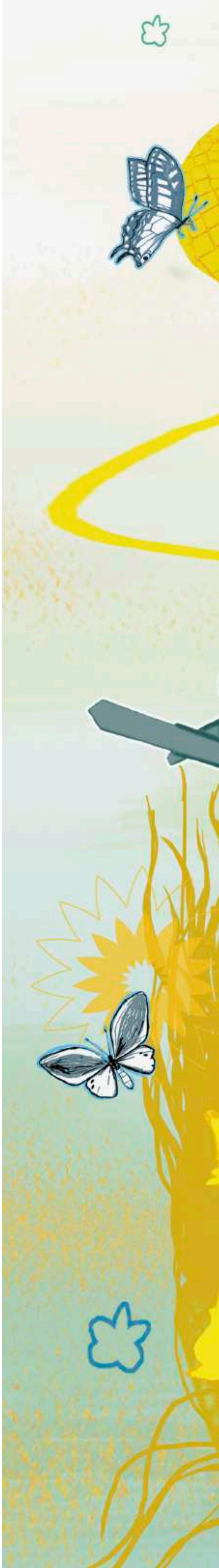
Karl Weierstrass

ANALİZİN BABASI

Prof. Dr. Ali Sinan Sertöz [*Bilkent Üniversitesi - Fen Fakültesi - Matematik Bölümü*

Puanı ziyan olmasın diye hiç ilgi duymadığı bölümleri tercih eden öğrenciler tanıdım. Kendisi istemediği halde ailesinin istediği bölümleri seçen öğrenciler tanıdım. Bunların çoğu büyük bir iyi niyetle derslerini çalışıp ödevlerini yapıp vasat bir öğrenci olarak mezun olur ve işsizler ordusuna katılır. Girdikleri bölümde mutlaka o konuya büyük bir aşkla ilgi duyan, zamanının tümünü o konuya adayan, o konuda daha fazla şey öğrenmeyi eğlence olarak algılayan öğrenciler vardır. Daha üçüncü sınıfta staj yaparken o öğrenciler iş teklifi alır, mesleklerinde mutlu olur hatta çok para kazanırlar. Liseden mezun olan gençler onların başarı öykülerine bakarak o meslekleri puanları ziyan olmasın diye ya da aileleri onların iyiliğini istediği için seçmeye devam eder. Bu kısır döngü sürer gider. Bu olguya en şiddetli şekilde isyan etmiş kişi, bugün analizin babası olarak anılan Karl Weierstrass'tır.



Karl Weierstrass (1815-1897)

Babaya İsyan

Yüzü bir karış asık, bir elinde üniversite giriş puan belgesi öbür elinde mühendislik bölümlerinin geçen yıl öğrenci kabul ettiği en düşük puanları gösteren cetveller. Büyük bir coşkuyla hayatının planlarını yapması gereken genç kıza şu anda neden mutsuz olduğunu soruyorum. Babası mutlaka bir mühendislik okumasını istiyormuş. Sen ne okumak isterdin diyorum. Sahne sanatları diyor. Zaten mühendislik yapmayacakmış.

Diplomasını babasına verip dört yıl gecikmeyle hayalinin peşinden koşacakmış. Babayla kızı arasına girilmeyeceği için susuyorum.

O öğrenci belki şimdi hayranlıkla izlediğimiz filmlerin senaryolarını yazıyor ve baş rollerinde oynuyordur.

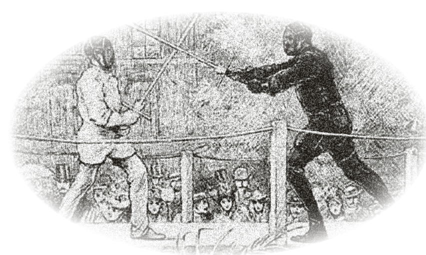
Sonunu bildiğim en tatlı isyan ise müzisyen bir arkadaşıma ait. Üniversiteden mezun olur olmaz babasına mühendislik diplomasını verip derhal konservatuvara yazılmış. Şimdi uluslararası tanınmışlığı olan saygın bir sanatçı.

Öte yandan istemediği bir konuda eğitim alması için üniversiteye gönderilen genç Weierstrass'ın babasına isyanı biraz farklı olmuş.

Eskrim, Eğlence ve Matematik

Karl Weierstrass'ın babası Prusya yönetiminde görevli, Karl'dan başka üç çocuğu daha olan, sert ve otoriter bir insandı. En büyük çocuğu Karl için devlet katında bir görev planlamıştı. Bu nedenle finans, hukuk ve ekonomi konularını içeren bir eğitim alması için oğlunu 1834'te Bonn Üniversitesi'ne kaydettirdi. O sıralar on dokuz yaşında olan Karl bu konulara hiç ilgi duymuyordu. Çekindiği için babasına hiçbir şey söylemedi. Dört yıllık üniversite hayatında derslere pek uğramadı.

Zamanının çoğunu o sıralar hâlâ tehlikeli bir spor olan eskrimle geçirdi. Diğer zamanlarda onu kafelerde arkadaşlarıyla sohbet ederken bulmak mümkündü. Babası duymasın diye üniversitede verilen matematik derslerini resmi olarak takip etmedi, ama kendisi gizli gizli matematik öğrendi. Laplace ve Jacobi gibi matematikçilerin kitaplarını okudu. Üniversitedeki son yılında da karıştırdığı matematik dergileri sayesinde ileride hayatının problemi olacak olan Abelyen fonksiyonlarla tanıştı.



Dersleri takip etmediği için mezuniyet sınavlarına girmesine gerek yoktu. Babasına verecek bir diploması olmadan eve döndü.

Tek Bir Öğretmen Yeter

Öğrenci olarak pek çok öğretmenin dersine girer çıkarız. En iyimser ifadeyle hemen hemen hepsi görevini yapma gayreti içinde olan insanlardır. Derken bizi diğer öğretmenlerimizden çok farklı şekilde etkileyen bir öğretmene rastlarız ve hayatımız değişir. Weierstrass için de bu öğretmen Christoph Gudermann olmuştur.

Bonn Üniversitesi'nden derece almadan eve döndükten sonra öğretmen olmak için yazıldığı Münster Akademisi'nde Weierstrass matematik araştırmalarına yön verecek fırsatı Gudermann'ın derslerinde buldu. O sıralar matematik dünyasında çok gözde olan bir araştırma konusunu ilk kez düzenli bir ders formatı içinde anlatanın Gudermann olduğu söylenir. Eliptik fonksiyonlar üzerine kendisi araştırma yapmaya devam ederken bir yandan da gelecek kuşakların onun yapamadıklarını gerçekleştirebileceği umuduyla Gudermann bilgilerini öğrencilerine aktarıyordu.

Her öğretmenin hayali sınıfında anlattıklarını alıp çok ötelere götürebilecek bir öğrencinin olmasıdır. Bu sene olmazsa seneye mutlaka! Gudermann tüm öğretmenlerin bu ortak hayalinin boş olmadığının somut bir kanıtı olagelmiştir.

Gudermann'ın da Gauss'tan feyz almış bir matematikçi olduğunu hatırlarsak Weierstrass'ın aldığı matematik eğitiminin sadece bilgi birikimi değil kültür aktarımı boyutu olduğunu da görürüz.

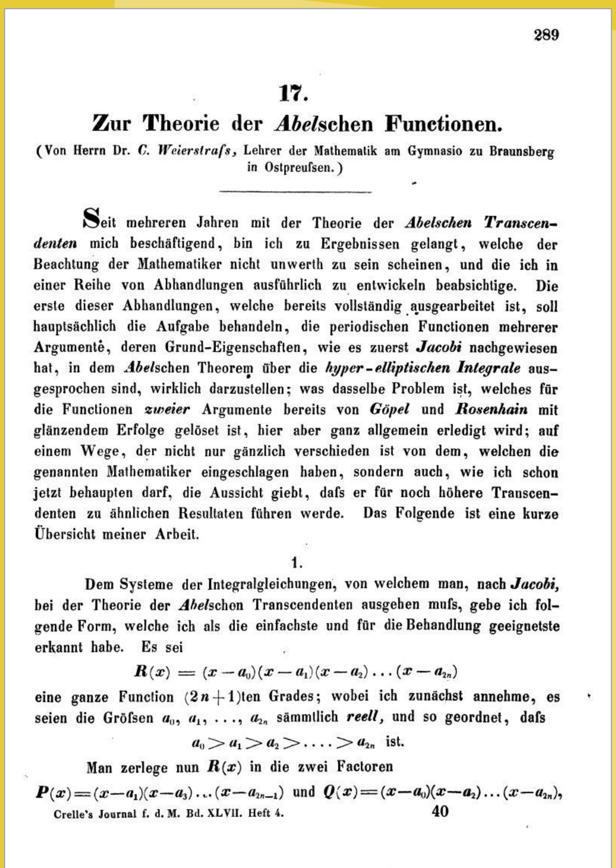
Artık Weierstrass matematik dünyası için hazırdı ama matematik dünyasından çok uzaktaydı.

Kim Bu Adam

Weierstrass 1848'de Braunsberg Katolik Lisesi'nde öğretmen olarak çalışmaya başladığında kafasında büyük fikirler olan ama matematik dışında pek çok konuda da ders vermekle yükümlü bir öğretmendi. Her şeye rağmen bulduğu her boş vakitte kafasındaki matematik problemleriyle uğraşıyordu. Bu problemler bilinen yöntemlerin değişik hesaplarda kullanılması gibi sıradan problemler değildi. Yeni fikirler üretiyor, bu fikirleri bir düzene sokmaya çalışıyordu.

Bazen de araştırmalarına öylesine kapılıyordu ki lisedeki görevine gitmeyi unuttuğu bile oluyordu. Bu yoğun çalışmaların sonunda Gudermann'dan öğrendiği eliptik fonksiyonlar kavramını genişletip Abelyen fonksiyonlar üzerine geliştirdiği fikirlerini nihayet bir makale olarak yayımlatmayı başardı.

Kurucusu Crell'in dergisi olarak da anılan *Journal für die reine und angewandte Mathematik* dergisinin 1854'te çıkan 47. cildinde yayımlanan yedi sayfalık bu makale matematik dünyasında sansasyon yarattı. Adı sanı bilinmeyen, küçük bir kasaba okulunu adres olarak veren ve adı daha önce hiç duyulmamış birisi matematik disiplinine çok ciddi bir katkı yapıyordu bu makalede.



289

17.

Zur Theorie der *Abel*schen Functionen.

(Von Herrn Dr. *C. Weierstrafs*, Lehrer der Mathematik am Gymnasio zu Braunsberg in Ostpreufsen.)

Seit mehreren Jahren mit der Theorie der ***Abelschen Transcendenten*** mich beschäftigend, bin ich zu Ergebnissen gelangt, welche der Beachtung der Mathematiker nicht unwerth zu sein scheinen, und die ich in einer Reihe von Abhandlungen ausführlich zu entwickeln beabsichtige. Die erste dieser Abhandlungen, welche bereits vollständig ausgearbeitet ist, soll hauptsächlich die Aufgabe behandeln, die periodischen Functionen mehrerer Argumentè, deren Grund-Eigenschaften, wie es zuerst ***Jacobi*** nachgewiesen hat, in dem ***Abel***schen Theorem über die ***hyper-elliptischen Integrale*** ausgesprochen sind, wirklich darzustellen; was dasselbe Problem ist, welches für die Functionen ***zweier*** Argumente bereits von ***Göpel*** und ***Rosenhain*** mit glänzendem Erfolge gelöset ist, hier aber ganz allgemein erledigt wird; auf einem Wege, der nicht nur gänzlich verschieden ist von dem, welchen die genannten Mathematiker eingeschlagen haben, sondern auch, wie ich schon jetzt behaupten darf, die Aussicht giebt, dafs er für noch höhere Transcendenten zu ähnlichen Resultaten führen werde. Das Folgende ist eine kurze Übersicht meiner Arbeit.

1.

Dem Systeme der Integralgleichungen, von welchem man, nach ***Jacobi***, bei der Theorie der ***Abel***schon Transcendenten ausgehen mufs, gebe ich folgende Form, welche ich als die einfachste und für die Behandlung geeignetste erkannt habe. Es sei

$$R(x) = (x-a_0)(x-a_1)(x-a_2)\dots(x-a_{2n})$$

eine ganze Function $(2n+1)$ten Grades; wobei ich zunächst annehme, es seien die Gröfsen $a_0, a_1, \dots, a_{2n}$ sämmtlich ***reell***, und so geordnet, dafs

$$a_0 > a_1 > a_2 > \dots > a_{2n} \text{ ist.}$$

Man zerlege nun $R(x)$ in die zwei Factoren

$$P(x) = (x-a_1)(x-a_3)\dots(x-a_{2n-1}) \text{ und } Q(x) = (x-a_0)(x-a_2)\dots(x-a_{2n}),$$

Crelle's Journal f. d. M. Bd. XLVII. Heft 4. 40

Weierstrass'ı bir gecede şöhrete taşıyan 1854 tarihli makale

Sofya Kovalevskaya (1850-1891)

Tek Bir Makale ve Sonrası

Weierstrass tek bir çalışmasıyla matematik dünyasına girmiş oldu. Königsberg Üniversitesi ona hemen fahri doktora derecesi verdi. Prusya Eğitim Bakanı'nın da teşvikiyle çalıştığı okul ona bir yıl araştırma yapma izni verdi. İki yıl sonra yazdığı devam makalesinden sonra Berlin Üniversitesi'nden profesörlük teklifi aldı ve kabul etti.

O yıl Osmanlı'da Mehmet Nadir doğuyordu. Çalışmaları yurt dışında kabul gören ilk Türk matematikçi olarak bilinen Mehmet Nadir Bey daha sonra Darüşşafaka Lisesi'nde öğretmenlik yaparken kendisinden sadece sekiz yaş genç Salih adında bir matematik yeteneğini keşfedecek ve o genç mezun olana kadar Darüşşafaka'da kalıp ona yol gösterecekti. Yatılı okul arkadaşlarının taktığı lakabı adına ekleyerek hayatı boyunca kullanacak olan bu genç yetenek Salih Zeki Beydi.

Biz Berlin'e dönersek, Weierstrass profesörlük işini kabul ettikten sonra çok yoğun bir çalışma temposuna girdi. Berlin'deki derslerine dünyanın her tarafından öğrenciler geldi. Derslerden sonra öğrencileriyle sohbetini kafelerde ve lokantalarda sürdürmesiyle ve en çok da hesabı mutlaka kendisinin ödemesiyle çok sevildi.

Bu yoğun tempoya vücudu fazla dayanamadı. Derslerini artık oturarak veriyor, formülleri tahtaya öğrencilerine yazdırıyordu. Buna rağmen bu müthiş beyinden yararlanmak isteyen öğrenciler derslerine rağbet etmeye devam ediyordu.

Weierstrass hiç evlenmedi. Elli beş yaşlarındayken sınıfına yirmi yaşında olağanüstü yetenekli bir kız öğrenci geldi. Kadınların üniversitede ders izlemesinin bile özel izne tabi olduğu o dönemde Weierstrass bu genç kadınla özel olarak ilgilendi. Aralarındaki ilişkinin genç kadının matematik yeteneklerinin ötesine geçtiğini tahmin etmek zor olmasa gerek. Çalışmalarıyla tamamen başka bir yazının konusu olacak bu genç kadın Sofya Kovalevskaya idi. Dostlukları mektuplarla sürdü. Kovalevskaya genç yaşta ölünce Weierstrass elindeki tüm mektupları yaktı.

Hayatının son üç yılını tekerlekli sandalyede geçiren Weierstrass her ne kadar matematik dünyasına tek bir makale ile girdiyse de zamanla matematik dünyasının en verimli yazarlarından biri oldu. Toplu eserleri tam yedi cildi dolduruyor. Matematik literatürüne kendi adıyla anılan pek çok kavram hediye etti. Katkılarının çoğunu açıklamaya kalkmak teknik ayrıntılarla yazıyı boğmamıza neden olacak, ama ona "analizin babası" unvanını kazandıran birkaç çalışması fazla ayrıntıya girmeden anlatılabilir.

Sürekli Fonksiyon Derken

Her fen ve mühendislik öğrencisi üniversitenin ilk yılında kalkülüs yani analize giriş dersleri alır. Bu derste ilk önce sürekli fonksiyonlar tanımlanır ve özellikleri incelenir. Daha sonra öğrenilecek pek çok karmaşık kavramın altında yatan bu süreklilik tanımı öğrenciye o kadar doğal gelir ki zahmet edip bu kavram niye tanımlanıyor diye şaşar. Oysa bu konu Weierstrass zamanında henüz araştırma düzeyinde, hatta pek çok matematikçinin yanlış bildiği bir kavramdı. Konuya açıklık getiren ve kendi adıyla anılan "en ilginç" sürekli fonksiyonu bulan Weierstrass olmuştu.

Tek reel değişkenli bir fonksiyonun grafiğini bir kalemle çizerken elinizi kâğıttan kaldırmanız hiç gerekmiyorsa o fonksiyon süreklidir.

Bu tanımı kullanarak pek çok fonksiyonun sürekli olup olmadığını anlarız ama ucunda insan hayatı olan bir konuda hesap yaparken böyle bir tanıma ne kadar güvenebilirsiniz? Kalem kâğıttan kalkmadan grafik çizmek tam olarak ne demek?

Fizikçiler size kalemin zaten kâğıda değmediğini, elektron bulutlarını, temel parçacık etkileşimlerini filan anlatmaya başlayacaktır.

Demek ki süreklilik kavramını kalem kâğıt gibi malzemeler kullanmadan açıklamanın bir yolunu bulmamız gerekiyor.

Neden Gerekli

Her soyut kavramı açıklamaya başladığınızda mutlaka sınıfın arka sıralarından "bu ne işimize yarayacak" sorusu gelir. Süreklilik gibi bir kavramın önemini ve analizdeki yerini anlatma işini biz genellikle zamana yayarız, çünkü öğrenci ancak çeşitli sürekli ve süreksiz fonksiyon örnekleri gördükçe ve bunlarla hesap yaptıkça bu kavramın nasıl analizin kalbinde yer aldığını görür. Ona zaman tanımak gerekir.

Sürekli fonksiyonları tanıma gereğini fazla derine inmeden açıklamak da mümkün. Fen ve mühendislik bilimlerinde ilgilenilen doğa olayının veya malzemenin matematiksel bir modeli kurulur. Bu model yardımıyla olabilecek durumlar önceden incelenir. Çok sık rastlanan bir problem de olayı formüle ettiğimiz fonksiyonun alabileceği en küçük ve en büyük değerleri önceden bulma problemidir. Bir fonksiyon kapalı bir aralıkta tanımlı ve sürekli ise mutlaka en küçük ve en büyük değerleri vardır. İkinci aşama var olduğunu bildiğimiz bu değerleri hangi tekniklerle bulacağımız konusudur. Genellikle bu teknikler cebirsel ve algoritmik yöntemler içerir ve fazla düşünmeden uygulasanız bile size bazı sayılar verir.

Bulduğunuz bu sayıların bir anlamı olup olmadığına karar vermek sizin sorumluluğunuzdadır. En küçük değeri olmayan bir fonksiyon için "en küçük değerini ben hesapladım, beş çıktı" demeniz yanlış, anlamsız ve belki de tehlikelidir. İşte bu aşamada karar vermek için fonksiyonunuzun özelliklerini doğru teşhis etmeniz, fonksiyonunuzun uygulayacağınız teknikleri kabul edip etmeyeceğini bilmeniz gerekir.

Fonksiyonun sürekli olup olmadığını doğru tespit etmek o yüzden gereklidir.

$\varepsilon\ \delta$

Epsilon ve Delta

Süreklilik kavramını veren ana tanım epsilon ve delta sembolleriyle anlatılagelmiştir. Bu tanımı sınıfta her verdiğinizde arka sıradaki o ses "hocam bunlar sınavda çıkacak mı" diye sorar. Matematik öğrencilerinden başka öğrencilerin pek ilgisini çekmeyen bu tanımı ben burada anlatmayacağım. Yani sınavda çıkmayacak!

Yine de "kalemi kâğıttan kaldırmadan çizebilirim" yerine epsilon ve delta ile nasıl bir yaklaşım getirildiğine, matematiksel düşüncenin güzelliğini yakalayabilmek umuduyla kısaca bakabiliriz.

Önce bir fonksiyonun bir aralıktaki sürekliliğine bakmanın zorluğunu kabul edip sadece bir noktada sürekli olmasından ne istediğimize bakalım.

Fonksiyonla bir anlaşma yapıyoruz. Ben senin bu nokta civarında alacağın değerleri istediğin gibi almana izin vereceğim ama fazla "dağıtma" diyoruz ve açıklıyoruz. O nokta etrafında alacağın değerler arasındaki fark için bir üst sınır belirleyelim, hatta her aklına gelen üst sınırı belirlemene izin veriyoruz diyelim. Bu üst sınır epsilon ile gösterilir. Eğer fonksiyon o noktada sürekli ise o zaman bir delta mesafesi buluruz, öyle ki o merkez noktasının iki tarafında o noktadan uzaklığı deltayı geçmeyen her noktada fonksiyonun aldığı değer o merkez noktada aldığı değerden çok farklı olmayacaktır; aradaki fark epsilondan küçük olacaktır. Anlaşmamız bu kadar basit.

Yani fonksiyona o nokta etrafında sıçrama yapabilirsin, ama sıçramanın büyüklüğü baştan rastgele tespit ettiğimiz değeri geçmesin diyoruz. Oysa bir süreklilik kavramını kalemle anlatmaya çalışırken kalemi kâğıttan hiç kaldırmayacağız, dolayısıyla hiç sıçrama olmayacak diye anlatıyorduk. Şimdi ise fonksiyona istediğin gibi sıçrayabilirsin diyoruz. Buradaki can alıcı kısıtlama "baştan rastgele tespit ettiğimiz" lafında gizlidir. Ben fonksiyona istediğim kadar küçük sıçrama izni verebilirim. Dikkatli bakılırsa bu sıçrama izni aslında bağlayıcı. Başta belirlediğimiz epsilondan fazla sıçrama yapamazsın diyoruz. Eğer fonksiyon gerçekten bir miktar sıçramak isterse biz o miktardan daha küçük bir epsilonla gelip bak bundan fazla sıçrayamazsın diyeceğiz.

Sonuç olarak fonksiyona istediğin gibi sıçrarsın demekle aslında hiç sıçramayacaksın diyoruz ki bu da süreklilikten tam olarak anladığımız sonuçtur. Sıfır sıçrama yap komutunun katılığını, ne yaparsan yap ama ben kontrol edeceğim sözüyle takip edilebilir ve uygulanabilir hale getiriyoruz ve aynı sonucu elde ediyoruz.

Analizin Babası

Her anne çocukları üç veya beş yaşındayken babanın yanında "Sizi dünyaya ben getirdim. Babanızın hiçbir rolü yok. O eve gelip giden bir adam" diye başlayan bir şaka yapmayı denemiştir mutlaka. Çocuklar bir açıklama bekleyerek babaya bakarken baba da yüzünde sessiz bir tebessümle anneye bakar. Weierstrass'ın analizin temel kavramlarına yaptığı katkılar da yukarıdaki sürekli fonksiyon örneğinde olduğu gibi konunun can alıcı kuramsal alanlarında gizli olduğu için ancak analizde belli noktalar aşıldıktan sonra takdir edilebilir. Biz yine de bu süreklilik kavramından devam edip birkaç katkısından daha söz edelim.

İki sürekli fonksiyonu toplarsak yine sürekli bir fonksiyon elde edeceğimizi kalem kâğıtla deneyerek hemen görebilirsiniz. İki tanesini toplamayı kabul ettiyseniz yüz milyon sürekli fonksiyonu toplarsak yine sürekli bir fonksiyon elde edeceğimize de hiç şüphe duymadan inanırsınız. Haklısınız. Fakat sonsuz tane sürekli fonksiyonu toplayıp anlamlı bir fonksiyon elde edebilsek bu elde ettiğimiz fonksiyon sürekli olur mu? Analiz kitaplarındaki sonsuz toplamlar konusu bunun her zaman böyle olmayacağını gösteren örneklerle başlar. Oysa Weierstrass'ın zamanında bu örnekler henüz ders kitaplarında değil araştırma yapan matematikçilerin tartıştığı ortamlardaydı.

Bazen de sonsuz tane sürekli fonksiyonu toplarsak yine sürekli bir fonksiyon elde ederiz. Bu hangi şartlar altında gerçekleşir?

Bu soruya cevap olacak şartı ilk kez Christoph Gudermann formüle etmiştir. Weierstrass hocasından öğrendiği bu kavramı ilerletip yukarıdaki soruya cevap vermiştir. Düzgün yaklaşım olarak adlandırılan bu kavram fonksiyonların tüm noktalardaki sıçramalarını bir seferde ve sıçrama yapılan noktalara bağlı olmadan kontrol etme özelliğidir. Sınavda çıkmayacağı için ayrıntıya girmiyorum, ama Weierstrass'ın bu kavramı kullanarak oluşturduğu ve bugün kendi adıyla anılan o meşhur fonksiyondan söz edeceğim.

Weierstrass Fonksiyonu

Sürekli fonksiyonlar güzeldir ama onlarla hesap yapmak her zaman kolay değildir. Hesap yapması kolay olan sürekli fonksiyonlar genellikle grafiklerinde "yumuşak" eğriler olan fonksiyonlardır. Bunların grafiklerine her noktada teğet çizebilirsiniz. Eğer grafikte sivri bir köşe varsa oraya teğet çizemezsiniz. Elinize kalem alıp grafiğinin hiçbir noktasına teğet çizemeyeceğiniz bir fonksiyon oluşturmaya çalışın. Elbette mümkün olduğu kadar çok sivri nokta çizmek isteyeceksiniz ama komşu sivri noktalar arasında mutlaka teğet çizilebilecek yumuşak eğimli bir eğri olacak. Oralara da sivri köşeler koymaya çalışacaksınız.

Bu işin içinden çıkamayacağınızı kabul ettiğiniz an Weierstrass'ı takdir etme noktasına geldiniz demektir.

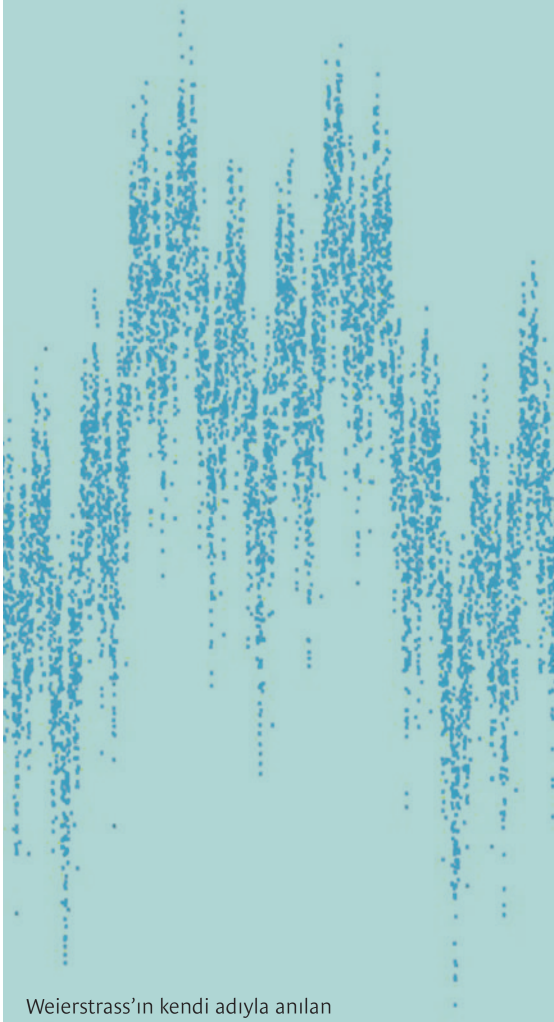
İlk önce grafiğinin sadece bir tek yerinde sivri noktası olan bir sürekli fonksiyonla başlayalım. Sonra buna grafiğinin sadece iki noktasında sivri köşesi olan bir sürekli fonksiyon ekleyelim. Evet, tahmin ettiğiniz gibi sivri köşe sayısını gittikçe artırarak sürekli fonksiyonları birbirine ekliyoruz. Fonksiyonların büyüklükleri gittikçe daha küçük alınarak bu sonsuz toplamın kendisinin de bir fonksiyon olması sağlanabilir. Şimdi gözünüzü kapatıp hayal ederseniz elde edilen bu fonksiyonun hiçbir noktasına teğet çizemeyeceğimize ikna olursunuz.

Biraz önce tarif ettiğimiz gibi hiçbir noktasına teğet çizilemeyen bir fonksiyon bulduk, ama bu fonksiyon sürekli mi yoksa atlayıp sıçrayan, dolayısıyla da teğet çizilemediği için bizi şaşırtmayan bir fonksiyon mu?

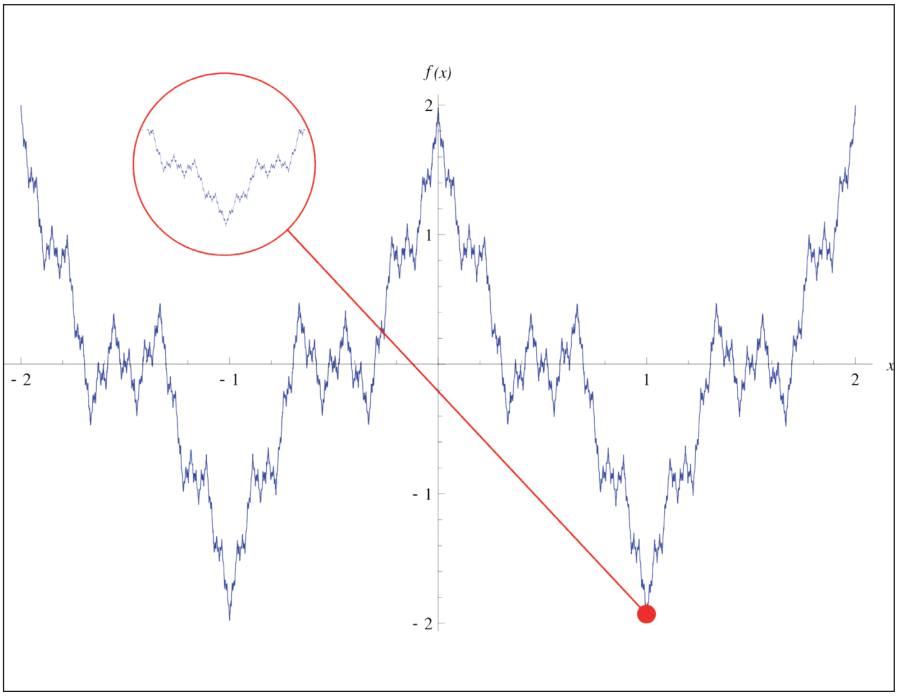
İşte Weierstrass'ın hocasından öğrenip uyguladığı teknikler sayesinde, bu fonksiyonu elde etmek için birbirleriyle topladığımız sürekli fonksiyonları öyle seçeriz ki elde ettiğimiz fonksiyon sürekli olur.

Hem kalemimizi kâğıttan kaldırmadan bu fonksiyonun grafiğini çizebiliyoruz hem de buna rağmen hiçbir noktada grafiğe bir teğet çizemeyeceğimiz kadar çok sivri uç var. Bunu elbette elinize kalem alıp çizerek göremezsiniz. Ancak sürekliliğin epsilon delta terimleriyle verilen teknik tanımından başlayarak sözü edilen özelliklerin aslında orada olduğuna ikna olabilirsiniz.

Bilim beş duyumuzun bize açtığı ufkun çok ötesine geçmemizi sağladığı için bu denli heyecan vericidir. Başka hiçbir işe yaramasaydı bile sırf bu heyecanı tekrar tekrar yaşamak için bile bilim vazgeçilmez bir uğraş olurdu.

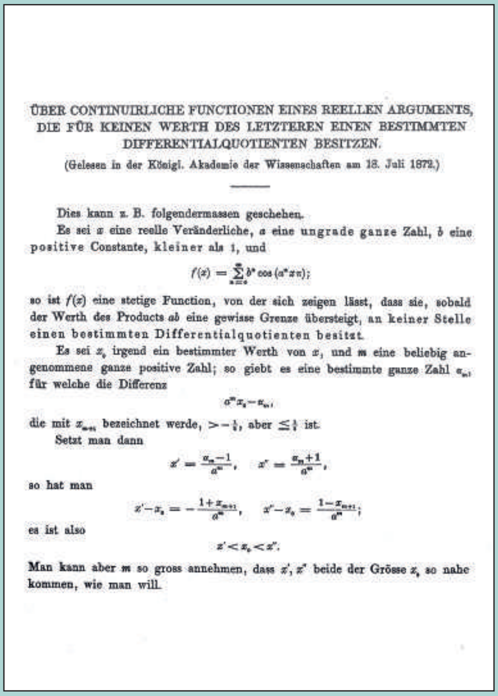


Weierstrass Fonksiyonu



Weierstrass'ın kendi adıyla anılan fonksiyonunu açıkladığı 1872 tarihli makalesinin başlığı ve ikinci sayfası.

Burada tanımlanan f(x) fonksiyonu a ve b parametrelerinin özel değerleri için sürekli ama türevsiz olur..



ÜBER CONTINUIRLICHE FUNCTIONEN EINES REELLEN ARGUMENTS, DIE FÜR KEINEN WERTH DES LETZTEREN EINEN BESTIMMTEN DIFFERENTIALQUOTIENTEN BESITZEN.

(Gelesen in der Königl. Akademie der Wissenschaften am 18. Juli 1872.)

Dies kann z. B. folgendermassen geschehen.

Es sei x eine reelle Veränderliche, a eine ungrade ganze Zahl, b eine positive Constante, kleiner als 1, und

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b^n \cos(a^n x\pi);$$

so ist $f(x)$ eine stetige Function, von der sich zeigen lässt, dass sie, sobald der Werth des Products ab eine gewisse Grenze übersteigt, an keiner Stelle einen bestimmten Differentialquotienten besitzt.

Es sei x_0 irgend ein bestimmter Werth von x, und m eine beliebig angenommene ganze positive Zahl; so giebt es eine bestimmte ganze Zahl α_m, für welche die Differenz

$$a^m x_0 - \alpha_m,$$

die mit x_{m+1} bezeichnet werde, $> -\frac{1}{2}$, aber $\leq \frac{1}{2}$ ist.

Setzt man dann

$$x' = \frac{\alpha_m - 1}{a^m}, \quad x'' = \frac{\alpha_m + 1}{a^m},$$

so hat man

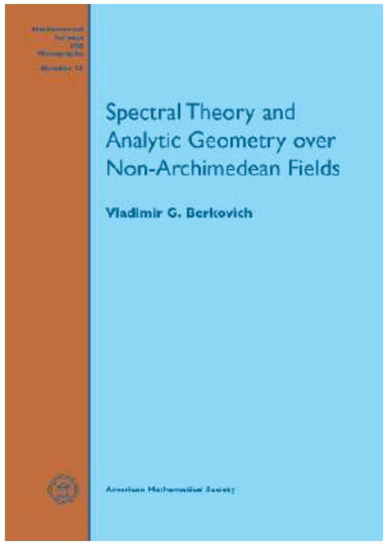
$$x' - x_0 = -\frac{1 + x_{m+1}}{a^m}, \quad x'' - x_0 = \frac{1 - x_{m+1}}{a^m};$$

es ist also

$$x' < x_0 < x''.$$

Man kann aber m so gross annehmen, dass x', x'' beide der Grösse x_0 so nahe kommen, wie man will.

Vladimir Berkovich



Berkovich'in bir tarım danışmanlığı firmasında programcı olarak çalışırken yazdığı ve tekrar matematik dünyasına dönmesini sağlayan kitap

Öyle Şeyler Artık Olmaz mı?

Weierstrass'ın adı sanı bilinmeyen bir kasabadan yolladığı bir makaleyle birdenbire matematik dünyasının yıldızı olması çoğumuza "nerede o eski bayramlar" havasında bir öykü gibi geliyor. Eskiden hayat daha kolaydı, daha güzeldi. Masallardaki gibi mucizelerin oluşması mümkündü. Oysa şimdi...

Vladimir Berkovich 1977'de Moskova Üniversitesi'nde matematik doktorasını tamamladığında tez danışmanı Yuri Manin gibi ünü dünyayı sarmış bir matematikçiydi, yine de akademi dünyasında iş bulamadı. Hayatını kazanabilmek için ziraat makineleri üreten bir fabrikada bilgisayar programcısı olarak işe başladı. Daha sonra zirai danışmanlık yapan bir başka kurumda yine bilgisayar programcısı olarak çalışmaya devam etti.

Bilgisayar programcılığında tecrübe kazanıp işlerini çabuk yapmayı ve gündüzleri kendine, yani matematiğe bir iki saat ayırmayı öğrenmesi yaklaşık on yılını aldı. Bu sırada matematik merakını erken kalkıp -sabahın ikisi gibi- kendi kendine çalışarak gideriyordu. Nihayet 1986'da üzerinde yıllarca uğraştığı bir problemi çözdü. Sonuçları 1990'da İngilizceye çevrilerek Amerikan Matematik Derneği tarafından yayımlandı. Bu kitapta bugün onun adıyla anılan uzayların yapıları anlatılır. Bu başarısından dolayı elbette Weierstrass'a olduğu gibi ona da akademi dünyasının kapıları açıldı. Şimdi İsrail'deki Weizmann Bilim Enstitüsü'nde matematikçi olarak çalışıyor. Artık zamanının tamamını matematiğe ayırabiliyor.

“Şiirde olduğu gibi matematikte de mükemmele hiçbir zaman ulaşılamaz ama denemekten de zarar gelmez”

Weierstrass ile Bitirelim

Yirminci yüzyıla yön veren Alman matematikçi Hilbert matematiği bırakıp şair olan bir öğrencisi hakkında “İsabet olmuş, onda matematikçi olacak hayal gücü yoktu” der. Weierstrass ise matematik ve şiir ilişkisi hakkında daha gerçekçidir: “İçinde biraz şairlik olmayan kişiden matematikçi olmaz” der ve ekler “şiirde olduğu gibi matematikte de mükemmele hiçbir zaman ulaşılamaz ama denemekten de zarar gelmez”.

Böyle ince bir ruha ve öğrencileriyle yemeğe gittiğinde hepsinin parasını ödemekte ısrar edecek kadar cömert bir gönüle sahip olan ve genç öğrencisi Kovalevskaya’ya yüz altmış mektup yazacak kadar sevgi dolu bu insan hiç evlenmedi. Üstelik erkek kardeşi ve iki kız kardeşi de hiç evlenmedi. Weierstrass ailesinin soy ağacı evlenmeyen bu kardeşlerle kapanırken bunun nedenleri üzerine fikir yürütmenize yardımcı olması için son dönemlerin başarılı senaristi ve oyuncusu Gupse Özay’ın son filmi *Görümce*’yi izlemenizi tavsiye ederim. ■

Kaynaklar

Berkovich, V., “Non-archimedean analytic geometry; first steps”, p-adic Geometry, Lectures from the 2007 Arizona Winter School, Editörler M. Baker et al, AMS University Lecture Series no: 45, s. 1-8, 2008.

Boyer, C. B., Merzbach, C., *A History of Mathematics*, Second Edition, John Wiley & Sons Inc, 1991.

K. Weierstrass, Uber continuirliche Funktionen eines reellen Arguments, die f¨ur keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen, Gelesen Akad. Wiss. 18 Juli 1872

Thim, J., Continuous Nowhere Differentiable Functions, Master Tezi, Lulea Üniversitesi, 2003.