Kitap II

1. Tanımlar

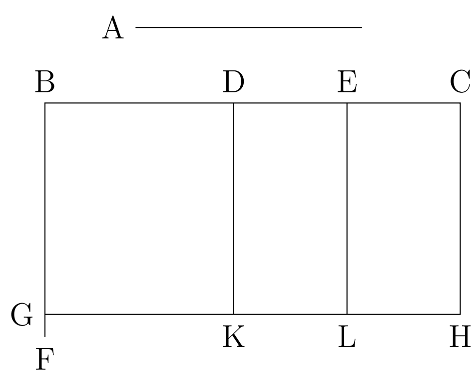
1 Dik açılı bir paralelkenar için bu dik açıyı oluşturan iki kenarın **içerdiği** dikdörtgen denir.

2 Bir paralelkenarın köşegeni üzerindeki her hangi bir paralelkenar ve tümleyenlerine birlikte **kadran** denir.

2. Önermeler

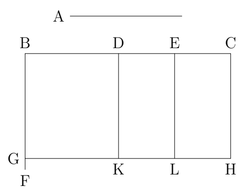
1. Önerme:
İki doğru verildiyse, ve doğrulardan biri rastgele sayıda parçalara kesilirse, bu iki doğrunun içerdiği dikdörtgen, kesilmemiş doğruyla kesilmiş her bir parçanın içerdiği dikdörtgenlerin toplamına eşittir.

[$ab_1 + \cdots + ab_n = a(b_1 + \cdots + b_n)$. *]*



Verilen doğrular A ve BC olsun, ve BC doğrusu rastgele D, E noktalarında kesilmiş olsun.

Diyorum ki A ve BC'nin içerdiği dikdörtgen, A ve BD'nin içerdiği dikdörtgenle A ve DE'nin içerdiği dikdörtgen ve A ile EC'nin içerdiği dikdörtgenlerin toplamına eşittir.



Çünkü, B noktasında BC'ye dik açılı BF çizilsin; **[I.11]**

BG, A'ya eşit olsun; **[I.3]**

G noktasından BC'ye paralel GH çizilsin, **[I.31]**

ve D, E, C'den BG'ye paralel DK, EL, CH çizilsin.

O zaman BH eşittir BK, DL, EH olur.

Şimdi BH dikdörtgeni A, BC dikdörtgenidir, çünkü GB, BC tarafından içerilir ve BG, A'ya eşittir;

BK dikdörtgeni A, BD dikdörtgenidir, çünkü GB, BD tarafından içerilir ve BG, A'ya eşittir;

ve DL dikdörtgeni A, DE dikdörtgenidir, çünkü DK, yani BG, A'ya eşittir. **[I.34]**

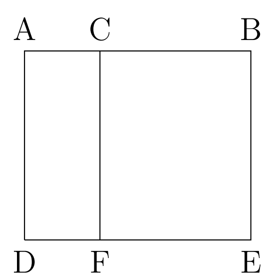
Benzer şekilde EH de A, EC dikdörtgenidir.

Öyleyse A, BD dikdörtgeni ve A, DE dikdörtgeni ve A, EC dikdörtgeni birlikte A, BC dikdörtgenine eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

2. Önerme:
Bir doğru rastgele kesildiğinde, bütünün parçalarla içerdiği dikdörtgenler, bütünün üzerindeki kareye eşittir.

[$a(a+b)+b(a+b)=(a+b)^2.$ *]*



AB doğrusu rastgele bir C noktasında kesilsin.

Diyorum ki AB, BC tarafından içerilen dikdörtgen ile BA, AC tarafından içerilen dikdörtgen birlikte AB üzerindeki kareye eşittir.

Çünkü, AB üzerine ADEB karesi çizilsin, **[I.46]** ve C'den AD ya da BE'ye paralel CF çizilsin. **[I.31]**

O zaman AE eşittir AF, CE olur.

Şimdi AE dikdörtgeni AB üzerindeki karedir; AF dikdörtgeni BA, AC tarafından içerilen dikdörtgendir, çünkü DA, AC tarafından içerilir, ve AD, AB'ye eşittir;

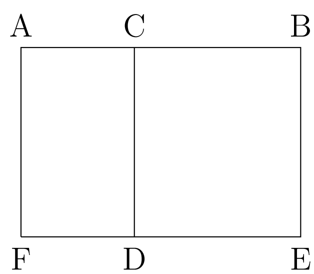
ve CE dikdörtgeni AB, BC dikdörtgenidir, çünkü BE, AB'ye eşittir.

Öyleyse BA, AC dikdörtgeni, AB, BC dikdörtgeniyle birlikte AB üzerindeki kareye eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

3. Önerme:
Bir doğru rastgele ikiye kesilirse, bu parçalardan biriyle bütünün içerdiği dikdörtgen, o parçanın üzerindeki kareyle o parçanın diğer parçayla içerdiği dikdörtgene eşittir.

[$a(a+b) = a^2 + ab.$ *]*



AB doğrusu rastgele bir C noktasında kesilsin.

Diyorum ki AB, BC'nin içerdiği dikdörtgen, AC, CB'nin içerdiği dikdörtgen ile BC üzerindeki kareye eşittir.

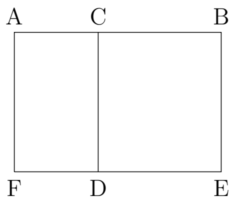
Çünkü, CB üzerine $CDEB$ karesi çizilsin; **[I.46]**

ED doğrusu F'ye kadar uzatılsın, ve A'dan CD ya da BE'ye paralel AF çizilsin. **[I.31]**

O zaman AE eşittir AD, CE olur.

Şimdi, AE dikdörtgeni AB, BC tarafından içerilen dikdörtgendir, çünkü AB, BE tarafından içerilir , ve BE de BC'ye eşittir;

AD dikdörtgeni AC, CB dikdörtgenidir, çünkü DC, BC'ye eşittir; ve DB dikdörtgeni CB üzerindeki karedir.

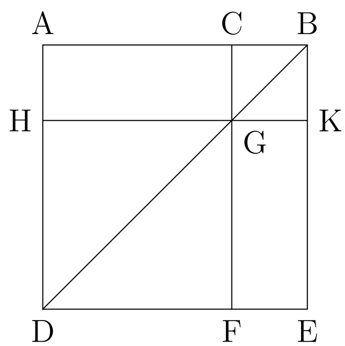


Öyleyse AB, BC tarafından içerilen dikdörtgen, AC, CB tarafından içerilen dikdörtgenle BC üzerindeki kareye eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

4. Önerme:
Bir doğru parçası rastgele ikiye kesilirse, bütünün üzerindeki kare, parçaların üzerlerindeki karelerle bu parçaların içerdiği dikdörtgenin iki katına eşittir.

[$(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab.$ *]*



AB doğrusu rastgele bir C noktasında kesilsin.

Diyorum ki AB üzerindeki kare, AC ve CB üzerindeki karelerle AC ile CB'nin içerdiği dikdörtgenin iki katına eşittir.

Çünkü, AB üzerine $ADEB$ karesi çizilsin, **[I.46]**

BD birleştirilsin; C noktasından AD ya da EB'ye paralel CF çizilsin, ve G noktasından AB ya da DE'ye paralel HK çizilsin. **[I.31]**

O zaman, CF, AD'ye paralel olduğu ve BD onları kestiği için, CGB dış açısı ADB iç açısına eşittir. **[I.29]**

Ama ADB açısı ABD açısına eşittir, çünkü BA kenarı AD kenarına eşittir; **[I.5]**

bu durumda CGB açısı GBC açısına da eşittir, böylece BC kenarı CG kenarına eşit olur. **[I.6]**

Ama CB, GK'ye, ve CG, KB'ye eşittir; **[I.34]**

bu nedenle GK, KB'ye de eşittir; bu durumda $CGKB$ eşkenardır.

Bundan sonra diyorum ki, bu aynı zamanda dik açılıdır.

Çünkü, CG, BK'ye paraleldir, ve KBC, GCB açıları iki dik açıya eşittir. **[I.29]**

Ama KBC açısı diktir; bu durumda BCG açısı da diktir, böylece CGK, GKB karşı açıları da diktir. **[I.34]**

Öyleyse $CGKB$ dik açılıdır; eşkenar olduğu da kanıtlanmıştı; demek ki bir karedir, ve CB üzerine çizilmiştir.

Aynı nedenden dolayı HF de bir karedir, ve HG, yani AC üzerine çizilmiştir. **[I.34]**

Bu durumda HF, KC kareleri AC, CB üzerine çizilmiş karelerdir.

Şimdi, AG, GE'ye eşit olduğundan, **[I.43]**

ve AG dikdörtgeni AC, CB dikdörtgeni olduğundan, çünkü GC, CB'ye eşittir,

GE dikdörtgeni de AC, CB dikdörtgenine eşittir.

Öyleyse AG, GE dikdörtgenleri AC, CB tarafından içerilen dikdörtgenin iki katına eşittir.

Ama, HF, CK, AG, GE dikdörtgenleri, AB üzerindeki kare olan $ADEB$'nin tamamına eşittir.

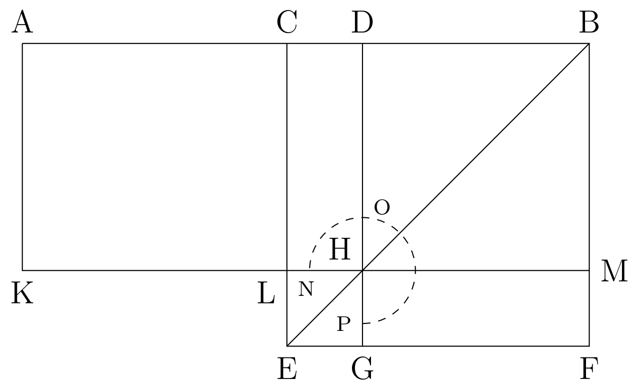
Öyleyse AB üzerindeki kare, AC, CB üzerindeki karelerle AC, CB tarafından içerilen dikdörtgenin iki katına eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

5. Önerme:

Bir doğru eşit ve eşit olmayan iki parçaya kesilse, eşit olmayan parçaların içerdiği dikdörtgen ile kesen noktalar arasındaki doğrunun üzerindeki kare, yarımın üzerindeki kareye eşittir.

[$a + a = (a + b) + (a - b)$ *ise* $(a + b)(a - b) + b^2 = a^2$ *olur.]*



AB doğrusu C noktasında iki eşit parçaya, D noktasında da eşit olmayan iki parçaya kesilmiş olsun.

Diyorum ki AD, BD'nin içerdiği dikdörtgen ile CD üzerindeki kare birlikte CB üzerindeki kareye eşittir.

Çünkü, CB üzerine CEFB karesi çizilsin, **[I.46]**

BE birleştirilsin; D'den CE ya da BF'ye paralel DG çizilsin, **[I.31]**

[DG ile BE'nin kesişme noktasına H deniyor.]

H'den AB ya da EF'ye paralel KM çizilsin, ve A'dan CL ya da BM'ye paralel AK çizilsin. **[I.31]**

O zaman, CH tümleyeni HF tümleyenine eşit olduğundan, **[I.43]**

bunlara DM eklensin; bu durumda CM eşittir DF olur.

Ama AC, CB'ye eşit olduğundan CM eşittir AL olur; **[I.36]**

öyleyse AL, DF'ye de eşittir.

Bunlara CH eklensin; bu durumda AH'nin tamamı NOP kadranına eşit olur.

Ama DH, DB'ye eşit olduğundan AH dikdörtgeni AD, DB dikdörtgenidir, bu yüzden NOP kadranı da AD, DB dikdörtgenine eşittir.

Bunlara CD üzerindeki kareye eşit olan LG eklensin; bu durumda NOP kadranı ve LG'nin toplamı, AD, DB tarafından içerilen dikdörtgen ile CD üzerindeki kareye eşittir.

Ama NOP kadranı ve LG'nin toplamı, CB üzerindeki CEFB karesinin tümüne eşittir;

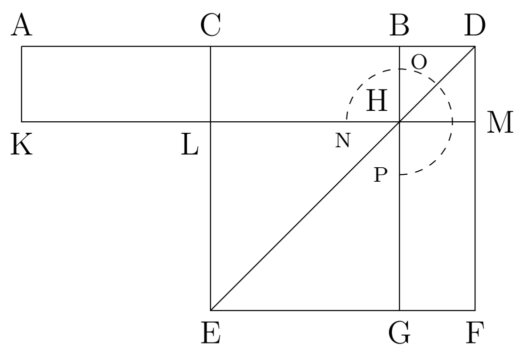
öyleyse AD, DB tarafından içerilen dikdörtgen ile CD üzerindeki kare, CB üzerindeki kareye eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

6. Önerme:

Bir doğru ikiye bölünmüş ve bir ucuna aynı doğrultuda başka bir doğru eklenmişse, eklenen doğru ve bütünün, eklenen parçayla içerdiği dikdörtgen ile ilk doğrunun yarısı üzerindeki kare, bu yarımın eklenen parçayla oluşturduğu doğru üzerindeki kareye eşittir.

[$(a + a + b)b + a^2 = (a + b)^2$. *]*



AB doğrusu C noktasında ikiye bölünsün, ve onunla aynı doğru üzerinde BD eklensin.

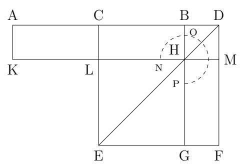
Diyorum ki AD, BD tarafından içerilen dikdörtgenle CB üzerindeki kare birlikte CD üzerindeki kareye eşittir.

Çünkü, CD üzerine CEFD karesi çizilsin, **[I.46]**

DE birleştirilsin; B'den EC ya da DF'ye paralel BG çizilsin, H'den AB ya da EF'ye paralel KM çizilsin, ayrıca A'dan CL ya da DM'ye paralel AK çizilsin. **[I.31]**

O zaman AC, CB'ye eşit olduğundan, AL de CH'ye eşit olur. **[I.36]**

Ama CH eşittir HF. **[I.43]**



O yüzden AL, HF'ye de eşittir.

Bunlara CM eklensin; bu durumda AM'nin tamamı NOP kadranına eşittir. Ama DM, DB'ye eşit olduğundan, AM dikdörtgeni AD, DB dikdörtgenidir; demek ki NOP kadranı AD, DB dikdörtgenine de eşittir.

Bunlara BC üzerindeki kareye eşit olan LG eklensin; bu durumda AD, DB tarafından içerilen dikdörtgen ile CB üzerindeki kare, NOP kadranı ve LG'ye eşittir.

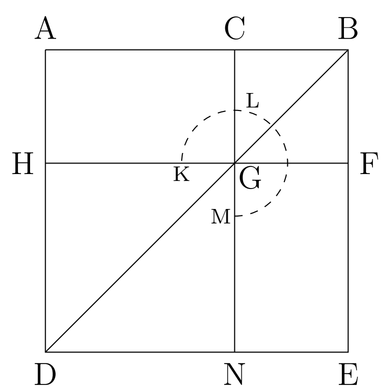
Ama NOP kadranı ve LG toplamı, CD üzerindeki $CEFD$ karesine eşittir;

Öyleyse AD, DB tarafından içerilen dikdörtgen ile CB üzerindeki kare birlikte CD üzerindeki kareye eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

7. Önerme:
Bir doğru rastgele ikiye kesildiğinde, doğru üzerindeki kareyle bu parçalardan biri üzerindeki kare, bu parçayla bütünün içerdiği dikdörtgenin iki katıyla diğer parça üzerindeki kareye eşittir.

[$(a+b)^2 + a^2 = 2a(a+b) + b^2$. *]*



AB doğrusu rastgele bir C noktasında kesilsin.

Diyorum ki AB, BC üzerindeki kareler, AB, BC tarafından içerilen dikdörtgenin iki katıyla CA üzerindeki kareye eşittir.

Çünkü, AB üzerine $ADEB$ karesi çizilsin; **[I.46]** ve şekil çizilsin.

O zaman, AG, GE'ye eşit olduğundan, **[I.43]**

bunlara CF eklensin; bu durumda AF eşittir CE olur.

Öyleyse AF, CE birlikte AF'nin iki katı olur.

Ama AF, CE birlikte KLM kadranı ve CF karesidir; bu durumda KLM kadranı ve CF karesi, AF'nin iki katı olur.

Ama, AB, BC dikdörtgeninin iki katı da AF'nin iki katıdır, çünkü BF eşittir BC; bu durumda KLM kadranı ve CF karesi birlikte AB, BC dikdörtgeninin iki katına eşittir.

Bunlara AC üzerindeki kare olan DG eklensin; bu durumda KLM kadranı ve BG, GD kareleri, $ADEB$'nin tamamı ve CF'ye eşittir ki bunlar AB, BC üzerine çizilen karelerdir.

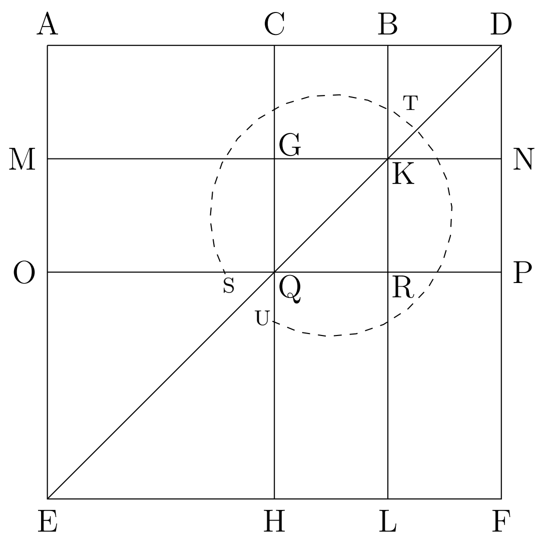
Öyleyse AB, BC karelerinin toplamı, AB, BC tarafından içerilen dikdörtgenin iki katı ile AC üzerindeki kareye eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

8. Önerme:

Bir doğru rastgele ikiye kesilirse, bütünle bu parçalardan birinin içerdiği dikdörtgenin dört katıyla diğer parça üzerindeki kare birlikte, bütüne ilk parçanın aynı doğru üzerinde eklenmesiyle oluşan doğru üzerindeki kareye eşittir.

[$4(a+b)a+b^2=(a+b+a)^2$. *]*



AB doğrusu rastgele bir C noktasında kesilsin.

Diyorum ki AB, BC dikdörtgeninin dört katı ile AC üzerindeki kare, AB, BC sanki bir doğru üzerindeymiş gibi üzerlerine çizilen kareye eşittir.

Çünkü, BD uzatılsın ve BD, CB'ye eşit olsun; AD üzerine $AEFD$ karesi çizilsin, ve şeklin tamamı çizilsin.

O zaman, CB, GK'ye, ve BD, KN'ye eşitken, CB eşittir BD olduğundan, GK de KN'ye eşittir. Aynı nedenden dolayı QR de RP'ye eşittir.

Ve BC, BD'ye, ve GK, KN'ye eşit olduğundan, CK eşittir KD, ve GR eşittir RN olur. **[I.36]**

Ama CP paralelkenarın içinde tümleyenler oldukları için CK eşittir RN olur; **[I.43]**

bu durumda KD eşittir GR olur; böylece dört alan DK, CK, GR, RN birbirine eşit olur. Öyleyse dördünün toplamı CK'nın dört katıdır.

Yine, CB, BD'ye eşit olduğundan, ama BD de BK'ye, yani CG'ye eşit olduğundan, ve CB, GK'ye, yani GQ'ya eşit olduğundan, böylece CG de GQ'ya eşit olur.

Ve CG, GQ'ya, ve QR, RP'ye eşit olduğundan AG eşittir MQ, ve QL eşittir RF olur. **[I.36]**

Ama ML paralelkenarın içinde tümleyenler oldukları için MQ eşittir QL olur; **[I.43]**

bu durumda AG de RF'ye eşit olur; böylece dördü AG'nin dört katıdır.

Ama dört alan CK, KD, GR, RN'nin CK'nin dört katı olduğu kanıtlanmıştı; böylece STU kadranını içeren sekiz alan AK'nin dört katıdır.

Şimdi, BK, BD'ye eşit olduğundan, AK dikdörtgeni AB, BD dikdörtgenidir. Bundan dolayı AB, BD dikdörtgeninin dört katı AK'nin dört katıdır.

Ama STU kadranının da AK'nin dört katı olduğu kanıtlanmıştı; bu durumda AB, BD dikdörtgeninin dört katı STU kadranına eşittir.

Bunlara AC üzerindeki kareye eşit olan OH eklensin; bu durumda AB, BD dikdörtgeninin dört katı, AC üzerindeki kareyle birlikte STU kadranı ve OH'ye eşittir.

Ama STU kadranı ve OH, AD üzerine çizilmiş AEFD karesinin tamamına eşittir; bu durumda AB, BD dikdörtgeninin dört katı, AC üzerindeki kareyle birlikte AD üzerindeki kareye eşit olur.

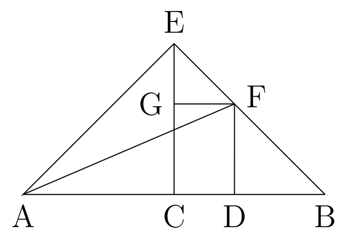
Ama BD eşittir BC; öyleyse AB, BC tarafından içerilen dikdörtgenin dört katı, AC üzerindeki kareyle birlikte AD üzerindeki kareye eşittir, yani AB, BC sanki bir doğru üzerindeymiş gibi üzerlerine çizilen kareye eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

9. Önerme:

Bir doğru eşit ve eşit olmayan iki parçaya kesilse, eşit olmayan parçalar üzerindeki kareler, yarımın üzerindeki kareyle kesen noktalar arasındaki doğrunun üzerindeki karenin toplamının iki katına eşittir

[$a+a = (a+b)+(a-b)$ *ise* $(a+b)^2+(a-b)^2 = 2(a^2+b^2)$ *olur.]*



AB doğrusu C noktasında iki eşit parçaya, D noktasında da eşit olmayan iki parçaya kesilmiş olsun.

Diyorum ki AD, DB üzerindeki kareler, AC, CD üzerindeki karelerin iki katıdır.

Çünkü, AB'ye C'den dik açıyla CE çizilsin ve CE doğrusu AC'ye ya da CB'ye eşit olsun; EA, EB birleştirilsin, D'den EC'ye paralel DF çizilsin, F'den AB'ye paralel FG çizilsin, ve AF birleştirilsin.

O zaman, AC eşittir CE olduğundan, EAC açısı da AEC açısına eşit olur. Ve C'deki açı dik olduğundan kalan EAC, AEC açıları iki dik açıya eşittir. **[I.32]**

Ve birbirlerine de eşittirler; o yüzden CEA, CAE açılarının her biri yarım dik açıya eşittir.

Aynı nedenden dolayı CEB, EBC açılarının her biri de yarım dik açıya eşittir; bu durumda AEB açısı dik açı olur.

Ve GEF açısı yarım dik açı olduğundan, ve EGF açısı, karşı iç açı ECB'ye eşit olması nedeniyle, **[I.29]**

dik olduğundan, kalan EFG açısı da yarım dik açıdır; **[I.32]**

bu durumda GEF açısı EFG açısına eşittir, böylece EG eşittir GF olur. **[I.6]**

Yine, B'deki açı yarım dik açı olduğundan, ve FDB açısı, karşı iç açı ECB'ye eşit olması nedeniyle, **[I.29]**

dik olduğundan, kalan BFD açısı yarım dik açıdır; **[I.32]** bu durumda B'deki açı DFB açısına eşittir, böylece FD kenarı da DB kenarına eşit olur. **[I.6]**

Şimdi, AC, CE'ye eşit olduğundan, AC üzerindeki kare de CE üzerindeki kareye eşittir; bu durumda AC, CE üzerindeki kareler AC üzerindeki karenin iki katıdır.

Ama EA karesi, ACE açısı dik olduğundan AC, CE üzerindeki karelere eşittir; **[I.47]**

bu durumda EA karesi AC karesinin iki katıdır.

Yine, EG eşittir GF olduğundan, EG üzerindeki kare GF üzerindeki kareye eşittir; bu durumda EG, GF üzerindeki kareler GF üzerindeki karenin iki katıdır.

Ama EF üzerindeki kare EG, GF üzerindeki karelere eşittir; bu durumda EF üzerindeki kare GF üzerindeki karenin iki katıdır.

Ama GF eşittir CD; **[I.34]**

bu durumda EF üzerindeki kare CD üzerindeki karenin iki katıdır.

Ama EA üzerindeki kare de AC üzerindeki karenin iki katıdır; öyleyse AE, EF üzerindeki kareler AC, CD üzerindeki karelerin iki katıdır.

Ve AF üzerindeki kare, AEF açısı dik olduğu için AE, EF üzerindeki karelere eşittir; **[I.47]**

bu durumda AF üzerindeki kare AC, CD üzerindeki karelerin iki katıdır.

Ama AD, DF üzerindeki kareler, D'deki açı dik olduğu için AF üzerindeki kareye eşittir; **[I.47]**

bu durumda AD, DF üzerindeki kareler AC, CD üzerindeki karelerin iki katı olur.

Ve DF eşittir DB;

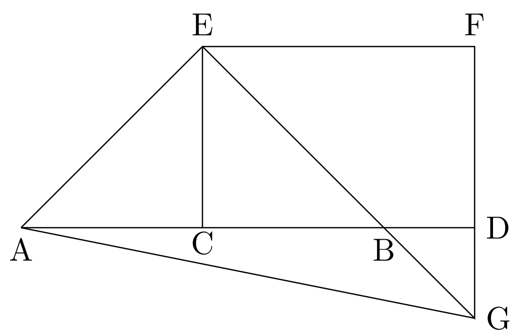
öyleyse AD, DB üzerindeki kareler AC, CD üzerindeki karelerin iki katıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

10. Önerme:

Bir doğru ikiye bölünse, ve ona aynı doğru üzerinde bir doğru eklense, eklenen doğruyla bütünün oluşturduğu doğru üzerindeki kare ile eklenen doğru üzerindeki karenin toplamı, yarımın üzerindeki kare ile yarım ve eklenen doğru sanki bir doğru üzerindeymiş gibi üzerlerine çizilen karenin toplamının iki katına eşittir.

[$(a+a+b)^2+b^2=2(a^2+(a+b)^2)$. *]*



Bir AB doğrusu C'de ikiye bölünsün, ona aynı doğru üzerinde bir BD doğrusu eklensin.

Diyorum ki AD, DB üzerindeki kareler AC, CD üzerindeki karelerin iki katıdır.

Çünkü, AB'ye C'den dik açıyla CE çizilsin **[I.11]**

ve AC'ye ya da CB'ye eşit olsun; **[I.3]**

EA, EB birleştirilsin; E'den AD'ye paralel EF çizilsin, ve D'den CE'ye paralel FD çizilsin **[I.31]**

O zaman, EF doğrusu EC, FD paralel doğrularını kestiği için, CEF, EFD açıları iki dik açıya eşittir; **[I.29]**

demek ki FEB, EFD açıları iki dik açıdan küçüktür.

Ama iki dik açıdan küçük açılardan uzatılan doğrular kesişir; **[Bel. 5]**

bu durumda EB, FD doğruları B, D yönünde uzatıldığında kesişeceklerdir.

Uzatıldıklarında G noktasında kesişsinler, AG birleştirilsin.

O zaman, AC eşittir CE olduğundan, EAC açısı da AEC açısına eşittir; **[I.5]**

ve C'deki açı diktir; bu durumda EAC, AEC açılarının her biri yarım dik açıdır; **[I.32]**

Aynı nedenden dolayı CEB, EBC açılarının her biri yarım dik açıdır; bu durumda AEB açısı diktir.

Ve EBC açısı yarım dik açı olduğu için, DBG açısı da yarım dik açıdır. **[I.15]**

Ama BDG açısıda diktir, çünkü ters iç açı DCE'ye eşittir; **[I.29]**

bu durumda kalan DGB açısı da yarım dik açıdır; **[I.32]**

öyleyse DGB açısı DBG açısına eşitir, ve BD kenarı da GD kenarına eşittir. **[I.6]**

Yine, EGF açısı yarım dik açı olduğundan, ve F'deki açı C'deki karşı açıya eşit olması nedeniyle dik olduğunda, **[I.34]**

kalan FEG açısı da yarım dik açıdır, **[I.32]**

böylece GF kenarı da EF kenarına eşittir. **[I.6]**

Şimdi, EC üzerindeki kare CA üzerindeki kareye eşit olduğundan, EC, CA üzerindeki kareler CA üzerindeki karenin iki katıdır.

Ama EA üzerindeki kare EC, CA üzerindeki karelere eşittir; **[I.47]**

bu durumda EA üzerindeki kare AC üzerindeki karenin iki katıdır. **[Ort. 1]**

Yine, FG eşittir EF olduğundan, FG üzerindeki kare FE üzerindeki kareye eşittir; bu durumda GF, FE üzerindeki kareler EF üzerindeki karenin iki katıdır.

Ama EG üzerindeki kare GF, FE üzerindeki karelere eşittir; **[I.47]**

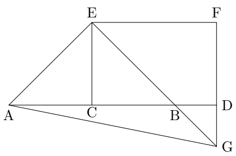
bu durumda EG üzerindeki kare EF üzerindeki karenin iki katıdır.

Ve EF eşittir CD; **[I.34]**

öyleyse EG üzerindeki kare CD üzerindeki karenin iki katıdır.

Ama EA üzerindeki karenin de AC üzerindeki karenin iki katı olduğu kanıtlanmıştı; bu durumda AE, EG üzerindeki kareler AC, CD üzerindeki karelerin iki katıdır.

Ve AG üzerindeki kare AE, EG üzerindeki karelere eşittir; **[I.47]**



bu durumda AG üzerindeki kare AC, CD üzerindeki karelerin iki katıdır.

Ama AD, DG üzerindeki kareler AG üzerindeki kareye eşittir; **[I.47]**

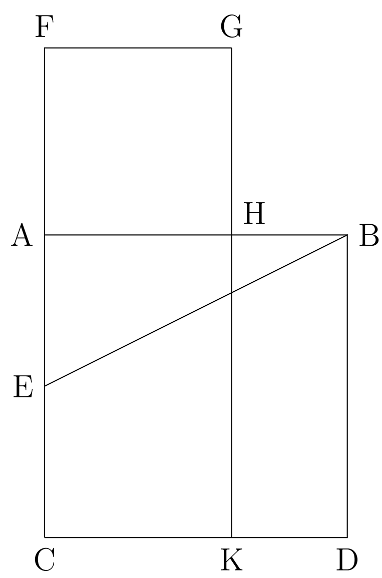
bu durumda AD, DG üzerindeki kareler AC, CD üzerindeki karelerin iki katıdır.

Ve DG eşittir DB; öyleyse AD, DB üzerindeki kareler AC, CD üzerindeki karelerin iki katıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

11. Önerme:
Verilen bir doğruyu, bir parçasıyla bütününün içerdiği dikdörtgen diğer parça üzerindeki kareye eşit olacak şekilde kesmenin yolu.

[Bütünü $a+b$ şeklinde kestiğimizi kabul edersek, $(a+b)b = a^2$ olsun istiyoruz. Buradan $\frac{a}{b} = \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, yani altın oran bulunur.]



Verilen doğru AB olsun; AB öyle kesilsin isteniyor ki bütün ve bir parça tarafından içerilen dikdörtgen diğer parça üzerindeki kareye eşit olsun.

AB üzerine $ABDC$ karesi çizilsin; **[I.46]**

AC doğrusu E'de ikiye bölünsün, ve BE birleştirilsin; CA doğrusu F'ye kadar uzatılsın ve EF, BE'ye eşit olsun; AF üzerine FH karesi çizilsin, ve GH doğrusu K'ye kadar uzatılsın.

Diyorum ki AB doğrusu H noktasında, AB, BH tarafından içerilen dikdörtgen AH üzerindeki kareye eşit olacak şekilde kesilmiştir.

Çünkü, AC doğrusu E'de ikiye bölündüğünden, ve bu doğruya FA eklendiğinden, CA, FA tarafından içerilen dikdörtgen AE üzerindeki kareyle birlikte EF üzerindeki kareye eşittir. **[II.6]**

Ama EF eşittir EB; öyleyse CA, FA tarafından içerilen dikdörtgen AE üzerindeki kareyle birlikte EB üzerindeki kareye eşittir.

Ama, A'daki açı dik olduğundan BA, AE üzerindeki kareler EB üzerindeki kareye eşittir; **[I.47]**

bu durumda CF, FA dikdörtgeni AE üzerindeki kareyle birlikte BA, AE üzerindeki karelere eşittir.

Bunlardan AE üzerindeki kare çıkarılsın; bu durumda kalan CF, FA dikdörtgeni AB üzerindeki kareye eşittir.

Şimdi, AF eşittir FG olduğundan, CF, FA dikdörtgeni FK'dir; ve AB üzerindeki kare AD'ye eşittir; bu durumda FK eşittir AD olur.

Bunlardan AK çıkarılsın; bu durumda kalan FH, kalan HD'ye eşittir.

Ve AB eşittir BD olduğundan, HD dikdörtgeni AB, BH dikdörtgenidir; ve FH de AH üzerindeki karedir; bu durumda AB, BH tarafından içerilen dikdörtgen HA üzerindeki kareye eşittir.

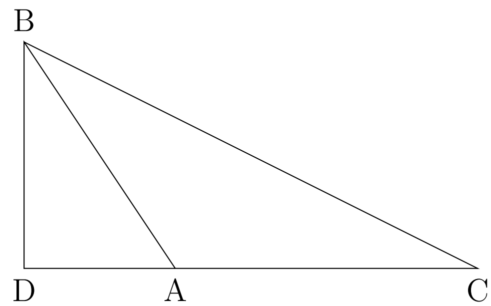
Öyleyse verilen AB doğrusu H noktasında öyle kesilmiştir ki AB, BH dikdörtgeni HA üzerindeki kareye eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

12. Önerme:

Geniş açılı bir üçgende geniş açıyı gören kenar üzerindeki kare, diğer kenarlar üzerindeki karelerin toplamından bu kenarlardan biriyle o kenarı diğer köşeden gelen dikmeyle birleşinceye kadar uzatan doğrunun içerdiği dikdörtgenin iki katı kadar büyüktür.

[Geniş açı θ *ise,* $c^2 = a^2 + b^2 + 2a(b\cos(\pi - \theta))$ *olur. Burada* θ *geniş açı olduğundan* $\cos(\pi - \theta)$ *pozitifdir.]*



Bir ABC geniş açılı üçgeninde BAC açısı geniş açı olsun, B'den CA'nın uzantısına BD dikmesi çizilsin.

Diyorum ki BC üzerindeki kare, BA, AC üzerindeki karelerden CA, AD tarafından içerilen dikdörtgenin iki katı kadar büyüktür.

Çünkü CD doğrusu A noktasında rastgele kesildiği için DC üzerindeki kare, CA, AD üzerindeki kareler ve CA, AD tarafından içerilen dikdörtgenin iki katına eşittir. **[II.4]**

Bunlara DB üzerindeki kare eklensin; bu durumda CD, DB üzerindeki kareler CA, AD, DB üzerindeki kareler ve CA, AD dikdörtgeninin iki katına eşittir.

Ama D'deki açı dik olduğundan, CB üzerindeki kare CD, DB üzerindeki karelere eşittir; **[I.47]**

ve AB üzerindeki kare AD, DB üzerindeki karelere eşittir; **[I.47]**

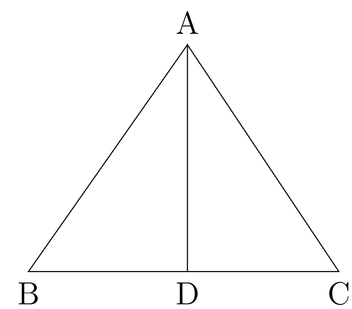
bu durumda CB üzerindeki kare CA, AB zerindeki karelere ve CA, AD tarafından içerilen dikdörtgenin iki katına eşittir; böylece CB üzerindeki kare CA, AB üzerindeki karelerden CA, AD tarafından içerilen dikdörtgenin iki katı kadar büyüktür.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

13. Önerme:

Dar açılı üçgenlerde, dar açıyı gören kenar üzerindeki kare, dar açıyı içine alan kenarlar üzerindeki karelerin toplamından dar açı etrafındaki kenarlardan biriyle, yani üzerine dikme indirileni ile dikmenin ayağıyla dar açılı köşe arasındaki doğru tarafından içerilen dikdörtgenin iki katı kadar küçüktür.

[Dar açı θ *ise,* $c^2 = a^2 + b^2 - 2a(b\cos\theta)$ *olur.]*



Bir ABC dar açılı bir üçgeninde B açısı dar olsun, ve A'dan BC'ye AD dik olarak çizilsin.

Diyorum ki AC üzeindeki kare CB, BA üzerindeki karelerden CB, BD tarafından içerilen dikdörtgenin iki katı kadar küçüktür.

Çünkü, CB doğrusu D'de rastgele kesildiğinden, CB, BD üzerindeki kareler CB, BD tarafından içerilen dikdörtgenin iki katı ve DC üzerindeki kareye eşittir. **[II.7]**

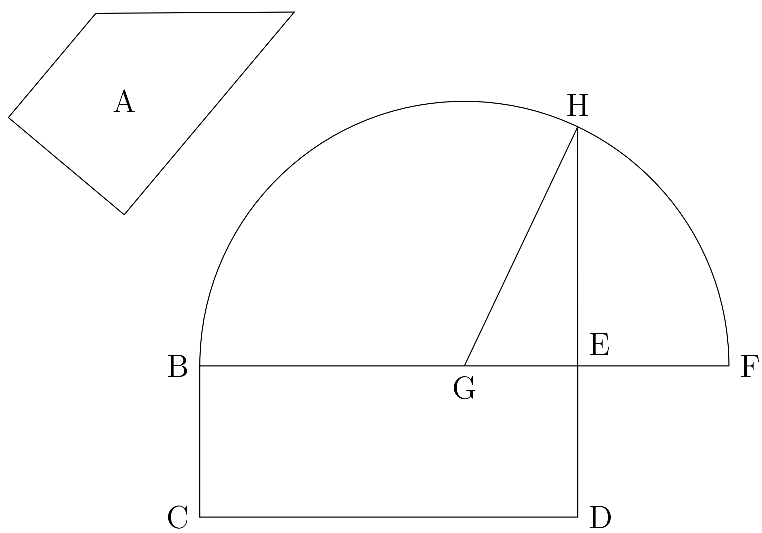
Bunlara DA üzerindeki kare eklensin; bu durumda CB, BD, DA üzerindeki kareler CB, BD tarafından içerilen dikdörtgenin iki katı ve AD, DC üzerindeki karelere eşittir.

Ama D'deki açı dik olduğundan, AB üzerindeki kare BD, DA üzerindeki karelere eşittir; **[I.47]**

ve AC üzerindeki kare AD, DC üzerindeki karelere eşittir; bu durumda CB, BA üzerindeki kareler AC üzerindeki kare ve CB, BD dikdörtgeninin iki katına eşittir, böylece AC üzerindeki kare tek başına CB, BA üzerindeki karelerden CB, BD tarafından içerilen dikdörtgenin ik katı kadar küçüktür.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

14. Önerme:
Verilen bir düzkenarlı şekle eşit bir kare çizmenin yolu.



Verilen düzkenarlı şekil A olsun; böylece verilen düzkenar şekil A'ya eşit bir kare çizilmesi isteniyor.

Düzkenarlı şekil A'ya eşit BD dikdörtgeni çizilsin. **[I.45]**

Eğer BE eşittir ED ise, o zaman yapılması istenen tamamlanmış olur çünkü A düzkenarlı şekle eşit BD karesi çizilmiştir.

Ama değilse, BE, ED doğrularından biri daha uzundur.

Uzun olan BE olsun ve F'ye uzatılsın; EF, ED'ye eşit olsun, ve BF doğrusu G'de ikiye bölünsün.

G merkezi ve GB, GF doğrularından birine eşit uzaklıkla BHF yarıçemberi çizilsin; DE doğrusu H'ye uzatılsın, ve GH birleştirilsin.

O zaman, BF doğrusu G'de eşit iki parçaya bölündüğü ve E'de eşit olmayan iki parçaya kesildiği için, BE, EF tarafından içerilen dikdörtgen EG üzerindeki kareyle birlikte GF üzerindeki kareye eşittir. **[II.5]**

Ama GF eşittir GH; bu durumda BE, EF dikdörtgeni GE üzerindeki kareyle birlikte GH üzerindeki kareye eşittir.

Ama HE, EG üzerindeki kareler GH üzerindeki kareye eşittir. **[I.47]**

Bunlardan GE üzerindeki kare çıkarılsın; bu durumda kalan BE, EF tarafından içerilen dikdörtgen EH üzerindeki kareye eşittir.

Ama EF eşittir ED olduğundan BE, EF tarafından içerilen dikdörtgen BD'dir; bu durumda BD paralelkenarı HE üzerindeki kareye eşittir.

Ama BD, düzkenarlı şekil A'ya eşittir.

Bu durumda düzkenarlı şekil A da EH üzerine çizilebilecek kareye eşit olur.

Öyleyse verilen düzkenarlı şekil A'ya eşit bir kare, yani EH üzerine, çizilmiştir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■