. Çünkü Arşimed'in en çok gurur duyduğunu söylediği çalışması budur; bir kürenin hacminin, içine tam olarak sığacağı silindirin hacmine oranı. Bu oranı Arşimed üçte iki olarak bulur ve silindirin hacmi bilindiği için kürenin hacmi tam olarak hesaplanmış olur. Arşimed'in mezarı daha sonra kaybolur. Yaklaşık üçyüz yıl kadar sonra Sicilya'da konsül yardımcılığı görevi sırasında Cicero üzerinde bir silindir ve küre şekli bulunan bir mezar taşı bulur... Bugün bu mezar taşı yine kayıp. Meraklı bir turistin Arşimed'in mezarından bir hatıra almak isteyip işin biraz aşırısına kaçtığı sanılıyor.

Arşimed'in bunca gurur ve coşku duyduğu bu hacim hesabı gıpta edilecek sadeliktedir ve mutlaka çağdaşlarına "ben niye akıl edemedim" dedirtmiştir. Bu konunun matematiksel içeriği dışında bizi ilgilendiren bir başka yönü de bu hesapları içeren Arşimed'in Metodlar adlı eserinin ikibin yıl ortadan kaybolduktan sonra bu yüzyılın başında İstanbul'da ortaya çıkmasıdır.

---

*Matematik Dünyası, Türk Matematik Derneği, Cilt 4, Sayı 3, (1994), 1-3.

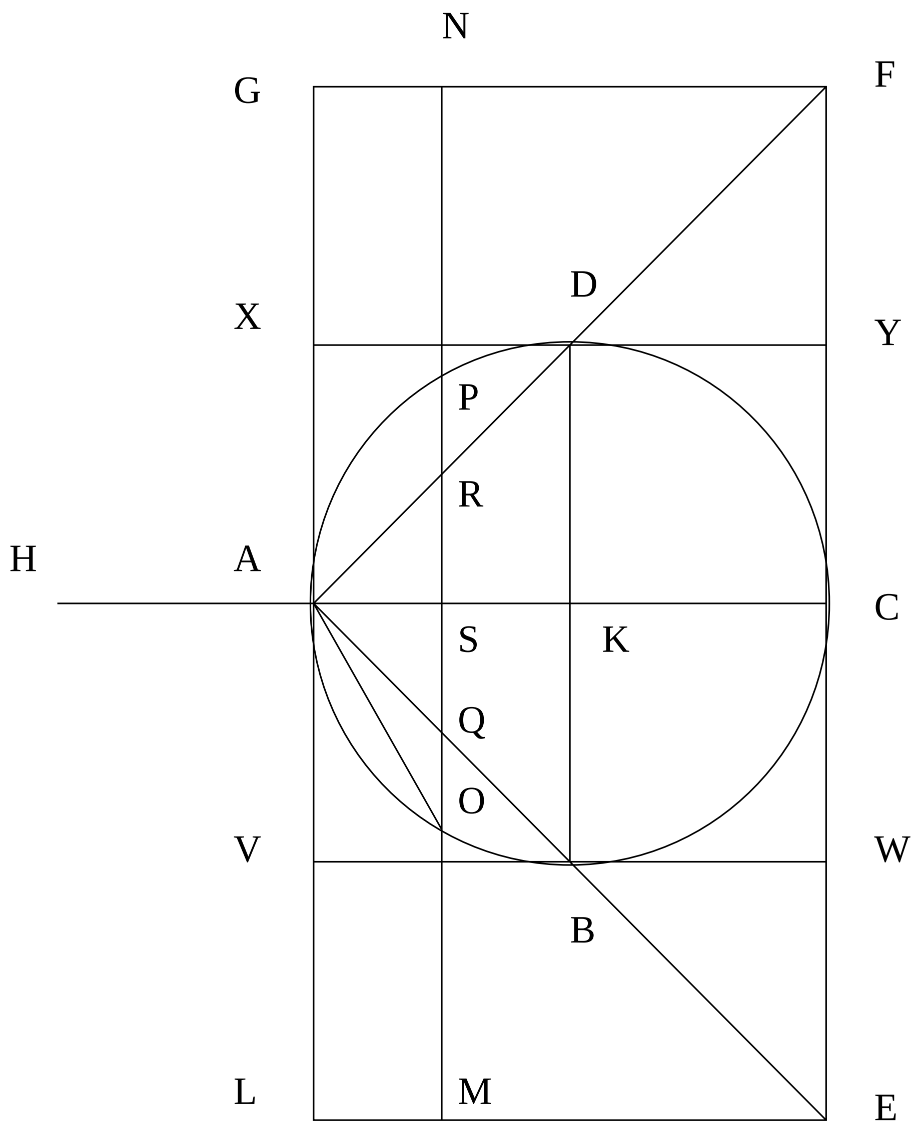
Arşimed ve eserleriyle ilgili ayrıntılı bir yazıyı daha ilerde yazmaya söz verip Arşimed'in kürelerine döneyim. Bulmak istediğimiz hacim yarı çapı r olan bir kürenin hacmi. Özellikle merak ettiğimiz ise tabanının yarı çapı r yüksekliği $2r$ olan silindirin içinde bu kürenin ne oranda yer kapladığı. Bu hesabın bir yerinde Arşimed'in kaldıraçlarının işe karıştığını göreceksiniz, sakın şaşırmayın.

Hacmini hesaplayacağımız küreyi merkezinden geçen bir düzlemle keselim. Elde ettiğimiz çemberi $ABCD$ ile, merkezini K ile gösterelim (bkz şekil 1). Burada AC ve BD çemberin birbirine dik iki çapı olsun. C noktasından BD doğrusuna bir paralel çizelim ve bu paralel doğrunun AB ve AD doğrultularını kestiği noktalara E ve F diyelim. E'den ve F'den EF doğrusuna birer dikme çizelim ve bu dikmeler $ABCD$ çemberine A noktasından çizilen teğeti L ve G noktalarında kessinler. B ve D noktalarından çembere çizilen teğetler de LG'yi V ve X noktalarında, EF'yi de W ve Y noktalarında kessinler. AEF üçgenini AC ekseni etrafında döndürerek bir koni elde ettiğimizi düşüneceğiz. Aynı eksen etrafında bir de $LEFG$ dikdörtgenini döndürüp bir silindir elde edeceğiz. İşte hacimlerini kıyaslamak istediğimiz cisimler hazır. Kürenin hacmi ile koninin hacmini toplayıp silindirin hacminin yarısı olduğunu göreceğiz.

AC ekseni üzerinde rastgele bir S noktası alalım. Bu noktada AC doğ-ru-su-na dik olan bir düzlem düşünelim. Bu düzlem küremizi çapı OP olan bir daire boyunca keser. Aynı düzlem konimizi çapı QR ve silindirimizi de çapı MN olan daireler boyunca keser. Planımız, S noktasında elde edilen bu dairelerin alanları arasında bir bağıntı bulmak. Daha sonra S noktasını AC boyunca gezdireceğiz. Bu yaptığımızın alelâde bir Riemann integrali olduğunu düşünüp burun kıvırmadan önce Arşimed'in milattan önce üçüncü yüzyılda, Riemann'ın ise milattan sonra ondokuzuncu yüzyılda yaşamış olduklarını hatırlayın...

Artık planladığımız alan kıyaslamasına başlayabiliriz. $MS = AC$ ve $SQ = AS$ olduğundan hemen $MS{\cdot}SQ = AC{\cdot}AS$ buluruz. AC bir çap olduğu için AOC üçgeni diktir. Diğer açılarına baktığımız zaman bu üçgenin AOS üçgenine benzer olduğunu görürüz. Benzer üçgen bağıntılarından $AC \cdot AS = AO^2$ buluruz. Oysa AOS üçgeninde Fisagor bağıntısı bize $AO^2 = AS^2 + OS^2$ verir. Öte yandan ACE üçgeninin ikizkenar olduğunu ve SQ doğrusunun CE doğrusuna paralel olduğunu farkedersek AS uzunluğunun SQ uzunluğuna eşit olduğunu görürüz. Bütün bunları yerine koyarsak önemli bir bağıntı bulacağız: $MS \cdot SQ = OS^2 + SQ^2$. Bu bağıntının önemini kavramak için

Şekil 1:



biraz ara verip ne yapmakta olduğumuzu hatırlayalım. Elimizdeki cisimleri AC'ye dik bir düzlemle kesmiştik. Bu düzlem küremizi yarıçapı OS olan bir daire boyunca, konimizi de yarıçapı SQ olan bir daire boyunca kesmişti. İşte bulduğumuz bağıntının sağ tarafı bu dairelerin yarıçaplarının karelerinin toplamı. Bir de bunu π ile çarparsanız...

CA doğrusunu $CA = AH$ olacak şekilde H noktasına kadar uzatın. HC doğrusunu A noktasında dayanağı olan bir kaldıraç gibi düşüneceğiz! Bu kaldıracın H ve S noktalarına bazı 'ağırlıklar' asacağımız için $\frac{HA}{AS}$ oranını bulmak istiyoruz. İlk önce, $HA = AC = EC = MS$ ve $AS = SQ$ olduğundan $\frac{HA}{AS} = \frac{MS}{SQ}$ buluruz. Eşitliğin sağ tarafında payı ve paydayı MS ile çarparsak $\frac{HA}{AS} = \frac{MS^2}{MS \cdot SQ}$, yukarda bulduğumuz önemli bağıntıyı burada kullanırsak $\frac{HA}{AS} = \frac{\pi \cdot MS^2}{\pi \cdot OS^2 + \pi \cdot SQ^2}$ buluruz. Yine HAS kaldıracına dönelim; S noktasına silindirden gelen daireyi asalım, H noktasına ise küreden gelen daire ile koniden gelen daireyi birlikte asalım. Dengede duracaklarını gösterdik...

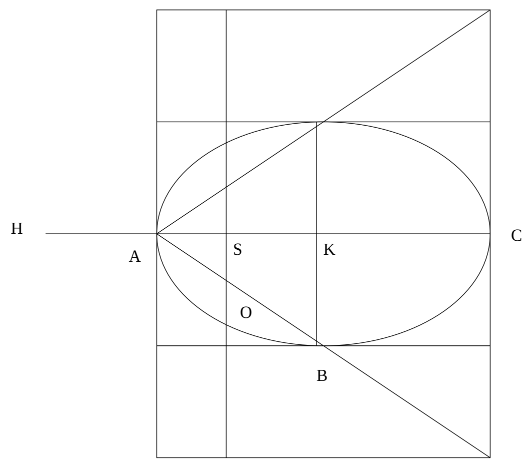
S noktasının AC üzerinde A'dan C'ye giderken bulunduğu her konumda bizim elde ettiğimiz daireler yukardaki bağıntıyı sağlayacak. Yani silindirden gelen daire olduğu yere asılacak, küreden ve koniden gelen daireler ise H noktasına asılacak. Sonunda $LFEG$ silindiri olduğu yerde kalacak ama $ABCD$ küresi ile AEF konisi beraber H noktasına asılacaklar ve HAC kaldıracı bu yükler altında dengede kalacak. Silindirimizin ağırlık merkezi K noktası olduğu için onun da K noktasında asılı olduğunu düşünebiliriz. Özetlersek; HAK kaldıracının H noktasında yarıçapı $r = AK$ olan bir küre ile taban yarıçapı ve yüksekliği $2r$ olan bir koni asılı, K noktasında ise taban yarıçapı ve yüksekliği $2r$ olan bir silindir asılı. Bu sistem A noktası etrafında dengede duruyor.

Arşimed bu noktada silindirin hacminin $8\pi r^3$ olduğunu, koninin hacminin bunun üçte biri olduğunu ve AK'nin de HA'nın yarısı olduğunu göz önüne alarak kürenin hacmini $\frac{4}{3}\pi r^3$ olarak buluyor. Koninin hacminin silindirin hacminin üçte biri olduğunu nereden bulduğunu sorgulayacak okuyucuya karşı Arşimed'in sağlam bir yanıtı var: "bkz Öklid, XII. 10" (!).

Bu metodun küre üzerinde sonuç vermesinden cesaret alarak Arşimed elipsoidin ve paraboloidin hacimlerini hesaplama problemine de elindeki kal-dı-raç-la girişiyor. Şekil 2 ve 3'de bu çözümler için kullandığı çizimleri görüyorsunuz. Elipsoidin hacmi probleminde $\frac{AS \cdot SC}{SO^2} = \frac{AK^2}{KB^2}$ bağıntısı, paraboloidin hacmi probleminde de $AS = SO^2$ bağıntısı önemli olacak. Hesapların ayrıntılarını vermiyorum. Bu kadar ipucu ve Arşimed'den yirmi iki yüzyıl sonra yaşıyor olmanın rahatlığıyla nasıl olsa sonucu kendiniz hemen bulabilirsiniz...

Teşekkür: İçinde Arşimed'in bu çalışmasını bulduğum "Archimedes", Editör Heath, adlı kitabını bana yıllar önce ödünç veren ve geri istemeyen dostum Prof. Metin Gürses'e gecikmiş teşekkürler.

Şekil 2:



Şekil 3: