UNE INTERPRÉTATION ALGÉBRIQUE DE LA SUITE DES ORDRES DE MULTIPLICITÉ D'UNE BRANCHE ALGÉBRIQUE

By CAHIT ARF

[*Received* 7 *September* 1945.—*Read* 15 *November* 1945.—
Received in revised form 30 *September* 1946]

La suite des multiplicités des points successifs d'une branche algébrique peut se définir au moyen de notions purement algébriques. Dans ce qui suit nous exposons une telle définition qui ne diffère, du reste, de la définition géométrique que par la forme. Nous espérons que cette définition constitue une réponse à la question posée par P. Du Val* sur la relation qui doit exister entre ses résultats et les développements en series entières de la branche considérée.

1. k étant un corps quelconque, nous considérons un anneau H constitué par des series entières d'une variable t avec coefficients dans k. Soient

$$W(H) = \{i_0 = 0, i_1, i_2, \dots, i_r, i_{r+1}, \dots\}$$

les ordres (c.à.d. les ordres des premiers termes avec coefficients non nuls) des éléments de H. Les entiers $i_0, i_1, \dots, i_r, \dots$ constituent un semi-groupe d'entiers positifs. $S_0, S_{i_1}, S_{i_2}, \dots, S_{i_r}, \dots$ étant des éléments d'ordres respectifs $i_0, i_1, \dots, i_r, \dots$ dans H, tout élément de cet anneau est de la forme

$$\sum_{l=0}^{\infty} \alpha_l S_{i_l} \quad (\alpha_l \in k).$$

Nous admetterons que H contient toutes les séries de cette forme. Nous désignerons par I_h l'ensemble des éléments de H d'ordres supérieurs ou égaux à h. I_h est visiblement un idéal de H et ses éléments sont de la forme

$$\sum_{i_l \geqslant h} \alpha_l S_{i_l} \quad (\alpha_l \in k).$$

---

* P. Du Val, "The Jacobian algorithm and the multiplicity sequence of an algebraic branch", *Rev. Faculté Sci. Univ. Istanbul* (Série A), 7 (1942), 107–112.

THÉORÈME AUXILIAIRE 1. *ν étant le p.g.c.d. des éléments de $W(H)$, pour r suffisamment grand on a*

$$i_{r+1} = i_r + \nu,\ i_{r+2} = i_r + 2\nu,\ \ldots,\ i_{r+l} = i_r + l\nu,\ \ldots$$

et il existe une série entière d'ordre 1,

$$\tau = t\left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l t^l\right) \quad (\delta_l \in k)$$

telle que tout élément de H soit de la forme $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_j \tau^{j\nu}$.

Démonstration. Désignons par ν_l le p.g.c.d. des entiers $i_1, i_2, \ldots, i_l$. Chacun des nombres $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_h, \ldots$ divise alors tous ceux qui le précèdent. Il en résulte que pour ρ suffisamment grand on a $\nu_\rho = \nu_{\rho+1} = \nu_{\rho+2} = \ldots = \nu$. Soit alors

$$\nu = m_1 i_1 + m_2 i_2 + \ldots + m_\rho i_\rho,$$

$m_1, m_2, \ldots, m_\rho$ étant des entiers positifs, nuls ou négatifs. m étant le plus grand des entiers $|m_h(i_1/\nu - 1)|$, les multiples de ν qui sont supérieurs à

$$i = mi_1 + mi_2 + \ldots + mi_\rho$$

sont contenus dans $W(H)$. On a en effet, pour $l = 0, 1, 2, \ldots, i_1/\nu - 1$,

$$\begin{aligned} i + l\nu &= (m + lm_1)\, i_1 + (m + lm_2)\, i_2 + \ldots + (m + lm_\rho)\, i_\rho \\ &= n_1 i_1 + n_2 i_2 + \ldots + n_\rho i_\rho, \end{aligned}$$

avec $n_h \geqslant 0$; puisque $m \geqslant |m_h l|$. Pour $l = i_1/\nu$, on aura $i + l\nu = i + i_1 \in W(H)$. D'une manière générale, les multiples de ν qui sont supérieurs à i peuvent s'écrire sous la forme $i + ji_1 + l\nu$ $(l = 0, 1, 2, \ldots, i_1/\nu - 1, j \geqslant 0)$ et il est évident que tous ces entiers sont de la forme $\sum_{h=1}^{\rho} n_h i_h$ avec $n_h \geqslant 0$; c.à.d. contenus dans $W(H)$. $S_i = \sum_{l=i_1}^{\infty} \sigma_l t^l$ $(\sigma_l \in k, \sigma_{i_1} \neq 0)$ étant un élément d'ordre i_1 de H, on peut choisir une série entière de la forme $\tau = t\left(1 + \sum_{l=1}^{\infty} \delta_l t^l\right)$, $(\delta_l \in k)$ de manière que l'on ait $S_{i_1} = \sigma_{i_1} \tau^{i_1}$. Dans ces conditions les séries entières en t avec coefficients dans k peuvent s'écrire sous formes de séries entières en τ avec coefficients dans k. *En particulier les éléments de H peuvent s'écrire sous la forme* $\sum_{j=0}^{\infty} \alpha_{j\nu} \tau^{j\nu}$. Nous pouvons nous contenter de démontrer ceci pour les éléments de H qui sont d'ordres supérieurs à i; puisque tout élément de H peut être considéré comme quotient d'un élément d'ordre supérieur à i de H par une puissance convenablement choisie de $S_{i_1} = \sigma_{i_1} \tau^{\nu(i_1/\nu)}$. Les ordres des éléments de H étant des multiples de ν, un élément quelconque de H est de la forme $\sum_{j=N\nu}^{\infty} \alpha_j \tau^j$ $(\alpha_j \in k, \alpha_{N\nu} \neq 0)$. Pour $N\nu \geqslant i$, l'anneau H contient des éléments, $S_{N\nu+\nu}$, $S_{N\nu+2\nu}$, $\ldots\left(S_{N\nu+l\nu}=\sum_{j=N\nu+l\nu}^{\infty}\alpha_{l,j}\tau^j,\ \alpha_{lj}\in k,\ \alpha_{l,N\nu+l\nu}\neq 0\right)$ d'ordres respectifs $N\nu+\nu$, $N\nu+2\nu$, ... On peut donc choisir la série $\sum_{l=1}^{\infty}\beta_l S_{N\nu+l\nu}$ de manière que la différence

$$S_{N\nu}=\sum_{j=N\nu}^{\infty}\alpha_j\tau^j-\sum_{l=1}^{\infty}\beta_l S_{N\nu+l\nu}=\alpha_{N\nu}\tau^{N\nu}+\tilde{\alpha}_\mu\tau^\mu+\ldots$$

ne contienne aucun terme d'ordre divisible par ν, autre que le prèmier. Supposons en effect qu'on ait pu choisir β_1, β_2, ..., β_h de manière que les terms d'ordres $N\nu+\nu$, $N\nu+2\nu$, ..., $N\nu+h\nu$ de la différence

$$\sum_{j=N\nu}^{\infty}\alpha_j\tau^j-\sum_{l=1}^{h}\beta_l S_{N\nu+l\nu}=\alpha_{N\nu}\tau^{N\nu}+\alpha_{\mu_h}^{(h)}\tau_{\mu_h}+\ldots$$

disparaissent; il suffit alors de poser

$$\beta_{h+1}=\frac{\alpha^{(h)}_{N\nu+h\nu+\nu}}{\alpha_{h+1,N\nu+h\nu+\nu}}$$

pour que les termes d'ordres $N\nu+\nu$, $N\nu+2\nu$, ..., $N\nu+h\nu$, $N\nu+h\nu+\nu$ de la différence

$$\sum_{j=N\nu}^{\infty}\alpha_j\tau^j-\sum_{l=1}^{h+1}\beta_l S_{N\nu+l\nu}=\alpha_{N\nu}\tau^{N\nu}+\alpha_{\mu_{h+1}}^{(h+1)}\tau^{\mu_{h+1}}+\ldots$$

disparaissent. Dans ces conditions la série $S_{N\nu}$ se réduit à $\alpha_{N\nu}\tau^{N\nu}$. Car sinon, la différence

$$S_{N\nu}^{i_1/\nu}-\alpha_{N\nu}^{i_1/\nu}\left(\frac{S_{i_1}}{\sigma_{i_1}}\right)^N=\frac{i_1}{\nu}\alpha_{N\nu}^{i_1/\nu-1}\tilde{\alpha}_\mu\tau^{N\nu(i_1/\nu-1)+\mu}+\ldots$$

dont l'ordre n'est pas divisible par ν serait contenue dans H. Donc tout élément d'ordre supérieur à i de H est une combinaison linéaire à coefficients dans k des éléments de la forme $\alpha_{N\nu}\tau^{N\nu}=S_{N\nu}$.

Remarque. D'après le théorème qui précède, l'anneau H peut être considéré comme un sous anneau de l'anneau des séries entières de la variable $T=\tau^\nu$ avec coefficients dans k. Posons ${}^*i_h=i_h/\nu$. Les ordres des éléments de H par rapport à cette nouvelle variable seront ${}^*i_0=0$, ${}^*i_1$, ${}^*i_2$, ..., ${}^*i_r$, ..., et pour r suffisamment grand, on aura

$${}^*i_{r+1}={}^*i_r+1,\ {}^*i_{r+2}={}^*i_r+2,\ \ldots.$$

THÉORÈME AUXILIAIRE 2. *L'inverse de tout élément d'ordre zéro de H est aussi un élément de H.*

Démonstration. Si l'ordre de $a=\sum_{h=0}^{\infty}\alpha_h S_{i_h}$ est zéro, α_0 est différent de zéro. Or les coefficients β_h du produit

$$\alpha_0^{-1}\prod_{h=1}^{\infty}(1+\beta_h S_{i_h})$$

peuvent être choisis de manière que l'on ait

$$a\alpha_0^{-1}\prod_{h=1}^{n}(1+\beta_h S_{i_h})\equiv 1,\quad \bmod t^{i_n+1}.$$

Supposons en effet que ce choix ait pu être fait pour $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{n-1}$. On aura

$$a\alpha_0^{-1}\prod_{h=1}^{n-1}(1+\beta_h S_{i_h}) = 1+\gamma_n S_{i_n}+\gamma_{n+1}S_{i_{n+1}}+\cdots$$

et il suffira de poser $\beta_n = -\gamma_n$ pour avoir

$$a\alpha_0^{-1}\prod_{h=1}^{n}(1+\beta_h S_{i_h})\equiv 1,\quad \bmod t^{i_n+1}.$$

Pour les coefficients β_h ainsi choisis on aura visiblement

$$a\alpha_0^{-1}\prod_{h=1}^{\infty}(1+\beta_h S_{i_h}) = 1.$$

Remarque. $\sum_{h=0}^{\infty}\alpha_h S_{i_h}$ étant un élément d'ordre zéro de H, à chaque racine $n$ième de α_0 contenue dans k correspond une racine $n$ième de $\sum_{h=0}^{\infty}\alpha_h S_{i_h}$ contenue dans H. La démonstration de ce fait est analogue à celle du théorème auxiliaire 2.

2. THÉORÈME AUXILIAIRE 3. *Si l'on désigne par I_h/S_h l'ensemble des quotients des éléments de I_h par S_h, et par $[I_h/S_h]$ l'anneau engendré par I_h/S_h, l'anneau $[I_h/S_h]$ ne dépend pas du choix de S_h parmis les éléments d'ordre h de H.*

Démonstration. Remarquons d'abord que l'ensemble I_h/S_h contient l'anneau H et par conséquent $[I_h/S_h]\supseteq H$.

Soit $S'_h = \epsilon S_h$ un autre élément d'ordre h de H. ϵ est alors un élément de $[I_h/S_h]$. Il en résulte d'après le théorème auxiliaire 2, que ϵ^{-1} est aussi un élément de $[I_h/S_h]$. On a donc

$$I_h/S'_h = I_h/\epsilon S_h = \epsilon^{-1}(I_h/S_h)\subseteq[I_h/S_h]$$

et par conséquent $$[I_h/S'_h]\subseteq[I_h/S_h].$$

On peut évidemment montrer exactement de la même manière que l'on a aussi $$[I_h/S_h]\subseteq[I_h/S'_h].$$

On a donc $[I_h/S'_h] = [I_h/S_h]$.

L'anneau $[I_h/S_h]$ ne dépendant pas du choix S_h, nous pouvons le désigner par $[I_h]$.

Remarque. Le semi-groupe $W([I_{i_h}])$ contient visiblement le semi-groupe engendré par les entiers

$$i_h - i_h = 0,\ i_{h+1}-i_h,\ i_{h+2}-i_h,\ \ldots$$

R 2

qui sont les ordres des éléments de I_{i_h}/S_{i_h}. Mais $W([I_{i_h}])$ n'est pas nécéssairement identique à ce semi-groupe comme le montre l'exemple suivant: Considérons l'anneau H formé de toutes les séries de la forme

$$\sum_{i,j\geqslant 0} \alpha_{ij} X^i Y^j \quad (\alpha_{ij} \in k),$$

avec $X = t^4$, $Y = t^{10}+t^{15}$. On montre facilement que $W(H)$ est formé des entiers

$$0, 4, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 25, 26,$$
$$28, 29, 30, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, \ldots.$$

Les ordres des éléments de I_4/X sont alors les entiers

$$0, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 21, 22,$$
$$24, 25, 26, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, \ldots$$

qui engendrent le semi-groupe

$$0, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 21, 22, 24,$$
$$25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, \ldots$$

tandis que $[I_4]$ contient l'élément $(Y/X)^2 - X^3 = 2t^{17} + t^{22}$ dont l'ordre est 17.

Remarque. Si pour un choix particulier de S_h, l'anneau $[I_h]$ est identique à I_h/S_h, il en est de même pour tous les choix de S_h. En effet, $S'_h = \epsilon S_h$ étant un autre élément d'ordre h de H, on aura

$$I_h/S'_h = \epsilon^{-1} I_h/S_h = \epsilon^{-1}[I_h] = [I_h];$$

puisque tout élément S de $[I_h]$ est égal à l'élément ϵS de $[I_h]$ multiplié par ϵ^{-1}.

Définition. Nous disons qu'un anneau H est canonique si l'on a $[I_h] = I_h/S_h$ quelque soit $h \in W(H)$.

Remarque. Si H est un anneau canonique, les entiers

$$i_h - i_h = 0,\ i_{h+1} - i_h,\ i_{h+2} - i_h,\ \ldots$$

forment un semi-groupe quelque soit h. *Un semi-groupe d'entiers non négatifs*

$$i_0 = 0,\ i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_h,\ \ldots$$

est appelé canonique si la suite

$$i_h - i_h = 0,\ i_{h+1} - i_h,\ i_{h+2} - i_h,\ \ldots$$

est un semi-groupe pour chaque h. Si la suite des entiers croissants

$$i_0 = 0,\ i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_h,\ \ldots$$

est un semi-groupe canonique, les séries entières

$$\sum_{h=0}^{\infty} \alpha_h t^{i_h} \quad (\alpha_h \in k),$$

forment visiblement un anneau canonique. *$W(H)$ peut être canonique sans qu'il en soit de même pour H*: L'anneau H formé des séries de la forme $\sum_{i,j,l\geqslant 0} \alpha_{ijl}X^iY^jZ^l(\alpha_{ijl}\in k)$, avec $X = t^4$, $Y = t^{10}+t^{15}$, $Z = t^{27}$, est tel que les ordres

$$0, 4, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, \ldots$$

de ses éléments forment, comme on le vérifie facilement, un semi-groupe canonique, alors que H n'est pas un anneau canonique, puisque $[I_4]$ contient l'élément d'ordre 17, $(Y/X)^2-X^3 = 2t^{17}+t^{22}$, qui n'est pas contenu dans I_4/X.

THÉORÈME AUXILIAIRE 4. *La partie commune de plusieurs anneaux canoniques est un anneau canonique.*

Démonstration. Il suffit évidemment de démontrer le théorème pour la partie commune de deux anneaux canoniques seulement. H et H' étant deux anneaux canonique, soit S un élément commun de ces deux anneaux. Soit h l'ordre de S et soient I_h et I'_h les ensembles d'éléments de H et de H' dont les ordres ne sont pas inférieurs à h. Il suffit de montrer que

$$(I_h \cap I'_h)/S = I_h/S \cap I'_h/S$$

est un anneau. Or I_h/S et I'_h/S étant des anneaux, il en est de même de leur partie commune.

Remarque. Si H est un anneau canonique, il en est de même de $[I_{i_h}]$. Considérons en effet l'ensemble des éléments de I_{i_h}. Ces éléments sont de la forme

$$\sum_{\nu=h}^{\infty} \alpha_\nu S_{i_\nu} \quad (\alpha_\nu\in k).$$

H étant un anneau canonique l'anneau $[I_h]$ est constitué par l'ensemble des séries de la forme $\sum_{\nu=h}^{\infty}\alpha_\nu \dfrac{S_{i_\nu}}{S_{i_h}}$ dont les ordres sont les nombres

$$0, j_1 = i_{h+1}-i_h, j_2 = i_{h+2}-i_h, \ldots.$$

L'ensemble des éléments de $[I_{i_h}]$ d'ordres supérieurs ou égaux à j_l est alors l'ensemble des séries de la forme

$$\sum_{\nu=h+l}^{\infty} \alpha_\nu \frac{S_{i_\nu}}{S_{i_h}} \quad (\alpha_\nu\in k).$$

$S_{i_{h+l}}/S_{i_h}$ étant un élément d'ordre $j_l = i_{h+l}-i_h$ de cet ensemble, l'ensemble des éléments

$$\left(\sum_{\nu=h+l}^{\infty} \alpha_\nu \frac{S_{i_\nu}}{S_{i_h}}\right)\Bigg/\frac{S_{i_{h+l}}}{S_{i_h}} = \sum_{\nu=h+l}^{\infty} \alpha_\nu \frac{S_{i_\nu}}{S_{i_{h+l}}}$$

constituent l'anneau $[I_{i_{h+l}}]$.

$\mathfrak{G}$ étant l'ensemble de tous les entiers non négatifs,* on montre d'une manière analogue que si

$$\{0,\ i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_r+\mathfrak{G}\nu\}$$

est une semi-groupe canonique, il en est de même de

$$\{0,\ i_{h+1}-i_h,\ \ldots,\ i_r-i_h+\mathfrak{G}\nu\}.$$

Remarque. Si les entiers

$$i_0=0,\ i_1,\ i_2,\ \ldots,\ i_h,\ \ldots$$

forment une semi-groupe canonique on a $i_{h+1}-i_h \leqslant i_h-i_{h-1}$. En effet, les entiers $i_{h-1}-i_{h-1}=0,\ i_h-i_{h-1},\ i_{h+1}-i_{h-1},\ \ldots,\ i_r-i_{h-1},\ \ldots$ devant former un semi-groupe, on doit avoir $i_{h+1}-i_{h-1} \leqslant 2(i_h-i_{h-1})$; d'où résulte immédiatement l'inégalité $i_{h+1}-i_h \leqslant i_h-i_{h-1}$.

3. D'après la remarque qui suit immédiatement le théorème auxiliaire 1, $I_{(N-1)\nu}$ contient toutes les séries entières dont les ordres en $T=\tau^\nu$ sont supérieurs ou égaux à $N-1$ pourvu que N soit suffisamment grand. $[I_{(N-1)\nu}]$ est alors l'anneau $k[T]$ de toutes les séries entières en T avec coefficients dans k. Cette remarque nous conduit à la construction suivante qui nous permet d'obtenir tous les anneaux canoniques ainsi que tous les semi-groupes canoniques:

On commence par considérer l'anneau $[I_{(N-1)\nu}]=k[T]$ de toutes les séries entières en T de même que le semi-groupe $\mathfrak{G}\nu$ des multiples entiers non négatifs de ν. On choisit un élément d'ordre non nul, T_{r-1} de $[I_{(N-1)\nu}]$ de même qu'un élément non nul ν_{r-1} $(=w(T_{r-1})\dagger)$ de $\mathfrak{G}\nu$ et l'on pose

$$[I_{i_{r-1}}]=k+T_{r-1}[I_{(N-1)\nu}] \quad (i_r=(N-1)\nu).$$

L'anneau $[I_{i_{r-1}}]$ et le semi-groupe $\{0,\ \nu_{r-1}+\mathfrak{G}\nu\}$ $(=W([I_{i_{r-1}}]))$ sont canoniques. On choisit de même un élément T_{r-2} d'ordre non nul dans $[I_{i_{r-1}}]$ ainsi qu'un entier positif ν_{r-2} $(=w(T_{r-2}))$ dans $\{0,\ \nu_{r-1}+\mathfrak{G}\nu\}$, et l'on pose

$$\begin{aligned}[I_{i_{r-2}}] &= k+T_{r-2}[I_{i_{r-1}}]\\ &= k+kT_{r-2}+T_{r-2}T_{r-1}k[T],\\ W([I_{i_{r-2}}]) &= \{0,\ \nu_{r-2},\ \nu_{r-2}+\nu_{r-1}+\mathfrak{G}\nu\}.\end{aligned}$$

On obtient ainsi un nouvel anneau canonique ainsi qu'un semi-groupe canonique. En continuant de cette manière on obtient finalement l'anneau canonique

$$k+kT_1+kT_1T_2+\ldots+kT_1T_2\ldots T_{r-2}+k[T]\,T_1T_2\ldots T_{r-2}T_{r-1}$$

---

* Dans ce qui suit $\mathfrak{G}$ désignera toujours l'ensemble de tous les entiers non négatifs.

† Dans ce qui suit $w\left(\sum_{i=\mu}^{\infty}\alpha_i t^i\right)$ désigne l'ordre en t de la série entière $\sum_{i=\mu}^{\infty}\alpha_i t^i$.

et le semi-groupe canonique

$$\{0, \nu_1, \nu_1+\nu_2, \dots, \nu_1+\nu_2+\dots+\nu_{r-2}, \nu_1+\nu_2+\dots+\nu_{r-1}+\mathfrak{G}\nu\}$$

avec
$$T_h \in kT_{h+1}+kT_{h+1}T_{h+2}+\dots+k[T]\,T_{h+1}T_{h+2}\dots T_{r-1},$$

$$(w(T_h)=)\,\nu_h \in \{\nu_{h+1}, \nu_{h+1}+\nu_{h+2}, \dots, \nu_{h+1}+\nu_{h+2}+\dots+\nu_{r-1}+\mathfrak{G}\nu\}.$$

4. Etant donné un anneau H la partie commune de tous les anneaux canoniques contenant H est un anneau canonique $^*H$ que nous appelerons la *fermeture canonique* de H. De même $G=\{0, i_1, i_2, \dots, i_{r-1}+\mathfrak{G}\nu\}$ étant un semi-groupe d'entiers non négatifs ($\nu=(i_1, i_2, \dots, i_{r-1}, i_{r-1}+\nu)$), la partie commune de tous les semi-groupes canoniques contenant G est un semi-groupe canonique $^*G$; nous l'appelerons la *fermeture canonique* de G.

D'après cette définition il est clair que $W(^*H)$ contient le semi-groupe canonique $^*W(H)$; mais ces deux groupes ne sont pas nécéssairement égaux, puisque $W(H)$ peut être canonique sans que H le soit.

5. Etant donné le semi-groupe

$$G=\{0, i_1, i_2, \dots, i_{r-1}+\mathfrak{G}\nu\} \quad (\nu=(i_1, i_2, \dots, i_{r-1}, i_{r-1}+\nu)),$$

la fermeture canonique $^*G$ de G peut s'obtenir de la manière suivante: On considère le semi-groupe $\{0, i_1+G_1\}$ ou G_1 est le semi-groupe des entiers de la forme

$$\alpha_2(i_2-i_1)+\alpha_3(i_3-i_1)+\dots+\alpha_n(i_n-i_1),$$

les coefficients α_1, α_2, ..., α_n étant des entiers non négatifs. Le semi-groupe $\{0, i_1+G_1\}$ qui contient alors G est visiblement contenu dans $^*G$. Remarquons que les éléments de G_1 qui sont inférieur à $i_{h+1}-i_1$ sont de la forme

$$\alpha_2(i_2-i_1)+\alpha_3(i_3-i_1)+\dots+\alpha_h(i_h-i_1);$$

les nombres
$$\alpha_2(i_2-i_1)+\alpha_3(i_3-i_1)+\dots+\alpha_n(i_n-i_1)$$

avec $n \geqslant h+1$, $\alpha_n \neq 0$ sont en effet supérieur ou égaux à $i_{h+1}-i_1$. En particulier l'élément le plus petit de G_1 est i_2-i_1. Il en résulte en outre que les éléments de $\{0, i_1+G_1\}$ qui sont inférieurs à i_{h+1} ne dépendent que des nombres i_1, i_2, ..., i_h, dont ils sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers. Le semi-groupe $\{0, i_1+G_1\}$ étant contenu dans $^*G$, il en serait de même de $\{0, i_1+{}^*G_1\}$ qui contient $\{0, i_1+G_1\} \supseteq G$, et qui est canonique. On a donc $^*G=\{0, i_1+{}^*G_1\}$. La construction de $^*G$ est ainsi ramenée à la construction de la fermeture canonique d'un semi-groupe de la forme

$$G_1=\{0, i'_1, i'_2, \dots, i'_{r'-1}+\mathfrak{G}\nu\};$$

pour lequel on a $i'_{r'-1} \leqslant i_{r-1}-i_1$. La répétition de cette construction nous permet donc de ramener la construction proposée à celle de la fermeture canonique d'un semi-groupe G_N qui se réduit, pour N suffisamment grand, au semi-groupe $\mathfrak{G}\nu$ de tous les multiples non négatifs de ν. $\mathfrak{G}\nu$ étant sa propre fermeture canonique, la construction proposée se trouve ainsi effectuée. Remarquons que les éléments de $^*G$ ainsi construits ne dépendent que des éléments de G qui ne les dépassent pas; et qu'ils en sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers. Supposons en effet que ceci ait été démontré pour la fermeture $^*G_1$ de G_1. Les éléments de $^*G_1$, qui sont inférieurs à $i_{h+1}-i_1$, ne dépendent alors que des éléments de G_1 qui sont inférieurs à $i_{h+1}-i_1$, et ils en sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers; or ces derniers ne dépendent à leurs tours que des nombres $i_1, i_2, \ldots, i_h$ dont ils sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers. Il en résulte que les éléments de $\{0, i_1+{}^*G_1\} = {}^*G$ qui sont inférieurs à i_{h+1} ne dépendent que des $i_1, i_2, \ldots, i_h$, dont ils sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers.

Etant donné le semi-groupe canonique

$$^*G = \{0, i_1, i_2, \ldots, i_{r-1}+\mathfrak{G}\nu\} \quad (\nu = (i_1, i_2, \ldots, i_{r-1}, i_{r-1}+\nu)),$$

il n'existe qu'un nombre fini de semi-groupes g tels que $^*g = {}^*G$. Soit en effet

$$g = \{0, j_1, j_2, \ldots, j_s, j_{s+1}, \ldots\}$$

un tel semi-groupe. Soient $j_1, j_2, \ldots, j_n$ ceux des entiers $j_1, j_2, \ldots, j_s, \ldots$ qui sont inférieur à $i_{r+1} = i_{r-1}+2\nu$. i_{r-1} et $i_{r-1}+\nu$ étant des combinaisons linéaires à coefficients entiers des $j_1, j_2, \ldots, j_n$, le p.g.c.d. de ces nombres est ν. Or à chaque système d'entiers positifs inférieurs à $i_{r-1}+2\nu$ dont le p.g.c.d. est ν, on peut associer un multiple $j\nu$ de ν tel que tout semi-groupe d'entiers non négatifs contenant le système, contienne tous les multiples de ν supérieurs à $j\nu$. Soit $L\nu$ le plus grand des entiers $j\nu$ qui sont ainsi associés aux systèmes de multiples positifs de ν inférieurs à $i_{r-1}+2\nu$. Les semi-groupes g pour lesquels on a $^*g = {}^*G$ contiennent alors tous les multiples de ν qui dépassent $L\nu$ et ne diffèrent entre eux que par leurs éléments qui sont inférieurs à $L\nu$.

THÉORÈME 1. *La partie commune de tous les semi-groupes g tels que $^*g = {}^*G$, est un semi-groupe g_χ tel que $^*g_\chi = {}^*G$.*

Démonstration. Soit g un semi-groupe tel que l'on ait $^*g = {}^*G$ et tel qu'aucun sous semi-groupe de g ne possède cette propriété; nous allons montrer que $g = g_\chi$. Soit i le plus petit élément de g qui n'est pas contenu dans g_χ. Soient $i_0 = 0, i_1, i_2, \ldots, i_h$ les éléments de g et de g_χ qui sont inférieurs à i. i n'étant pas contenu dans g_χ, le nombre i n'est pas de la forme

$$\alpha_1 i_1 + \alpha_2 i_2 + \ldots + \alpha_h i_h,$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_h$ entiers non négatifs. D'autre part g_χ étant la partie commune des semi-groupes dont la fermeture canonique est $^*G$, il existe un semi-groupe g' tel que $^*g' = {}^*G$ qui ne contient pas le nombre i. Les éléments de $^*G = {}^*g$ qui sont inférieurs à i ne dépendant que des entiers $i_1, i_2, \ldots, i_h$, le semi-groupe g'' obtenu en suprimant dans g' tous les entiers positifs inférieurs à i autres que $i_1, i_2, \ldots, i_h$ est encore tel que $^*g'' = {}^*G$. Il en résulte que les éléments de $^*G$ qui sont inférieurs ou *ègaux* à i ne dépendent que des nombres $i_1, i_2, \ldots, i_h$; puisque g'' ne contient pas le nombre i. Donc la fermeture du sous semi-groupe de g obtenu en y suprimant le nombre i est encore égal à $^*G$. Contrairement au choix de g. On a donc $g_\chi = g$ et par conséquent $^*g_\chi = {}^*G$.

Le sous semi-groupe g_χ défini dans l'énconcé du théorème 1 s'appelle le *sous semi-groupe caractéristique* de tous les g tels que $^*g = {}^*G$. Il est clair que le semi-groupe g_χ est tel que tout sous semi-groupe propre de g_χ ait une fermeture canonique distinct de $^*g_\chi = {}^*G$. Inversement si g_χ est tel que pour tout sous semi-groupe propre g' de g_χ on ait $^*g' \neq {}^*g_\chi$, g_χ est son propre sous semi-groupe caractéristique.

$g_\chi = \{0, i_1, i_2, \ldots, i_{r-1}, i_r, \ldots\}$ étant le sous semi-groupe caractéristique de g, considérons les entiers $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_h$ définis de la manière suivante: $\chi_1 = i_1$; χ_2 est le plus petit de ceux des entiers $i_1, i_2, \ldots, i_r, \ldots$ qui ne soient pas de la forme $\alpha_1\chi_1$ avec α_1, entier non négatif; χ_3 est le plus petit de ceux des entiers $i_1, i_2, \ldots, i_r, \ldots$ qui ne soient pas de la forme $\alpha_1\chi_1 + \alpha_2\chi_2$ avec α_1, α_2 entiers non négatifs; enfin $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_n$ étant définis χ_{n+1} est le plus petit de ceux des entiers $i_1, i_2, \ldots, i_r, \ldots$ qui ne soient pas de la forme

$$\alpha_1\chi_1 + \alpha_2\chi_2 + \ldots + \alpha_n\chi_n$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ entiers non negatifs. Les nombres $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_h$ ainsi définis s'appellent *les caractères* de g.

THÉORÈME 2. *$\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_l$ étant un ensemble d'entiers positifs, l'ensemble des caractères du semi-groupe g des entiers de la forme*

$$\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \ldots + \alpha_l\gamma_l,$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ entiers non négatifs, est contenu dans l'ensemble $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$.

Démonstration. Soit χ_i le plus petit des caractères $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_h$ de g qui ne soient pas contenus dans l'ensemble $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$. D'après la définition de g_χ, χ_i est de la forme $\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \ldots + \alpha_{l'}\gamma_{l'}$ avec $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{l'}$ entiers non négatifs; $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{l'}$ étant ceux des entiers $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$ qui sont inférieurs à χ_i. $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$ étant des éléments de la fermeture canonique de g_χ, tout semi-groupe canonique contenant $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{i-1}$ contient aussi $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_{l'}$. Ceci impliquerait que la fermeture canonique du semi-groupe des combinaisons linéaires à coefficients entiers non négatifs de $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_{i-1}$, $\chi_{i+1}, \ldots, \chi_h$ contient χ_i, et il en résulterait que g_χ n'est pas un semi groupe caractéristique. Donc l'ensemble $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$ contient nécéssairement l'ensemble $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_h$.

THÉORÈME 3. *g étant le semi-groupe des combinaisons linéaires à coefficients entiers non négatifs de $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_l$, les entiers*

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{N-2}, \nu_{N-1}, \nu$$

tels que l'on ait

$$^*g = \{0, \nu_1, \nu_1 + \nu_2, \ldots, \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_{N-1} + \mathfrak{G}\nu\}$$

se déduisent de $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$ par l'algorithme quasi-jacobien de Du Val. Les entiers $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{N-1}, \nu$ y figurent comme diviseurs, tandis que les quotients partiels représentent les nombres de fois que chacun des diviseurs est répété dans la suite $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{N-1}, \nu$. Réciproquement si les nombres*

$$\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{N-2}, \nu_{N-1}, \nu$$

se déduisent de $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$ par l'algorithme quasi-jacobien de Du Val, les quotients partiels étant les nombres de fois que chacun des diviseurs figure dans la suite $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{N-1}, \nu$, la fermeture canonique du semi groupe des entiers de la forme

$$\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2 + \ldots + \alpha_l\gamma_l,$$

avec $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ entiers non négatifs, est $^*g$.

Démonstration. ν étant le plus grand commun diviseur des éléments de g, on a $\gamma_1 \geqslant \nu$. Si $\gamma_1 = \nu$ le semi-groupe g est constitué par l'ensemble de tous les multiples de $\gamma_1 = \nu$, et l'on a $g = {}^*g = \{\mathfrak{G}\nu\}$. Dans ces conditions l'algorithme se termine dès le commencement. Admettons que la proposition ait été établie pour tout ensemble $\gamma_1' < \gamma_2' < \ldots < \gamma_{l'}'$ pour lequel $\gamma_1' < \gamma_1$, et établissons le pour l'ensemble $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$. Soit γ_i le plus petit des entiers $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$ qui ne soit pas divisible par γ_1. Soit q le quotient de γ_i par γ_1 et considérons le semi-groupe Γ des combinaisons linéaires à coefficients entiers non négatifs des nombres $\gamma_i - q\gamma_1\, \gamma_{i+1} - q\gamma_1, \ldots, \gamma_l - q\gamma_1, \gamma_1$. Le semi-groupe $^*g$ contient visiblement le semi-groupe $\{0, \gamma_1, 2\gamma_1, \ldots, q\gamma_1 + \Gamma\}$ qui contient g. On a donc

$$^*g = \{0, \gamma_1, 2\gamma_1, \ldots, q\gamma_1 + {}^*\Gamma\},$$

c.à.d.

$$\nu_1 = \gamma_1, \ \nu_2 = \gamma_1, \ \ldots, \ \nu_q = \gamma_1,$$

$$^*\Gamma = \{0, \nu_{q+1}, \nu_{q+1} + \nu_{q+2}, \ldots, \nu_{q+1} + \ldots + \nu_{N-1} + \mathfrak{G}\nu\}.$$

Les entiers $\gamma_i - q\gamma_1, \gamma_{i+1} - q\gamma_1, \ldots, \gamma_l - q\gamma_i, \gamma_1$ étant les restes de la $(i-1)$-ième division de l'algorithme appliqué aux nombres $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$, il suffit de montrer que les entiers $\nu_{q+1}, \nu_{q+2}, \ldots, \nu_{N-1}, \nu$ s'obtiennent en appliquant l'algorithme aux entiers $\gamma_i - q\gamma_1, \gamma_{i+1} - q\gamma_1, \ldots, \gamma_l - q\gamma_1, \gamma_1$. Or $\gamma_i - q\gamma_1$ étant inférieur à γ_1, ceci a été admis comme établi. Réciproquement, si les

* Du Val, loc. cit.

nombres $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{N-1}, \nu$ se déduisent de $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$ par l'algorithme quasi-jacobien de Du Val, la fermeture canonique du semi-groupe des combinaisons linéaires à coefficients entiers non négatifs de $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$ est

$$\{0, \nu_1, \nu_1+\nu_2, \ldots, \nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_{N-1}+\mathfrak{G}\nu\}$$

d'après la proposition directe que l'on vient d'établir.

$\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_h$ étant les caractères de g, le semi groupe des combinaisons linéaires à coefficients entiers non négatif de $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_h$ est le sous semi-groupe caractéristique g_χ de g. Il en résulte, d'après les théorèmes 3 et 2, que les entiers $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{N-1}, \nu$ se déduisent des caractères de g par l'algorithme quasi-jacobien de Du Val, et que tous les systèmes d'entiers non négatifs $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_l$, pour lesquels l'algorithme fournit le même résultat, se déduisent du système des caractères de g en lui adjoignant des nombres arbitrairement choisis dans $^*g$.

6. Considérons maintenant un anneau H et sa fermeture canonique $^*H$. L'anneau H étant de la forme

$$H = k+kS_{i_1}+kS_{i_2}+\ldots+k[T]\,S_{i_h}$$

sa fermeture canonique $^*H$ peut se construire de la manière suivante:

Désignons par H_1 l'anneau

$$[I_{i_1}] = \Sigma k\left(\frac{S_{i_2}}{S_{i_1}}\right)^{\alpha_2}\left(\frac{S_{i_3}}{S_{i_1}}\right)^{\alpha_3}\ldots\left(\frac{S_{i_{h-1}}}{S_{i_1}}\right)^{\alpha_{h-1}}+k[T]\frac{S_{i_h}}{S_{i_1}},$$

où la sommation est étendue à tous les systèmes d'exposants entiers non négatifs $\alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{h-1}$ tels que $\alpha_2(i_2-i_1)+\alpha_3(i_3-i_1)+\ldots+\alpha_{h-1}(i_{h-1}-i_1)$ soit inférieur à i_h-i_1. La fermeture canonique $^*H$ de H contient visiblement

$$k+H_1S_{i_1}$$

qui contient H et l'on a $^*H = k+{}^*H_1S_{i_1}$, en désignant par $^*H_1$, la fermeture canonique de H_1. D'une manière générale H_i étant défini, désignons par H_{i+1} l'anneau déduit de H_i de la même manière que H_1 est déduit de H. Il est clair que pour N suffisamment grand H_N est identique à $k[T]$. Soit T_{i+1} un élément d'ordre positif le plus petit de H_i. On a alors visiblement

$$\begin{aligned}
{}^*H &= k+kT_1+{}^*H_2T_1T_2 \qquad\qquad (\text{avec } T = S_i)\\
&= k+kT_1+kT_1T_2+{}^*H_3T_1T_2T_3\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&= k+kT_1+kT_1T_2+\ldots+kT_1T_2\ldots T_{N-1}+{}^*H_NT_1T_2\ldots T_{N-1}T_N\\
&= k+kT_1+kT_1T_2+\ldots+kT_1T_2\ldots T_{N-1}+k[T]\,T_1T_2\ldots T_{N-1}T_N.
\end{aligned}$$

Remarque. n étant un entier quelconque, l'anneau $k+H_1S_{i_1} \bmod t^n$ ne dépend que de $H \bmod t^n$. Pour le montrer il suffit d'observer que $H_1 \bmod t^{n-i_1}$

ne dépend que de $H \bmod t^n$. De même l'anneau $k+H_2T_2 \bmod t^{n-i_1}$ ne dépend que de $H_1 \bmod t^{n-i_1}$. L'anneau $k+kT_1+H_2T_1T_2 \bmod t^n$ ne dépend donc que de $H \bmod t^n$. En continuant de cette manière on observe finalement que

$$^*H = k+kT_1+kT_1T_2+\ldots+kT_1T_2\ldots T_{N-1}+H_NT_1T_2\ldots T_N \mod t^n$$

ne dépend que de $H \bmod t^n$.

THÉORÈME AUXILIAIRE 5. *Si $H \bmod t^n$ est identique à $^*H \bmod t^n$, l'ensemble $^*H \bmod t^{n+1}$ est identique à l'un des ensembles*

$$k+kS_{i_1}+kS_{i_2}+\ldots+kS_{i_{l-1}}+[I_{i_l}]S_{i_l} \mod t^{n+1} \quad (i_l<n+1).$$

Démonstration. L'ensemble $^*H \bmod t^n$ étant identique à $H \bmod t^n$, l'ensemble $^*H \bmod t^{n+1}$, qui contient l'ensemble $H \bmod t^{n+1}$, est constitué par les éléments de la forme

$$S+\alpha\,{}^*S_n \mod t^{n+1}$$

où S est un élément de H, $^*S_n$ un élément fixe d'ordre n de $^*H$, et α un élément de k. Donc tout anneau $H' \bmod t^{n+1}$, contenant l'anneau $H \bmod t^{n+1}$, est identique à $H \bmod t^{n+1}$, s'il est contenu dans $^*H \bmod t^{n+1}$ sans lui être identique. Considérons maintenant l'anneau

$$k+S_{i_1}[I_{i_1}] \mod t^{n+1}$$

qui contient $H \bmod t^{n+1}$ et qui est contenu dans $^*H \bmod t^{n+1}$. D'après ce que nous venons de remarquer l'anneau $k+S_{i_1}[I_{i_1}] \bmod t^{n+1}$ est identique à l'un des deux anneaux

$$^*H \mod t^{n+1}, \quad H \mod t^{n+1}.$$

S'il n'est pas identique au premier on a $[I_{i_1}] = I_{i_1}/S_{i_1} \bmod t^{n+1-i_1}$. Comme $^*[I_{i_1}] \bmod t^{n+1-i_1}$ ne dépend que de $[I_{i_1}] \bmod t^{n+1-i_1}$, les ensembles

$$^*[I_{i_1}] \mod t^{n+1-i_1}, \quad k+\frac{S_{i_2}}{S_{i_1}}{}^*[I_{i_2}] \mod t^{n+1-i_1}$$

seront alors identiques, puisque I_{i_2}/S_{i_1} est l'ensemble des éléments d'ordre positifs de I_{i_1}/S_{i_1}. Il en résulte que $^*H \bmod t^{n+1}$ est identique à l'un des deux anneaux

$$k+S_{i_1}[I_{i_1}] \mod t^{n+1}, \quad k+kS_{i_1}+{}^*[I_{i_2}]S_{i_2} \mod t^{n+1}.$$

Si $^*H \bmod t^{n+1}$ n'est identique ni à $k+S_{i_1}[I_{i_1}] \bmod t^{n+1}$ ni à

$$k+kS_{i_1}+S_{i_2}[I_{i_2}] \mod t^{n+1},$$

ces deux anneaux sont identiques à $H \bmod t^{n+1}$. Dans ces conditions on aura $[I_{i_2}] \equiv I_{i_2}/S_{i_2} \bmod t^{n+1-i_2}$, dont on peut déduire l'identité des deux ensembles

$$^*[I_{i_2}] \mod t^{n+1-i_2}, \quad k+{}^*[I_{i_3}]\frac{S_{i_3}}{S_{i_2}} \mod t^{n+1-i_2}.$$

${}^*H \bmod t^{n+1}$ est donc identique à l'un des ensembles

$$k+[I_{i_1}]\,S_{i_1} \bmod t^{n+1},\quad k+kS_{i_1}+[I_{i_2}]\,S_{i_2} \bmod t^{n+1},$$
$$k+kS_{i_1}+kS_{i_2}+{}^*[I_{i_3}]\,S_{i_3} \bmod t^{n+1}.$$

En continuant de cette manière on montre que ${}^*H \bmod t^{n+1}$ est identique à l'un des ensembles

$$\begin{array}{ll} k+[I_{i_1}]\,S_{i_1} & \bmod t^{n+1}, \\ k+kS_{i_1}+[I_{i_2}]\,S_{i_2} & \bmod t^{n+1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ k+kS_{i_1}+kS_{i_2}+\ldots+[I_{i_l}]\,S_{i_l} & \bmod t^{n+1}, \\ k+kS_{i_1}+kS_{i_2}+\ldots+kS_{i_l}+{}^*[I_{i_{l+1}}]\,S_{i_{l+1}} & \bmod t^{n+1}. \end{array}$$

Or pour $i_{l+1} \geqslant n+1$, le dernier de ces ensembles est $H \bmod t^{n+1}$. ${}^*H \bmod t^{n+1}$ est donc identique à l'un des ensembles

$$k+kS_{i_1}+kS_{i_2}+\ldots+[I_{i_l}]\,S_{i_l} \quad \bmod t^{n+1}$$

avec $\leqslant i_l n$.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ étant des séries entières d'ordres positifs en t, nous désignerons par $k[X_1, X_2, \ldots, X_n]$ l'anneau formé des séries de la forme

$$\Sigma \alpha_{j_1 j_2 \ldots j_n} X_1^{j_1} X_2^{j_2} \ldots X_n^{j_n}$$

avec $\alpha_{j_1 j_2 \ldots j_n} \in k$, la sommation étant étendue à tous les systèmes d'entiers $j_1, j_2, \ldots, j_n$ non négatifs.

THÉORÈME AUXILIAIRE 6. *Les éléments $Y_1, Y_2, \ldots, Y_\nu, \ldots$ de ${}^*H$ étant choisis de manière que $w(Y_j)$ soit le plus petit élément de $W({}^*H)$ non contenu dans $W(k[Y_1, Y_2, \ldots, Y_{j-1}])$, si les éléments $Y_1', Y_2', \ldots, Y_{\nu-1}'$, sont respectivement congrus à $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{\nu-1} \bmod t^{w(Y_\nu)}$, le plus petit élément de $W({}^*H)$ non contenu dans $W(k[Y_1', Y_2', \ldots, Y_{\nu-1}'])$ est $w(Y_\nu)$.*

Démonstration. Les anneaux

$${}^*H \bmod t^{w(Y_\nu)},\quad k[Y_1, Y_2, \ldots, Y_{\nu-1}] \bmod t^{w(Y_\nu)},\quad k[Y_1', \ldots, Y_{\nu-1}'] \bmod t^{w(Y_\nu)}$$

étant visiblement identiques il suffit de montrer que $k[Y_1', Y_2', \ldots, Y_{\nu-1}']$ ne contient pas d'élément d'ordre $w(Y_\nu)$. Tout élément de $k[Y_1', Y_2', \ldots, Y_{\nu-1}'] \bmod t^{w(Y_\nu)+1}$ étant de la forme

$$P(Y_1', Y_2', \ldots, Y_{\nu-1}') \bmod t^{w(Y_\nu)+1}$$

où $P(Y_1', Y_2', \ldots, Y_{\nu-1}')$ est un polynôme à coefficients dans k, il suffit de montrer que $w(P(Y_1', Y_2', \ldots, Y_{\nu-1}'))$ ne peut être égal à $w(Y_\nu)$. Si le polynôme $P(Y_1', Y_2', \ldots, Y_{\nu-1}')$ contient un terme constant, $Y_1', Y_2', \ldots, Y_{\nu-1}'$ étant tous d'ordres positifs, on aura $w(P(Y_1', Y_2', \ldots, Y_{\nu-1}')) = 0 \neq w(Y_\nu)$. Si

$$P(Y_1', Y_2', \ldots, Y_{\nu-1}')$$

contient des termes de degrés 1 sans contenir de terme constant, on peut l'écrire sous la forme

$$P_1(Y'_1, Y'_2, \ldots, Y'_{j-1}) + \beta Y'_j + P_2(Y'_1, Y'_2, \ldots, Y'_{\nu-1})$$

avec $\beta \neq 0$; $P_2(Y'_1, Y'_2, \ldots, Y'_{\nu-1})$ étant la somme des termes de degrés non nuls par rapport à l'ensemble $Y'_j, Y'_{j+1}, \ldots, Y'_{\nu-1}$ sauf le terme $\beta Y'_j$. $w(P_2(Y'_1, Y'_2, \ldots, Y'_{\nu-1}))$ est alors supérieur à $w(Y'_j)$ qui est par définition différent de l'ordre de

$$P_1(Y'_1, Y'_2, \ldots, Y'_{j-1}) \equiv P_1(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{j-1}) \bmod t^{w(Y_\nu)}.$$

On a donc

$$w(P(Y'_1, Y'_2, \ldots, Y'_{\nu-1})) = \min(w(Y'_j)), \quad w(P_1(Y'_1, Y'_2, \ldots, Y'_{j-1})) < w(Y_\nu).$$

Si enfin $P(Y'_1, Y'_2, \ldots, Y'_{\nu-1})$ ne contient aucun terme de degré 1 ni de degré zéro, on peut écrire

$$P(Y'_1, Y'_2, \ldots, Y'_{\nu-1}) \equiv P(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{\nu-1}) \bmod t^{w(Y_\nu)+1}$$

$w(P(Y_1, Y_2, \ldots, Y_{\nu-1}))$ étant différent de $w(Y_\nu)$ il en est de même de

$$w(P(Y'_1, Y'_2, \ldots, Y'_{\nu-1})).$$

THÉORÈME AUXILIAIRE 7. $Y_1, Y_2, \ldots, Y_{\nu-1}, Y_\nu$ et $Y'_1, Y'_2, \ldots, Y'_{\nu-1}$ *ayant les mêmes significations que dans l'énoncé du théorème auxiliaire* 6, *si la fermeture canonique de* $k[Y_1, Y_2, \ldots, Y_{\nu-1}]$ *ne contient pas d'élément d'ordre* $w(Y_\nu)$, *il en est de même de fermeture canonique de* $k[Y'_1, Y'_2, \ldots, Y'_{\nu-1}]$.

Démonstration. Soient $i_0 = 0, i_1, i_2, \ldots, i_\mu, \ldots$ les orders des éléments de $k[Y'_1, Y'_2, \ldots, Y'_{\nu-1}]$ écrits dans l'ordre croissant et soit I'_{i_μ} l'ensemble des éléments de $k[Y'_1, Y'_2, \ldots, Y'_{\nu-1}]$ dont les ordres ne sont pas inférieurs à i_μ. Désignons par S'_{i_l} un élément d'ordre i_l de $k[Y'_1, Y'_2, \ldots, Y'_{\nu-1}]$, et par $\mathfrak{H}'$ la fermeture canonique de $k[Y'_1, Y'_2, \ldots, Y'_{\nu-1}]$. Les anneaux

$$^*H \bmod t^{w(Y_\nu)}, \quad \mathfrak{H}' \bmod t^{w(Y_\nu)}, \quad k[Y'_1, Y'_2, \ldots, Y'_{\nu-1}] \bmod t^{w(Y_\nu)}$$

étant identiques, d'après le théorème auxiliaire 5 l'anneau $\mathfrak{H}' \bmod t^{w(Y_\nu)+1}$ est identique à l'un des anneaux

$$k + kS'_{i_1} + kS'_{i_2} + \ldots + [I'_{i_l}]\, S'_{i_l} \quad \bmod t^{w(Y_\nu)+1}$$

avec $i_l < w(Y_\nu)$. Soit μ le plus petit des entiers l pour lesquels cette identité a lieu. Si $\mu = 0$, $\mathfrak{H}' \bmod t^{w(Y_\nu)+1}$ est identique à $k[Y'_1, Y'_2, \ldots, Y'_{\nu-1}] \bmod t^{w(Y_\nu)+1}$ qui ne contient pas d'élément d'ordre $w(Y_\nu)$. Supposons donc que μ est positif. Pour montrer que $\mathfrak{H}'$ ne contient pas d'élément d'ordre $w(Y_\nu)$, il suffit de montrer que $[I'_{i_\mu}]$ ne contient pas d'élément d'ordre $w(Y_\nu) - i_\mu$. Soient I_{i_μ} et $^*I_{i_\mu}$ les ensembles des éléments d'ordres non inférieurs à i_μ de $k[Y_1, \ldots, Y_{\nu-1}]$ et de $^*H$. Les anneaux

$$^*H \bmod t^{w(Y_\nu)}, \quad k[Y_1, Y_2, \ldots, Y_{\nu-1}] \bmod t^{w(Y_\nu)}, \quad k[Y'_1, Y'_2, \ldots, Y'_{\nu-1}] \bmod t^{w(Y_\nu)}$$

étant identiques, il en est de même des ensembles

$$[{}^*I_{i_\mu}] \quad \mathrm{mod}\, t^{w(Y_\nu)-i_\mu}$$

$$I_{i_\mu}/S_{i_\mu} \,\mathrm{mod}\, t^{w(Y_\nu)-i_\mu}, \quad I'_{i_\mu}/S'_{i_\mu} \,\mathrm{mod}\, t^{w(Y_\nu)-i_\mu},$$

où S_{i_μ} est une élément de $k[Y_1, Y_2, \ldots, Y_{\nu-1}]$, tel que l'on ait

$$S_{i_\mu} \equiv S'_{i_\mu} \quad \mathrm{mod}\, t^{w(Y_\nu)}.$$

Il en résulte qu'on peut associer à tout élément Z' de I'_{i_μ}/S'_{i_μ} un élément Z de I_{i_μ}/S_{i_μ} de manière que l'on ait

$$Z = Z' \quad \mathrm{mod}\, t^{w(Y_\nu)-i_\mu}.$$

Considérons en particulier un ensemble d'éléments $Z'_1, Z'_2, \ldots, Z'_\rho$ de I'_{i_μ}/S'_{i_μ} choisis de la manière suivante:

(1) Z'_1 est un élément d'ordre positif le plus petit de I'_{i_μ}/S'_{i_μ},

(2) $Z'_1, Z'_2, \ldots, Z'_{j-1}$ étant choisis, on choisit Z'_j de manière que $w(Z'_j)$ soit le plus petit élément positif de $W(I'_{i_\mu}/S'_{i_\mu})$ qui ne soit pas contenu dans $W(k[Z'_1, Z'_2, \ldots, Z'_{j-1}])$,

(3) $w(Z'_\rho) < w(Y_\nu) - i_\mu + 1$ et tout élément de $W(I'_{i_\mu}/S'_{i_\mu})$ inférieur à $w(Y_\nu) - i_\mu + 1$ soit contenu dans $W(k[Z'_1, Z'_2, \ldots, Z'_\rho])$.

$k[Y'_1, Y'_2, \ldots, Y'_{\nu-1}] \,\mathrm{mod}\, t^{w(Y_\nu)+1}$ étant distinct de $\mathfrak{H}' \,\mathrm{mod}\, t^{w(Y_\nu)+1}$ tandis que $k[Y'_1, Y'_2, \ldots, Y'_{\nu-1}] \,\mathrm{mod}\, t^{w(Y_\nu)}$ est identique à $\mathfrak{H}' \,\mathrm{mod}\, t^{w(Y_\nu)}$, l'anneau $k[Y'_1, Y'_2, \ldots, Y'_{\nu-1}]$ ne peut contenir d'éléments d'ordres $w(Y_\nu)$. Il en résulte que les nombres $w(Z'_1), w(Z'_2), \ldots, w(Z'_\rho)$ sont inférieurs à $w(Y_\nu) - i_\mu$. Des conditions imposées au choix des $Z'_1, Z'_2, \ldots, Z'_\rho$ résulte en outre l'identité des anneaux

$$[I'_{i_\mu}] \,\mathrm{mod}\, t^{w(Y_\nu)-i_\mu+1}, \quad k[Z'_1, Z'_2, \ldots, Z'_\rho] \,\mathrm{mod}\, t^{w(Y_\nu)-i_\mu+1};$$

il suffit donc de montrer que $k[Z'_1, Z'_2, \ldots, Z'_\rho]$ ne contient pas d'élément d'ordre $w(Y_\nu) - i_\mu$. Or soient $Z_1, Z_2, \ldots, Z_\rho$ les éléments de I_{i_μ}/S_{i_μ} tels que l'on ait

$$Z_j \equiv Z'_j \,\mathrm{mod}\, t^{w(Y_\nu)-i_\mu} \quad (j = 1, 2, \ldots, \rho).$$

La fermeture canonique de $k[Y_1, Y_2, \ldots, Y_{\nu-1}]$ ne contenant aucun élément d'ordre $w(Y_\nu)$, l'anneau $k[Z_1, Z_2, \ldots, Z_\rho]$ ne contient aucun élément d'ordre $w(Y_\nu) - i_\mu$. Les éléments $Z_1, Z_2, \ldots, Z_\rho, Z_{\rho+1} = Y_\nu/S_{i_\mu}$ de $[{}^*I_{i_\mu}]$ et les $Z'_1, Z'_2, \ldots, Z'_\rho$ remplissent donc les conditions de l'énoncé du théorème auxiliaire 6 vis à vis de l'anneau canonique $[{}^*I_{i_\mu}]$. L'anneau $k[Z'_1, Z'_2, \ldots, Z'_\rho]$ ne peut donc contenir d'éléments d'ordres $w(Z_{\rho+1}) = w(Y_\nu) - i_\mu$.

Considérons maintenant un ensemble d'éléments $X_1, X_2, \ldots, X_m$ de ${}^*H$ choisis de la manière suivante: X_1 est un élément d'ordre positif le plus petit de ${}^*H$; $X_1, X_2, \ldots, X_{l-1}$ étant choisis, X_l est un élément de ${}^*H$ tel que $w(X_l)$ soit le plus petit élément de $W({}^*H)$ qui ne soit pas contenu dans

$W(\mathfrak{H}_{l-1})$, où $\mathfrak{H}_{l-1}$ désigne la fermeture canonique de $k[X_1, X_2, \ldots, X_{l-1}]$. Les éléments de $W(^*H)$ étant des combinaisons linéaires à coefficients entiers non negatifs d'un nombre fini d'entre eux, les éléments X_1, X_2, ..., X_l, ... ainsi choisis ne peuvent être qu'en nombre fini. Un tel ensemble d'éléments $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ sera appelé dans ce qui suit une *base* de $^*H$.

THÉORÈME 4. *$(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ étant une base de $^*H$, les entiers*

$$w(X_1),\ w(X_2),\ \ldots,\ w(X_m)$$

ne dépendent que de $^*H$ et ils constituent une partie des caractères de $^*H$.

Démontrons d'abord la proposition suivante qui facilitera la démonstration de ce théorème.

THÉORÈME AUXILIAIRE 8. *$\mathfrak{H}_l$ étant la fermeture canonique de $k[X_1, X_2, \ldots, X_l]$ où $X_1, X_2, \ldots, X_m$ est une base de $^*H$, on peut choisir les éléments $Y_1, Y_2, \ldots, Y_\nu, \ldots$ de $\mathfrak{H}_l$ remplissant les conditions de l'énoncé du théorème auxiliaire* 6 *envisagé pour l'anneau canonique $\mathfrak{H}_l$* (c.à.d. *$w(Y_j)$ étant le plus petit élément de $W(\mathfrak{H}_l)$ non contenu dans $W(k[Y_1, Y_2, \ldots, Y_{j-1}])$) de manière que la suite $Y_1, Y_2, \ldots, Y_\nu, \ldots$ contienne l'ensemble $X_1, X_2, \ldots, X_l$.*

Démonstration. Pour $l = 1$, on a visiblement $\mathfrak{H}_1 = k[X_1]$ et l'on peut poser $Y_1 = X_1$. Supposons que la proposition ait été démontrée pour l et démontrons la pour $l+1$. Soient Y_1, Y_2, ..., Y_ν ceux des éléments choisis de $\mathfrak{H}_l$ dont les ordres sont plus petits que $w(X_{l+1})$. Les éléments de $W(\mathfrak{H}_l)$ qui sont inférieurs à $w(X_{l+1})$ sont alors les mêmes que ceux de $W(k[Y_1, Y_2, \ldots, Y_\nu])$. Le plus petit élément de $W(\mathfrak{H}_{l+1})$ non contenu dans $W(\mathfrak{H}_l)$ étant $w(X_{l+1})$, posons $Y_{\nu+1} = X_{l+1}$, et choisissons $Y_{\nu+2}$, $Y_{\nu+3}$, ... dans $\mathfrak{H}_{l+1}$ conformément à l'énoncé du théorème auxiliaire 6 envisagé pour $\mathfrak{H}_{l+1}$. La suite

$$Y_1,\ Y_2,\ \ldots,\ Y_\nu,\ Y_{\nu+1},\ \ldots$$

remplit alors les conditions de l'énoncé de la proposition que nous voulons démontrer pour $\mathfrak{H}_{l+1}$.

Démonstration du théorème 4. Soient X_1, X_2, ..., X_m et X'_1, X'_2, ..., $X'_{m'}$ deux bases de $^*H$. Si les entiers $w(X_1)$, $w(X_2)$, ..., $w(X_m)$ et les entiers $w(X'_1)$, $w(X'_2)$, ..., $w(X'_{m'})$ n'étaient pas les mêmes, l'un au moins des entiers $(w(X_1), w(X_2), \ldots, w(X_m), w(X'_1), w(X'_2), \ldots, w(X'_{m'}))$ n'appartient qu'à l'un des ensembles $(w(X_1), w(X_2), \ldots, w(X_m))$, $(w(X'_1), w(X'_2), \ldots, w(X'_{m'}))$. Soit $w(X'_{l+1})$ le plus petit de ces entiers qui n'appartient qu'à l'un de ces ensembles, et considérons les fermetures canoniques $\mathfrak{H}_l$, $\mathfrak{H}'_l$ des anneaux $k[X_1, X_2, \ldots, X_l]$, $k[X'_1, X'_2, \ldots, X'_l]$. D'après les choix des X'_j, X_j les anneaux $\mathfrak{H}_l \bmod t^{w(X_{l+1})}$ $\mathfrak{H}'_l \bmod t^{w(X'_{l+1})}$ sont respectivement identiques à $^*H \bmod t^{w(X_{l+1})}$, $^*H \bmod t^{w(X'_{l+1})}$. $w(X_{l+1})$ étant par définition supérieur à $w(X'_{l+1})$, l'anneau $\mathfrak{H}_l$ devrait contenir un élément d'ordre $w(X'_{l+1})$. Or soit $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_\nu, \ldots)$ un ensemble d'éléments de $\mathfrak{H}_l$ choisis conformément à l'énoncé du théorème auxiliaire 8 et soient $Y_1, Y_2, \ldots, Y_\nu$, ceux des éléments de cet ensemble dont les ordres sont inférieurs à $w(X'_{l+1})$. Les anneaux

$$^*H \bmod t^{w(X'_{l+1})}, \quad \mathfrak{H}_l \bmod t^{w(X_{l+1})}, \quad \mathfrak{H}'_l \bmod t^{w(X'_{l+1})},$$
$$k[Y_1, Y_2, \ldots, Y_\nu] \bmod t^{w(X'_{l+1})}$$

étant identiques, il existe des éléments $Y'_1, Y'_2, \ldots, Y'_\nu$ de $\mathfrak{H}'_l$ tels que

$$Y'_j = Y_j \bmod t^{w(X'_{l+1})} \quad (j = 1, 2, \ldots, \nu).$$

La fermeture canonique de $k[Y'_1, Y'_2, \ldots, Y'_\nu]$ qui est contenu dans $\mathfrak{H}'_l$ ne peut contenir aucun élément d'ordre $w(X'_{l+1})$. Donc la fermeture canonique de $k[Y_1, Y_2, \ldots, Y_\nu]$ qui n'est autre que $\mathfrak{H}_l$ (puisque l'ensemble $(Y_1, Y_2, \ldots, Y_\nu)$ contient l'ensemble $(X_1, X_2, \ldots, X_l)$) ne contient pas d'éléments d'ordre $w(X'_{l+1})$ (théorème auxiliaire 7). Donc $w(X_{l+1})$ est égal à $w(X'_{l+1})$ contrairement à l'hypothèse.

Le fait que les nombres $w(X_1)$, $w(X_2)$, ..., $w(X_n)$ constituent une partie des caractères de $^*H$ se démontre comme suit: $w(X_1)$ étant le plus petit élément de $W(^*H)$ on a $w(X_1) = \chi_1$. Supposons que $w(X_l)$ soit le plus petit de ceux des nombres $w(X_1), w(X_2), \ldots, w(X_m)$ qui ne sont pas des caractères de $^*H$. $w(X_l)$ serait alors contenu dans la fermeture canonique du semigroupe engendré par les éléments de $W(^*H)$ qui sont inférieurs à $w(X_l)$. Or les éléments de $W(^*H)$ qui sont inférieurs à $w(X_l)$ sont contenus dans $W(\mathfrak{H}_{l-1})$. On a donc $w(X_l) \in W(\mathfrak{H}_{l-1})$ contrairement au choix des X_j.

Dans ce qui suit nous allons appeler les nombres

$$w(X_1) = {}^*\chi_1, \; w(X_2) = {}^*\chi_2, \; \ldots, \; w(X_m) = {}^*\chi_m$$

les caractères de base de $^*H$. De la définition d'une base de $^*H$ et du théorème 4 résulte immédiatement que tout système d'éléments $^*X_1, {}^*X_2, \ldots, {}^*X_m$ de $^*H$ tels que $w(^*X_1) = {}^*\chi_1$, $w(^*X_2) = {}^*\chi_2$, ..., $w(^*X_m) = {}^*\chi_m$ constitue une base de $^*H$.

Un ensemble d'éléments $Y_1, Y_2, \ldots, Y_\nu$ de H s'appelle *un système de générateurs*, si $^*H$ est la fermeture canonique de $k[Y_1 - \eta_1, Y_2 - \eta_2, \ldots, Y_\nu - \eta_\nu]$ où $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\nu$ désignent les termes constants de $Y_1, Y_2, \ldots, Y_\nu$.

$X_1, X_2, \ldots, X_m$ étant une base de $^*H$, considérons un ensemble d'éléments $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ choisis de la manière suivante:

$$\begin{array}{ll} Y_1 = X_1 + X'_1 & X'_1 \in k \\ Y_2 = X_2 + X'_2 & X'_2 \in \mathfrak{H}_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots \\ Y_m = X_m + X'_m & X'_m \in \mathfrak{H}_{m-1} \end{array}$$

où $\mathfrak{H}_i$ désigne la fermeture canonique de $k[X_1, X_2, \ldots, X_i]$; les éléments $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ constituent visiblement un système de générateurs de $^*H$. Inversement tout système de générateurs contient un ensemble partiel choisi de cette manière. En effet $Y_1, Y_2, \ldots, Y_\nu$ étant un système de générateurs de $^*H$, désignons par $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_\nu$ les termes constant de $Y_1, Y_2, \ldots, Y_\nu$. L'un au moins des entiers $w(Y_1-\eta_1), w(Y_2-\eta_2), \ldots, w(Y_\nu-\eta_\nu)$ est alors égal à $^*\chi_1$, soit $w(Y_1-\eta_1) = {}^*\chi_1$. On peut donc poser $X_1 = Y_1-\eta_1$. $W(\mathfrak{H}_1)$ contenant tous les éléments de $W(^*H)$ qui sont inférieurs à $^*\chi_2$, on peut choisir $X_i' \in \mathfrak{H}_1$, de manière que l'on ait

$$w(Y_i - X_i') \geqslant {}^*\chi_2 \quad (i = 2, 3, \ldots, \nu).$$

L'un au moins des entiers $w(Y_i-X_i')$ est égal à $^*\chi_2$; car sinon la fermeture canonique de $k[X_1, Y_2-X_2', \ldots, Y_\nu-X_\nu']$ qui est par définition identique à $^*H$ ne contiendrait pas d'éléments d'ordre $^*\chi_2$. Soit $w(Y_2-X_2') = {}^*\chi_2$. On peut alors poser $X_2 = Y_2-X_2'$ et ainsi de suite. Il résulte de ces considérations que tout système de générateurs de $^*H$ contient au moins m éléments, m étant le nombre des caractères de base de $^*H$; nous l'appellerons le nombre *de dimension de* $^*H$.

7. $^*H = k+kT_1+kT_1T_2+\ldots+k[T]\,T_1T_2\ldots T_{N-1}$ étant un anneau canonique, les caractères ainsi que les caractères de base des anneaux

$$[I_{i_h}] = {}^*H_h = k+kT_{h+1}+\ldots+k[T]\,T_{h+1}T_{h+2}\ldots T_{N-1}$$

sont des invariants de $^*H$. Les caractères de $^*H_h$ sont visiblement détérminés par ceux de $^*H$. Mais il n'en est plus de même des caractères de base de $^*H_h$.

Considérons par exemple les anneaux

$$\left.\begin{aligned} ^*H &= k+kt^{4\nu}(1+t)+kt^{6\nu}(1+t)+kt^{7\nu}(1+t)+k[t]\,t^{8\nu}, \\ ^*H' &= k+kt^{4\nu}+kt^{6\nu}(1+t)+kt^{7\nu}(1+t)+k[t]\,t^{8\nu}. \end{aligned}\right\} \quad (\nu>1)$$

On vérifie facilement que ces anneaux sont tous les deux canoniques et que leurs caractères qui sont ceux du semi-groupe

$$W(^*H) = W(^*H') = \{0, 4\nu, 6\nu, 7\nu, 8\nu+1, 8\nu+2, 8\nu+3, \ldots\}$$

sont les mêmes. Ces caractères sont visiblement 4ν, 6ν, 7ν, $8\nu+1$. Construisons maintenant une base de $^*H$: On peut évidemment poser $X_1 = t^{4\nu}(1+t)$; $k[X_1]$ est un anneau canonique et le plus petit élément de $W(^*H)$ non contenu dans $W(k[X_1])$ est 6ν; on peut donc poser $X_2 = t^{6\nu}(1+t)$. La fermeture canonique de $k[X_1, X_2]$ est

$$k[\overline{X_1, X_2}] = k+kt^{4\nu}(1+t)+kt^{6\nu}(1+t)+k[t]\,t^{8\nu}.$$

On peut donc choisir $X_3 = t^{7\nu}(1+t)$ comme troisième élément de base de $^*H$. La fermeture canonique de $k[X_1, X_2, X_3]$ étant alors $^*H$, les caractères de base de $^*H$ sont 4ν, 6ν, 7ν. On observe de la même manière que les éléments $X_1' = t^{4\nu}$, $X_2' = t^{6\nu}(1+t)$, $X_3' = t^{7\nu}(1+t)$ constituent une base de $^*H'$. Les caractères de base de $^*H$ et de $^*H'$ sont donc les mêmes. Calculons maintenant les caractères de base des anneaux

$$^*H_1 = k + kt^{2\nu} + kt^{3\nu} + k[t]\,t^{4\nu},$$
$$^*H_1' = k + kt^{2\nu}(1+t) + kt^{3\nu}(1+t) + k[t]\,t^{4\nu}.$$

Une base de $^*H_1'$, est constitué par $t^{2\nu}$, $t^{3\nu}$, $t^{4\nu+1}$ tandis que les éléments $t^{2\nu}(1+t), t^{3\nu}(1+t)$ constituent une base de $^*H_1'$, puisque la fermeture canonique de $k[t^{2\nu}(1+t), t^{3\nu}(1+t)]$ contient l'élément

$$t^{4\nu}(1+t)^2 - t^{2\nu}(1+t)\left(\frac{t^{3\nu}(1+t)}{t^{2\nu}(1+t)}\right)^2 = t^{4\nu+1}(1+t)$$

dont l'ordre est $4\nu+1$. Les caractères de base de $^*H_1$, sont donc 2ν, 3ν, $4\nu+1$ tandis que ceux de $^*H_1'$ sont 2ν, 3ν.

Les caractères de base des anneaux $[I_{i_h}] = {}^*H_h$ *constituent donc des éléments invariants nouveaux pour* $^*H$.

Les considérations qui suivent, permettent de détérminer successivement les caractères de bases des $^*H_h$. *Considérons un élément quelconque d'ordre positif de* $^*H$. *Soit* T *cet élément et soit* $(X_1, X_2, \ldots, X_m)$ *une base de* $^*H$. *Désignons par* $^*\chi_i$ *le plus petit des nombres*

$$^*\chi_1 = w(X_1),\ ^*\chi_2 = w(X_2),\ \ldots,\ ^*\chi_m = w(X_m),\ \chi_{m+1} = \infty$$

tel que la fermeture canonique de $k[X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, T]$ *contienne un élément d'ordre* $^*\chi_i$. *Les éléments* T, TX_1, TX_2, $\ldots$, TX_{i-1}, TX_{i+1}, $\ldots$, TX_m *constituent alors une base de* $k + {}^*HT$ *qui est canonique.* En effet

$$\overline{k[X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_m, T]}$$

étant la fermeture canonique de $k[X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_m, T]$, la fermeture canonique de $k[T, TX_1, \ldots, TX_{i-1}, TX_{i+1}, \ldots, TX_m]$ contient visiblement l'anneau

$$k + T\overline{k[X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_m, T]}.$$

Comme $\overline{k[X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_m, T]}$ contient un élément d'ordre $^*\chi_i$, on a

$$\overline{k[X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_m, T]} = {}^*H.$$

La fermeture canonique de $k[T, TX_1, \ldots, TX_{i-1}, TX_{i+1}, \ldots, TX_m]$ est donc identique à

$$k + T^*H$$

qu'elle contient; puisque l'anneau $k[T, TX_1, \ldots, TX_{i-1}, TX_{i+1}, \ldots, TX_m]$ est lui même contenu dans $k + T^*H$. Donc pour montrer que les

$$T,\ TX_1,\ \ldots,\ TX_{i-1},\ TX_{i+1},\ \ldots,\ TX_m$$

constituent une base de $k+T^*H$ il suffit de montrer que les fermetures canoniques des anneaux

$$\begin{array}{ll} k[T, TX_1, \ldots, TX_j] & (1 \leqslant j < i-1) \\ k[T, TX_1, \ldots, TX_{i-1}] & \\ k[T, TX_1, \ldots, TX_{i-1}, TX_{i+1}, \ldots, TX_h] & (n > h \geqslant i+1) \end{array}$$

sont dépourvus d'éléments d'ordres respectifs

$$w(TX_{j+1}), \quad w(TX_{i+1}), \quad w(TX_{h+1}).$$

Or ces fermetures sont respectivement identiques à

$$\begin{array}{l} k+T\overline{k[X_1, X_2, \ldots, X_j, T]}, \\ k+T\overline{k[X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, T]}, \\ k+T\overline{k[X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_h, T]}, \end{array}$$

où les symboles surlignés désignent toujours les fermetures canoniques des anneaux correspondants. Il suffit donc de montrer que les fermetures canoniques des anneaux $k[X_1, X_2, \ldots, X_j, T]$, $k[X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, T]$, $k[X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_h, T]$ ne contienent pas d'éléments d'ordres respectifs $w(X_{j+1})$, $w(X_{i+1})$, $w(X_{h+1})$. Or le fait que la fermeture canonique de $k[X_1, X_2, \ldots, X_j, T]$ pour $j < i-1$ ne contient pas d'éléments d'ordre $w(X_{j+1})$ est impliqué par la définition de i. Si l'anneau

$$k[X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, T]$$

contenait un élément d'ordre $w(X_{i+1})$ ou l'anneau

$$k[X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_h, T]$$

un élément d'ordre $w(X_{h+1})$, la fermeture canonique de l'un des anneaux

$$\begin{array}{ll} k[X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, X_{i+2}, \ldots, X_m, T], & \\ k[X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_h, X_{h+2}, \ldots, X_m, T], & \text{pour } h < m-1, \\ k[X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_{m-1}, T], & \text{pour } h = m-1, \end{array}$$

contiendrait un système d'éléments d'ordre respectifs ${}^*\chi_1, {}^*\chi_2, \ldots, {}^*\chi_m$ et par conséquent une base de ${}^*H$. Ce qui impliquerait l'existence d'un système de générateurs de ${}^*H$ contenant $m-1$ éléments seulement, contrairement à ce qui a été établi plus haut (voir § 6).

Les caractères de base de $k+T^*H$ sont donc

$$w(T),\ w(T)+{}^*\chi_1,\ w(T)+{}^*\chi_2,\ \ldots,\ w(T)+{}^*\chi_{i-1},\ w(T)+{}^*\chi_{i+1},\ \ldots,\ w(T)+{}^*\chi_m.$$

Comme les caractères de base de $k+T^*H$ ne dépendent pas du choix des éléments $X_1, X_2, \ldots, X_m$, le nombre ${}^*\chi_i$ ne dépend que de T et de ${}^*H$ seulement. Nous allons le désigner par ${}^*\chi_i = {}^*\chi(T, {}^*H)$.

D'une manière analogue les caractères $k+T\,{}^*H$ se déduisent de ceux de ${}^*H$ par les expressions

$$w(T),\ \chi_1+w(T),\ \dots,\ \chi_l+w(T),\quad \text{pour}\quad w(T)\neq\chi_1,\ \chi_2,\ \dots,\ \chi_l,$$

et par

$$w(T),\ \chi_1+w(T),\ \dots,\ \chi_{j-1}+w(T),\ \chi_{j+1}+w(T),\ \dots,\ \chi_l+w(T),\ \text{pour}\ w(T)=\chi_j,$$

en désignant par $\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_l$ les caractères de ${}^*H$.

En particulier dans le cas où tous les caractères de ${}^*H$ sont aussi ses caractères de base, tous les caractères de $k+T{}^*H$ seront aussi ses caractères de base si $w(T)$ est un caractère de ${}^*H$ ou si $\chi(T, {}^*H)$ est infini.

Remarque. ρ étant un élément quelconque de $W({}^*H)$, on peut toujours choisir l'élément T d'ordre $w(T)=\rho$ de ${}^*H$, de manière que $\chi(T, {}^*H)$ soit égal à l'un quelconque de ceux des nombres ${}^*\chi_1, {}^*\chi_2, \dots, {}^*\chi_m, {}^*\chi_{m+1}=\infty$ qui dépassent ρ, pourvu que ρ soit différent des nombres ${}^*\chi_i$. Supposons en effet que ρ soit distinct des nombres ${}^*\chi_1<{}^*\chi_2<\dots<{}^*\chi_m$ et soit ${}^*\chi_l$ celui de ces derniers pour lequel on a ${}^*\chi_l<\rho<{}^*\chi_{l+1}$. Si $X_1, X_2, \dots, X_m$ est une base de ${}^*H$, la fermeture canonique de $k[X_1, X_2, \dots, X_l]$ contient, par définition des éléments d'ordre ρ. Soit T' l'un de ces éléments, et posons $T=T'+X_h$ (avec $h>l$, $X_{m+1}=0$). Pour $l\leqslant j<h-1$ les ensembles

$$\overline{k[X_1, X_2, \dots, X_j, T]}\bmod t^{*\chi_h},\quad \overline{k[X_1, X_2, \dots, X_j, T']}\bmod t^{*\chi_h},$$
$$\overline{k[X_1, X_2, \dots, X_j]}\bmod t^{*\chi_h}$$

étant identique, l'anneau $\overline{k[X_1, X_2, \dots, X_j, T]}$ n'a pas d'éléments d'ordre $w(X_{j+1})={}^*\chi_{j+1}$. Pour $j<l$, $\rho=w(T)$ étant plus grand que ${}^*\chi_{j+1}$, les ensembles

$$\overline{k[X_1, X_2, \dots, X_j, T]}\bmod t^{*\chi_{j+1}+1},\quad \overline{k[X_1, X_2, \dots, X_j]}\bmod t^{*\chi_{j+1}+1}$$

sont identiques et par conséquent $\overline{k[X_1, X_2, \dots, X_j, T]}$ ne contient pas d'éléments d'ordre $w(X_{j+1})$. Par contre l'anneau

$$\overline{k[X_1, X_2, \dots, X_{h-1}, T]},$$

qui contient l'élément T', contient aussi l'élément $T-T'=X_h$. On a donc $\chi(T, {}^*H)={}^*\chi_h$.

Considérons maintenant un semi-groupe canonique quelconque

$${}^*G={}^*G_0=\{0, \nu_1, \nu_1+\nu_2, \dots, \nu_1+\nu_2+\dots+\nu_{N-1}+\mathfrak{G}\nu\}\quad (\nu_{N-1}\neq\nu).$$

Le semi groupe
$${}^*G_{N-1}=\{\mathfrak{G}\nu\}$$

a visiblement un seul caractère qui est $\chi_1^{(N-1)}=\nu$. Les caractères de

$${}^*G_{N-2}=\{0, \nu_{N-1}+\mathfrak{G}\nu\}$$

sont alors, d'après la règle indiquée plus haut,

$$\chi_1^{(N-2)}=\nu_{N-1},\quad \chi_2^{(N-2)}=\nu_{N-1}+\nu.$$

Les caractères de ${}^*G_{N-3}$ se déduisent des précédents, d'après la même règle:

$$\left.\begin{aligned}\chi_1^{(N-3)} = \nu_{N-2}, \quad \chi_2^{(N-3)} &= \nu_{N-2} + \nu_{N-1}, \\ \chi_3^{(N-3)} &= \nu_{N-2} + \nu_{N-1} + \nu, \end{aligned}\right\} \quad \text{pour} \quad \nu_{N-2} > \nu_{N-1} + \nu,$$

$$\chi_1^{(N-3)} = \nu_{N-2}, \quad \chi_2^{(N-3)} = \nu_{N-2} + \nu_{N-1}, \qquad \text{pour} \quad \nu_{N-2} = \nu_{N-1} + \nu,$$

$$\chi_1^{(N-3)} = \nu_{N-2}, \quad \chi_2^{(N-3)} = \nu_{N-2} + \nu_{N-1} + \nu, \qquad \text{pour} \quad \nu_{N-2} = \nu_{N-1}.$$

On en déduit successivement, en appliquant toujours la même règle, les caractères

$$\chi_1^{(i)}, \chi_2^{(i)}, \ldots, \chi_{l_i}^{(i)}$$

de tous les semi-groupes ${}^*G_i = \{0, \nu_{i+1} + G_{i+1}\}$.

Posons maintenant

$${}^*l_{N-1} = 1, \quad {}^*\chi_1^{(N-1)} = \nu;$$

$${}^*l_{N-2} = 2, \quad {}^*\chi_1^{(N-2)} = \nu_{N-1}, \quad {}^*\chi_2^{(N-2)} = \nu_{N-1} + \nu;$$

et d'une manière générale

$$\begin{aligned} {}^*l_{i-1} = {}^*l_i, \quad {}^*\chi_1^{(i-1)} = \nu_i, \; {}^*\chi_2^{(i-1)} = \nu_i + {}^*\chi_1^{(i)}, \ldots, {}^*\chi_{h_i}^{(i-1)} = \nu_i + {}^*\chi_{*h_i-1}^{(i)}, \\ {}^*\chi_{*h_i+1}^{(i-1)} = \nu_i + {}^*\chi_{*h_i+1}^{(i)}, \ldots, {}^*\chi_{*l_{i-1}}^{(i-1)} = \nu_i + {}^*\chi_{*l_i}^{(i)}, \quad \text{pour} \quad {}^*h_i \leqslant {}^*l_i, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} {}^*l_{i-1} = {}^*l_i + 1, \; {}^*\chi_1^{(i-1)} = \nu_i, \; {}^*\chi_2^{(i-1)} = \nu_i + {}^*\chi_1^{(i)}, \ldots, {}^*\chi_h^{(i-1)} = \nu_i + {}^*\chi_{h-1}^{(i)}, \\ {}^*\chi_{h+1}^{(i-1)} = \nu_i + {}^*\chi_h^{(i)}, \ldots, {}^*\chi_{*l_{i-1}}^{(i-1)} = \nu_i + {}^*\chi_{*l_i}^{(i)}, \quad \text{pour} \quad {}^*h_i = {}^*l_i + 1, \end{aligned}$$

où ${}^*h_i$ est l'un quelconque des entiers positifs $h \leqslant {}^*l_i + 1$ pour lesquels on a $\nu_i < {}^*\chi_h^{(i)}$ avec ${}^*\chi_{*l_i+1}^{(i)} = \infty$, si $\nu_i \neq {}^*\chi_1^{(i)}, \ldots, {}^*\chi_{*l_i}^{(i)}$; sinon ${}^*\chi_{*h_i}^{(i)}$ est celui des nombres ${}^*\chi_1^{(i)}, {}^*\chi_2^{(i)}, \ldots, {}^*\chi_{*l_i}^{(i)}$ qui est égal à ν_i.

De la remarque précédente et des considérations qui la précèdent résulte immédiatement qu'on peut toujours choisir les éléments $T_i \in {}^*H_i$ de manière que les caractères et les caractères de base des anneaux

$$\begin{array}{rl} {}^*H_{N-1} = k[T], & w(T) = \nu, \\ {}^*H_{N-2} = k + {}^*H_{N-1}T_{N-1}, & w(T_{N-1}) = \nu_{N-1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ {}^*H_{i-1} = k + {}^*H_i T_i, & w(T_i) = \nu_i, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ {}^*H = {}^*H_0 = k + {}^*H_1 T_1, & w(T_1) = \nu_1 \end{array}$$

soient respectivement

$$\begin{array}{ll} \text{(Les caractères)} & \text{(Les caractères de bases)} \\ \chi_1^{(N-1)}; & {}^*\chi_1^{(N-1)}; \\ \chi_1^{(N-2)}, \chi_2^{(N-2)}; & {}^*\chi_1^{(N-2)}, {}^*\chi_2^{(N-2)}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \chi_1^{(i-1)}, \chi_2^{(i-1)}, \ldots, \chi_{l_{i-1}}^{(i-1)}; & {}^*\chi_1^{(i-1)}, {}^*\chi_2^{(i-1)}, \ldots, {}^*\chi_{*l_{i-1}}^{(i-1)}; \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \chi_1^{(0)}, \quad \chi_2^{(0)}, \quad \ldots, \ldots, \quad \chi_{l_0}^{(0)}; & {}^*\chi_1^{(0)}, \quad {}^*\chi_2^{(0)}, \quad \ldots, \ldots, \quad {}^*\chi_{*l_0}^{(0)}. \end{array}$$

En particulier les caractères de base de ${}^*H = {}^*H_0$ coincident avec ses caractères si et seulement si l'on a choisi ${}^*h_i = {}^*l_i + 1$, chaque fois qu'on a eu à en faire le choix; le nombre de dimensions de ${}^*H$ serait alors le plus grand des dimensions des anneaux canoniques ayant les mêmes caractères.

THÉORÈME 5. *Si les caractères be base*

$${}^*\chi_1^{(N-1)};\ {}^*\chi_1^{(N-2)},\ {}^*\chi_2^{(N-2)};\ \ldots;\ {}^*\chi_1^{(i-1)},\ {}^*\chi_2^{(i-1)},\ \ldots,\ {}^*\chi_{{}^*l_{i-1}}^{(i-1)};\ \ldots;\ {}^*\chi_1^{(0)},\ \ldots,\ {}^*\chi_{{}^*l_0}^{(0)}$$

ont été construits en posant

$${}^*\chi_{{}^*h_j}^{(j)} = \textit{le plus petit de ceux des nombres } {}^*\chi_1^{(j)}, {}^*\chi_2^{(j)}, \ldots, {}^*\chi_{{}^*l_j+1}^{(j)}$$
$$\textit{qui ne sont pas inférieurs à } \nu_j,$$

le nombre de dimensions de l'anneau correspondant ${}^*H$ est le plus petit possible parmis les dimensions des anneaux canoniques ayant les mêmes caractères.

Démonstration. Soient

$${}^\dagger\chi_1^{(N-1)};\ {}^\dagger\chi_1^{(N-2)},\ {}^\dagger\chi_2^{(N-2)};\ \ldots;\ {}^\dagger\chi_1^{(i-1)},\ {}^\dagger\chi_2^{(i-1)},\ \ldots,\ {}^\dagger\chi_{{}^\dagger l_{i-1}}^{(i-1)};\ \ldots$$

un autre système de caractères de bases, déduits des mêmes nombres ν_j. Nous avons à montrer que l'on a ${}^\dagger l_i \geqslant {}^*l_i$ $(i = N-1, N-2, \ldots, 0)$. ν étant un entier quelconque, désignons par ${}^*l_i(\nu)$ le nombre de ceux des

$${}^*\chi_1^{(i)},\ {}^*\chi_2^{(i)},\ \ldots,\ {}^*\chi_{{}^*l_i}^{(i)}$$

qui ne sont pas inférieurs à ν. Soit de même ${}^\dagger l_i(\nu)$ le nombre de ceux des ${}^\dagger\chi_1^{(i)}, {}^\dagger\chi_2^{(i)}, \ldots, {}^\dagger\chi_{{}^\dagger l_i}^{(i)}$ qui ne sont pas inférieurs à ν. Nous allons démontrer, en même temps, que l'on a

$${}^\dagger l_i(\nu) - {}^*l_i(\nu) \leqslant {}^\dagger l_i - {}^*l_i.$$

Les égalités $\quad {}^\dagger l_{N-1} = {}^*l_{N-1} = 1, \quad {}^\dagger l_{N-2} = {}^*l_{N-2} = 2,$

$${}^\dagger l_{N-1} - {}^*l_{N-1} = {}^\dagger l_{N-1}(\nu) - {}^*l_{N-1}(\nu) = 0, \quad {}^\dagger l_{N-2} - {}^*l_{N-2} = {}^\dagger l_{N-2}(\nu) - {}^*l_{N-2}(\nu) = 0$$

étant évidentes, il suffit de déduire de

$${}^\dagger l_i \geqslant {}^*l_i, \quad {}^\dagger l_i(\nu) - {}^*l_i(\nu) \leqslant {}^\dagger l_i - {}^*l_i$$

les inégalités $\quad {}^\dagger l_{i-1} \geqslant {}^*l_{i-1}, \quad {}^\dagger l_{i-1}(\nu) - {}^*l_{i-1}(\nu) \leqslant {}^\dagger l_{i-1} - {}^*l_{i-1}.$

Nous distinguons les cas suivants:

(1) ${}^\dagger l_i = {}^*l_i$, ${}^\dagger\chi_{{}^\dagger h_i}^{(i)}$ fini;

(2) ${}^\dagger l_i \geqslant {}^*l_i$, ${}^\dagger\chi_{{}^\dagger h_i}^{(i)}$ infini, ${}^*\chi_{{}^*h_i}^{(i)}$ fini;

(3) ${}^\dagger l_i \geqslant {}^*l_i$, ${}^\dagger\chi_{{}^\dagger h_i}^{(i)}$ infini, ${}^*\chi_{{}^*h_i}^{(i)}$ infini;

(4) ${}^\dagger l_i > {}^*l_i$, ${}^\dagger\chi_{{}^\dagger h_i}^{(i)}$ fini, ${}^*\chi_{{}^*h_i}^{(i)}$ infini;

(5) ${}^\dagger l > {}^*l_i$, ${}^\dagger\chi_{{}^\dagger h_i}^{(i)}$ fini, ${}^*\chi_{{}^*h_i}^{(i)}$ fini.

(1) ${}^{\dagger}\chi^{(i)}_{{}^{\dagger}h_i}$ étant fini, ${}^{\dagger}l_i(\nu_i)$ n'est pas nul. ${}^{\dagger}l_i(\nu_i)-{}^{*}l_i(\nu_i)$ étant inférieur ou égal à ${}^{\dagger}l_i-{}^{*}l_i=0$ le nombre ${}^{*}l_i(\nu_i)$ est non nul. Donc ${}^{*}\chi^{(i)}_{{}^{*}h_i}$ est fini. Il en résulte que l'on a

$$ {}^{\dagger}l_{i-1} = {}^{\dagger}l_i = {}^{*}l_i = {}^{*}l_{i-1}. $$

Montrons qu'on a encore,

$$ {}^{\dagger}l_{i-1}(\nu)-{}^{*}l_{i-1}(\nu) \leqslant {}^{\dagger}l_{i-1}-{}^{*}l_{i-1}\ (=0) $$

pour tous les ν. D'après les formules de récurrence

$$ \begin{aligned} &{}^{\dagger}\chi^{(i-1)}_1 = \nu_i,\ {}^{\dagger}\chi^{(i-1)}_2 = \nu_i+{}^{\dagger}\chi^{(i)}_1,\ \ldots,\ {}^{\dagger}\chi^{(i-1)}_{{}^{\dagger}h_i} = \nu_i+{}^{\dagger}\chi^{(i)}_{{}^{\dagger}h_i-1},\\ &\qquad {}^{\dagger}\chi^{(i-1)}_{{}^{\dagger}h_i+1} = \nu_i+{}^{\dagger}\chi^{(i)}_{{}^{\dagger}h_i+1},\ \ldots,\ {}^{\dagger}\chi^{(i-1)}_{{}^{\dagger}l_{i-1}} = \nu_i+{}^{\dagger}\chi^{(i)}_{{}^{\dagger}l_i};\\ &{}^{*}\chi^{(i-1)}_1 = \nu_i,\ {}^{*}\chi^{(i-1)}_2 = \nu_i+{}^{*}\chi^{(i)}_1,\ \ldots,\ {}^{*}\chi^{(i-1)}_{{}^{*}h_i} = \nu_i+{}^{*}\chi^{(i)}_{{}^{*}h_i-1},\\ &\qquad {}^{*}\chi^{(i-1)}_{{}^{*}h_i+1} = \nu_i+{}^{*}\chi^{(i)}_{{}^{*}h_i+1},\ \ldots,\ {}^{*}\chi^{(i-1)}_{{}^{*}l_{i-1}} = \nu_i+{}^{*}\chi^{(i)}_{{}^{*}l_i}; \end{aligned} $$

il est clair que l'on a

$$ \begin{aligned} {}^{\dagger}l_{i-1}(\nu) &= {}^{\dagger}l_i, && \text{pour}\quad \nu\leqslant\nu_i,\\ {}^{\dagger}l_{i-1}(\nu) &= {}^{\dagger}l_i(\nu-\nu_i)-1, && \text{pour}\quad \nu_i<\nu\leqslant\nu_i+{}^{\dagger}\chi^{(i)}_{{}^{\dagger}h_i},\\ {}^{\dagger}l_{i-1}(\nu) &= {}^{\dagger}l_i(\nu-\nu_i), && \text{pour}\quad \nu_i+{}^{\dagger}\chi^{(i)}_{{}^{\dagger}h_i}<\nu,\\ {}^{*}l_{i-1}(\nu) &= {}^{*}l_i, && \text{pour}\quad \nu\leqslant\nu_i,\\ {}^{*}l_{i-1}(\nu) &= {}^{*}l_i(\nu-\nu_i)-1, && \text{pour}\quad \nu_i<\nu\leqslant\nu_i+{}^{*}\chi^{(i)}_{{}^{*}h_i},\\ {}^{*}l_{i-1}(\nu) &= {}^{*}l_i(\nu-\nu_i), && \text{pour}\quad \nu_i+{}^{*}\chi^{(i)}_{{}^{*}h_i}<\nu. \end{aligned} $$

Il en résulte que, pour

$$ \nu\leqslant\nu_i+\min({}^{\dagger}\chi^{(i)}_{{}^{\dagger}h_i},{}^{*}\chi^{(i)}_{{}^{*}h_i}) \quad \text{et pour} \quad \nu>\nu_1+\max({}^{\dagger}\chi^{(i)}_{{}^{\dagger}h_i},{}^{*}\chi^{(i)}_{{}^{*}h_i}), $$

on a
$$ {}^{\dagger}l_{i-1}(\nu)-{}^{*}l_{i-1}(\nu) = {}^{\dagger}l_i(\nu-\nu_i)-{}^{*}l_i(\nu-\nu_i)\leqslant 0. $$

Si ${}^{*}\chi^{(i)}_{{}^{*}h_i}<{}^{\dagger}\chi^{(i)}_{{}^{\dagger}h_i}$, on aura $\min({}^{*}\chi^{(i)}_{{}^{*}h_i},{}^{\dagger}\chi^{(i)}_{{}^{\dagger}h_i}) = {}^{*}\chi^{(i)}_{{}^{*}h_i}$, $\max({}^{\dagger}\chi^{(i)}_{{}^{\dagger}h_i},{}^{*}\chi^{(i)}_{{}^{*}h_i}) = {}^{\dagger}\chi^{(i)}_{{}^{\dagger}h_i}$ et

$$ {}^{\dagger}l_{i-1}(\nu)-{}^{*}l_{i-1}(\nu) = {}^{\dagger}l_i(\nu-\nu_i)-{}^{*}l_i(\nu-\nu_i)-1<0 $$
$$ (\text{pour}\ \nu_i+{}^{*}\chi^{(i)}_{{}^{*}h_i}<\nu\leqslant\nu_i+{}^{\dagger}\chi^{(i)}_{{}^{\dagger}h_i}). $$

Si ${}^{\dagger}\chi^{(i)}_{{}^{\dagger}h_i}<{}^{*}\chi^{(i)}_{{}^{*}h_i}$, ν_i étant inférieur ou égal à ${}^{\dagger}\chi^{(i)}_{{}^{\dagger}h_i}$, il n'existe aucun nombre ${}^{*}\chi^{(i)}_j$ compris entre ${}^{\dagger}\chi^{(i)}_{{}^{\dagger}h_i}$ et ${}^{*}\chi^{(i)}_{{}^{*}h_i}$. On a donc pour $\nu_i+{}^{\dagger}\chi^{(i)}_{{}^{\dagger}h_i}<\nu\leqslant\nu_i+{}^{*}\chi^{(i)}_{{}^{*}h_i}$

$$ \begin{aligned} {}^{\dagger}l_{i-1}(\nu)-{}^{*}l_{i-1}(\nu) &= {}^{\dagger}l_i(\nu-\nu_i)-{}^{*}l_i(\nu-\nu_i)+1\\ &= {}^{\dagger}l_i(\nu-\nu_i)-{}^{*}l_i({}^{\dagger}\chi^{(i)}_{{}^{\dagger}h_i})+1\\ &< {}^{\dagger}l_i({}^{\dagger}\chi^{(i)}_{{}^{\dagger}h_i})-{}^{*}l_i({}^{\dagger}\chi^{(i)}_{{}^{\dagger}h_i})+1\leqslant 1. \end{aligned} $$

(2) ${}^{\dagger}l_i\geqslant{}^{*}l_i$, ${}^{\dagger}\chi^{(i)}_{{}^{\dagger}h_i}$ infini, ${}^{*}\chi^{(i)}_{{}^{*}h_i}$ fini. Dans ce cas on aura visiblement ${}^{\dagger}l_{i-1}={}^{\dagger}l_i+1$, ${}^{*}l_{i-1}={}^{*}l_i$, et par conséquent ${}^{\dagger}l_{i-1}>{}^{*}l_{i-1}$. Des formules de

récurrence qui fournissent les nombres ${}^\dagger\chi_j^{(i-1)}$ et ${}^*\chi_j^{(i-1)}$ résulte en outre que l'on a

$$\begin{aligned}
{}^\dagger l_{i-1}(\nu) &= {}^\dagger l_i + 1, && \text{pour} \quad \nu \leqslant \nu_i, \\
{}^\dagger l_{i-1}(\nu) &= {}^\dagger l_i(\nu - \nu_i), && \text{pour} \quad \nu_i < \nu, \\
{}^* l_{i-1}(\nu) &= {}^* l_i, && \text{pour} \quad \nu \leqslant \nu_i, \\
{}^* l_{i-1}(\nu) &= {}^* l_i(\nu - \nu_i) - 1, && \text{pour} \quad \nu_i < \nu \leqslant \nu_i + {}^*\chi_{{}^*h_i}^{(i)}, \\
{}^* l_{i-1}(\nu) &= {}^* l_i(\nu - \nu_i), && \text{pour} \quad \nu_i + {}^*\chi_{{}^*h_i}^{(i)} < \nu,
\end{aligned}$$

dont on déduit facilement l'inégalité

$$ {}^\dagger l_{i-1}(\nu) - {}^* l_{i-1}(\nu) \leqslant {}^\dagger l_{i-1} - {}^* l_{i-1} \leqslant 1. $$

(3) Pour ${}^\dagger l_i \geqslant {}^* l_i$, ${}^\dagger\chi_{{}^\dagger h_i}^{(i)}$ infini, ${}^*\chi_{{}^*h_i}^{(i)}$ infini, il est clair que l'on a ${}^\dagger l_{i-1} = {}^\dagger l_i + 1$, ${}^* l_{i-1} = {}^* l_i + 1$ et par conséquent ${}^\dagger l_{i-1} \geqslant {}^* l_{i-1}$. Des formules de récurrence qui fournissent les nombres ${}^\dagger\chi_j^{(i-1)}$, ${}^*\chi_j^{(i-1)}$ résultent en outre

$$\begin{aligned}
{}^\dagger l_{i-1}(\nu) &= {}^\dagger l_i + 1, & {}^* l_{i-1}(\nu) &= {}^* l_i + 1, && \text{pour} \quad \nu \leqslant \nu_i, \\
{}^\dagger l_{i-1}(\nu) &= {}^\dagger l_i(\nu - \nu_i), & {}^* l_{i-1}(\nu) &= {}^* l_i(\nu - \nu_i), && \text{pour} \quad \nu_i < \nu,
\end{aligned}$$

d'où l'on tire $\qquad {}^\dagger l_{i-1}(\nu) - {}^* l_{i-1}(\nu) \leqslant {}^\dagger l_{i-1} - {}^* l_{i-1}.$

(4) ${}^\dagger l_i > {}^* l_i$, ${}^\dagger\chi_{{}^\dagger h_i}^{(i)}$ fini, ${}^*\chi_{{}^*h_i}^{(i)}$ infini. On aura alors

$$ {}^\dagger l_{i-1} = {}^\dagger l_i, \quad {}^* l_{i-1} = l_i + 1, $$

$$\begin{aligned}
{}^\dagger l_{i-1}(\nu) &= {}^\dagger l_i, & {}^* l_{i-1}(\nu) &= {}^* l_i + 1, && \text{pour} \quad \nu \leqslant \nu_i, \\
{}^\dagger l_{i-1}(\nu) &= {}^\dagger l_i(\nu - \nu_i) - 1, & {}^* l_{i-1}(\nu) &= {}^* l_i(\nu - \nu_i), && \text{pour} \quad \nu_i < \nu \leqslant \nu_1 + {}^\dagger\chi_{{}^\dagger h_i}^{(i)}, \\
{}^\dagger l_{i-1}(\nu) &= {}^\dagger l_i(\nu - \nu_i), & {}^* l_{i-1}(\nu) &= {}^* l_i(\nu - \nu_i), && \text{pour} \quad \nu_i + {}^\dagger\chi_{{}^\dagger h_i}^{(i)} < \nu,
\end{aligned}$$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
&{}^\dagger l_{i-1} \geqslant {}^* l_{i-1}, \\
&{}^\dagger l_{i-1}(\nu) - {}^* l_{i-1}(\nu) = {}^\dagger l_{i-1} - {}^* l_{i-1}, && \text{pour} \quad \nu \leqslant \nu_i, \\
&{}^\dagger l_{i-1}(\nu) - {}^* l_{i-1}(\nu) = {}^\dagger l_i(\nu - \nu_i) - {}^* l_i(\nu - \nu_i) - 1, && \text{pour} \quad \nu_i < \nu \leqslant \nu_i + {}^\dagger\chi_{{}^\dagger h_i}^{(i)}. \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \leqslant {}^\dagger l_{i-1} - {}^* l_{i-1},
\end{aligned}$$

${}^\dagger\chi_{{}^\dagger h_i}^{(i)}$ étant fini mais supérieur ou égal ν_i tandis que ${}^*\chi_{{}^*h_i}^{(i)}$ est infini, on aura

$$ {}^* l_{i-1}(\nu) = {}^* l_i(\nu - \nu_i) = 0, \quad \text{pour} \quad \nu \geqslant \nu_i + {}^\dagger\chi_{{}^\dagger h_i}^{(i)}, $$

et par conséquent

$$\begin{aligned}
{}^\dagger l_{i-1}(\nu) - {}^* l_{i-1}(\nu) = {}^\dagger l_{i-1}(\nu) &\leqslant {}^\dagger l_{i-1}(\nu_i + {}^\dagger\chi_{{}^\dagger h_i}^{(i)}), \quad \text{pour} \quad \nu_i + {}^\dagger\chi_{{}^\dagger h_i}^{(i)} < \nu, \\
&\leqslant {}^\dagger l_{i-1}(\nu_i + {}^\dagger\chi_{{}^\dagger h_i}^{(i)}) - {}^* l_{i-1}(\nu_i + {}^\dagger\chi_{{}^\dagger h_i}^{(i)}) \\
&\leqslant {}^\dagger l_{i-1} - {}^* l_{i-1}.
\end{aligned}$$

(5) ${}^\dagger l_i > {}^* l_i$, ${}^\dagger\chi^{(i)}_{{}^\dagger h_i}$ fini, ${}^*\chi^{(i)}_{{}^* h_i}$ fini. Dans ce cas les inégalités

$$ {}^\dagger l_{i-1} \geqslant {}^* l_i, \quad {}^\dagger l_{i-1}(\nu) - {}^* l_{i-1}(\nu) \leqslant {}^\dagger l_{i-1} - {}^* l_{i-1} $$

se déduisent de ${}^\dagger l_i \geqslant {}^* l_{i-1}$, ${}^\dagger l_i(\nu) - {}^* l_i(\nu) < {}^\dagger l_i - {}^* l_i$ exactement de la même manière que dans le cas (1).

l_0 étant le nombre des caractères de

$$ {}^* G = \{0, \nu_1, \nu_1 + \nu_2, \ldots, \nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_{N-1} + \mathfrak{G}\nu\}, $$

${}^* l_0$ le nombre des caractères de base ${}^*\chi_1^{(0)}, {}^*\chi_2^{(0)}, \ldots$ déduits de ${}^* G$ conformément à l'énoncé du théorème 5, nous venons de voir que le nombre des caractères de base d'un anneau canonique ${}^\dagger H$, tel que $W({}^\dagger H) = {}^* G$, est compris entre ${}^* l_0$ et l_0. Inversement on a

THÉORÈME 6. *n étant un entier quelconque compris entre ${}^* l_0$ et l_0 il existe un anneau canonique de dimension n dont les caractères sont ceux de ${}^* G$.*

Démonstration. Il suffit de déduire de l'existence d'un anneau canonique de dimension $n-1$ celle d'un anneau canonique de dimension n. Supposons donc qu'il existe une système de caractère de base

$$ {}^\dagger\chi_1^{(N-1)};\ {}^\dagger\chi_1^{(N-2)},\ {}^\dagger\chi_2^{(N-2)};\ \ldots;\ {}^\dagger\chi_1^{(0)},\ {}^\dagger\chi_2^{(0)},\ \ldots,\ {}^\dagger\chi^{(0)}_{{}^\dagger l_0} $$

déduits de ${}^* G$ suivant les règles indiquées plus haut et que l'on a ${}^\dagger l_0 = n-1$. Le nombre ${}^\dagger l_0$ étant plus petit que l_0, il existe des entiers i pour lesquels ${}^\dagger\chi^{(i)}_{{}^\dagger h_i}$ est fini sans être égal à ν_i; soit μ le plus petit de ces entiers. Nous pouvons supposer que le système de caractères de base

$$ {}^\dagger\chi_1^{(N-1)};\ {}^\dagger\chi_1^{(N-2)},\ {}^\dagger\chi_2^{(N-2)};\ \ldots;\ {}^\dagger\chi_1^{(0)},\ \ldots,\ {}^\dagger\chi^{(0)}_{{}^\dagger l_0} $$

ait été choisi parmis les systèmes qui remplissent les mêmes conditions, de telle manière que *μ soit le plus grand possible.* Cela étant, posons

$$ \begin{array}{ll} {}^\dagger l'_{N-1} = {}^\dagger l_{N-1} = 1, & {}^\dagger\chi_1'^{(N-1)} = {}^\dagger\chi_1^{(N-1)}, \\ {}^\dagger l'_{N-2} = {}^\dagger l_{N-2} = 2, & {}^\dagger\chi_1'^{(N-2)} = {}^\dagger\chi_1^{(N-2)},\ {}^\dagger\chi_2'^{(N-2)} = {}^\dagger\chi_2^{(N-2)}, \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ {}^\dagger l'_\mu = {}^\dagger l_\mu, & {}^\dagger\chi_1'^{(\mu)} = {}^\dagger\chi_1^{(\mu)},\ {}^\dagger\chi_2'^{(\mu)} = {}^\dagger\chi_2^{(\mu)},\ \ldots,\ {}^\dagger\chi'^{(\mu)}_{{}^\dagger l'_\mu} = {}^\dagger\chi^{(\mu)}_{{}^\dagger l_\mu}, \\ {}^\dagger l'_{\mu-1} = {}^\dagger l_{\mu-1} + 1, & {}^\dagger\chi_1'^{(\mu-1)} = {}^\dagger\chi_1^{(\mu-1)},\ {}^\dagger\chi_2'^{(\mu-1)} = {}^\dagger\chi_2^{(\mu-1)},\ \ldots,\ {}^\dagger\chi'^{(\mu-1)}_{{}^\dagger h_\mu} = {}^\dagger\chi^{(\mu-1)}_{{}^\dagger h_\mu}, \\ & {}^\dagger\chi'^{(\mu-1)}_{{}^\dagger h_\mu+1} = \nu_\mu + {}^\dagger\chi^{(\mu)}_{{}^\dagger h_\mu},\ {}^\dagger\chi'^{(\mu-1)}_{{}^\dagger h_\mu+2} = {}^\dagger\chi^{(\mu-1)}_{{}^\dagger h_\mu+1},\ \ldots \end{array} $$

avec ${}^\dagger\chi'^{(\mu)}_{{}^\dagger h_\mu} = \infty$. L'ensemble ${}^\dagger\chi_1'^{(\mu-1)}, {}^\dagger\chi_2'^{(\mu-1)}, \ldots, {}^\dagger\chi'^{(\mu-1)}_{{}^\dagger l'_{\mu-1}}$ est visiblement constitué par l'ensemble ${}^\dagger\chi_1^{(\mu-1)}, {}^\dagger\chi_2^{(\mu-1)}, \ldots, {}^\dagger\chi^{(\mu-1)}_{{}^\dagger l_{\mu-1}}$ et par le nombre ${}^\dagger\chi'^{(\mu-1)}_{{}^\dagger h_\mu+1} = \nu_\mu + {}^\dagger\chi^{(\mu)}_{{}^\dagger h_\mu}$. Le nombre $\nu_{\mu-1}$ ne peut pas être égal à ${}^\dagger\chi'^{(\mu-1)}_{{}^\dagger h_\mu+1}$. Car sinon on aurait ${}^\dagger\chi^{(\mu-1)}_{{}^\dagger h_{\mu-1}} = \infty$, ${}^\dagger\chi'^{(\mu-1)}_{{}^\dagger h'_{\mu-1}} = {}^\dagger\chi'^{(\mu-1)}_{{}^\dagger h_\mu+1}$ et le système correspondant

$$ {}^\dagger\chi_1'^{(\mu-2)} = \nu_{\mu-1},\ {}^\dagger\chi_2'^{(\mu-2)} = {}^\dagger\chi_1'^{(\mu-1)} + \nu_{\mu-1},\ \ldots, $$
$$ {}^\dagger\chi'^{(\mu-2)}_{{}^\dagger h_\mu+1} = {}^\dagger\chi'^{(\mu-1)}_{{}^\dagger h_\mu} + \nu_{\mu-1},\ {}^\dagger\chi'^{(\mu-2)}_{{}^\dagger h_\mu+2} = {}^\dagger\chi'^{(\mu-1)}_{{}^\dagger h_\mu+2} + \nu_{\mu-1},\ \ldots $$

serait composé des mêmes nombres que le système

$$^{\dagger}\chi_1^{(\mu-2)} = \nu_{\mu-1},\ ^{\dagger}\chi_2^{(\mu-2)} = {^{\dagger}\chi_1^{(\mu-1)}} + \nu_{\mu-1},\ \dots,$$
$$^{\dagger}\chi_{^{\dagger}h_\mu+1}^{(\mu-2)} = {^{\dagger}\chi_{^{\dagger}h_\mu}^{(\mu-1)}} + \nu_{\mu-1},\ ^{\dagger}\chi_{^{\dagger}h_\mu+2}^{(\mu-2)} = {^{\dagger}\chi_{^{\dagger}h_\mu+1}^{(\mu-1)}} + \nu_{\mu-1},\ \dots .$$

Ceci nous permetterait alors de construire, en posant

$$^{\dagger}\chi_1'^{(\mu-3)} = {^{\dagger}\chi_1^{(\mu-3)}},\ \dots,\ ^{\dagger}\chi_{^{\dagger}l_{\mu-3}}'^{(\mu-3)} = {^{\dagger}\chi_{^{\dagger}l_{\mu-3}}^{(\mu-3)}};$$
$$^{\dagger}\chi_1'^{(\mu-4)} = {^{\dagger}\chi_1^{(\mu-4)}},\ \dots,\ ^{\dagger}\chi_{^{\dagger}l_{\mu-4}}'^{(\mu-4)} = {^{\dagger}\chi_{^{\dagger}l_{\mu-4}}^{(\mu-4)}};$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$^{\dagger}\chi_1'^{(0)} = {^{\dagger}\chi_1^{(0)}},\quad \dots,\quad ^{\dagger}\chi_{^{\dagger}l_0}'^{(0)} = {^{\dagger}\chi_{^{\dagger}l_0}^{(0)}};$$

un système de caractère de base $^{\dagger}\chi_1'^{(N-1)}; \dots; {^{\dagger}\chi_1'^{(0)}}, {^{\dagger}\chi_2'^{(0)}}, \dots, {^{\dagger}\chi_{^{\dagger}l_0}'^{(0)}}$ remplissant les mêmes conditions que le système $^{\dagger}\chi_1^{(N-1)}; \dots; {^{\dagger}\chi_1^{(0)}}, {^{\dagger}\chi_2^{(0)}}, \dots, {^{\dagger}\chi_{^{\dagger}l_0}^{(0)}}$ sauf que les $^{\dagger}\chi_{^{\dagger}h_i}'^{(i)}$ sont infinis ou égaux à ν_i pour $i = 1, 2, \dots, \mu-1$ et μ. Donc si $^{\dagger}\chi_{^{\dagger}h_{\mu'}}'^{(\mu')}$ est le premier des nombres $^{\dagger}\chi_{^{\dagger}h_i}'^{(i)}$ qui n'est ni infini ni égal à $\nu_{\mu'}$, on aurait $\mu' > \mu$, contrairement au choix du système

$$^{\dagger}\chi_1^{(N-1)};\ ^{\dagger}\chi_1^{(N-2)},\ ^{\dagger}\chi_2^{(N-2)};\ \dots;\ ^{\dagger}\chi_1^{(0)},\ ^{\dagger}\chi_2^{(0)},\ \dots,\ ^{\dagger}\chi_{^{\dagger}l_0}^{(0)}.$$

$\nu_{\mu-1}$ étant ainsi différent de $^{\dagger}\chi_{^{\dagger}h_\mu+1}'^{(\mu-1)}$ qui est le seul des nombres $^{\dagger}\chi_i'^{(\mu-1)}$ qui ne soit pas égal à un nombre $^{\dagger}\chi_i^{(\mu-1)}$ on peut poser $^{\dagger}\chi_{^{\dagger}h_{\mu-1}}'^{(\mu-1)} = {^{\dagger}\chi_{^{\dagger}h_{\mu-1}}^{(\mu-1)}}$ et considérer l'ensemble

$$^{\dagger}\chi_1'^{(\mu-2)} = \nu_{\mu-1},\ ^{\dagger}\chi_2'^{(\mu-2)} = \nu_{\mu-1} + {^{\dagger}\chi_1'^{(\mu-1)}},\ \dots$$

qui est alors composé des nombres

$$^{\dagger}\chi_1^{(\mu-2)},\ ^{\dagger}\chi_2^{(\mu-2)},\ \dots,\ ^{\dagger}\chi_{^{\dagger}l_{\mu-2}}^{(\mu-2)}$$

et de $^{\dagger}\chi_{^{\dagger}h_\mu+1}'^{(\mu-1)} + \nu_{\mu-1} = {^{\dagger}\chi_{^{\dagger}h_\mu}^{(\mu)}} + \nu_\mu + \nu_{\mu-1}$. On montre de même que $\nu_{\mu-2}$ est distinct de $^{\dagger}\chi_{^{\dagger}h_\mu+1}'^{(\mu-1)} + \nu_{\mu-1}$; ce qui nous permet de poser $^{\dagger}\chi_{^{\dagger}h_{\mu-2}}'^{(\mu-2)} = {^{\dagger}\chi_{^{\dagger}h_{\mu-2}}^{(\mu-2)}}$. En continuant de cette manière on construit finalement le système

$$^{\dagger}\chi_1'^{(0)},\ ^{\dagger}\chi_2'^{(0)},\ \dots,\ ^{\dagger}\chi_{^{\dagger}l_0'}'^{(0)}$$

qui se compose de
$$^{\dagger}\chi_1^{(0)},\ ^{\dagger}\chi_2^{(0)},\ \dots,\ ^{\dagger}\chi_{^{\dagger}l_0}^{(0)}$$

et du nombre $^{\dagger}\chi_{^{\dagger}h_\mu}^{(\mu)} + \nu_\mu + \nu_{\mu-1} + \dots + \nu_1$. On a donc

$$^{\dagger}l_0' = {^{\dagger}l_0} + 1 = n - 1 + 1 = n.$$

Le tableau ci-contre montre les systèmes de caractères de base qui correspondent au semi-groupe

$$^{*}G = \{0,\ 702,\ 1404,\ 1620,\ 1836,\ 2052,\ 2106,\ 2160,\ 2214,\ 2268,$$
$$2322,\ 2340,\ 2358,\ 2376,\ 2383,\ 2390,\ 2394,\ 2397 + \mathfrak{G}\};$$

la première colonne du tableau étant en même temps le système des caractères de $^{*}G$.

	1ère colonne				2ème colonne			3ème colonne			4ème colonne			5ème colonne	
H_{17}	1				1			1			1			1	
H_{16}	3	4			3	4		3	4		3	4		3	4
H_{15}	4	7			4	7		4	7		4	7		4	7
H_{14}	7	11			7	11		7	11		7	11		7	11
H_{13}	7	18			7	18		7	18		7	18		7	18
H_{12}	18	25			18	25		18	25		18	25		18	25
H_{11}	18	43			18	43		18	43		18	43		18	43
H_{10}	18	61			18	61		18	61		18	61		18	61
H_9	54	72	115		54	72	115	54	72	115	54	72		54	72
H_8	54	126	169		54	126	169	54	126	169	54	126		54	126
H_7	54	180	223		54	180	223	54	180	223	54	180		54	180
H_6	54	234	277		54	234	277	54	234	277	54	234		54	234
H_5	54	288	331		54	288	331	54	288	331	54	288		54	288
H_4	216	270	504	547	216	270	547	216	270	504	216	270	504	216	270
H_3	216	486	720	763	216	486	763	216	486	720	216	486	720	216	486
H_2	216	702	936	979	216	702	979	216	702	936	216	702	936	216	702
H_1	702	918	1638	1681	702	918	1681	702	918	1638	702	918	1638	702	918
H	702	1620	2340	2383	702	1620	2383	702	1620	2340	702	1620	2340	702	1620

Comme exemples d'anneaux H dont les caractères sont 702, 1620, 2340, 2383 on peut citer les suivants:

$$\overline{k[t^{702}, t^{1620}, t^{2340}, t^{2383}]}$$

$$\overline{k[t^{702}(1+t^{72})^3, t^{1620}(1+t^{72})^7, t^{2383}(1+t^{72})^9]}$$

$$\overline{k[t^{702}(1+t^{115})^3, t^{1620}(1+t^{115})^7, t^{2340}(1+t^{115})^9]}$$

$$\overline{k[t^{702}(1+t^{7})^{13}, t^{1620}(1+t^{7})^{30}, t^{2340}(1+t^{7})^{44}]}$$

$$\overline{k[t^{702}(1+t^{7})^{13}\,(1+t^{79})^3, t^{1620}(1+t^{7})^{3}\,(1+t^{79})^7]}$$

dont les suites des caractères de bases sont respectivement donnés par les cinq colonnes du tableau ci-dessus.

Remarquons enfin que les caractères de $^*H$ et les caractères de base de $^*H, {}^*H_1, \ldots, {}^*H_{N-1}$ qui sont, comme nous l'avons vu, des invariants de $^*H$, ne constituent pas un système complet d'invariants. C'est à dire on peut construire des anneaux canoniques $^*H$ et $^*H'$ non transformable l'une dans l'autre par une substitution de la forme

$$t \to t(\alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots + \alpha_n t^n + \ldots), \quad (\alpha_0 \neq 0)$$

de manière que les caractères de $^*H$ et de $^*H'$ ainsi que les caractères de base de $^*H, {}^*H_1, \ldots, {}^*H_{N-1}$ et de $^*H', {}^*H'_1, \ldots, {}^*H'_{N-1}$ soient respectivement les mêmes. Soient par exemple

$$^*H = k + kt^{4\nu}(1+t) + kt^{6\nu}(1+t) + kt^{7\nu}(1+t) + k[t]\,t^{8\nu},$$

$$^*H' = k + kt^{4\nu}(1+t+t^2) + kt^{6\nu}(1+t+t^2) + kt^{7\nu}(1+t+t^2) + k[t]\,t^{8\nu}$$

avec $\nu > 2$. Ces anneaux ont les mêmes caractères qui sont

$$4\nu,\ 6\nu,\ 7\nu,\ 8\nu+1.$$

Leurs caractères de base sont également les mêmes:

$$4\nu,\ 6\nu,\ 7\nu.$$

Les anneaux $^*H_1$, $^*H_1'$ étant tous les deux identiques à

$$k+kt^{2\nu}+kt^{3\nu}+k[t]\,t^{4\nu},$$

les caractères de base de $^*H_1'$, $^*H_2'$, $^*H_3'$, $^*H_4'$ sont respectivement les mêmes que ceux de $^*H_1$, $^*H_2$, $^*H_3$, $^*H_4$. Par contre il n'existe aucune substitution de la forme

$$(\alpha) \qquad t \to t(\alpha_0+\alpha_1 t+\alpha_2 t^2+\ldots)$$

qui transforme $^*H$ en $^*H'$. En effet une telle substitution qui doit transformer $^*H$ en $^*H'$ devrait transformer $^*H_1$ en $^*H_1'$, c.à.d. en lui même. Or, en supposant que 2ν est non divisible par le caractéristique de k, les substitutions de la forme (α), qui transforment l'anneau

$$^*H_1 = k+kt^{2\nu}+kt^{3\nu}+k[t]\,t^{4\nu}$$

en lui même, sont de la forme

$$t \to t(\alpha_0+\alpha_\nu t^\nu+\alpha_{2\nu}t^{2\nu}+\alpha_{2\nu+1}t^{2\nu+1}+\ldots)$$

dont aucune ne transforme l'élément

$$t^{4\nu}+t^{4\nu+1}$$

de $^*H$ en un élément du même ordre de $^*H'$ qui est de la forme

$$\xi_0(t^{4\nu}+t^{4\nu+1}+t^{4\nu+2})+\xi_1(t^{6\nu}+t^{6\nu+1}+t^{6\nu+2})+\ldots.$$

8. Considérons maintenant une branche algébrique passant par l'origine et défini par

$$Y_1 = Y_1(t),\ Y_2 = Y_2(t),\ \ldots,\ Y_n = Y_n(t),$$

où $Y_1(t), Y_2(t), \ldots, Y_n(t)$ sont des séries entières en t, dont les termes constants sont nuls. Considérons l'anneau $k[Y_1(t), Y_2(t), \ldots, Y_n(t)]$. Nous pouvons admettre que cet anneau contient des éléments de tous les ordres qui dépassent un nombre suffisamment grand (théorème auxiliaire 2).

THÉORÈME 7. *$^*H$ étant la fermeture canonique de $k[Y_1(t), Y_2(t), \ldots, Y_n(t)]$ soit $W(^*H) = \{0, \nu_1, \nu_1+\nu_2, \ldots, \nu_1+\nu_2+\ldots+\nu_{N-1}+\mathfrak{G}\}$. Les ordres de multiplicités des points successif de la branche $Y_1(t)$, $Y_2(t)$, …, $Y_n(t)$ sont*

$$\nu_1,\ \nu_2,\ \ldots,\ \nu_{N-2},\ \nu_{N-1},\ 1,\ 1,\ \ldots.$$

Démonstration. Soit $w(Y_1(t))$ le plus petit des nombres

$$w(Y_1(t)),\ w(Y_2(t)),\ \ldots,\ w(Y_n(t)).$$

Le point $O = (0, 0, \ldots, 0)$ est alors un point multiple d'ordre $w(Y_1(t))$. D'autre part il est clair que $w(Y_1(t)) = \nu_1$. Il suffit donc de montrer que les ordres de multiplicité des points successifs ($t = 0$) de la branche*

$$Y_1'(t) = Y_1(t),\ Y_2'(t) = \frac{Y_2(t)}{Y_1(t)},\ \ldots,\ Y_n'(t) = \frac{Y_n(t)}{Y_1(t)}$$

qu'on déduit de $Y_1(t), Y_2(t), \ldots, Y_n(t)$ en résolvent le point O, sont

$$\nu_2, \nu_3, \ldots, \nu_{N-1}, 1, 1, \ldots.$$

Nous transportons l'origine des coordonnés au point $t = 0$ de la branche $Y_1'(t), Y_2'(t), \ldots, Y_n'(t)$, qui devient alors

$$Y_1'(t) - \eta_1,\ Y_2'(t) - \eta_2,\ \ldots,\ Y_n'(t) - \eta_n$$

où $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$ désignent les termes constants des séries $Y_1'(t), Y_2'(t), \ldots, Y_n'(t)$. I_{ν_1} étant l'idéal de $k[Y_1(t), Y_2(t), \ldots, Y_n(t)]$ formé par ses éléments d'ordres supérieurs ou égaux à ν_1, il est évident que

$$[I_{\nu_1}] = k[Y_1'(t) - \eta_1, Y_2'(t) - \eta_2, \ldots, Y_n'(t) - \eta_n].$$

Or nous savons que $\quad {}^*H = k + Y_1(t)\,\overline{[I_{\nu_1}]}$

et que $\quad W(\overline{[I_{\nu_1}]}) = \{0, \nu_2, \nu_2 + \nu_3, \ldots, \nu_2 + \nu_3 + \ldots + \nu_{N-1} + \mathfrak{G}\}.$

Donc l'origine est un point multiple d'ordre ν_2, pour la branche

$$Y_1'(t) - \eta_1,\ Y_2'(t) - \eta_2,\ \ldots,\ Y_n'(t) - \eta_n;$$

autrement dit le plus petit des nombres

$$w(Y_1'(t) - \eta_1),\ w(Y_2'(t) - \eta_2),\ \ldots,\ w(Y_n'(t) - \eta_n)$$

est ν_2. On achève la démonstration du théorème 5 en répétant un nombre quelconque de fois ce raisonnement.

D'après le théorème 3 les nombres $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_{N-1}, \ldots$ se déduisent des caractères de ${}^*H$ exactement de la même manière que ces nombres, considérés comme ordres de multiplicités de la branche, se déduisent des caractères de Du Val associés à la branche $Y_1(t), Y_2(t), Y_3(t), \ldots, Y_n(t)$. Donc les caractères de Du Val de cette branche sont les mêmes que ceux de $k[Y_1(t), Y_2(t), \ldots, Y_n(t)]$.

Il est évident que si deux branches

$$Y_1(t), Y_2(t), \ldots, Y_n(t); \quad Z_1(t), Z_2(t), \ldots, Z_m(t)$$

passant par l'origine peuvent être transformées l'une dans l'autre par une transformation birationnelle régulière à l'origine, les anneaux

$$k[Y_1(t), Y_2(t), \ldots, Y_n(t)], \quad k[Z_1(t), Z_2(t), \ldots, Z_m(t)]$$

* Voir P. Du Val, loc. cit. et J. G. Semple, "Singularities of space algebraic curves", *Proc. London Math. Soc.* (2), 44 (1938), 149–174.

sont identiques ou, d'une manière plus précise, transformables l'une dans l'autre par une substitution de la forme $t \to t(\alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots)$, $(\alpha_0 \neq 0)$ et réciproquement. Nous dirons alors que ces deux branches sont régulièrement équivalentes entre elles. Pour deux branches régulièrements équivalentes, les anneaux

$$^*H = \overline{k[Y_1(t), Y_2(t), \ldots, Y_n(t)]}, \quad ^*H' = \overline{k[Z_1(t), Z_2(t), \ldots, Z_m(t)]}$$

peuvent évidemment être transformés l'un dans l'autre par une substitution de la forme $t \to t(\alpha_0 + \alpha_1 t + \ldots)$, $(\alpha_0 \neq 0)$; mais de l'identité $^*H = {}^*H'$ on ne peut pas déduire l'identité des

$$k[Y_1(t), Y_2(t), \ldots, Y_n(t)], \quad k[Z_1(t), Z_2(t), \ldots, Z_m(t)].$$

Nous dirons que les deux branches donnés sont canoniquement équivalentes si l'on a $^*H = {}^*H'$. Deux branches régulièrement équivalentes sont aussi canoniquement équivalentes sans que l'inverse soit nécéssairement vrai. Les caractères de $^*H$ ainsi que les caractères de base de $^*H_1$, $^*H_2$, $\ldots$, $^*H_{N-1}$ sont donc des invariants de la branche $Y_1(t), Y_2(t), \ldots, Y_n(t)$ pour l'équivalence canonique et par conséquent pour l'équivalence régulière. Remarquons toutefois que les caractères ainsi que les caractères de base de $^*H$, $^*H_1$, $^*H_2$, $\ldots$, $^*H_{N-1}$ ne constituent pas un système complet d'invariants ni pour l'équivalence canonique ni pour l'équivalence régulières; puisque comme nous l'avons vu plus haut ces caractères et ces caractères de base ne suffisent pas à déterminer $^*H$.

Les séries $Y_1(t)$, $Y_2(t)$, $\ldots$, $Y_n(t)$ constituent visiblement un système de générateurs de $^*H = \overline{k[Y_1(t), Y_2(t), \ldots, Y_n(t)]}$.

A la fin du § 6 nous avons vu comment on pouvait construire tous les systèmes de générateurs de $^*H$ en partant de ses bases. Nous avons vu en particulier que, m étant le nombre de dimension de $^*H$, c.à.d. le nombre de ses caractères de base, tout système de générateurs de $^*H$ contient m éléments qui constituent à eux seuls un système de générateurs de $^*H$. Cela s'exprime géométriquement en disant que si m est le nombre des caractères de base de $k[Y_1(t), Y_2(t), \ldots, Y_n(t)]$ l'une des projections de dimensions m de la branche $Y_1(t)$, $Y_2(t)$, $\ldots$, $Y_n(t)$ est son équivalent canonique tandis qu' aucune projection de dimensions inférieures à m n'est canoniquement équivalentes à $Y_1(t)$, $Y_2(t)$, $\ldots$, $Y_n(t)$.

The University
Istanbul