Prof. Dr. Ali Sinan Sertöz

Bilkent Üniversitesi Fen Fakültesi
Matematik Bölümü

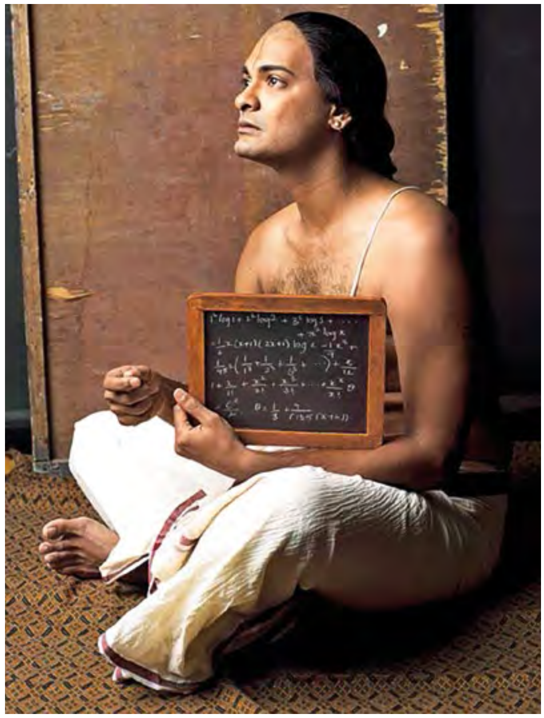
RAMANUJAN
SONSUZLUĞU BİLEN ADAM

Kafdağı'nın zirvesine her bin yılda bir Anka kuşu gelir. Kayalıkların en yüksek noktasına bir tek gaga darbesi vurur ve gider. Gel zaman git zaman, gaga darbeleriyle aşınan Kafdağı küçüle küçüle yok olur. İşte o zaman bile sonsuzluğun ilk anlarının başlamakta olduğunu söyleyemeyiz.

Sonsuzluğu Bilen Adam filminde hayatı anlatılan Srinivasa Ramanujan sonsuzluğu hepimizden daha fazla kavrayabiliyordu kuşkusuz, ama insan beyninin sınırları sonsuzluğun karşısında ne kadar direnebilir ki?

Tosun Terzioğlu'nun bir röportajında dediği gibi "insanların sonsuzluk duygusuna karşı gideremedikleri bir özlemleri var. Matematikte bu özleme çok yaklaştığımız anlar oluyor. Ama geri kalan, insana ait, bu dünyaya ait her şey de sonlu." Ramanujan bu sonlu hayat içinde sonsuzluğa en çok yaklaşabilmiş insanlardan biri. Ama onun da yanıldığı anlar oldu kaçınılmaz olarak. Her büyük matematikçi gibi o da muhteşem hatalar yaptı.

Bir matematikçinin hayatını bu güne kadar en iyi anlatan film olan, 2015 yapımı "Sonsuzluk Teorisi" nden sahneler



2013 yılında Hindistan'da çekilen "Ramanujan" adlı filmden bir sahne

O Bir Dâhi mi?

Ramanujan'ın matematik dünyasına kendini tanıtmaya başlaması 1911 ile 1919 yılları arasında *Hindistan Matematik Derneği Dergisi*'ne gönderdiği elli sekiz problemle başlar. Bu problemlerden birinde şu sonsuz ifadenin değerinin kaç olduğunu sorar.

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\cdots}}}}$$

Bu ifade, inanılır gibi değil ama 3'e eşittir. İşte bu ve benzeri problemler ve bunlara verdiği cevaplardan etkilenen bir arkadaşı Ramanujan'a "sen dâhi misin?" diye sorar. Ramanujan "benim deham işte burada" diyerek gömleğinin yırtık ve tebeşir tozuna bulanmış dirseklerini gösterir. Kâğıt alacak parası olmadığı için bir "dizüstü tahtaya" tebeşirle yazmakta ve her hata yaptığında dirseğiyle silmektedir.

Olağanüstü özgünlükteki bu çeşit formülleri nasıl bulduğu Ramanujan'a hayatı boyunca hep sorulmuştur. Çok çalıştığını, çok hata yapıp düzelttiğini ve dirseklerini çürüttüğünü anlatması sıradan insanlara pek tatmin edici gelmemiştir. Sonunda kendi dininde kutsal olan tanrıça Namakkal'ın bu formülleri ona uykusunda fısıldadığı efsanesini çıkarmış ve bu açıklama sıradan insanları pek mutlu etmiştir. Ramanujan kadar çok çalışmadıkları için onunki kadar güzel sonuçlar elde etmedikleri gerçeği ne de olsa biraz can acıtıcıdır. Oysa tembelliklerinin ve bunun sonucunda oluşan vasatlıklarının sorumlusu gece rüyalarına girmeyen tanrıça olunca günlük hayatlarına ve olağan tembelliklerine huzurla devam edebileceklerdir. Ramanujan'ın sabah uyanır uyanmaz matematik çalışmaya başlamasını da Ramanujan'ın çalışkanlığına değil de gece rüyasında Namakkal'dan duyduğu formülleri unutmadan yazma telaşına bağlamak sıradan insanların fazlasıyla işine yaramıştır.

Jakob Bernoulli

Öldüğünde arkasında defterler dolusu matematiksel bağlantılar bırakan, böylesine verimli ve hayranlık uyandıracak derecede yaratıcı olan bu insanın sıradan insanların en çok ilgisini çeken yönü zaman zaman yaptığı hatalar olmuştur, doğal olarak. Oysa bu hatalar öyle normal insanların yaptığı gibi sayıları çarpıp bölerken yapılan dikkatsizliğin değil, sonsuzluğa kafa tutarken gözden kaçmış derin bazı ayrıntıların yol açtığı hatalardır.

Bir ölümlünün "büyüklüğü" bazen başaramadıklarının büyüklüğüyle ölçülür.

Ramanujan'ın sonsuzlukla imtihanındaki ilk kırık notu Bernoulli sayıları üzerine yaptığı bir önermeyle ilgilidir. Meraklılarına Bernoulli sayılarının Batı'da ilk kez Jakob Bernoulli tarafından, $1^n+2^n + 3^n + \cdots + k^n$ toplamının genel formülünü ararken bulunan bazı sayılar olduğunu söylemekle yetineyim. Bu sayılara isim verilmesi ise ancak daha sonraları akla hayale gelmeyen durumlarda ortaya çıktıklarının gözlemlenmesiyle olmuştur. Bernoulli öldükten sonra masasındaki notlar arasında bulunup 1713 tarihinde basımı yapıldıktan sonra tanınan bu sayılara Bernoulli A, B, C, D gibi isimler vermiş ve "bu sayıların birbirini hangi kurala göre takip ettiği kolaylıkla görülür" demiştir. O gün bu gündür bu genel kuralı gören yok! Bugün Bernoulli sayılarını $B_1, B_2, \ldots, B_n, \ldots$ şeklinde gösteriyoruz. Verilen her n için B_n sayısını nasıl hesaplayacağımızı biliyoruz ama bunun için genel bir "kapalı" formül bilinmiyor. Her Bernoulli sayısı a/b şeklinde yazılan rasyonel bir sayıdır. Bu a ve b tamsayılarının özelliklerini bulmak sayılar kuramının çetin işlerinden biridir.

Ramanujan'ın 1911 yılında yayımladığı bir makalesi Bernoulli sayıları üzerinedir. Bu makalenin bir yerinde (B_n/n) rasyonel sayısını sadeleştirdikten sonra payının daima asal bir sayı olduğunun görülebileceğini söyler. Üstelik tam da bu cümleden önce ilk kırk Bernoulli sayısını listelemiştir. Eğer yirminci Bernoulli sayısını 20'ye bölüp payına baksaydı, bu sayının 174.611 olduğunu ve asal olmadığını görecekti.

Bernoulli'nin ölümünden sonra yayımlanan çalışmasında ilk Bernoulli sayıları A, B, C, D olarak veriliyor.

... Atque si porrò ad altiores gradatim potestates pergere, levique negotio sequentem adornare laterculum licet :

Summae Potestatum

$$\int n = \tfrac{1}{2}nn + \tfrac{1}{2}n$$
$$\int nn = \tfrac{1}{3}n^3 + \tfrac{1}{2}nn + \tfrac{1}{6}n$$
$$\int n^3 = \tfrac{1}{4}n^4 + \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{1}{4}nn$$
$$\int n^4 = \tfrac{1}{5}n^5 + \tfrac{1}{2}n^4 + \tfrac{1}{3}n^3 - \tfrac{1}{30}n$$
$$\int n^5 = \tfrac{1}{6}n^6 + \tfrac{1}{2}n^5 + \tfrac{5}{12}n^4 - \tfrac{1}{12}nn$$
$$\int n^6 = \tfrac{1}{7}n^7 + \tfrac{1}{2}n^6 + \tfrac{1}{2}n^5 - \tfrac{1}{6}n^3 + \tfrac{1}{42}n$$
$$\int n^7 = \tfrac{1}{8}n^8 + \tfrac{1}{2}n^7 + \tfrac{7}{12}n^6 - \tfrac{7}{24}n^4 + \tfrac{1}{12}nn$$
$$\int n^8 = \tfrac{1}{9}n^9 + \tfrac{1}{2}n^8 + \tfrac{2}{3}n^7 - \tfrac{7}{15}n^5 + \tfrac{2}{9}n^3 - \tfrac{1}{30}n$$
$$\int n^9 = \tfrac{1}{10}n^{10} + \tfrac{1}{2}n^9 + \tfrac{3}{4}n^8 - \tfrac{7}{10}n^6 + \tfrac{1}{2}n^4 - \tfrac{1}{12}nn$$
$$\int n^{10} = \tfrac{1}{11}n^{11} + \tfrac{1}{2}n^{10} + \tfrac{5}{6}n^9 - 1n^7 + 1n^5 - \tfrac{1}{2}n^3 + \tfrac{5}{66}n$$

Quin imò qui legem progressionis inibi attentuis ensperexit, eundem etiam continuare poterit absque his ratiociniorum ambabimus : Sumtâ enim c pro potestatis cujuslibet exponente, fit summa omnium n^c seu

$$\int n^c = \frac{1}{c+1}n^{c+1} + \frac{1}{2}n^c + \frac{c}{2}An^{c-1} + \frac{c \cdot c-1 \cdot c-2}{2 \cdot 3 \cdot 4}Bn^{c-3}$$
$$+\frac{c \cdot c-1 \cdot c-2 \cdot c-3 \cdot c-4}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}Cn^{c-5}$$
$$+\frac{c \cdot c-1 \cdot c-2 \cdot c-3 \cdot c-4 \cdot c-5 \cdot c-6}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}Dn^{c-7} \cdots \text{\& ita deinceps,}$$

exponentem potestatis ipsius n continuè minuendo binario, quosque perveniatur ad n vel nn. Literae capitales A, B, C, D & c. ordine denotant coëfficientes ultimorum terminorum pro $\int nn$, $\int n^4$, $\int n^6$, $\int n^8$, & c. nempe

$$A = \frac{1}{6}, B = -\frac{1}{30}, C = \frac{1}{42}, D = -\frac{1}{30}.$$

Sonsuzluğu Bilen Adam

Ramanujan'ın hatalarını yakalamak her zaman yukarıdaki kadar kolay olmadı. Londra'dayken biraz da Hardy'nin yüreklendirmesiyle asalların dağılımıyla ilgilenmeye başladı. Bu problem, verilen bir sayıya kadar kaç tane asal sayı olduğunu bulma problemidir. Bu sayıyı tam olarak hesaplayan bir formül hâlâ bilinmiyor. Genellikle bu sayıya asimptotik olarak yaklaşık değerler veren formüller aranır. Ramanujan da *li* integrali diye bilinen bir formülün asal sayıları ne doğrulukta verdiğini araştırdı. Uzun çalışmalardan sonra *li* integralinin verdiği sayının, aranan asal sayıların miktarından her zaman biraz fazla olacağı sonucuna vardı. Ramanujan diyordu ki "verilen bir x sayısına kadar olan asalların sayısını $\pi(x)$ ile, x sayısındaki *li* integralinin değerini $li(x)$ ile gösterirsek, $li(x) - \pi(x)$ her zaman pozitif olur".

Ramanujan'ın şimdi müze olan evi

Bu iddia o sıralar Cambridge'in yıldız matematikçilerinden olan Littlewood tarafından hemen çürütüldü. Üstelik Littlewood *li(x)- π(x)* değerinin işaretinin sonsuz defa değişeceğini kanıtladı. Yani Ramanujan sonsuz defa yanılmış oluyordu. Fakat Littlewood'un kanıtı sadece böyle bir işaret değişimi olduğunu gösteriyor, ilk işaret değişiminin nerede olacağını göstermiyordu.

Ramanujan'ın sonsuzluğa kafa tutmasındaki ihtişamın boyutunu anlamamız, Littlewood'un öğrencisi Avustralyalı Stanley Skewes'ın *li(x)- π(x)* ifadesinin ilk kez nerede işaret değiştireceğini araştırmasından sonra oldu. Skewes'ın hesaplarına göre Ramanujan'ın yanılmaya başlayacağı ilk sayı 10^A civarında olacaktı, ki buradaki A sayısı 10^B sayısına ve bu B sayısı da 10^{34} sayısına eşittir. Söz konusu sayının ne kadar büyük olduğunu kavramak için isterseniz bir daha yazalım. Skewes'ın hesapladığı sayı şudur:

$10^{10^{10^{34}}} = 10^{10^{10\ldots}}$ Buraya toplam 34 sıfır yazılacak

Üstelik Skewes bu sayıyı Riemann'ın zeta fonksiyonunun sıfırlarının dağılımı hakkındaki meşhur sanısının doğru olması koşuluyla bulmuştur. Eğer bu koşulu kabul etmezseniz yukardaki 34 sayısının yerine 964 yazmanız gerekecektir.

Bu arada evrendeki atom sayısının sadece 10^{80} civarında olduğunu hatırlatırım.

Ramanujan'ın yaptığı hatayı yakalamak için ne kadar yüksek sayılara çıkmamız gerektiğine bakıp Ramanujan'a hayran olurken gözden kaçırdığımız küçük bir nokta var. O da bu hataları kısa zamanda yakalayabilen matematikçilerin olması. Peki bu son derece cüretli tahminleri yapabilen Ramanujan kendi hatalarını neden kendisi yakalayamamıştır? Hatalarını bulan matematikçilerle onun arasındaki fark nedir?

O fark eğitimdir.

Matematik Tripos Sınavları

İngiltere'de 1748 yılından 1909 yılına kadar Cambridge Üniversitesi matematik bölümünden mezun olmak için, üç yıllık bir eğitimin sonunda Tripos adı verilen bir sınava girmek gerekiyordu. Adını, ilk zamanlarda sözlü yapılan sınavlarda adayların oturduğu üç ayaklı tabureden alan bu sınav günlerce sürer ve öğrencilere yüzlerce yazılı soru verilirdi. Verilen sürede bu soruların tamamının çözülmesi beklenmez, en çok soruyu doğru çözebilenler dereceye girerdi. Puanlar açıklanmaz ama öğrencilerin sınav sonunda kaçıncı oldukları açıklanırdı. İlk on beş ya da yirmi sıraya girenler başarılı sayılır, onlara "*wrangler*" denirdi. Kelimenin "savaşçı", "kavgacı" ve "çoban" gibi değişik anlamlarının hepsi, bu günler süren sınavda başarılı olanlara yakışan birer özelliği gösterir bence. Bu sınavda birinci olmak ise o sıralar İngiltere'de eğitimli bir insanın alabileceği en yüksek unvan olarak görülürdü. Cambridge Üniversitesi'nin geçmişindeki bir yıldan söz edilirken o yıl Tripos'ta kim birinci olduysa onun adıyla anılırdı.

1890 yılında Tripos sınavında "birinci gelenin önünde" derece yapan Philippa Fawcett. (Altta)

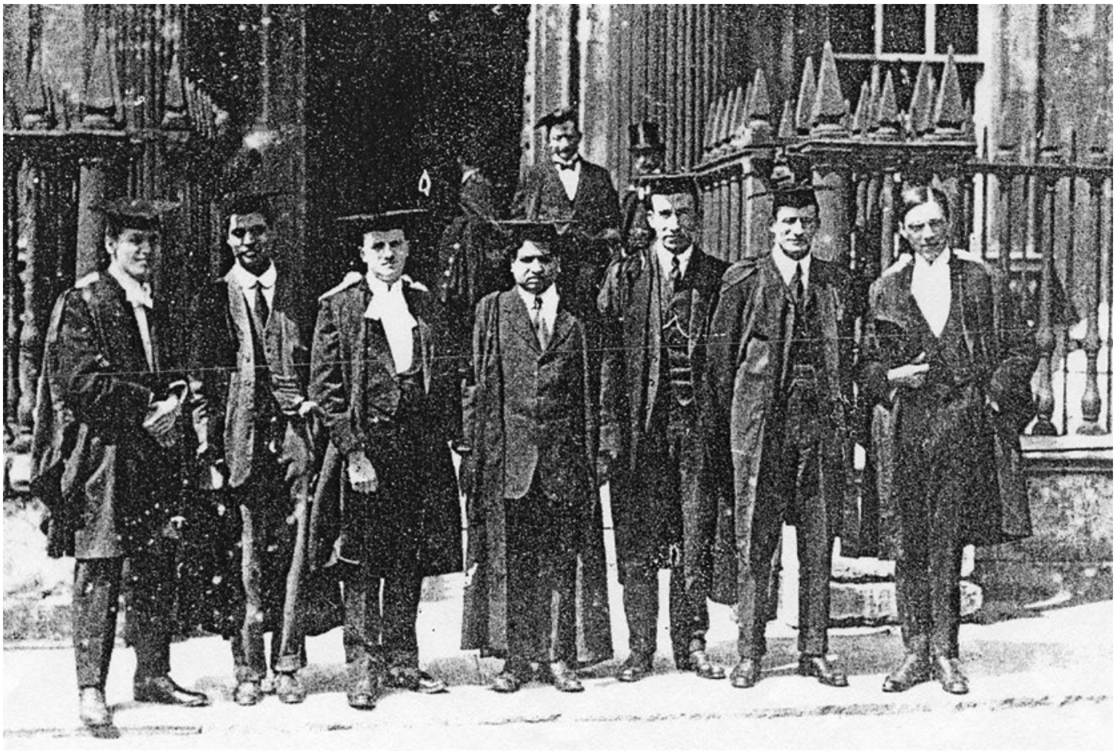
Üniversitelere kadınların kabul edilmesine karşı çıkıp "erkek öğrenciler bir kadından ders almak ister mi bakalım" diyenlere 20. yüzyılın büyük matematikçilerinden David Hilbert en sonunda sinirlenerek "beyler, burada bir üniversite yönetiyoruz, hamam işletmiyoruz" demiştir.

Bir Kitap Okudu Hayatı Değişti

Orhan Pamuk'un *Yeni Hayat* romanı "Bir gün bir kitap okudum ve bütün hayatım değişti" cümlesiyle başlar. Romanın daha ilk satırında gözlerimizi kapatıp bizim de hayatımızı değiştirecek bir kitap karşımıza çıkacak mı diye düşünüp hayallere dalmıştık. Ramanujan'ın da hayatını değiştiren, hatta kesin şekilde biçimlendiren bir kitap vardı.

Matematik dışında hiçbir konuya yeterince odaklanacak vakit ayırmadığı için üniversiteden atılan Ramanujan'a bir arkadaşı üniversite kütüphanesinden bir kitap ödünç alıp verir. Bu kitap George Shoobridge Carr'ın yazdığı *Kuramsal Matematiğin Özeti* adlı bir kitaptır. İçinde 6165 teorem, birbirleriyle ilişkilendirilerek ve seçkin bir bilimsel zevkle düzenlenerek listelenmiştir. Kitapta hiçbir ispat yoktur. Bazen ispata yönelik bazı ipuçları verilse de asıl amaç kavramlar arasındaki ilişkiyi okuyucunun kendisinin bulması ve bunları kullanabilecek düzeyde anlamasıdır. Ciddi matematiği ilk kez bu kitaptan öğrenen Ramanujan'a hayatı boyunca bir ispat nasıl yapılır öğretilememiş olmasının sorumlusu Carr'dır.

Ramanujan'ın 1903 yılında okumaya başladığı bu kitabı Carr 1856 yılında yazmaya başlamıştı. Henüz internetin icat edilmediği bir dönemde, Madras gibi bir yerde Avrupa matematiğini elli yıl geriden takip etmek bile bir şanstır elbette. Peki Carr içinde hiç ispat olmayan bu kitabı niye yazmıştı?



Ramanujan Cambridge'de

1909'dan sonra bu tür sınavların araştırmacı yetiştirilmesinde engel teşkil ettiği gözlenerek sınavların içeriği ve düzeni günün anlayışına uydurulmuş ve İngiltere'de matematiğin yeniden Avrupa'yla boy ölçüşür düzeye gelmesi sağlanmıştır. Darısı bizim üniversite giriş sınavlarının başına.

Tripos sınavlarına zaman zaman kadınlar da girmiştir ama henüz kadınların toplumdaki yerinin mutfak, yemek odası, ütü odası ve çocuk odası dörtgeni dışına çıkmadığı bir çağda kadınların bu sınavlarda elde ettiği sonuçlar erkek öğrencilerin sonuçlarından farklı bir yöntemle ilan edilmiştir. Örneğin bir erkek öğrenci on beşinci olursa on beşinci olduğu ilan edilirdi, ama bir kadın öğrenci on beşinci olursa ondan sonra gelen öğrenci on beşinci ilan edilir, kadın öğrenci için de "on dördüncüyle on beşinci arasında bir derece yaptı" denirdi. Bu saçmalığın intikamını 1890 yılında Philippa Fawcett aldı. Sonuçlar açıklandığında Fawcett'in birinci gelen öğrencinin önünde yer aldığı bildirilmişti.

Tripos sınavlarıyla ilgili herhalde en tatlı hikâye, daha sonra Lord Kelvin adını alacak olan William Thomson'un başından geçmiştir. 1845'de girdiği Tripos sınavlarında o kadar iddialıydı ki sonuçları öğrenmeye uşağını gönderirken "git bak bakalım kim ikinci olmuş" demişti. Uşağı döndüğünde verdiği cevap kısaydı: "Siz, efendim."

Bizim üniversite giriş sınavlarına benzeyen bu Cambridge bitirme sınavları tıpkı bizdeki gibi yeni bir iş kolunun doğmasına neden olmuştu: Hazırlık kursları ve özel hocalar. İşte George Shoobridge Carr, resmi bir matematik eğitimi olmadığı halde Tripos sınavlarına öğrenci yetiştiren bir özel hocaydı. Ramanujan'ın eline geçen kitabını da öğrencilerini eğitmek için 1856 yılında yazmaya başlamıştı. Tripos sınavlarına giren öğrencilerde derin matematik bilgisi değil, zaten bildiklerini kullanarak çetrefilli problemleri kısa sürede çözme yeteneği aranıyordu. Bu sınava hazırlanan öğrenciler de doğal olarak tüm teoremleri bir an önce ve akılda kalacak bir sistematikle öğrenmek zorundaydı. İşte Carr'ın kitabı bu sistematiği başarıyla veren bir teoremler toplamıydı.

Carr bu özel ders verme işinden yeterince para kazanmış olmalı ki kırk yaşına doğru "şu öğrettiğim konuları bir de ben öğreneyim" deyip Cambridge Üniversitesi matematik bölümüne yazılır. Üç yıl sonra kendisi de Tripos sınavına girer ama *wrangler* derecesi alamaz. Kitabını da bu sıralar tamamlar ve bastırır. Ramanujan'ın elindeki kitap işte bu kitaptır.

Hardy'nin Ramanujan'la çalıştığı yıllardaki bir portresi

Littlewood'un Ramanujan'la çalıştığı yıllardaki bir portresi

Hardy'nin New College'daki çalışma odası

Vazgeçmek Yok: Oyunda Kal!

Ayn Rand, daha sonraları başeseri olarak anılacak olan *Hayatın Kaynağı* kitabını bastırmak için on iki yayınevinin kapısını çaldı ve ret cevabı aldı. Ama yılmadı, "oyunda kaldı" ve sonunda kitabını basacak bir yayınevi buldu. Kitapları toplam iki yüz yetmiş beş milyon satmış olan ABD'li gerilim romanları yazarı John Grisham ilk kitabı için yirmi sekiz yayınevinden ret almıştı. Yılsaydı hem onun için hem de biz hayranları için büyük bir kayıp olacaktı. Ramanujan da çalışmalarını profesyonel matematik dünyasına duyurmak için adını bildiği düzinelerce matematikçiye mektup yazdı. Hiç olumlu cevap almadı. Yılmadı, oyunda kaldı, yazmaya devam etti. 16 Ocak 1913 tarihli Hardy'ye yazılmış o meşhur mektup ne ilk mektuptu ne de, tabii eğer cevap alamasaydı, son mektup olacaktı.

Hardy ve Littlewood bu mektuptaki olağanüstü formüllere, sayfalardan taşan hayal gücüne bakıp kıskanabilirlerdi. Üstelik bu formüller için Ramanujan'ın hiçbir ispat önermemesini kıskançlıklarına mazeret yapıp "böyle atıp tutmak marifetse biz de yapardık bunu" diyebilirlerdi. *Amadeus* filminde Salieri karakteri de tam bu duygularla hareket etmiş ve tüm vasat insanların intikamını Mozart'tan almıştı. Hardy ve Littlewood nasıl insanlardı ki Ramanujan'ı kıskanmak yerine takdir ettiler, İngiltere'ye çağırdılar ve onunla ortak çalışmalar yaptılar.

Hardy o meşhur Tripos sınavlarına yaşıtlarından bir yıl önce hazır olup girmiş ve 1898 yılının dördüncü *wrangler*'i olarak Cambridge Üniversitesi'nde kendisine haklı bir yer edinmiş, çalışmalarıyla da herkesin hayranlığını kazanmış bir matematikçiydi. Littlewood ise 1905 yılının birinci *wrangler*'i olmuş, Hardy dahil herkesin saygı duyduğu bir matematikçiydi. Littlewood'un babası 1882 yılında, dedesi de 1854 yılında *wrangler* olmuştu. Hardy ve Littlewood böylesine doygun, kendileriyle haklı olarak barışık, kimseyle artık yarışma hevesi duymayacak kadar mesleklerinde ilerlemiş insanlardı. Ramanujan bu kez mektubunu doğru adrese göndermişti. Zaten şans olmadan hiçbir şey olmaz.

(1.5) $$\int_0^\infty \frac{1+\left(\frac{x}{b+1}\right)^2}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}\cdot\frac{1+\left(\frac{x}{b+2}\right)^2}{1+\left(\frac{x}{a+1}\right)^2}\cdots dx = \tfrac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}}\frac{\Gamma(a+\frac{1}{2})\,\Gamma(b+1)\,\Gamma(b-a+\frac{1}{2})}{\Gamma(a)\,\Gamma(b+\frac{1}{2})\,\Gamma(b-a+1)}.$$

(1.6) $$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x^2)(1+r^2x^2)(1+r^4x^2)\cdots} = \frac{\pi}{2(1+r+r^3+r^6+r^{10}+\cdots)}.$$

(1.7) If $\alpha\beta=\pi^2$, then

$$\alpha^{-\frac{1}{4}}\left(1+4\alpha\int_0^\infty\frac{xe^{-\alpha x^2}}{e^{2\pi x}-1}\,dx\right)=\beta^{-\frac{1}{4}}\left(1+4\beta\int_0^\infty\frac{xe^{-\beta x^2}}{e^{2\pi x}-1}\,dx\right).$$

(1.8) $$\int_0^a e^{-x^2}dx = \tfrac{1}{2}\pi^{\frac{1}{2}} - \frac{e^{-a^2}}{2a+}\,\frac{1}{a+}\,\frac{2}{2a+}\,\frac{3}{a+}\,\frac{4}{2a+\cdots}.$$

(1.9) $$4\int_0^\infty \frac{xe^{-x\sqrt{5}}}{\cosh x}\,dx = \frac{1}{1+}\,\frac{1^2}{1+}\,\frac{1^2}{1+}\,\frac{2^2}{1+}\,\frac{2^2}{1+}\,\frac{3^2}{1+}\,\frac{3^2}{1+\cdots}.$$

(1.10) If $u=\frac{x}{1+}\,\frac{x^5}{1+}\,\frac{x^{10}}{1+}\,\frac{x^{15}}{1+\cdots}$, $v=\frac{x^{\frac{1}{5}}}{1+}\,\frac{x}{1+}\,\frac{x^2}{1+}\,\frac{x^3}{1+\cdots}$,

then $$v^5 = u\,\frac{1-2u+4u^2-3u^3+u^4}{1+3u+4u^2+2u^3+u^4}.$$

(1.11) $$\frac{1}{1+}\,\frac{e^{-2\pi}}{1+}\,\frac{e^{-4\pi}}{1+\cdots} = \left\{\sqrt{\left(\frac{5+\sqrt{5}}{2}\right)}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right\}e^{\frac{2}{5}\pi}.$$

(1.12) $$\frac{1}{1+}\,\frac{e^{-2\pi\sqrt{5}}}{1+}\,\frac{e^{-4\pi\sqrt{5}}}{1+\cdots} = \left[\frac{\sqrt{5}}{1+\sqrt[5]{\left\{5^{\frac{3}{4}}\left(\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right)^{\frac{5}{2}}-1\right\}}}-\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right]e^{2\pi/\sqrt{5}}.$$

(1.13) If $F(k)=1+\left(\frac{1}{2}\right)^2k+\left(\frac{1.3}{2.4}\right)^2k^2+\cdots$ and $F(1-k)=\sqrt{(210)}\,F(k)$, then

$$k=(\sqrt{2}-1)^4(2-\sqrt{3})^2(\sqrt{7}-\sqrt{6})^4(8-3\sqrt{7})^2(\sqrt{10}-3)^4$$
$$\times(4-\sqrt{15})^4(\sqrt{15}-\sqrt{14})^2(6-\sqrt{35})^2.$$

(1.14) The coefficient of x^n in $(1-2x+2x^4-2x^9+\cdots)^{-1}$ is the integer nearest to

$$\frac{1}{4n}\left(\cosh\pi\sqrt{n}-\frac{\sinh\pi\sqrt{n}}{\pi\sqrt{n}}\right).$$

(1.15) The number of numbers between A and x which are either squares or sums of two squares is

$$K\int_A^x\frac{dt}{\sqrt{(\log t)}}+\theta(x),$$

where $K=0{\cdot}764\ldots$ and $\theta(x)$ is very small compared with the previous integral.

Ramanujan'ın Hardy'e yazdığı mektuptaki bazı formüller.

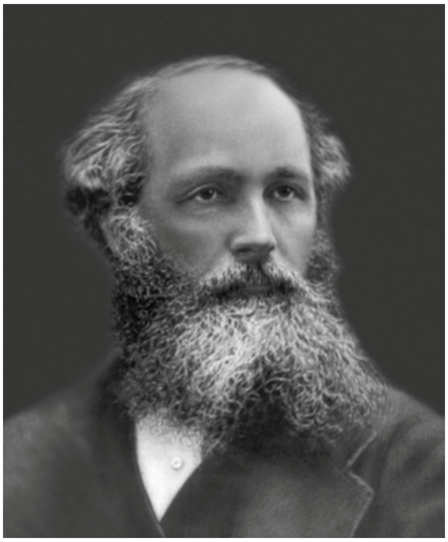
Hardy bu formüller için "bunların doğru olması gerekir, yoksa birisinin bunları uydurması mümkün değil" yorumunu yapmış ve Ramanujan'ı Cambridge'e davet etmiştir.

>>>

Ramanujan'ın Sonsuzlukla Bir Başka Sınavı

Ramanujan'dan söz ederken sadece yanıldığı birkaç noktayı anlatıp geçmek büyük haksızlık olur. Yazımızı bitirmeden onun parçalanış sayıları hakkında bulduğu sonuçlardan söz edelim. Bir doğal sayı başka doğal sayıların toplamı olarak kaç değişik şekilde yazılabilir sorusunun cevabı, o doğal sayının parçalanış sayısıdır. Örneğin 4 doğal sayısını 1+1+1+1, 1+1+2, 1+3, 2+2 ve 4 şeklinde 5 değişik şekilde yazabiliriz ve bu durumu $p(4)=5$ diyerek özetleriz. Buradaki soru, herhangi bir n doğal sayısı verildiğinde n'in parçalanış sayısının, yani $p(n)$'in kaç olduğudur. Evet, matematik böyle eğlenceli işlerle dolu, zevkli bir uğraştır. Matematik yapanlara üste para verilmesine hep şaşmışımdır, ama kendi çıkarımla çelişeceği için de hiç itiraz etmemiş, hep sessiz kalmışımdır!

Elbette bir n sayısı verildiğinde oturup sabırla $p(n)$ sayısını hesaplayabilirsiniz, ama bilim bu değildir ki. Bilim, yapılacak bir işi yapmadan, eğer yapsaydık ne bulurduk sorusuna cevap verebilme sanatıdır. Hava tahminleri onun için büyük bir bilimsel uğraştır. Yoksa hepimiz yarını bekler, yağmur yağıp yağmadığını görürdük. Ama Normandiya Çıkarması için en uygun günü önceden bilmektir bilim. Satürn'ün halkalarının teleskoptan göründüğü gibi tek parça diskler olmadığını, 1980 yılında *Voyager 1* uzay sondasının çektiği fotoğraflar sayesinde gözlerimizle görmeden 123 yıl önce James Clerk Maxwell zaten bunu göreceğimizi hesaplamış ve bize söylemişti. Bir doğal sayının parçalanış sayısını da teker teker bütün parçalanışları yazarak hesaplamaya kalkmak da en hafif ifadeyle ayıptır!



James Clerk Maxwell

Var olan ve bizim bulabileceğimiz tüm "kapalı" formüller sayılabilir sonsuzlukta, buna karşılık formülünü aradığımız tüm fonksiyonlar sayılamaz sonsuzluktadır. Bu durumda bazı fonksiyonlar için kapalı formüller olmayacaktır. Parçalanma sayısı $p(n)$ için de belki böyle bir formül yoktur. Bu güne kadar kimsenin, Ramanujan dahil, böyle bir formülle ortaya çıkamamış olmasının bir nedeni de bu olabilir.

Ramanujan $p(n)$ sayısının kaç olacağını veren bir formül yazamadıysa da, bilimsel yaklaşıma uygun olarak, eğer hesaplarsak $p(n)$ sayısının nasıl bir sayı olacağı yönünde sonuçlar ileri sürmüştür. Bu çılgın formüllerden birini şöyle anlatabiliriz. Eğer n sayısı 5'e bölündüğünde 4 artıyorsa, $p(n)$ sayısı 5'e tam olarak bölünür. Bu yine sonsuzluğa kafa tutan bir formüldür. Örneğin $p(4)=5$ olduğunu derhal hesaplayabilirsiniz ve "Ramanujan haklıymış, ama ne var bunda" diyebilirsiniz.

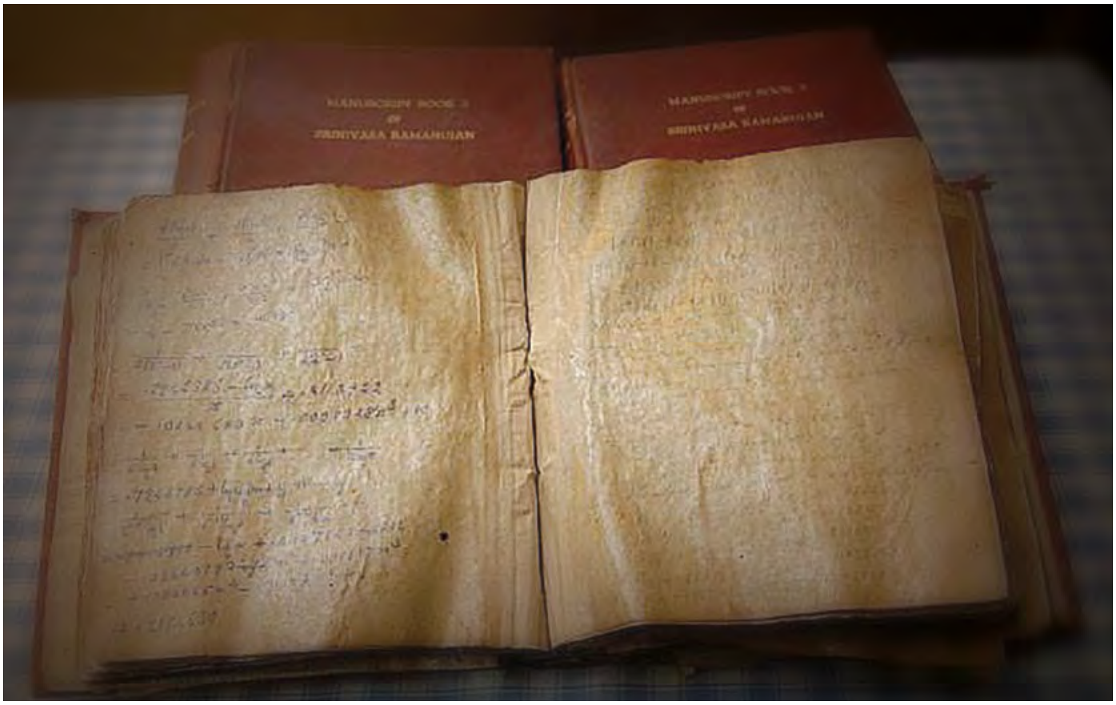
Biraz sabrınız varsa $p(14)=135$ bulup bu sayının da 5'e bölündüğünü gözlersiniz. Ama ne kadar sabırlı olursanız olun $p(254)$ sayısını elle hesaplayamazsınız. Bu sayı 313.891.991.306.665'tir ve 5'e bölünür. Bu sayıyı bilgisayarda hesapladım, ama bilgisayara girebileceğim ve hesaplatabileceğim sayıların da bir sınırı var. Çok daha büyük n sayıları için $p(n)$ sayısını hesaplayabilecek ne bilgisayar ne de zaman bulabileceğiz. Ama Ramanujan diyor ki "eğer hesaplayabilseydiniz, n sayısı 5'e bölündüğünde 4 artıyorsa, $p(n)$ sayısı 5'e tam olarak bölünecektir". İşte matematiği zevkli kılan yönlerden biri insan beyninin şu küçücük gezegende yaşayıp da evrenin sınırlarını aşan bilgiler üretebilmesidir.

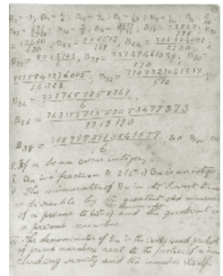
Ramanujan'ın $p(n)$ sayısının kaça bölünebileceği konusundaki formüllerinin yanı sıra bir de Hardy ile yazdığı birkaç asimptotik formül vardır. Bu formüller "n sayısı çok çok büyük olduğunda, $p(n)$ sayısı yerine bizim verdiğimiz şu kolay formülü kullanırsanız bulacağınız sayı $p(n)$ sayısına yakın olacaktır" der. Buradaki yakınlık kavramı, yapılan hatanın yüzdesinin n sayısı büyüdükçe sıfıra yaklaşacağı anlamındadır.

$$\boxed{p(n) \sim \frac{e^{\pi\sqrt{2n/3}}}{4n\sqrt{3}}}$$

Ramanujan'ın asimptotik formülü. Büyük n sayıları için sağ tarafı hesaplamak p(n) sayısının kendisini hesaplamakla kıyaslanmayacak kadar kolaydır.

Velhasıl sonsuzluk kimseden korkmamıştır Ramanujan'dan korktuğu kadar.





Ramanujan'ın defterlerinden 1957 yılında yapılan ve daha sonra Springer Yayınevi tarafından dağıtılan ilk tıpkı basımdan bir sayfa. Bu sayfada Ramanujan'ın Bernoulli sayıları üzerine yaptığı çalışmaları görüyoruz.
Kaynak: Notebooks of Srinivasa Ramanujan, Springer-Verlag, 1984

Madras Üniversitesi Kütüphanesinde saklanan Ramanujan'ın bu defterleri (solda), Ramanujan'ın doğumunun 125. yılı nedeniyle Roja Muthiah Kütüphanesi tarafından mikro filme aktarılmıştır.
Fotoğraf: V. Ganesan

Her Güzel Şeyin Bir Sonu Vardır

Ramanujan İngiltere'de vereme yakalanır. O sıralar daha verem aşısı üzerine yeni yeni bazı başarılı çalışmalar yapılmaktadır ama henüz bu hastalığın bir tedavisi yoktur. Ramanujan 1920 yılında 32 yaşında veremden öldüğünde verem tedavisinde kullanılan ilk ilaç olan streptomisinin bulunmasına daha yirmi altı yıl vardı. Öldüğünde arkasında formüllerle dolu defterler bıraktı. Bu defterlerde o formüllerin hiç birinin ispatı yok elbette. Günümüzde sayılar kuramı konusunda çalışanlar bu formüllerin doğruluğunu araştırmakla meşgul. Bu formüllerin doğru olup olmamasından daha önemli bir konu da bu formüllerin olağanüstü derecede özgün olması, hayranlık uyandıracak bir hayal gücü sergilemesidir. İnsan beyninin gücünün nerelere kadar uzanabileceğini şaşkınlık ve biraz da korkarak izlersiniz bu formüllere bakarken.

Acaba Ramanujan doğru düzgün okullara gidebilse ve standart bir matematik eğitimi alabilseydi neler yapardı? Her ne kadar tarih hipotezlere dayanan bir bilim değilse de insan yine de soruyor işte. Bir yanda eğitilmiş bir Ramanujan'ın matematiğe çağ atlatacağı ihtimali, öte yanda da eğitimin bilinen yan etkilerinden biri olarak yaratıcılığının ölmesi durumunda şu haliyle elde etmiş olduğu muhteşem sonuçların hiç birini aklından dahi geçiremeyebileceği ihtimali var. Tarihi yeniden düzenlemek elimizde olsaydı bu riske girer miydik?

Büyükler "her işte bir hayır vardır" der. Kim bilir, belki Ramanujan konusunda da öyledir.

Hindistan'ın Kalküta şehrindeki Birla Endüstri ve Teknoloji Müzesi bahçesindeki Ramanujan büstü.

Poster Kaynak:
http://www.math.tifr.res.in/~publ/poster.pdf

Kaynaklar
- Kanigel, R., *The Man Who Knew Infinity,* Washington Square Press, 1992.
- Forfar, D. O., "What became of the Senior Wranglers?", *Mathematical Spectrum*, Cilt 29, Sayı 1, s. 1-4, 1996.
- Hardy, G. H., Aiyar, P. V. S. ve Wilson, B. M. (Editör), *Collected Papers of Srinivasa Ramanujan*, Cambridge University Press, 1927.
- Berndt, B. C., Choi, Y-S., Kang, S-Y., "The Problems Submitted by Ramanujan to the Journal of the Indian Mathematical Society", *History of Mathematics*, Cilt 22, s. 215-258, 2001.
- Carr, G., S., *A Synopsis of Elementary Results in Pure Mathematics,* Francis Hodgson, Cambridge, 1886.