Kim Bıkar Altın Orandan

Prof. Dr. Ali Sinan Sertöz
[*Bilkent Üniversitesi Fen Fakültesi, Matematik Bölümü*

Ege kıyılarındaki bir kumsalda, gün batımında genç matematik öğrencileri son öğrendikleri tekniklerle bir doğru parçasını değişik oranlarda parçalara ayırarak eğleniyor. Derken içlerinden biri masum bir problem ortaya atıyor: Bu doğru parçasını öyle iki parçaya bölelim ki büyük parçanın küçük parçaya oranı, doğrunun kendisinin büyük parçaya olan oranına eşit olsun. Bir sessizlik... Hepsi düşünmeye başlıyor. Biz de zaman makinemize binip kendi ortamımıza dönüyoruz.

Binlerce yıldır hakkında yazılmamış, keşfedilmemiş bir yön kalmamış olsa da hâlâ altın oran hakkında popüler bilim dergilerine, bu oranı yeni öğrenmiş acemi yazarlar tarafından coşku dolu yazılar gönderilir. Dergi editörlerinin baş belasıdır altın oran ve Fibonacci sayıları. Ama işin içine Leonardo da Vinci'yi de katıp editörlerin sabrını bir kez daha denemeye değer.

Cebir Diye Bir Şey Var

Altın oranı bir sayı olarak görüp kaç olduğunu cebir kullanarak hemen hesaplayabiliriz. Doğru parçasının uzunluğu x, büyük parçanın uzunluğu da 1 olursa küçük parça x-1 uzunluğunda olur. Öyleyse Ege sahilindeki gencin istediği oranı matematik dilinde ifade etmek için şöyle bir eşitlik yazabiliriz:

$$\frac{x}{1} = \frac{1}{x - 1}$$

Bu eşitliği sağlayan x değeri, Eski Yunan'da yaşamış heykeltıraş ve mimar Fidias'a (Yunanca: Φειδίας) ithafen başharfi (ϕ: fi) ile gösterilir.

Eski Yunan matematikçileri ise söz konusu oranı, Eski Yunanca "kesme" anlamına gelen (Yunanca: τομος) sözcüğün başharfi olan τ ile göstermişler. Bugün hâlâ bazı kitaplarda altın oranın bu sembolle gösterildiğine rastlarsanız şaşırmayın. Biz bu yazıda ϕ sembolünü tercih ettik. Eşitliğin bir sonraki adımı için gerekli işlemler yapıldığında,

$$\phi^2 = \phi + 1$$

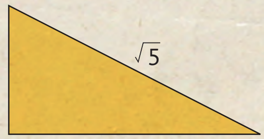
yâni

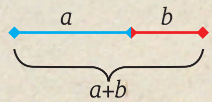
$$\phi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803398\ldots$$

bulunur.

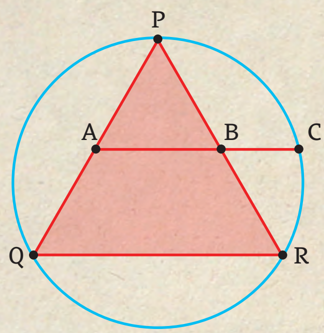
Aklımızın bir köşesinde bu çeşit oranların cetvel ve pergel kullanılarak çizilmesinin daha makbul olduğu kalmış. Biz de bu işe heveslenip elimize cetvelle pergelimizi alalım. Yalnız çizim yapmaya başlarken bir uzunluk birimi seçmemiz gerektiğini hemen fark edeceğiz. Birim uzunluğu 1 mm veya 1 cm olabilir. Hatta istediğimiz uzunlukta bir doğru parçası çizip, bunu 1 birim olarak kabul edebiliriz. Bu birimi kullanarak, cetvel ve pergelin de yardımıyla ϕ uzunluğunda bir doğru çizmek istiyoruz.

Yukarıdaki formüle göre, en önce 5 sayısının karekökü uzunluğunda bir doğru çizmek gerekiyor. Bunun için dik kenarlarından biri 1 birim, diğeri ise 2 birim olan bir dik üçgen çizmek yeterli. Gerisi kolay.

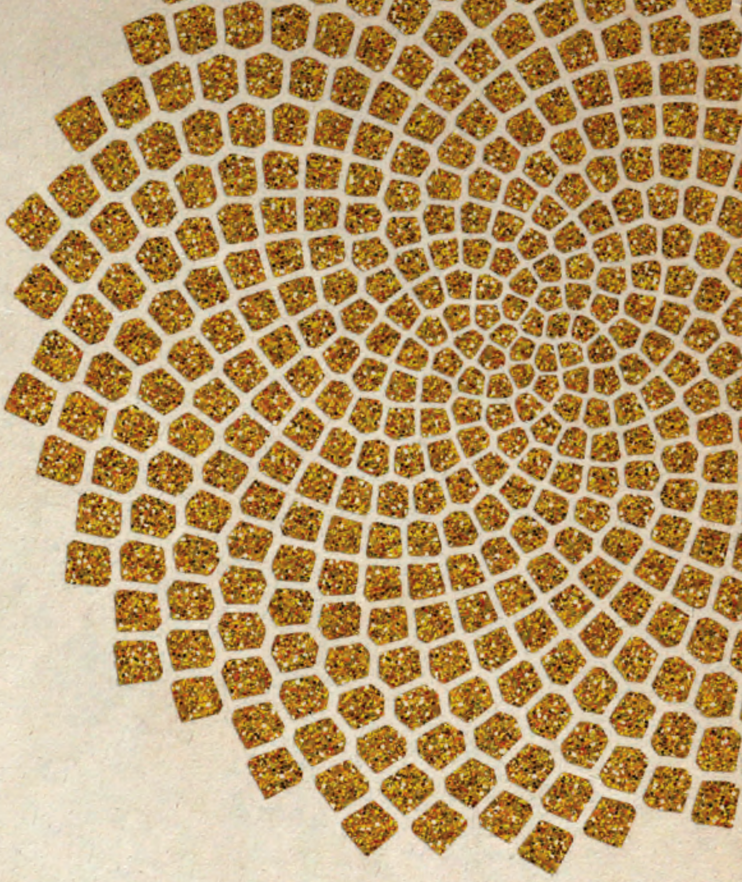




a+b'nin a'ya oranı, a'nın b'ye oranına eşitse, bu oran altın orandır.

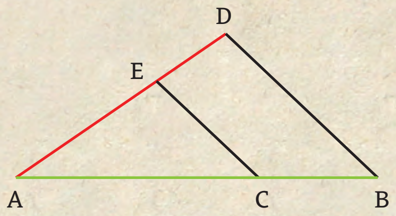


Çember içine çizilmiş PQR eşkenar üçgeninde A ve B, kenarların orta noktalarıysa ve AB doğrusu uzatıldığında çemberi C noktasında kesiyorsa, AC doğrusu B noktasında altın oranda kesilir.



Sayıdan Orana

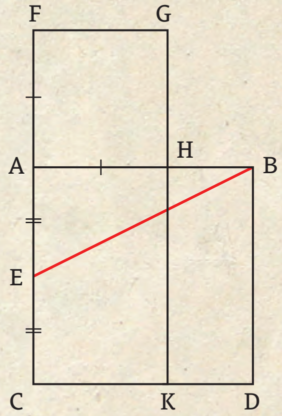
ϕ sayısını, bir birimle başlayıp bir kere çizdikten sonra Thales'in üçgen bağıntılarını kullanarak verilen herhangi uzunluktaki bir doğruyu altın oranda kesebiliriz.



Diyelim ki AB doğrusunu altın oranda kesecek C noktasını bulmak istiyoruz. Elimizde daha önceden hazırladığımız ve E noktasında altın oranda kesilmiş AD doğrumuz varsa onu kullanarak AB doğrusu için C noktasını bulmak çok kolay. Önce AD doğrusunu AB doğrusuna şekilde gösterildiği gibi A noktasından rastgele bir açıyla değdiriyoruz. D noktası ile B noktasını birleştiren bir DB doğrusu çiziyoruz. Sonra da E noktasından DB doğrusuna paralel bir doğru çiziyoruz. Bu doğrunun AB doğrusu ile kesiştiği nokta aradığımız C noktasıdır.

Şimdi biraz durup düşünelim. Elimizde daha önce altın oranda kesilmiş bir doğru olmasaydı rastgele uzunlukta verilen bir doğruyu bir birim uzunluk seçmeden de altın orana bölemez miydik? Ya da bu iş için mutlaka birim seçmek zorunda mıyız?

Ege kıyılarının keyfini bizden birkaç bin yıl önce çıkarmış matematikçiler bu soruları sormuşlar ve cevabını bulmuşlar. Bir birimle başlamaya gerek duymadan verilen herhangi uzunluktaki bir doğru yalnız cetvel ve pergel kullanılarak altın oranda bölünebilir.



AB doğrusunu altın oranda kesmek için bir AD karesi çizin, AC'nin orta noktası E olsun. BE uzunluğuna eş olacak şekilde, A noktasından geçen bir EF doğru parçası çizin. AB doğrusu üzerinde, AF uzunluğuna eşit bir AH doğru parçası belirlediğinizde AB doğrusunu H noktasından altın oranda kesmiş olursunuz. Bunun kanıtını *Öklid'in Elemanları*'nın II. kitabının 11. önermesinde bulabilirsiniz.

Geometrik Bir Senaryo

Zaman makinemizle gittiğimiz sahilde altın oranın bulunuşu için bir doğruyu değişik oranlarda kesmeye çalışan meraklı öğrencileri izlemiştik. Bir başka sahile gitsek muhtemelen başka bir meraklı öğrenci grubuna rastlayacaktık. Onlar da kumsalda eşkenar çokgenler çizmeye çalışıyor olurlardı.

Eşkenar üçgen çizmek kolay. Eşkenar dörtgen, yani kare çizmek de kolay. Bunlar o kadar temel konular ki Öklid *Elemanlar* adlı eserinin I. kitabının 1. önermesinde bir eşkenar üçgenin nasıl çizileceğini tarif eder. Yine I. kitabın 46. önermesi de bir eşkenar dörtgen çizmenin yolunu açıklar.

Ondan sonra sıra bir eşkenar beşgen çizmeye gelir. Öklid'in *Elemanlar* adlı eserinde eşkenar beşgen çizimi ancak IV. kitabın 11. önermesinde anlatılır.

Hemen okumaya başlamadan önce biz olsak nasıl çizerdik bu beşgeni diye düşünelim. Önce beşgenin herhangi bir kenarı olacak bir doğru parçası çizelim. Bunun yanındaki komşu kenarla bu doğru arasında 108 derecelik bir açı olması lazım. Bu açı 180 derecenin beşte birinin üç katıdır. Bir açının üç katını almak kolay ama 180 derecelik bir açıyı beş eşit parçaya nasıl böleceğiz? Yani eğer 36 derecelik bir açı çizmeyi becerirsek eşkenar bir beşgen çizebileceğiz.

Peki ama bu açıyı nasıl çizeceğiz?

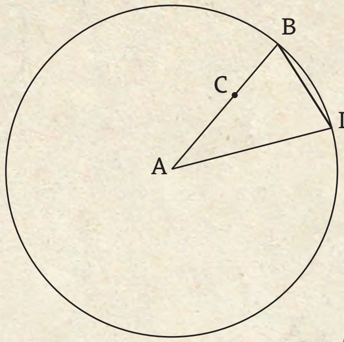
Madem ki açılarla çalışacağız, şeklimizi bir çember içine çizmeye çalışmak daha kolay olacak gibi. En azından açılar ve çember yayları arasındaki ilişkileri kullanabiliriz.

Çizim problemlerini çözmek için kullanılan taktik genellikle çizimin yapılıp bittiğini var saymak, şekil üzerinde yakalayabildiğimiz tüm özellikleri bulmak ve bunlardan hangisiyle başlasaydık çizimi tamamlardık diye düşünmektir. Burada sizi bir süre kendi başınıza bırakıp bir beşgenle oynamanıza izin vereyim.

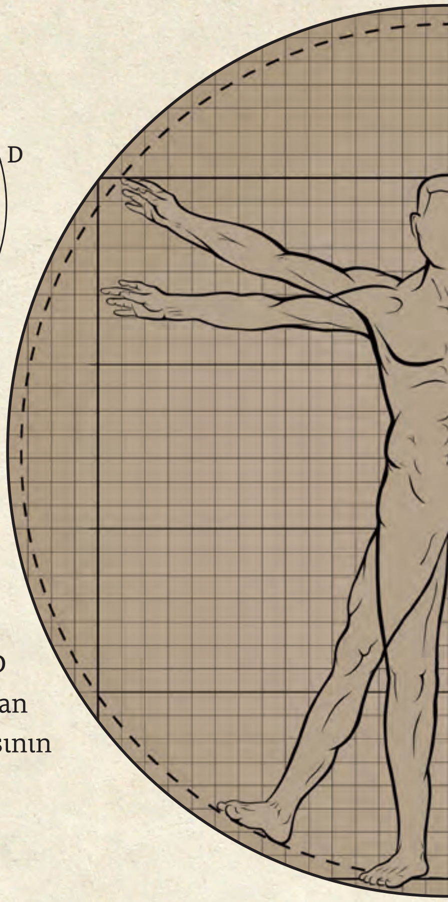
Biraz oynadıktan sonra hemen fark edeceksiniz ki eğer düzgün beşgenin bir köşesinden tam karşısındaki kenarın iki ucuna birer doğru çizerseniz elde edeceğiniz ikizkenar üçgenin taban açılarının her biri tepe açısının iki katı olur. Yani tepe açısı 36 derece olur. Tanıdık geldi mi?

Öyleyse şimdi elimizdeki problem taban açıları tepe açısının iki katı olan bir ikizkenar üçgen çizmek. Peki bunu nasıl yapacağız? (İpucu: Yazının başlığına bakın!)

Bize gerekli olan çizim Öklid'in IV. kitabının 10. önermesinde anlatılır ve elbette en kritik yerde bir doğrunun altın oranda kesilmesi gerekir. Bu arada sahilde bıraktığımız gençler de mutlaka bunu keşfetmişlerdir. Akdeniz iklimi ilham vericidir.



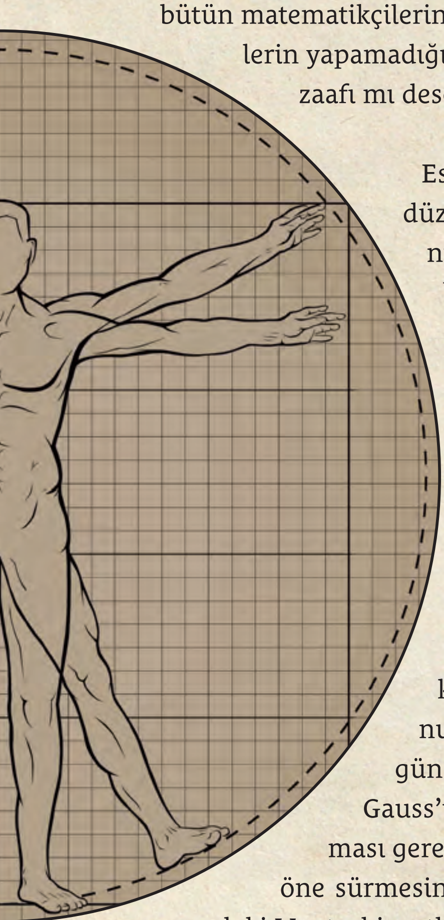
AB yarıçaplı ve A merkezli bir çember çizilsin. AB doğrusu C noktasında altın oranda kesilsin. AC uzunluğuna eşit BD kirişi çizilsin. ABD ikizkenar üçgeninde taban açılarının her biri tepe açısının iki katı olur.



Gauss Olmadan Olmaz

Eski Yunan matematikçilerinin üçgen, dörtgen ve beşgen çizdikten sonra durmalarını ve yedigen, dokuzgen gibi eşkenarlı düzgün çokgenlere el atmamalarını Platonik cisimlerin yüzeylerinde yalnızca üçgen, dörtgen ve beşgen kullanılmasına bağlayabiliriz. Ancak matematik kitaplarının, Galois'nın bile eleştirdiği bir özelliği vardır: Genellikle bilinmeyenlerden değil bilinenlerden söz ederler. Öklid de Platonik cisimlerin yüzeyleri için gereken çizimleri anlatmış ama bunun dışında pek fazla bilgimiz yok demekten kaçınmıştır. Bugün hâlâ bu gelenek sürer!

Öklid eğer, konuyu dağıtmak pahasına, beşgeni böyle çiziyoruz ama henüz yedigen çizmeyi çözemedik deseydi belki matematik çok daha hızlı gelişirdi. Çünkü bütün matematikçilerin içinde başka matematikçilerin yapamadığı bir şeyi yapma hırsı -ya da zaafı mı desek- vardır.



Eski Yunanların neden bir düzgün yedigen çizemediğinin anlaşılması için insanlık Gauss'un 19 yaşındayken bir gün oturup bir düzgün onyedigen çizmesini bekledi. Gauss bununla yetinmedi ve bir düzgün çokgenin çizilebilmesi için kaç kenarlı olmasının yeterli olacağını da gösterdi. Gauss'un yeterli dediği koşulların gerekli olduğunu, yani çizilebilir bir düzgün çokgenin kenar sayısının Gauss'un belirttiği şartları sağlaması gerektiğini ise Gauss'un teoriyi öne sürmesinden 41 yıl sonra 23 yaşındaki Wantzel ispatladı.

Bugün Gauss-Wantzel teoremi olarak bilinen bu sonuca göre tek sayılı kenar sayısı olan çizilebilir düzgün çokgenlerin kenar sayıları

3, 5, 15, 17, 51, 85, 255, 257, …

olmalıdır. Yukardaki sayıların Fermat ile yakın bir ilgisi vardır ama bu ilişkiyi bulmayı ve çift kenar sayılı düzgün çokgenleri çizme konusunu sizlere bırakıyorum.

Eğer Fibonacci dizisini $F_1=1$, $F_2=1$, $F_3=2$,... şeklinde yazarsak ve $\phi^2 = \phi + 1$ bağlantısını kullanırsak, ϕ sayısının kuvvetlerini çok kolay hesaplayabiliriz:

$$\phi^n = F_n\phi + F_{n-1}$$

Fibonacci sayıları ve altın oran arasında en bilinen ilişkileri anmamak olmaz:

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}[\phi^n - (1-\phi)^n] = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F_{n+1}}{F_n} = \phi$$

Yine $\phi^2 = 1 + \phi$ bağıntısından başlayarak

$$\begin{aligned}\phi &= 1 + \frac{1}{\phi}\\ &= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{\phi}}\\ &= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{\phi}}}\\ &\vdots\\ &= 1 + \frac{1}{1+\frac{1}{1+\frac{1}{1+\ddots}}}\end{aligned}$$

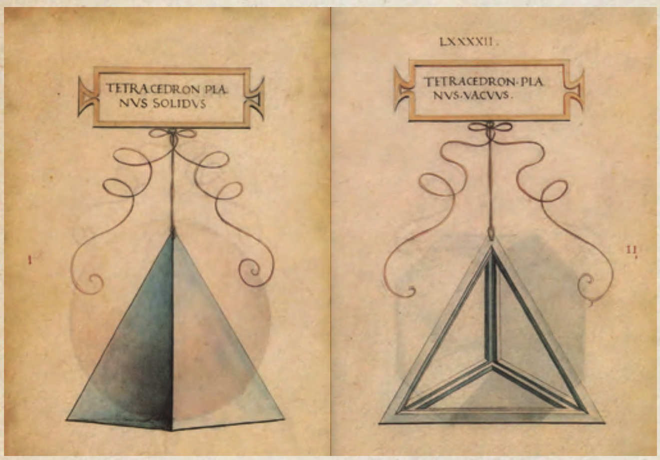
buluruz.

Luca Pacioli ve Altın Oran

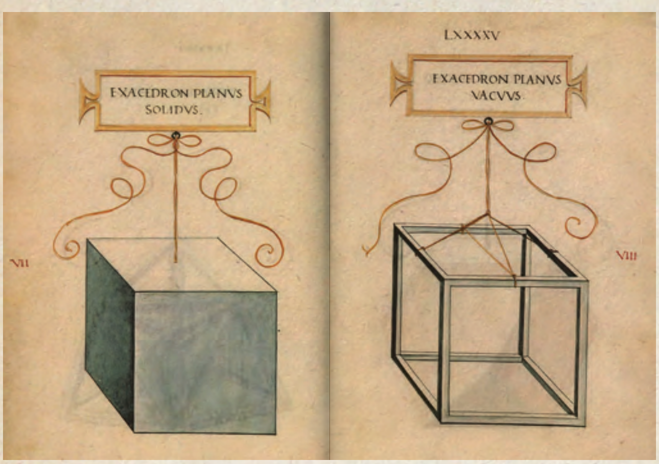
Platonik cisimlerden olan düzgün onikiyüzlünün çizimi için altın oran gerekir. Ama çizim için de ayrı bir ustalık gerekir. Dilerseniz elinize kalem alıp Platonik cisimleri çizmeye çalışın. Benim en kolay çizdiğim küptür ve onu da ancak birkaç denemeden sonra göze hoş gelecek bir düzeyde çizebilirim.

Bu cisimleri eline kalem yakışan biri çizse ne güzel olurdu değil mi? On altıncı yüzyılda altın oranın çekiciliğine dayanamayıp *Divina Proportione* (*İlahi Oran*) adında bir kitap yayımlayan Luca Pacioli de çizimleri yapması için bir yakın arkadaşına rica etmiş. Kendisinden yedi yaş genç olan bu arkadaşının adı Leonardo idi. Evet, Leonardo da Vinci!

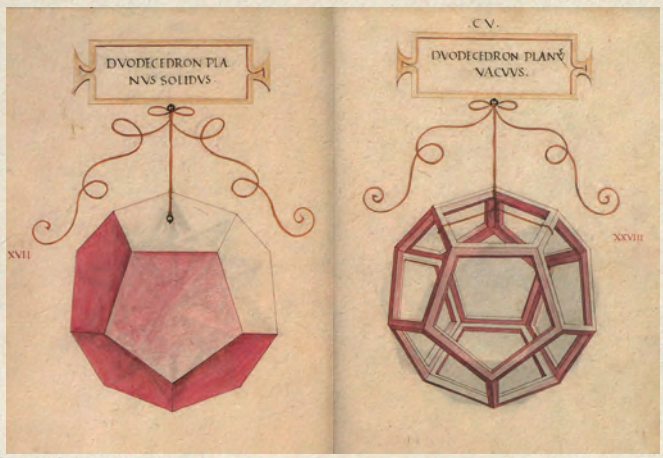
Şimdi o kitapta Leonardo da Vinci'nin çizdiği çok sayıdaki şekil arasından biz Platonik cisimleri seçelim.



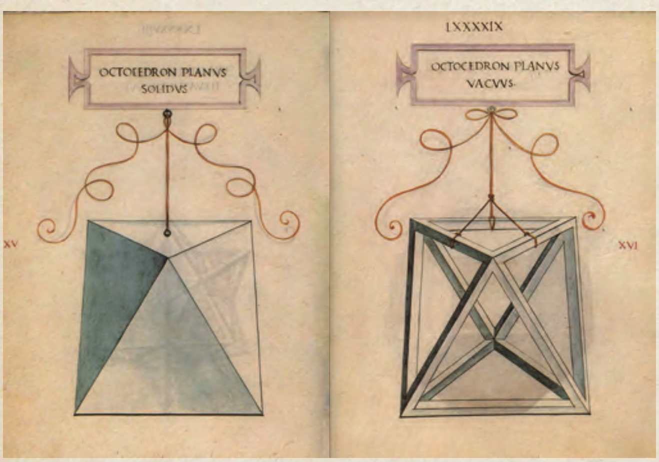
Düzgün dörtyüzlü



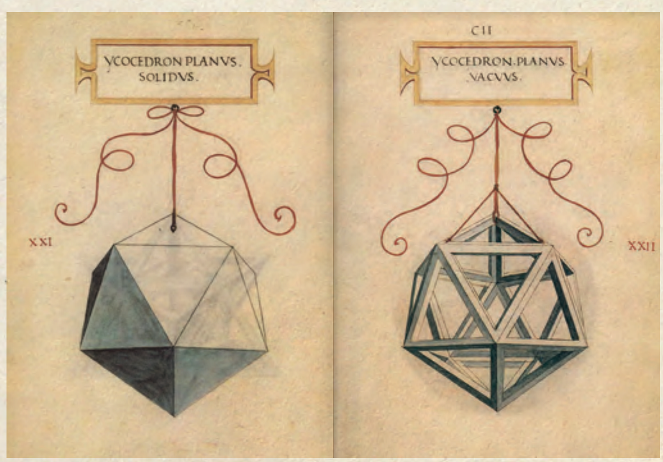
Düzgün altıyüzlü



Düzgün onikiyüzlü



Düzgün sekizyüzlü



Düzgün yirmiyüzlü

American Mathematical Society

Hani Bunlardan Başka Yoktu

Öklid'in *Elemanlar* kitabı Platonik cisimlerden yalnızca beş tane olduğunu kanıtlayarak biter. Oysa bazı botanik bahçelerinin muhteşem kubbelerine bakınca çok sayıda aynı düzgün çokgenden oluştuklarını görürüz. Hani yalnızca beş Platonik cisim vardı? İşte bir örnek:

Avustralya'daki bir botanik bahçenin tavanı sanki Öklid'in vardığı sonuca kafa tutuyor. Bu nasıl olmuş? Öklid yanılmış mı? Bu sorunun cevabını ve bu çeşit kubbelerin nasıl inşa edildiğini bulma zevkinden sizi mahrum etmek istemiyorum. Bu yüzden sizi bu sorularla bırakıp ben başka bir konuya geçiyorum.

ϕ sayısı

$$\phi^2 = 1 + \phi$$

denklemini sağlar. Buradan yola çıkarak

$$\begin{aligned}\phi &= \sqrt{1+\phi} \\ &= \sqrt{1+\sqrt{1+\phi}} \\ &\vdots \\ &= \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots}}}\end{aligned}$$

olduğunu görürüz.

Fibonacci Sayılarından Kaçılmaz

Altın orandan söz ederken Fibonacci sayılarına değinmemek mümkün değil. Tıpkı altın oran gibi Fibonacci sayıları hakkında da artık yazılmamış yeni bir şey bulmak çok zor -ama imkânsız değil! *The Fibonacci Quarterly* adında yalnızca Fibonacci sayılarıyla ilgili akademik düzeydeki araştırma sonuçlarını yayımlayan bir dergi var. 1963 yılından beri yayımda olan bu derginin şu sıralar 58. cildi çıktı!

Biz Fibonacci sayılarına dönersek, iki tane 1 sayısıyla başlayıp, her seferinde bir önceki iki sayının toplamını alarak oluşturulan diziye Fibonacci dizisi denir ve bu dizideki sayılar da Fibonacci sayıları olarak anılır. Yâni

$F_1=1$, $F_2=1$ ve $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$.

Buna göre dizi şöyle başlar:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, …

Bu dizide renkli gösterilenler asaldır. Fibonacci dizisi içinde başlarda bu kadar sık görülen asallar, dizinin ilerleyen sıralardaki elemanlarında da görülecek mi? Hadi baklayı ağzımızdan çıkaralım: Öklid'den beri sonsuz tane asal olduğu biliniyor ama Fibonacci dizisi içinde sonsuz tane asala rastlanıp rastlanmayacağı henüz bilinmiyor.

Matematikte hep yaptığımız gibi bu probleme bakıp başka problemler çıkarabiliriz. Örneğin Fibonacci dizisinin "1, 1" diye başladığını gördük. Bu 1 sayılarının hiçbir özelliği yok. Onların yerine a, b sayılarını kullansak yeni bir dizi elde ederiz.

a, b, a+b, a+2b, 2a+3b, 3a+5b, 5a+8b, …

Bu genel diziyle Fibonacci dizisi arasındaki ilişkiyi keşfetme zevkini yine size bırakıp başka bir soru sorayım. Hangi a ve b sayılarıyla başlarsak yukarıdaki dizinin içinde hiçbir asal sayıya rastlamayacağımızın garantisi olur? Evet, böyle sayılar var. Örneğin a ve b için aşağıdaki değerler kullanılırsa dizide hiç asal sayı bulunmaz:

a= 106276436867, b = 35256392432

Cevaplamanız durumunda adınızı literatüre geçirecek soru ise şu: Bunlardan daha küçük iki sayıyla başlayıp yine içinde hiç asal olmayan bir dizi bulabilir misiniz?

Biraz da Geometrik Dizi

Bir sayının kuvvetlerini alarak oluşturulan dizilere geometrik diziler denir. Örneğin 1, r, r^2, r^3, … dizisi geometrik dizidir.

Yukarıda sözünü ettiğimiz Fibonacci dizisi ise aritmetik dizi olarak anılır.

Aynı zamanda hem geometrik hem de aritmetik dizi özelliğini sağlayan bir dizi var mıdır? Cevabın içinde altın oran olmasaydı bu sorunun burada ne işi vardı diye düşünerek aklınıza ilk gelen geometrik diziyi yazabilirsiniz –ki sorunun doğru cevabını da bulmuş olursunuz:

$1, \phi, \phi^2, \phi^3, \ldots$

Şimdi ϕ sayısının $\phi^2 = \phi + 1$ bağıntısını sağladığını kullanarak bu dizinin aynı zamanda aritmetik bir dizi olduğunu görebilirsiniz.

Tazı, Tavşan ve Altın Oran

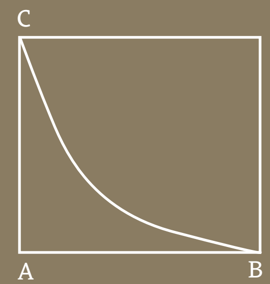
Altın oran ve Fibonacci sayılarından bıkan okuyucuyu biraz rahatlatmak için bir "gerçek hayat" problemiyle yazımızı bitirelim.

Kare şeklinde bir bahçenin bir köşesine bir tavşan yerleştiriyoruz. O köşeye komşu köşelerden birine de bir tazı yerleştiriyoruz. Bunlar düşünsel hayvanlar oldukları için biz başla deyinceye kadar yerlerinde bekliyorlar. Biz onlara oyunun kurallarını anlatıyoruz. Tavşan kendi bulunduğu köşeyi, tazının olmadığı diğer komşu köşeye birleştiren doğru boyunca sabit bir hızla ve tazıyla hiç ilgilenmeden koşacak. Tazı ise yine sabit bir hızla ama burnu, yani yönü, hep tavşana bakacak şekilde koşacak. Eğer tavşan tazıya yakalanmadan köşeye varırsa o kazanacak, eğer tavşan köşeye varmadan önce tazıya yakalanırsa bu kez de tazı kazanmış sayılacak. Biz işaret verir vermez koşmaya başlayacaklar. Sizce kim kazanır?

Elbette sorunun cevabı köpeğin hızının tavşanın hızına oranına bağlı.

Oran mı dedik?

Tavşanımız karenin A noktasından C noktasına doğru sabit bir hızla koşuyor. B noktasından başlayan tazı da yönü daima tavşana dönük olacak şekilde sabit bir hızla koşuyor. Tazı, şekilde temsili olarak verilen eğri boyunca koşuyor ve tavşanı tam C noktasında yakalıyor. Bu durumda tazının hızının tavşanın hızına oranı nedir?



Kaynaklar

Luca Pacioli, *De Divina Proportione*, 1509.

American Mathematical Society web sitesi: https://www.maa.org/press/periodicals/convergence/leonardo-da-vincis-geometric-sketches-introduction

Öklid'in Elemanları, Çev.:Ali Sinan Sertöz, TÜBİTAK Popüler Bilim Kitapları, 2019.

R. A. Dunlap, The Golden Ratio and Fibonacci Numbers, *World Scientific*, 1997.

Pavel Ptak, Josef Tkadlec, The dog-and-rabbit chase revisited, *Acta Polytechnica* 36, 5–10, 1996.

M. Erickson, Pearls of Discrete Mathematics, *Routledge*, 2009.