# Kitap III

## 1. Tanımlar

1 Çapları ya da yarıçapları eşit olan çemberlere **eşit çemberler** denir.

2 Bir çembere bir noktada değen ama ne kadar uzatılırsa uzatılsın çemberi başka bir noktada kesmeyen doğruya **çembere değen doğru** denir.

3 Birbiriyle buluşan ama başka noktada birbirini kesmeyen çemberlere **birbirine değen çemberler** denir.

> *[ Son iki tanımda Öklid* teğet *kelimesini kullanmaz, fakat ilerdeki önermelerde doğrudan "teğet" kelimesini kullanır. ]*

4 Bir çember içinde iki doğruya merkezden çizilen dikmelerin uzunlukları eşitse bu doğrulara **merkezden eşit uzaklıkta** denir.

5 Ve merkezden kendisine çizilen dikmenin uzunluğu diğerininkinden daha büyük olan doğruya **merkezden daha uzakta** denir.

6 Çemberin bir çevresiyle bir doğru arasında kalan şekle **çember parçası** denir.

7 Bir doğru ile çemberin çevresi arasındaki açıya **çember parçasının açısı** denir.

8 Bir çember parçasının üzerindeki bir noktadan **çember parçasının tabanını** oluşturan doğrunun iki ucuna çizilen doğruların birleştikleri yerde içerdikleri açıya **çember parçasının içindeki açı** denir.

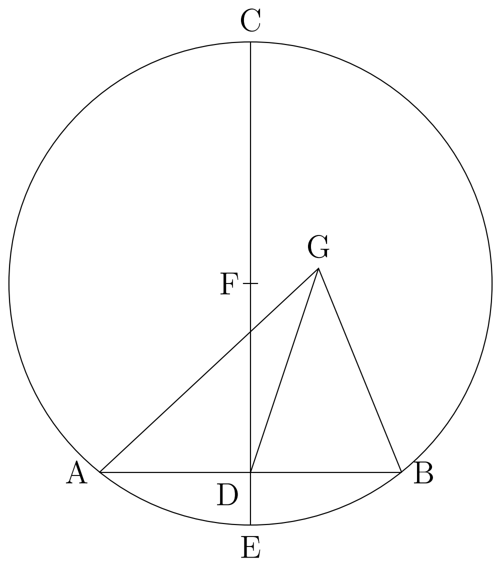
9 Ve bir açıyı içeren doğrular çemberin bir çevresini keserlerse, bu açı o **çevreyi görüyor** denir.

10 Bir çevre ile o çevrenin uçlarını çemberin merkezine birleştiren doğrular arasında kalan şekle **çember dilimi** denir.

11 Kendi açıları ya da içindeki açıları eşit olan çember parçalarına **benzer çember parçaları** denir.

## 2. Önermeler

**1. Önerme:**
**Bir çemberin merkezini bulmanın yolu.**




Verilen çember $ABC$ olsun; böylece $ABC$ çemberinin merkezinin bulunması isteniyor.

Bu çemberi kesen rastgele bir $AB$ doğrusu çizilsin ve bu doğru $D$ noktasında ikiye bölünsün; $D$ noktasından $AB$ doğrusuna $DC$ dikmesi çizilsin ve $E$'ye kadar uzatılsın; $CE$ doğrusu $F$'de ikiye bölünsün;

Diyorum ki $ABC$ çemberinin merkezi $F$'dir.

Çünkü, merkezin o olmadığını varsayalım, ama mümkünse $G$ merkez olsun, ve $GA$, $GD$, $GB$ birleştirilsin.

O zaman, $AD$ eşittir $DB$ olduğundan, ve $DG$ de ortak olduğundan $AD$, $DG$ kenarları sırasıyla $BD$, $DG$ kenarlarına eşittir; ve yarıçap olduklarından $GA$ tabanı $GB$ tabanına eşittir; bu durumda $ADG$ açısı $GDB$ açısına eşittir. **[I.8]**

Ama, ne zaman bir doğruya çizilen bir doğru komşu iki açıyı birbirine eşit yapıyorsa, bu açıların her biri diktir; **[Tan. I.10]**

bu durumda $GDB$ açısı dik olur.

Ama $FDB$ açısı da diktir; öyleyse $FDB$ açısı $GDB$ açısına eşit olur, yani büyük olan küçük olana, ki bu olamaz.

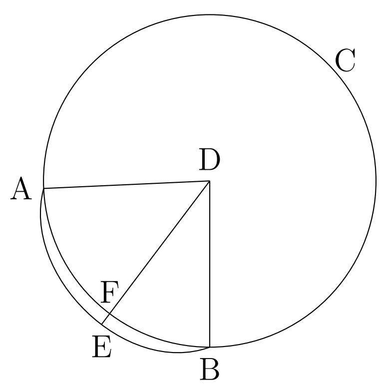
Bu yüzden $G$ noktası $ABC$ çemberinin merkezi değildir.

Benzer şekilde, $F$'den başka hiçbir noktanın da merkez olamayacağını kanıtlayabiliriz.

Bu durumda $F$ noktası $ABC$ çemberinin merkezidir. □

**Doğal Sonuç:** Buradan açıkça görülür ki eğer bir çemberde bir doğru bir diğer doğruyu iki eşit parçaya bölüyorsa ve ona dikse, çemberin merkezi bu dik kesen doğru üzerindedir.

**2. Önerme:**
**Bir çemberin üzerinde rastgele iki nokta alınırsa, bu noktaları birleştiren doğru çemberin içinde kalır.**



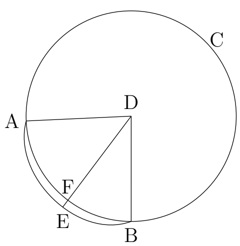

$ABC$ bir çember olsun ve çevresi üzerinde $A$, $B$ gibi rastgele iki nokta alınsın;

Diyorum ki $A$ ile $B$'yi birleştiren doğru çemberin içine düşer.

Çünkü, varsayalım ki öyle olmasın, ama mümkünse $ABC$'nin dışına düşsün; $ABC$ çemberinin merkezi bulunsun ve ona $D$ densin; **[III.1]**

$DA$, $DB$ birleştirilsin, ve $DFE$ çizilsin.

O zaman, $DA$ eşittir $DB$ olduğundan, $DAE$ açısı $DBE$ açısına eşittir. **[I.5]**




Ve DAE üçgeninin AEB kenarı uzatıldığı için, DEB açısı DAE açısından büyüktür. **[I.16]**

Ama DAE açısı DBE açısına eşittir; bu durumda DEB açısı DBE açısından büyüktür.

Ve büyük açı büyük kenar tarafından görülür; **[I.19]**

öyleyse DB kenarı DE kenarından büyüktür.

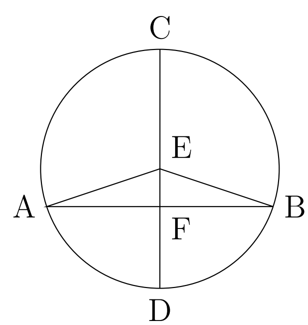
Ama DB, DF'ye eşittir. Bu durumda DF DE'den büyük olur, yani küçük olan büyükten ki bu olamaz.

Benzer şekilde çember üzerine düşmeyeceğini de kanıtlayabiliriz.

Öyleyse içeri düşecektir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**3. Önerme:**
**Çemberin merkezinden geçen bir doğru eğer çemberin merkezinden geçmeyen bir doğruyu iki eşit parçaya bölerse aynı zamanda ona diktir, ve eğer dikse aynı zamanda onu iki eşit parçaya böler.**




ABC bir çember olsun ve içinde merkezden geçen bir CD doğrusu, merkezden geçmeyen bir AB doğrusunu F noktasında ikiye bölsün;

Diyorum ki aynı zamanda ona diktir.

Çünkü, ABC çemberinin merkezi alınsın ve E densin; EA, EB, birleştirilsin. O zaman AF eşittir FB, ve FE ortak olduğundan, iki kenar iki kenara eşittir; ve EA tabanı EB tabanına eşittir; bu durumda AFE açısı BFE açısına eşit olur. **[I.8]**

Ama, ne zaman bir doğruya çizilen bir doğru komşu iki açıyı birbirine eşit yapıyorsa, bu açıların her biri diktir; **[Tan. I.10]**

öyleyse $AFE$, $BFE$ açılarının herbiri diktir.

Öyleyse, merkezden geçmeyen $AB$'yi ikiye bölen ama kendisi merkezden geçen $CD$ doğrusu $AB$'ye diktir.

Şimdi de $CD$ doğrusu $AB$'ye dik olsun;

Diyorum ki onu ikiye böler, yani $AF$ eşittir $FB$ olur.

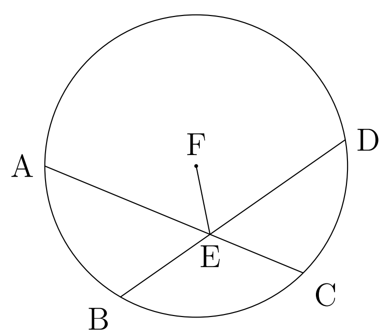
Çünkü, aynı çizimi kullanarak, $EA$ eşittir $EB$ olduğundan, $EAF$ açısı $EBF$ açısına eşit olur. **[I.5]**

Ama $AFE$ dik açısı da $BFE$ dik açısına eşittir, bu yüzden $EAF$, $EBF$ üçgenlerinde iki açı iki açıya ve bir kenar bir kenara, yani ikisine ortak olan $EF$ doğrusu, eşittir; bu durumda kalan kenarları da eşit olacaktır; **[I.26]**

öyleyse $AF$ eşittir $FB$ olur.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**4. Önerme:**
**Bir çemberde merkezden geçmeyen iki doğru birbirini kesiyorsa, bunlar birbirlerini iki eşit parçaya bölmezler.**

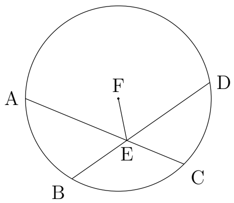



$ABCD$ bir çember olsun ve içinde merkezden geçmeyen iki doğru $AC$, $BD$ birbirini $E$'de kessin.

Diyorum ki bunlar birbirini ikiye bölmez.

Çünkü, mümkünse birbirlerini ikiye bölsünler, öyle ki $AE$ eşittir $EC$, ve $BE$ eşittir $ED$ olsun;

$ABCD$'nin merkezi bulunsun, ve ona $F$ densin; $FE$ birleştirilsin. **[III.1]**




O zaman, merkezden geçen FE doğrusu merkezden geçmeyen AC doğrusunu ikiye böldüğünden ona diktir; **[III.3]**

bu durumda FEA açısı dik olur.

Yine, FE doğrusu BD doğrusunu ikiye böldüğü için ona diktir; **[III.3]**

bu durumda FEB açısı dik olur.

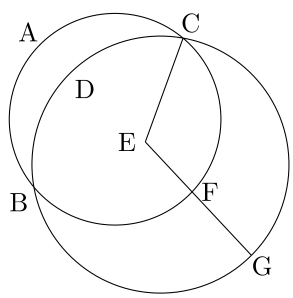
Ama FEA açısının da dik olduğu kanıtlanmıştı;

o zaman FEA açısı FEB açısına eşit olur, yani küçük olan büyük olana ki bu olamaz.

Öyleyse AC, BD birbirini ikiye bölmez.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**5. Önerme:**
**Eğer iki çember kesişiyorsa merkezleri aynı olmaz.**




ABC, CDG çemberleri birbirini B, C noktalarında kessin.

Diyorum ki merkezleri aynı olamaz.

Çünkü, mümkünse ortak merkez E olsun; EC birleştirilsin, rastgele EFG çizilsin.

O zaman, ABC çemberinin merkezi E olduğundan EC eşittir EF olur. **[Tan. I.15]**

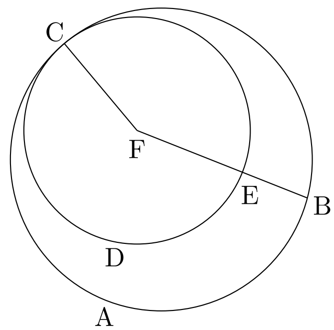
Yine, CDG çemberinin merkezi E olduğundan EC eşittir EG olur.

Ama EC'nin EF'ye de eşit olduğu kanıtlanmıştı; bu durumda EF, EG'ye eşit olur, yani küçük olan büyüğe ki bu olamaz.

Öyleyse E noktası ABC, CDG çemberlerinin merkezi değildir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**6. Önerme:**
**Eğer iki çember birbirine değiyorsa merkezleri aynı olmaz.**




$ABC$, $CDE$ çemberleri birbirine $C$ noktasında değsin.

Diyorum ki merkezleri aynı olmayacaktır.

Çünkü, eğer mümkünse, bu ortak merkez $F$ olsun; $FC$ birleştirilsin, $FEB$ soğrusu rastgele çizilsin.

O zaman $F$ noktası $ABC$ çemberinin merkezi olduğundan, $FC$ eşittir $FB$ olur.

Yine $F$ noktası $CDE$ çemberinin merkezi olduğundan, $FC$ eşittir $FE$ olur.

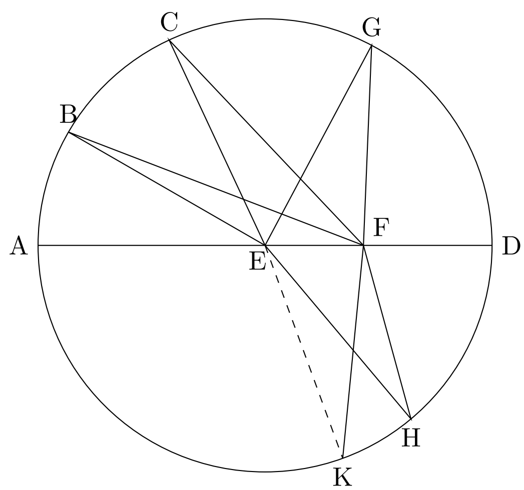
Ama $FC$'nin $FB$'ye eşit olduğu kanıtlanmıştı; bu durumda $FE$ de $FB$'ye eşittir, yani küçük olan büyük olana ki bu olamaz.

Öyleyse $F$ noktası $ABC$, $CDE$ çemberlerinin merkezi değildir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**7. Önerme:**

**Bir çemberin çapı üzerinde merkezden farklı bir nokta alınır ve bu noktadan çemberin üzerindeki noktalara doğrular çizilirse, bunların en büyüğü merkezden geçendir, en küçüğü de aynı çapın kalan kısmıdır; diğerleri arasında merkezden geçen doğruya daha yakın olan daha uzak olanlardan büyüktür, ve bu alınan noktadan çemberin üzerine yalnızca iki tane aynı büyüklükte doğru çizilebilir ve bunlar da en kısa doğrunun iki tarafındadır.**




ABCD bir çember, ve AD onun çapı olsun. AD üzerinde çemberin merkezi olmayan bir F noktası alınsın, çemberin merkezi E olsun, ve F'den ABCD çemberinin üzerine FB, FC, FG doğruları çizilsin;

Diyorum ki bunların en büyüğü FA, en küçüğü FD, diğerleri arasında ise FB, FC'den, ve FC, FG'den büyüktür.

Çünkü; BE, CE, GE birleştirilsin. O zaman bir üçgende iki kenar birlikte diğer kenardan büyük olduğundan, **[I.20]**

EB, EF kenarları BF kenarından büyüktür. Ama AE eşittir BE'dir; bu durumda AF büyüktür BF olur.

Yine, BE eşittir CE olduğundan ve FE ortak olduğundan, BE, EF kenarları CE, EF kenarlarına eşittir. Ama BEF açısı CEF açısından büyüktür; bu durumda BF tabanı CF tabanından büyüktür. **[I.24]**

Aynı nedenden dolayı CF de FG'den büyüktür.

Yine, GF, FE kenarları EG kenarından büyük olduğundan, ve EG eşittir ED olduğundan, GF, FE kenarları ED kenarından büyüktür.

Bunlardan $EF$ çıkarılsın; bu durumda kalan $GF$, kalan $FD$'den büyüktür.

Ayrıca diyorum ki $F$'den $ABCD$ çemberi üzerine, en kısa olan $FD$'nin her iki yanında birer tane olmak üzere yalnızca iki eşit doğru çizilebilir.

Çünkü; $EF$ doğrusu üzerinde ve $E$ noktasında $GEF$ açısına eşit $FEH$ açısı çizilsin, **[I.23]**

ve $FH$ birleştirilsin.

O zaman, $GE$ eşittir $EH$, ve $EF$ ortak olduğundan, $GE$, $EF$ kenarları $HE$, $EF$ kenarlarına, ve $GEF$ açısı $HEF$ açısına eşit olur; bu durumda $FG$ tabanı $FH$ tabanına eşit olur. **[I.4]**

Tekrar diyorum ki $F$ noktasından çemberin üzerine $FG$'ye eşit başka bir doğru çizilemez.

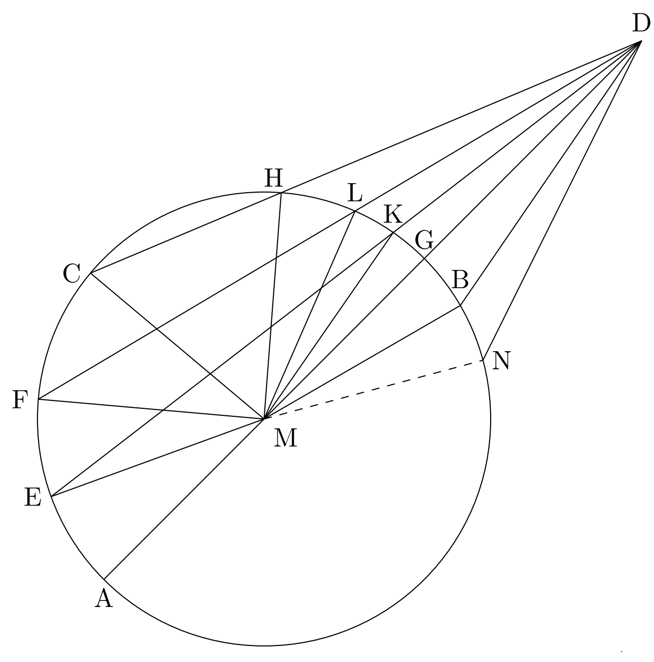
Çünkü, mümkünse $FK$ böyle çizilmiş olsun. O zaman $FK$ eşittir $FG$, ve $FH$ eşittir $FG$ olduğundan $FK$ de $FH$'ye eşit olur, yani merkezden geçen doğruya daha yakın olan daha uzak olana eşit olur, ki bu olamaz.

Öyleyse $F$'den çemberin üzerine $GF$'ye eşit başka bir doğru çizilemez.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**8. Önerme:**

**Bir çemberin dışında bir nokta alınır ve bu noktadan çembere, bir tanesi merkezden geçen ve diğerleri rastgele olan doğrular çizilirse, çemberin içbükey kısmına çizilenler arasında merkezden geçen en büyüktür, ve diğerleri arasında bu merkezden geçen doğruya daha yakın olan daha uzak olanlardan büyüktür, ama çemberin dışbükey kısmına çizilen doğrulardan bu noktayla çapın ucu arasında kalan en küçüktür, diğerleri arasında bu en küçük olana yakın olan daha uzak olanlardan küçüktür, ve bu alınan noktadan çemberin üzerine yalnızca iki tane, onlar da en küçük olanın iki tarafında birer tane olmak üzere, aynı büyüklükte doğru çizilebilir.**




ABC bir çember olsun ve ABC dışında bir D noktası alınsın; bu noktadan DA, DE, DF, DC doğruları çizilsin, DA merkezden geçsin;

Diyorum ki içbükey AEFC çevresine çizilen doğrulardan merkezden geçen DA doğrusu en büyüktür, dahası DE, DF'den, ve DF, DC'den büyüktür; ama dışbükey HLKG çevresine çizilen doğrulardan, AG çapıyla bu nokta arasındaki DG en küçüktür; ve DG'ye yakın olanlar daima daha uzak olanlardan küçüktür, yani DK, DL'den, ve DL, DH'den küçüktür.

Çünkü, ABC çemberinin merkezi bulunsun, **[III.1]** ve M olsun; ME, MF, MC, MK, ML, MH birleştirilsin.

O zaman, AM eşittir EM olduğundan, bunlara MD eklensin; bu durumda AD eşittir EM, MD olur. Ama EM, MD büyüktür ED olduğundan, **[I.20]**

AD de ED'den büyük olur.

Yine, ME eşittir MF, ve MD ortak olduğundan, EM, MD eşittir FM, MD, ve EMD açısı büyüktür FMD açısı bulunur; bu durumda ED tabanı FD tabanından büyüktür. **[I.24]**

Benzer şekilde FD'nin CD'den büyük olduğunu kanıtlayabiliriz; böylece DA en büyük olur, ve DE, DF'den, ve DF, DC'den büyüktür.

Sonra, MK, KD büyüktür MD olduğundan, ve MG eşittir MK olduğundan, kalan KD, kalan GD'den büyüktür, yani GD küçüktür KD olur.

Ve MLD üçgeninin bir kenarı olan MD üzerinde, üçgenin içinde kesişen MK, KD doğruları çizilmiş olduğu için MK, KD küçüktür ML, LD olur; **[I.21]**

ve MK eşittir ML olduğundan, kalan DK, kalan DL'den küçüktür.

Benzer şekilde DL'nin de DH'den küçük olduğunu kanıtlayabiliriz; bu durumda DG en küçük, DK, DL'den, ve DL, DH'den küçük olur.

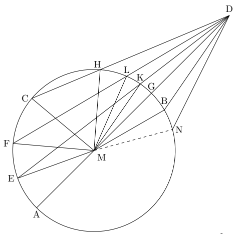
Ayrıca diyorum ki D noktasından çemberin üzerine yalnızca iki tane eşit doğru çizilebir, bunlar DG'nin birer tarafında olur.

MD doğrusu üstüne M noktasında KMD açısına eşit DMB açısı çizilsin, ve DB birleştirilsin.

O zaman, MK eşittir MB, ve MD ortak olduğundan, KM, MD kenarları sırasıyla BM, MD kenarlarına, ve KMD açısı BMD açısına eşittir; bu durumda DK tabanı DB tabanına eşit olur. **[I.4]**

Diyorum ki D noktasından çemberin üzerine DK doğrusuna eşit başka bir doğru çizilemez.

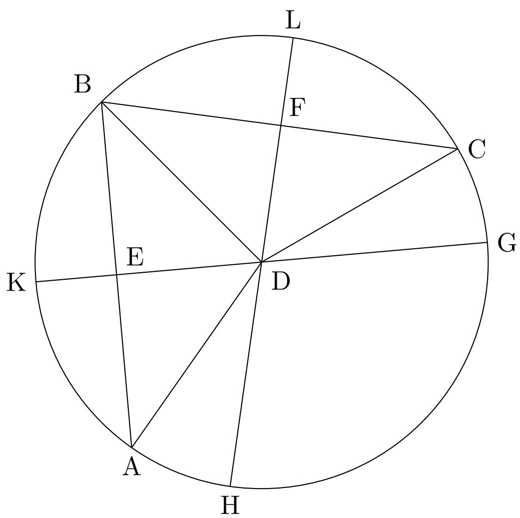
Çünkü, eğer mümkünse böyle bir çizgi çizilsin, ve DN olsun. O zaman DK eşittir DN, ve bu arada DK eşittir DB olduğundan, DB, DN'ye eşit olur, yani DG'ye daha yakın olan daha uzak olana eşit olur ki bunun olamayacağı kanıtlandı.




Öyleyse $D$ noktasından $ABC$ çemberinin üzerine, her biri $DG$'nin birer tarafında olmak üzere, iki taneden fazla eşit büyüklükte doğru çizilemez.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**9. Önerme:**
**Bir çemberin içinde bir nokta alındığında bu noktadan çemberin üzerine aynı büyüklükte ikiden fazla doğru çizilebiliyorsa, bu nokta çemberin merkezidir.**




$ABC$ bir çember olsun ve içinde alınan bir $D$ noktasından çemberin üzerine eşit uzunlukta $DA$, $DB$, $DC$ gibi ikiden fazla eşit uzunlukta doğru çizilmiş olsun.

Diyorum ki $D$ noktası $ABC$ çemberinin merkezidir.

Çünkü; $AB$, $BC$ birleştirilsinler ve $E$, $F$ noktalarında ikiye bölünsünler, ve $ED$, $FD$ birleştirilsin ve $G$, $K$, $H$, $L$ noktalarına uzatılsın.

O zaman $AE$ eşittir $EB$, ve $ED$ ortak olduğundan, $AE$, $ED$ kenarları $BE$, $ED$ kenarlarına, ve $DA$ tabanı $DB$ tabanına eşit olur; bu durumda $AED$ açısı $BED$ açısına eşit olur. **[I.8]**

Öyleyse $AED$, $BED$ açılarının her biri diktir; **[Tan. I.10]**

bu durumda $GK$, $AB$'ye diktir ve onu ikiye böler.

Ve bir çemberde eğer bir doğru bir başka doğruya dikse ve onu ikiye bölerse, çemberin merkezi bu kesen doğrunun üzerinde olduğundan, **[III.1, DS]**

çemberin merkezi GK üzerindedir.

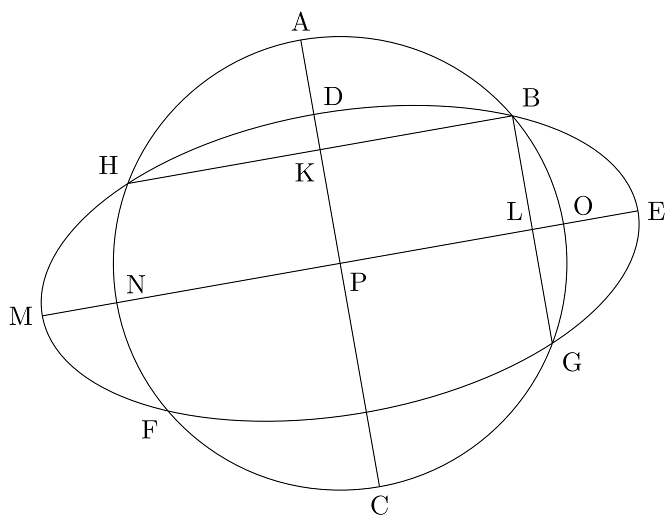
Aynı nedenden dolayı ABC çemberinin merkezi HL doğrusunun da üzerindedir.

Ve GK, HL doğrularının D'den başka ortak noktası yoktur.

Öyleyse D noktası ABC çemberinin merkezidir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**10. Önerme:**
**Bir çember bir başka çemberi ikiden fazla noktada kesmez.**

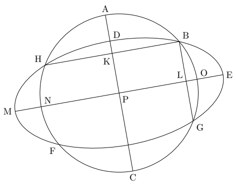



Çünkü, eğer mümkünse ABC çemberi DEF çemberini ikiden fazla noktada, yani B, G, F, H noktalarında kessin.

BH, BG birleştirilsin ve K, L noktalarında ikiye bölünsün, ve K, L noktalarından KC, LM doğruları BH ve BG'ye dik çizilsin ve A, E'ye uzatılsın.

O zaman ABC çemberinde AC doğrusu BH doğrusuna dik olduğu ve onu ikiye böldüğünden, ABC çemberinin merkezi AC üzerindedir. **[III.1,DS]**

Yine, ABC çemberinde NO doğrusu BG doğrusuna dik olduğu ve onu ikiye böldüğünden, ABC çemberinin merkezi NO üzerindedir.



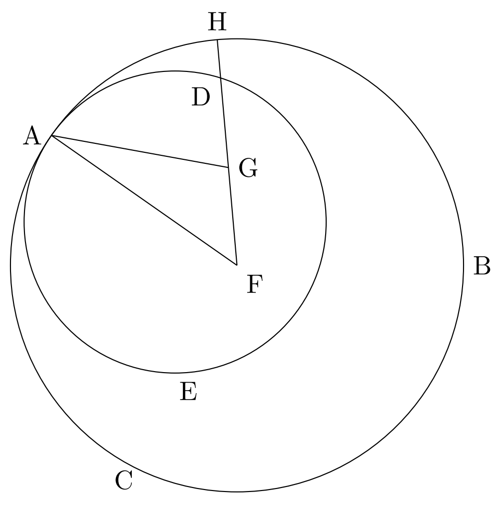

Ama merkezin AC üzerinde olduğu da kanıtlanmıştı, ve AC, NO doğruları P den başka bir noktada kesişmezler; bu durumda P noktası ABC çemberinin merkezidir.

Benzer şekilde, P'nin DEF çemberinin de merkezi olduğunu kanıtlayabiliriz.

Öyleyse birbirine kesen ABC, DEF çemberlerinin merkezi aynıdır, ama bu olamaz. **[III.5]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**11. Önerme:**
**Eğer iki çember birbirine içten değiyorsa, merkezlerini birleştiren doğru uzatıldığında çemberlerin değme noktasından geçer.**




ABC, ADE çemberleri birbirine içerden A noktasında değsin, ve ABC çemberinin merkezi F , ve ADE çemberinin merkezi G alınsın;

Diyorum ki G ile F'yi birleştiren doğru uzatıldığında A'dan geçecektir.

Çünkü geçmediğini varsayalım, ve mümkünse FGH olarak uzatılsın, ve AF, AG birleştirilsin.

O zaman, AG, GF büyüktür FA, yani FH, olduğundan, bunlardan FG çıkarılsın; bu durumda kalan AG, kalan GH'den büyüktür.

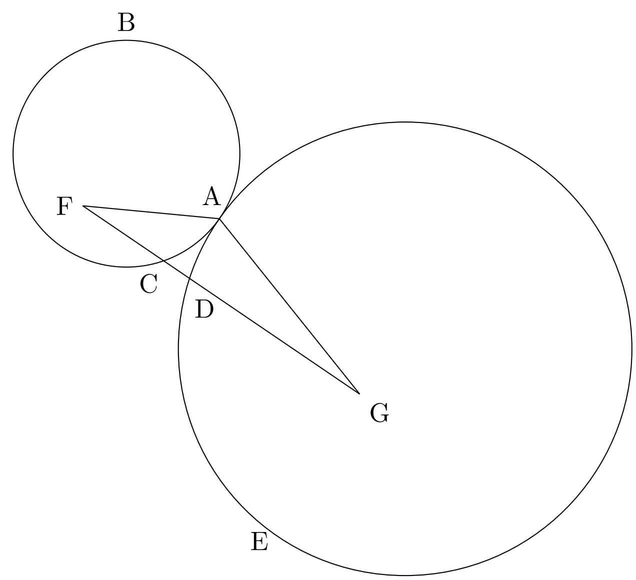
Ama $AG$, $GD$'ye eşittir; bu durumda $GD$ büyüktür $GH$ olur; küçük olan büyük olandan büyük oldu ki bu olamaz.

Öyleyse $F$ ile $G$'yi birleştiren doğru dışarıya çıkmayacak; bu durumda değme noktası $A$ üzerine düşecektir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**12. Önerme:**

**Eğer iki çember birbirine dıştan değiyorsa, merkezlerini birleştiren doğru değme noktasından geçer.**



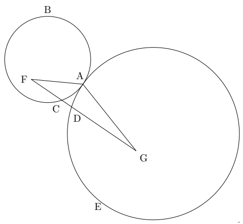

$ABC$, $ADE$ çemberleri birbirine dıştan $A$ noktasında değsin, ve $ABC$ çemberinin merkezi $F$ , ve $ADE$ çemberinin merkezi $G$ alınsın;

Diyorum ki $G$ ile $F$'yi birleştiren doğru değme noktası $A$'dan geçecektir.

Çünkü geçmediğini varsayalım, ve mümkünse $FCDG$ olarak geçsin, $AF$, $AG$ birleştirilsin.

O zaman, $F$ noktası $ABC$ çemberinin merkezi olduğundan $FA$ eşittir $FC$.

Yine, $G$ noktası $ADE$ çemberinin merkezi olduğundan $GA$ eşittir $GD$.



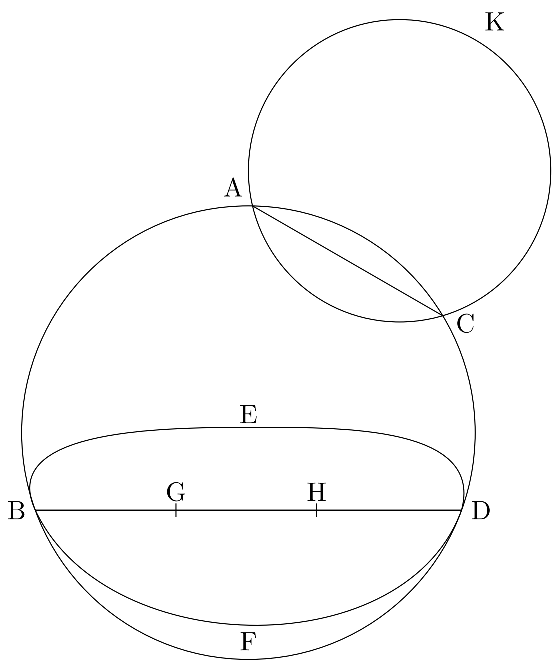

Ama FA'nın FC'ye eşit olduğu da kanıtlanmıştı; bu durumda FA, AG eşittir FC, GD olur, böylece FG'nin tamamı FA, AG'den büyük olur, ama aynı zamanda küçüktür de, **[I.20]**

ama bu olamaz.

Öyleyse F'yi G'ye birleştiren doğru değme noktası A'dan geçmemezlik edemeyecektir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**13. Önerme:**
**Bir çember bir diğer çembere, ister içten ister dıştan olsun, birden fazla noktada değmez.**




Çünkü eğer mümkünse ABDC çemberi EBFD çemberine içerden birden fazla noktada, D ve B noktalarında değsin.

ABCDC çemberinin merkezi G ve EBFD çemberinin merkezi G alınsın.

Bu durumda G ile H'yi birleştiren doğru B ve D'den geçecektir. **[III.11]**

Bu doğru BGHD olsun.

O zaman G noktası ABDC çemberinin merkezi olduğundan, BG eşittir GD; bu durumda BG büyüktür HD olur; öyleyse BH, HD'den daha da büyüktür.

Yine, H noktası EBFD çemberinin merkezi olduğundan, BH eşittir HD; ama çok daha büyük olduğu kanıtlanmıştı, demek ki bu olamaz.

Öyleyse bir çember bir başka çembere içerden birden fazla noktada değemez.

Dahası diyorum ki dışardan da birden fazla noktada değmez.

Çünkü eğer mümkünse ACK çemberi ABDC çemberine dışardan birden fazla noktada, A ve C noktalarında değsin, ve AC birleştirilsin.

O zaman ABDC, ACK çemberlerinin üzerinde rastgele A, C noktaları alındığından, bu noktaları birleştiren doğru her iki çemberin de içinde kalacaktır; **[III.2]**

ama ABDC çemberinin içinde, ACK çemberinin dışında kaldı, **[Tan. III.2]**

ki bu saçmadır.

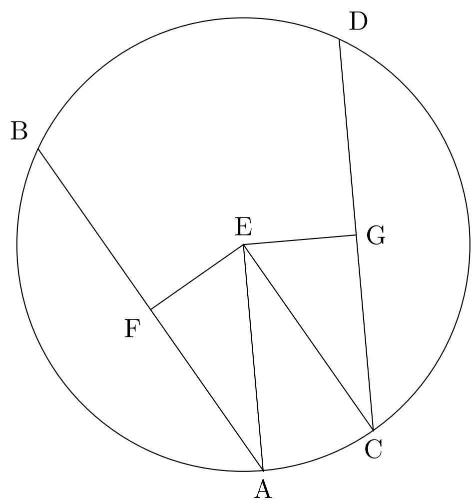
Öyleyse bir çember bir başka çembere dışardan birden fazla noktada değemez.

Ve içerden de birden fazla noktada değmeyeceği kanıtlanmıştı.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**14. Önerme:**

**Bir çemberde, eşit doğrular merkezden eşit uzaklıktadır, ve merkezden eşit uzaklıkta olan doğrular eşittir.**




$ABCD$ bir çember olsun ve $AB$, $CD$ onun içinde eşit iki doğru olsun.

Diyorum ki $AB$, $CD$ merkezden eşit uzaklıktadır.

Çünkü, $ABDC$ çemberinin merkezi alınsın, ve $E$ olsun. **[III.1]**

$E$'den $EF$, $EG$ doğruları $AB$, $CD$'ye dik çizilsin, ve $AE$, $EC$ birleştirilsin.

O zaman, merkezden çizilen $EF$ doğrusu merkezden geçmeyen $AB$ doğrusunu dik açıyla kestiğinden, aynı zamanda onu ikiye böler. **[III.3]**

Bu durumda $AF$ eşittir $FB$ olur; öyleyse $AB$, $AF$'nin iki katıdır.

Aynı nedenden dolayı $CD$ de $CG$'nin iki katıdır; ve $AB$, $CD$'ye eşittir; bu durumda $AF$ eşittir $CG$ olur.

Ve $AE$ eşittir $EC$ olduğundan $AE$ üzerindeki kare $EC$ üzerindeki kareye eşittir.

Ama $F$'deki açı dik olduğundan $AF$, $EF$ üzerindeki kareler $AE$ üzerindeki kareye eşittir; ve $G$'deki açı dik olduğundan $EG$, $GC$ üzerindeki kareler $EC$ üzerindeki kareye eşittir; **[I.47]**

bu durumda $AF$, $EF$ üzerindeki kareler, $CG$, $GE$ üzerindeki karelere eşittir ki bunlardan $AF$ üzerindeki kare $CG$ üzerindeki kareye eşittir çünkü $AF$ eşittir $CG$;

bu durumda kalan $FE$ üzerindeki kare $EG$ üzerindeki kareye eşittir, dolayısıyla $EF$ eşittir $EG$.

Ama bir çemberde eğer merkezden üzerlerine çizilen doğrular eşitse bu doğrulara merkezden eşit uzaklıkta denir; **[Tan. III.4]**

bu durumda $AB$, $BC$ merkezden eşit uzaklıktadır.

Bundan sonra, $AB$, $CD$ doğruları merkezden eşit uzaklıkta olsun; yani $EF$, $EG$'ye eşit olsun.

Diyorum ki $AB$ eşittir $CD$.

Çünkü aynı çizimlerle ve benzer şekilde $AB$'nin $AF$'nin iki katı, ve $CD$'nin de $CG$'nin iki katı olduğunu kanıtlayabiliriz.

Ve $AE$ eşittir $CE$ olduğundan, $AE$ üzerindeki kare $CE$ üzerindeki kareye eşittir. Ama $EF$, $FA$ üzerindeki kareler $AE$ üzerindeki kareye, ve $EG$, $GC$ üzerindeki kareler $CE$ üzerindeki kareye eşittir. **[I.47]**

Bu durumda $EF$, $FA$ üzerindeki kareler $EG$, $GC$ üzerindeki karelere eşittir ki bunlardan $EF$ üzerindeki kare $EG$ üzerindeki kareye eşittir çünkü $EF$ eşittir $EG$;

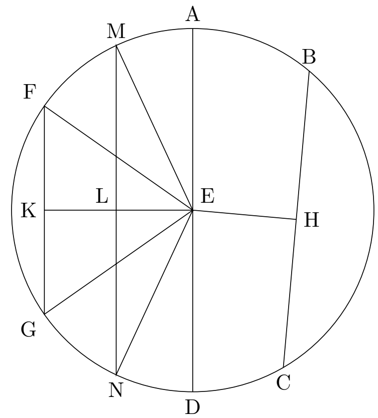
bu durumda kalan $AF$ üzerindeki kare $CG$ üzerindeki kareye eşittir, dolayısıyla $AF$ eşittir $CG$.

Ve $AB$, $AF$'nin, ve $CD$, $CG$'nin iki katıdır; öyleyse $AB$ eşittir $CD$ olur.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**15. Önerme:**

**Bir çemberin içindeki doğrular arasında en büyük olanı çaptır ve diğerleri arasında merkeze daha yakın olan daha uzak olandan büyüktür.**




$ABCD$ bir çember olsun, $AD$ çapı ve E merkezi olsun; çap $AD$'ye BC daha yakın, FG daha uzak olsun;

Diyorum ki $AD$ bunların en büyüğüdür, ve BC de FG'den büyüktür.

Çünkü, E merkezinden BC, FG'ye dik EH, EK çizilsin.

O zaman, BC merkeze daha yakın, ve FG daha uzak olduğundan, EK büyüktür EH olur. **[Tan. III.5]**

EL, EH'ye eşit çizilsin, L noktasından LM doğrusu EK'ye dik çizilsin ve N noktasına kadar uzatılsın. ME, EN, FE, EG birleştirilsin.

O zaman, EH eşittir EL olduğundan, BC eşittir MN olur. **[III.14]**

Yine, AE eşittir EM ve ED eşittir EN olduğundan, AD eşittir ME, EN olur.

Ama ME, EN büyüktür MN, **[I.20]**

ve MN eşittir BC; bu durumda AD büyüktür BC olur.

Ve ME, EN kenarları FE, EG kenarlarına eşit olduğundan, ve MEN açısı FEG açısından büyük olduğundan, MN tabanı FG tabanından büyüktür. **[I.24]**

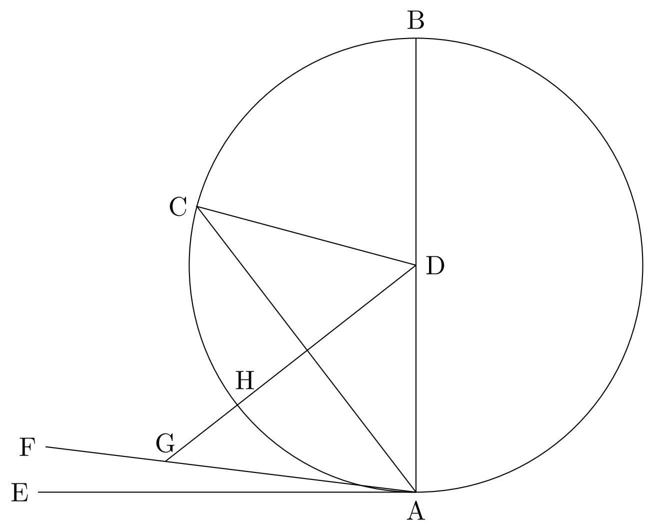
Ama MN'nin BC'ye eşit olduğu kanıtlanmıştı.

Öyleyse AD çapı en büyük, ve BC büyüktür FG olur.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**16. Önerme:**

**Bir çemberin çapına bu çapın ucundan çizilen bir dikme çemberin dışında kalır, ve bu çemberle bu dikme arasına başka bir doğru sokulamaz; ayrıca yarım çemberin açısı herhangi bir dar açıdan büyüktür, ve kalan açı da herhangi bir dar açıdan küçüktür.**




*[ "yarım çemberin açısı" derken çap ile çapın ucundaki çember çevresinin yaptığı açı düşünülüyor; yani şekildeki* BA *doğrusuyla* HA *küçük yayının yaptığı açı. "kalan açı" ile de bu yay ile* AE *dikmesi arasında kalan açı düşünülüyor. ]*

ABC bir çember olsun, merkezi D, ve çapı AB olsun.

Diyorum ki A noktasında AB'ye çizilen dik doğru çemberin dışında kalacaktır.

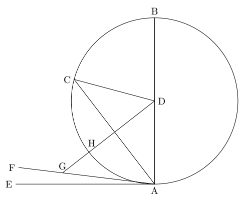
Çünkü, öyle olmadığını varsayalım, ve mümkünse çemberin içine CA olarak girsin, ve DC birleştirilsin.

DA eşittir DC olduğundan, DAC açısı da ACD açısına eşit olur. **[I.5]**

Ama DAC açısı diktir; bu durumda ACD açısı da dik olur: böylece ACD üçgeninde iki açı, DAC, ACD iki dik açıya eşittir. Ama bu olamaz. **[I.17]**

Öyleyse A'dan BA'ya dik açıyla çizilen doğru çemberin içine düşmeyecektir.

Benzer şekilde çevrenin üzerine de düşmeyeceğini kanıtlayabiliriz; öyleyse dışarı düşecektir.




AE olarak çizilmiş olsun.

Bundan sonra diyorum ki AE doğrusuyla CHA çevresi arasına başka doğru sokulamaz.

Çünkü, eğer mümkünse bir başka doğru FA olarak araya sokulmuş olsun, ve D noktasından FA'ya DG dikmesi çizilsin.

O zaman, AGD açısı dik olduğundan, ve DAG açısı dik açıdan küçük olduğundan, AD büyüktür DG olur. **[I.19]**

Ama DA eşittir DH; bu durumda DH büyüktür DG olur, yani küçük olan büyük olandan büyük oldu ki bu olamaz.

Öyleyse çevre ile bu doğru arasına başka doğru sokulamaz.

Ayrıca diyorum ki BA doğrusuyla CHA çevresi arasında kalan açı her düzkenar dar açıdan büyüktür,

ve CHA çevresiyle AE doğrusu arasında kalan açı da her düzkenar dar açıdan küçüktür.

Çünkü, eğer BA doğrusuyla CHA çevresi arasındaki açıdan büyük bir düzkenar açı olsa, ya da CHA çevresiyle AE doğrusu arasındaki açıdan daha küçük bir düzkenar açı olsa, o zaman CHA çevresiyle AE doğrusu arasına bir doğru yerleştirilebilir ve bu doğruyla BA doğrusu arasındaki açı BA doğrusuyla CHA çevresinin içerdiğinden daha büyük olur, ya da bu doğruyla AE doğrusu arasındaki açı CHA çevresiyle AE doğrusunun içerdiğinden daha küçük olur.

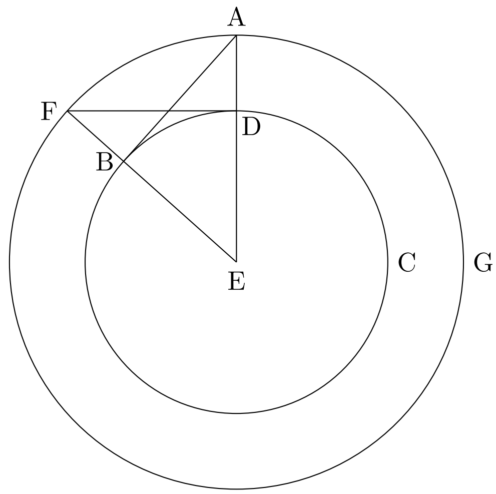
Ama böyle bir doğru yerleştirilemez;

Öyleyse BA doğrusuyla CHA çevresinin arasında kalandan daha büyük, ve CHA çevresiyle AE doğrusu arasında kalandan daha küçük ve doğrular arasında kalan bir dar açı olamaz.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**Doğal Sonuç:** Buradan açıkça görülür ki bir çemberin çapına uçlarından dik olarak çizilen doğrular çembere değer.

**17. Önerme:**
**Verilen bir noktadan verilen bir çembere değen bir doğru çizmenin yolu.**




$A$ noktası verilen nokta, $BCD$ de verilen çember olsun; böylece $A$ noktasından $BCD$ çemberine değen bir doğru çizilmesi isteniyor.

Çemberin merkezi $E$ alınsın, **[III.1]**

$AE$ birleştirilsin, $E$ merkezi ve $AE$ uzaklığıyla $AFG$ çemberi çizilsin; $D$'den $EA$'ya $DF$ dik açıyla çizilsin, ve $EF$, $AB$ birleştirilsin;

diyorum ki $A$ noktasından $BCD$ çemberine değen $AB$ çizilmiştir.

Çünkü; $E$ noktası $BCD$, $AFG$ çemberlerinin merkezi olduğundan, $EA$ eşittir $EF$, ve $ED$ eşittir $EB$ olur; öyleyse $AE$, $EB$ kenarları $FE$, $ED$ kenarlarına eşittir, ve ortak $E$ açısını içerirler; bu durumda taban $DF$ taban $AB$'ye eşittir, ve $DEF$ üçgeniyle $BEA$ üçgeni eşittir, ve kalan açılar da eşittir; **[I.4]**

öyleyse $EDF$ açısı $EBA$ açısına eşittir. Ama $EDF$ açısı diktir; öyleyse $EBA$ açısı da diktir.

Şimdi, $EB$ bir yarıçaptır; ve bir çemberin çapına ucundan dik açıyla çizilen doğru çembere değer; **[III.16, DS]**

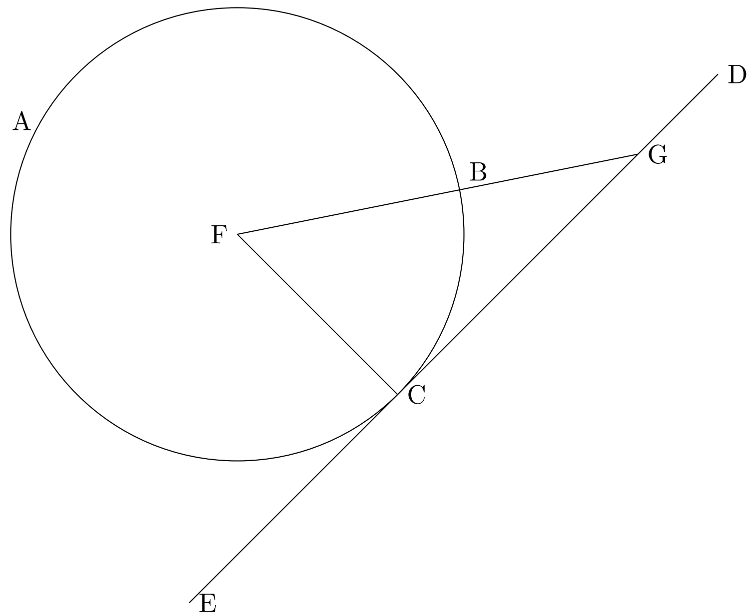
bu durumda $AB$ doğrusu $BCD$ çemberine değer.

Öyleyse verilen $A$ noktasından $BCD$ çemberine değen $AB$ doğrusu çizilmiştir.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

**18. Önerme:**

**Eğer bir doğru bir çembere değiyorsa ve merkezden değme noktasına bir doğru çizilirse, bu doğru teğete dik olur.**




DE doğrusu ABC çemberine C noktasında değsin, F noktası ABC çemberinin merkezi olsun, ve FC birleştirilsin.

Diyorum ki FC, DE'ye diktir.

Çünkü, değilse F'den DE'ye FG dikmesi çizilsin.

O zaman, FGC açısı dik olduğundan FCG açısı dardır; **[I.17]**

ve büyük açıyı büyük kenar görür; **[I.19]**

bu durumda FC büyüktür FG olur.

Ama FC eşittir FB; öyleyse FB de FG'den büyüktür, yani küçük olan büyükten büyük olur ki bu olamaz.

O yüzden FG, DE'ye dik değildir.

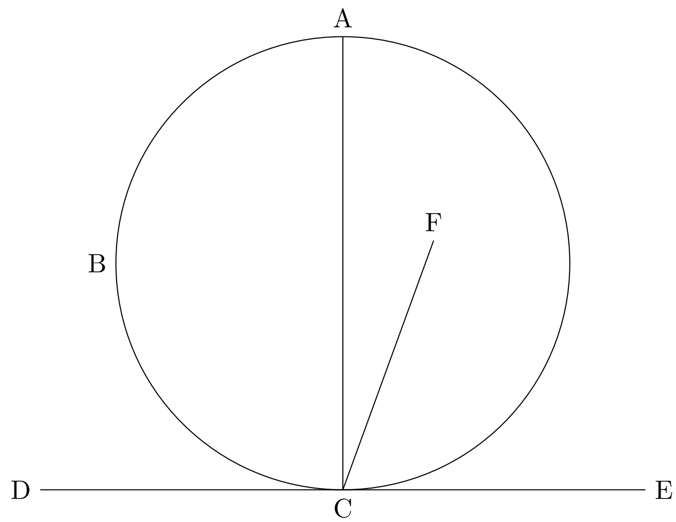
Benzer şekilde FC'den başka hiçbir doğrunun dik olmadığını kanıtlayabiliriz.

Öyleyse FC, DE'ye diktir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**19. Önerme:**

**Eğer bir doğru bir çembere değiyorsa ve değme noktasından bu teğete bir dik doğru çizilirse, çemberin merkezi bu çizilen doğrunun üzerinde olur.**




Bir $DE$ doğrusu $ABC$ çemberine $C$ noktasında değsin, ve $C$'den $DE$'ye $CA$ doğrusu dik açıyla çizilsin;

Diyorum ki çemberin merkezi $AC$ üzerindedir.

Çünkü, olmadığını varsayalım, ama mümkünse $F$ noktası merkez olsun, $CF$ birleştirilsin.

Bir $DE$ doğrusu $ABC$ çemberine değdiğinden ve $FC$ de merkezden değme noktasına çizildiğinden, $FC$, $DE$'ye diktir; **[III.18]**

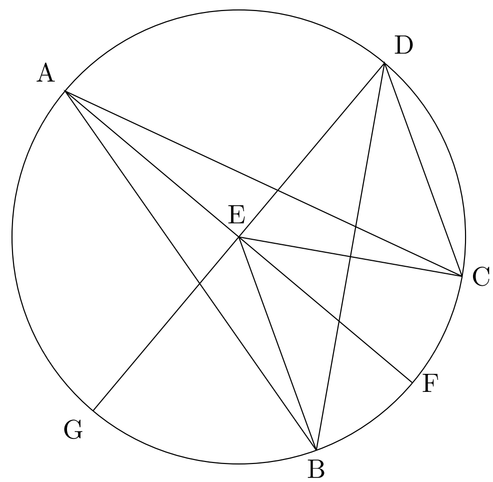
öyleyse $FCE$ açısı diktir. Ama $ACE$ açısı da diktir; öyleyse $FCE$ açısı $ACE$ açısına eşittir, yani küçük olan büyüğe eşit olur ki bu olamaz.

Öyleyse $F$ noktası $ABC$ üçgeninin merkezi değildir.

Benzer şekilde $AC$ üzerinde olmayan hiçbir noktanın merkez olamadığını kanıtlayabiliriz.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**20. Önerme:**
**Bir çemberde, çemberin merkezinde olan açı aynı çevreyi gören ama çemberin üzerinde olan açının iki katıdır.**




ABC bir çember olsun, BEC merkezde bir açı olsun, ve BAC aynı çevreyi gören çember üzerinde bir açı olsun.

Diyorum ki BEC açısı BAC açısının iki katıdır.

Çünkü; AE birleştirilsin ve F'ye kadar uzatılsın.

O zaman, EA eşittir EB olduğundan, EAB açısı da EBA açısına eşittir; **[I.5]**

bu durumda EAB, EBA açıları EAB açısının iki katı olur.

Ama BEF açısı EAB, EBA açılarına eşittir; **[I.32]**

bu durumda BEF açısı da EAB açısının iki katıdır.

Aynı nedenle FEC açısı da EAC açısının iki katıdır.

Öyleyse BEC açısının tamamı BAC açısının tamamının iki katıdır.

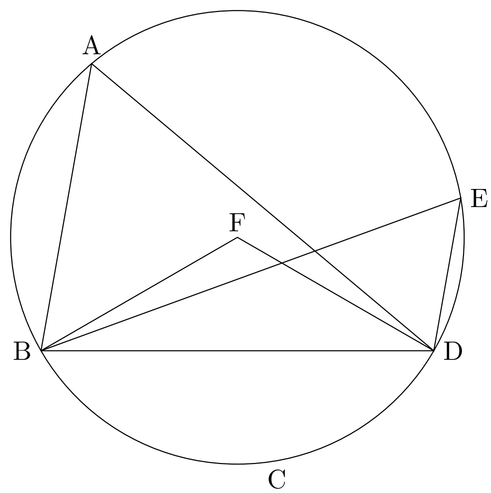
Yine, başka bir doğru çizilsin, ve başka bir BDC açısı olsun, DE birleştirilsin ve G'ye uzatılsın.

Benzer şekilde GEC açısının EDC açısının iki katı olduğunu kanıtlayabiliriz ki bunlardan GEB açısı EDB açısının iki katıdır;

Öyleyse kalan BEC açısı kalan BDC açısının iki katıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**21. Önerme:**
**Bir çemberde aynı çember parçasının içindeki açılar birbirine eşittir.**




$ABCD$ bir çember olsun, ve $BAD$, $BED$ açıları aynı $BAED$ çember parçasının içindeki açılar olsun.

Diyorum ki $BAD$, $BED$ açıları birbirine eşittir.

Çünkü; $ABCD$ çemberinin merkezi alınsın, ve $F$ olsun; $BF$, $BD$ birleştirilsin.

Şimdi, $BFD$ açısı merkezde olduğundan, ve $BAD$ açısı çember üzerinde olduğundan, ve aynı $BCD$ çevresini taban olarak gördüklerinden, $BFD$ açısı $BED$ açısının iki katıdır. **[III.20]**

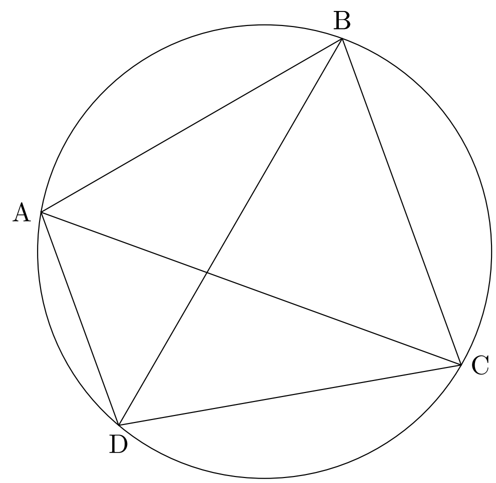
Aynı nedenden $BFD$ açısı $BED$ açısının da iki katıdır.

Öyleyse $BAD$ açısı $BED$ açısına eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**22. Önerme:**

**Çemberlerin içine çizilen dörtgenlerin karşılıklı açıları iki dik açıya eşittir.**




$ABCD$ bir çember olsun, $ABCD$ de içine çizilmiş bir dörtgen.

Diyorum ki karşılıklı açılar iki dik açıya eşittir.

$AC$, $BD$ birleştirilsin.

O zaman, her üçgenin içindeki üç açı iki dik açıya eşit olduğundan, **[I.35]**

$ABC$ üçgeninin üç açısı $CAB$, $ABC$, $BCA$ iki dik açıya eşittir.

Ama $CAB$ açısı $BDC$ açısına eşittir, çünkü aynı $BADC$ çember parçası içindeler; **[III.21]**

ve $ACB$ açısı $ADB$ açısına eşittir, çünkü aynı $ADCB$ çember parçası içindeler. Öyleyse $ADC$ açısının tamamı $BAC$, $ACB$ açılarına eşittir.

Bunlara $ABC$ açısı eklensin; bu durumda $ABC$, $BAC$, $ACB$ açıları $ABC$, $ADC$ açılarına eşit olur.

Ama $ABC$, $BAC$, $ACB$ açıları iki dik açıya eşittir;

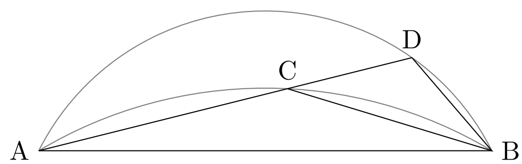
Öyleyse $ABC$, $ADC$ açıları da iki dik açıya eşittir.

Benzer şekilde $BAD$, $DCB$ açılarının da iki dik açıya eşit olduğunu kanıtlayabiliriz.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**23. Önerme:**

**Bir doğrunun aynı tarafına birbirine eşit olmayan iki benzer çember parçası çizilemez.**




Çünkü, eğer mümkünse $AB$ doğru parçasının aynı tarafına benzer ama eşit olmayan $ACB$, $ADB$ çember parçaları çizilsin.

$ACD$ çizilsin ve $CB$, $DB$ birleştirilsin.

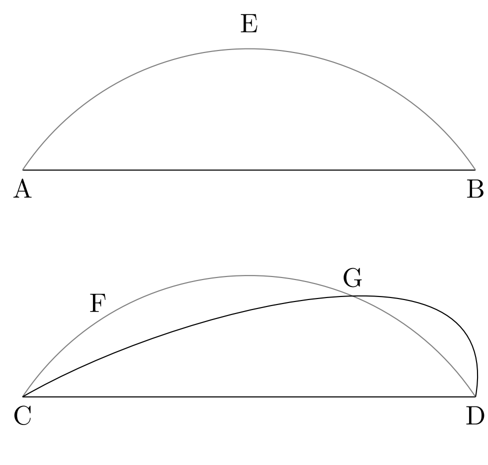
O zaman, $ACB$ parçası $ADB$ parçasına benzer olduğundan, ve benzer çember parçaları eşit açılar içerdiğinden, **[Tan. III.11]**

$ACB$ açısı $ADB$ açısına eşittir, yani dış açı iç açıya eşit olur ki bu olamaz.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

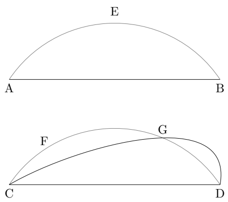
**24. Önerme:**

**Birbirine eşit doğrular üzerine çizilen benzer çember parçaları birbirine eşittir.**




$AEB$, $CFD$ benzer çember parçaları eşit $AB$, $CD$ doğruları üzerine çizilmiş olsun.

Diyorum ki $AEB$ parçası $CFD$ parçasına eşittir.




Çünkü, eğer AEB parçası CFD üzerine uygulanırsa, ve eğer A noktası C noktasına ve AB doğrusu CD üzerine yerleştirilirse, AB eşittir CD olduğundan, B noktası da D noktasıyla çakışır.

AB doğrusu CD ile çakıştığından AEB parçası da CFD parçasıyla çakışacaktır;

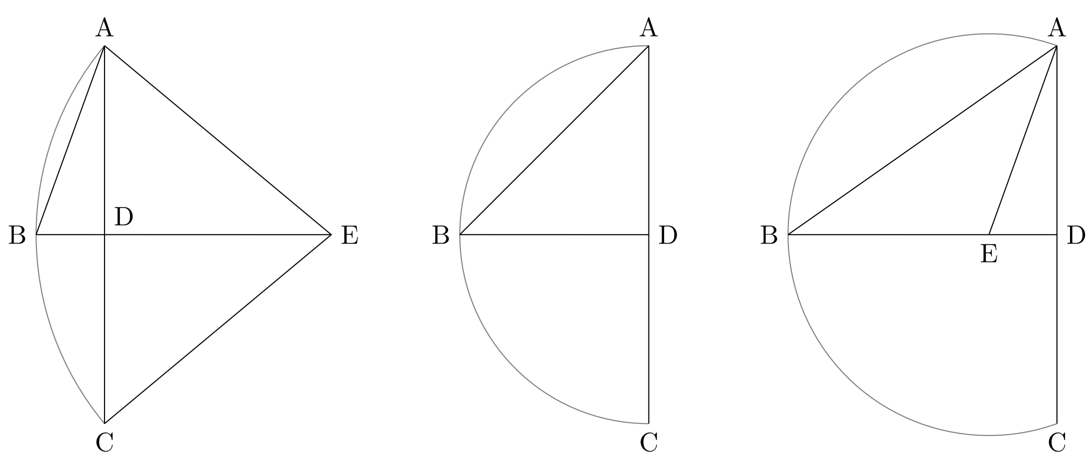
Çünkü, eğer AB doğrusu CD doğrusuyla çakışırken AEB parçası CFD ile çakışmazsa, ya içine düşecektir ya da dışına; ya da CGD gibi çarpık olacaktır, ve bir çember bir başka çemberi ikiden fazla noktada kesmiş olacaktır ki bu olamaz. **[III.10]**

Öyleyse eğer AB doğrusu CD'ye uygulanırsa, AEB parçası CFD parçasıyla çakışmamazlık yapmayacaktır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

*[ "içine" ya da "dışına" düşmesi durumunun olmayacağının bir önceki önermeden hemen çıkacağının görülmesini Öklid okuyucuya bırakmıştır. ]*

**25. Önerme:**
**Bir çember parçası verildiğinde, onun parçası olduğu çemberin tamamını çizmenin yolu.**




Verilen çember parçası ABC olsun;

böylece ABC'nin parçası olduğu çemberin tamamının çizilmesi isteniyor.

AC doğrusu D noktasında iki bölünsün, D noktasından AC doğrusuna dik açıyla DB çizilsin, ve AB birleştirilsin.

O zaman ABD açısı BAD açısından ya büyüktür, ya küçüktür ya da ona eşittir.

Önce büyük olsun; ve BA doğrusuna A noktasında ABD açısına eşit BAE açısı çizilsin; DB doğrusu E'ye kadar uzatılsın, ve EC birleştirilsin.

O zaman, ABE açısı BAE açısına eşit olduğundan, EB doğrusu da EA doğrusuna eşittir. **[I.6]**

Ve AD eşittir DC olduğundan, ve DE ortak olduğundan, AD, DE kenarları sırasıyla CD, DE kenarlarına eşittir; ve ADE açısı CDE açısına, ikisi de dik olduğundan, eşittir; bu durumda taban AE eşittir taban CE olur.

Ama AE'nin BE'ye eşit olduğu kanıtlanmişti; öyleyse BE eşittir CE olur; bu durumda üç doğru AE, EB, EC birbirine eşittir.

Böylece E merkezi ve AE, EB, EC uzunluklarından biriyle çizilen çember diğer noktalardan da geçecek ve tamamlanacaktır. **[III.9]**

Öyleyse bir çember parçası verildiğinde tüm çember çizilmiştir.

Ve açıkça görülür ki ABC parçası yarıçemberden küçüktür çünkü E merkezi onun dışında kalır.

Benzer şekilde, eğer ABD açısı BAD açısına eşit olsa bile, AD doğrusu BD, DC'nin her birine eşit olduğundan, üç doğru DA, DB, DC birbirine eşit olacaktır, D tamamlanmış çemberin merkez olacaktır, ve ABC açıkça yarıçember olacaktır.

Ama eğer ABD açısı BAD açısından küçükse, ve BA doğrusu üzerine A noktasında ABD açısına eşit BAE açısını çizersek, çemberin merkez ABC parçasının içinde DB üzerine düşecektir, ve ABC parçası açıkça yarıçemberden büyük olacaktır.

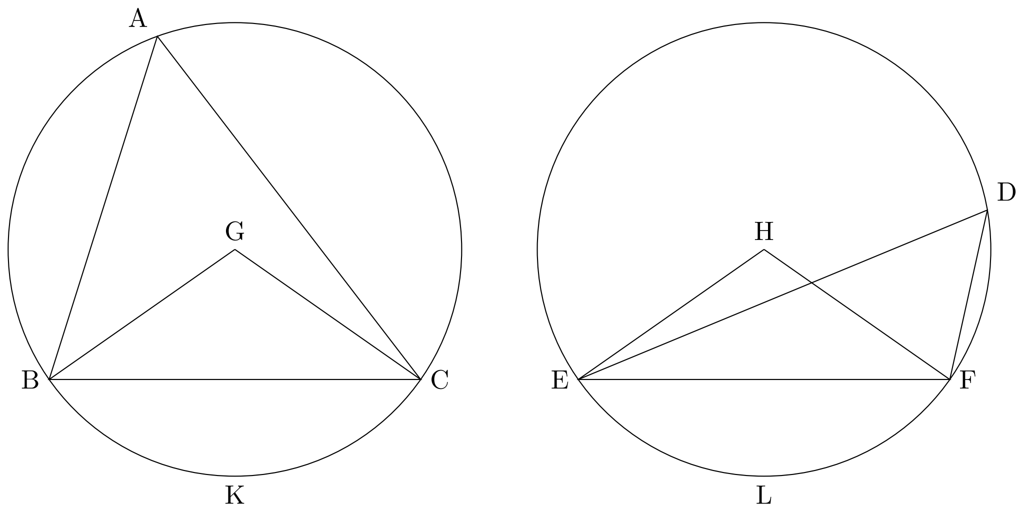
Öyleyse bir çember parçası verildiğinde, çemberin tamamı çizilmiştir.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

*[ Bu son durumda* E *noktasınının çemberin merkezi olacağını dikkatli okuyucu hemen görecektir. ]*

**26. Önerme:**

**Eşit çemberlerde eşit açılar, ister merkezde ister çemberin üzerinde olsun, eşit çevreyi görür.**




$ABC$, $DEF$ eşit çemberler olsun, ve içlerinde eşit açılar olsun, yani merkezlerde $BGC$, $EHF$ açıları, ve çemberde $BAC$, $EDF$ açıları;

Diyorum ki $BKC$ çevresi $ELF$ çevresine eşittir.

Çünkü; $BC$, $EF$ birleştirilsin. Şimdi $ABC$, $DEF$ çemberleri eşit olduğundan, yarıçapları eşittir. O zaman $BG$, $GC$ doğruları $EH$, $HF$ doğrularına eşittir; ve $G$'deki açı $H$'deki açıya eşittir; bu durumda $BC$ tabanı $EF$ tabanına eşittir. **[I.4]**

Ve $A$'daki açı $D$'deki açıya eşit olduğundan, $BAC$ parçası $EDF$ parçasına benzerdir; **[Tan. III.11]**

ve eşit doğrular üzerindedirler.

Ama eşit doğrular üzerinde olan benzer çember parçaları birbirine eşittir; **[III.24]**

bu durumda $BAC$ parçası $EDF$ parçasına eşittir.

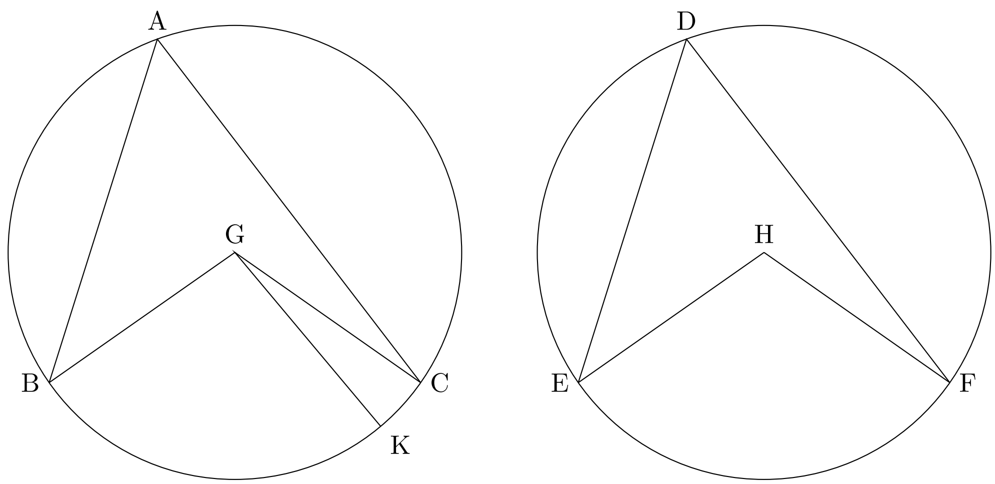
Ama $ABC$ çemberinin tamamı da $DEF$ çemberinin tamamına eşittir.

Öyleyse kalan $BKC$ çevresi kalan $ELF$ çevresine eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**27. Önerme:**

**Eşit çemberlerde eşit çevreleri gören açılar, ister merkezde ister çemberin üzerinde olsun, eşittir.**




ABC, DEF eşit çemberlerinde, eşit BC, EF çevrelerini gören BGC, EHF açıları G, H merkezlerinde, ve BAC, EDF açıları da çember üzerinde olsun.

Diyorum ki BGC açısı EHF açısına, ve BAC açısı EDF açısına eşittir.

Çünkü, eğer BGC açısı EHF açısından farklıysa, biri diğerinden büyüktür.

BGC açısı büyük olsun; BG doğrusu üzerinde ve G noktasında EHF açısına eşit BGK açısı çizilsin. **[I.23]**

Şimdi, merkezlerdeki eşit açılar eşit çevreleri görürler; **[III.26]**

öyleyse BK çevresi EF çevresine çevresine eşittir.

Amam EF, BC'ye eşittir; bu durumda BK eşittir BC olur, yani küçük büyüğe eşit olur ki bu olamaz.

Öyleyse BGC açısı EHF açısından farklı olamaz; bu durumda ona eşittir.

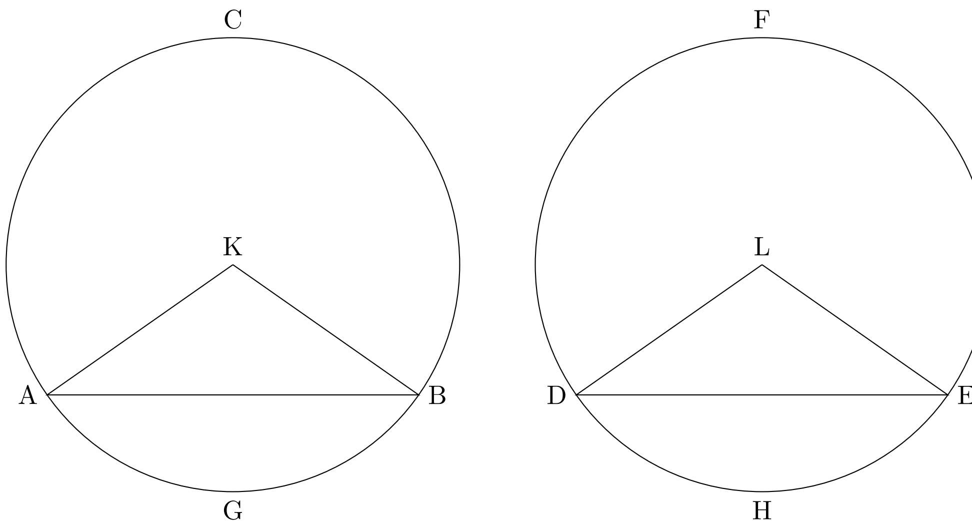
Ve A'daki açı BGC açısının yarısıdır; ve D'deki açı EHF açısının yarısıdır; **[III.20]**

bu durumda A'daki açı da D'deki açıya eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**28. Önerme:**

**Eşit çemberlerde eşit doğrular eşit çevreler keserler, büyük çevre büyük olana, küçük olan küçük olana eşit olur.**




$ABC$, $DEF$ eşit çemberler olsun, ve içlerinde $AB$, $DE$ eşit doğruları $ACB$, $DFE$ büyük çevrelerini ve $AGB$, $DHE$ küçük çevrelerini kessin.

Diyorum ki $ACB$ büyük çevresi $DFE$ büyük çevresine eşittir, ve küçük çevre $AGB$ de $DHE$'ye eşittir.

Çünkü; çemberlerin $K$, $L$ merkezleri alınsın, ve $AK$, $KB$, $DL$, $LE$ birleştirilsin.

Şimdi, çemberler eşit olduğundan, yarıçaplar eşittir; öyleyse $AK$, $KB$ kenarları $DL$, $LE$ kenarlarına eşittir; ve $AB$ tabanı $DE$ tabanına eşittir; bu durumda $AKB$ açısı $DLE$ açısına eşit olur. **[I.8]**

Ama merkezdeki eşit açılar eşit çevre görürler; öyleyse $AGB$ çevresi $DHE$ çevresine eşittir.

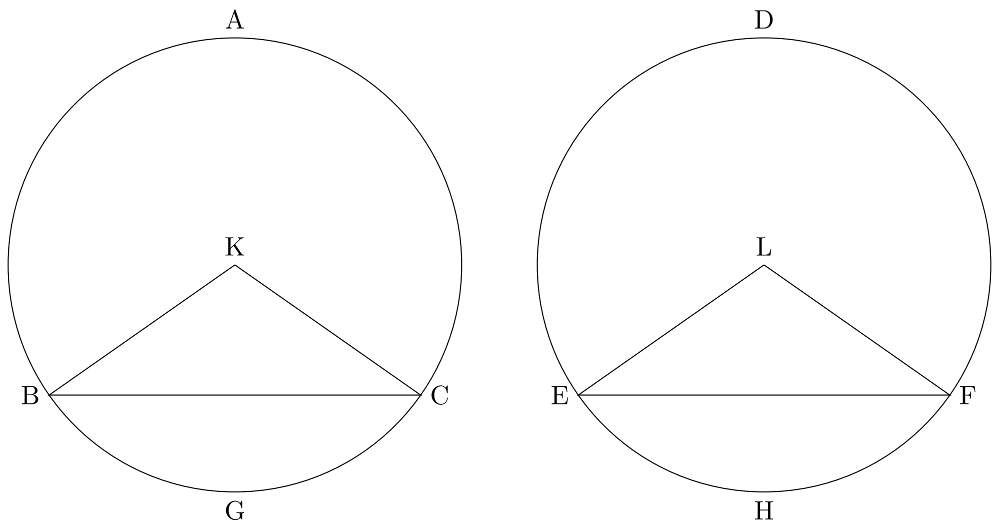
Ve $ABC$ çemberinin tamamı $DEF$ çemberinin tamamına eşittir.;

Öyşeyse kalan $ACB$ çevresi de kalan $DFE$ çevresine eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**29. Önerme:**

**Eşit çemberlerde eşit çevreler eşit doğrular tarafından görülür.**




ABC, DEF eşit çemberler olsun, ve içlerinde BGC, EHF eşit çevreleri kesilsin; BC, EF doğruları çizilsin.

Diyorum ki BC eşittir EF.

Çünkü, çemberlerin merkezleri alınsın, ve bunlar K, L olsun; BK, KC, EL, LF birleştirilsin.

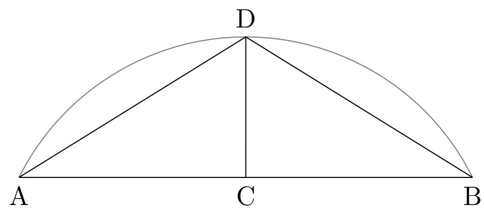
Şimdi, BGC çevresi EHF çevresine eşit olduğundan, BKC açısı da ELF açısına eşittir. **[III.27]**

Ve ABC, DEF çemberleri eşit olduğundan yarıçapları eşittir; öyleyse BK, KC kenarları EL, LF kenarlarına eşittir, ve eşit açılar içerirler; bu durumda taban BC eşittir taban EF olur. **[I.4]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**30. Önerme:**

**Verilen bir çember çevresini iki eşit parçaya bölmenin yolu.**




Verilen çember parçası $ADB$ olsun; böylece $ADB$ çevresinin ikiye bölünmesi isteniyor.

$AB$ birleştirilsin ve $C$'de ikiye bölünsün; $C$ noktasından $AB$ doğrusuna dik açıyla $CD$ çizilsin, ve $AD$, $DB$ birleştirilsin.

O zaman, $AC$ eşittir $CB$, ve $CD$ ortak olduğundan, $AC$, $CD$ kenarları $BC$, $CD$ kenarlarına eşittir, ve $ACD$ açısı $BCD$ açısına, her biri dik olduğundan, eşittir; bu durumda $AD$ tabanı $DB$ tabanına eşit olur. **[I.4]**

Ama eşit doğrular eşit çevreleri keserler, büyük olan büyük olana, küçük olan küçük olana eşit olur; **[III.28]**

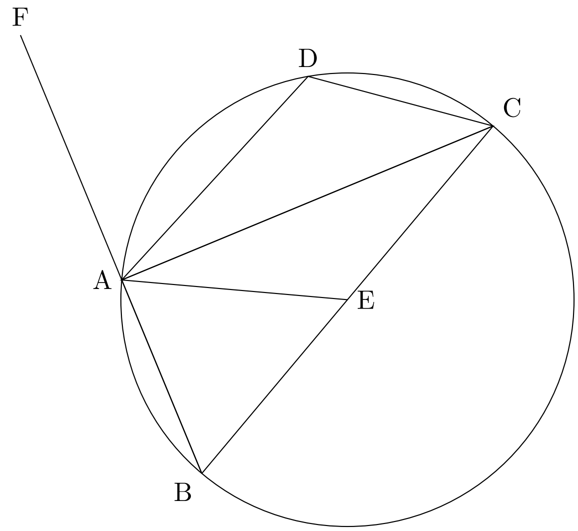
ve $AD$, $DB$ çevrelerinin her biri yarıçemberden küçüktür; bu durumda $AD$ çevresi $DB$ çevresine eşittir.

Böylece verilen bir çevre $D$'de ikiye bölünmüş oldu.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

**31. Önerme:**

**Bir çemberde yarı çember parçasının içindeki açı diktir, daha büyük parçanın içindeki açı dik açıdan küçük, daha küçük parçanın içindeki açı dik açıdan büyüktür; ve dahası yarı çember parçasından daha büyük çember parçasının açısı dik açıdan büyük, daha küçük çember parçasının açısı dik açıdan küçüktür.**




ABCD bir çember olsun, BC çapı, E merkezi olsun, ve BA, AC, AD, DC birleştirilsin;

Diyorum ki BAC yarıçemberi içindeki BAC açısı diktir, yarıçemberden büyük olan ABC parçası içindeki ABC açısı dik açıdan küçüktür, ve yarıçemberden küçük olan ADC parçası içindeki ADC açısı dik açıdan büyüktür.

AE birleştirilsin, ve BA doğrusu F'ye kadar uzatılsın.

O zaman, BE eşittir EA olduğundan, ABE açısı da BAE açısına eşittir. **[I.5]**

Yine, CE eşittir EA olduğundan, ACE açısı CAE açısına eşittir. **[I.5]**

Öyleyse BAC açısının tamamı ABC, ACB açılarına eşittir.

Ama FAC açısı ABC üçgeninin dış açısı olduğundan o da ABC, ACB açılarına eşittir; **[I.32]**

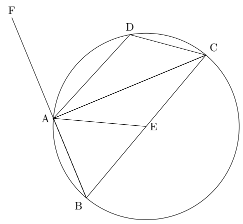
öyleyse BAC açısı FAC açısına da eşittir; dolayısıyla diktir; **[Tan. I.10]**

bu durumda yarıçember BAC içindeki BAC açısının diktir.

Sonra, ABC üçgenindeki iki açı ABC, BAC iki dik açıdan küçük olduğundan, **[I.17]**

ve BAC açısı dik olduğundan, ABC açısı dik açıdan küçüktür; ve o da yarıçemberden büyük ABC parçasının içindeki açıdır.

Sonra, ABCD, çember içinde bir dörtgen olduğundan, ve çember içindeki dörtgenlerin karşı açıları iki dik açıya eşit olduğundan, **[III.22]**




ve $ABC$ açısı da dik açıdan küçük olunca, kalan $ADC$ açısı dik açıdan büyüktür; ve o da yarı çemberden küçük olan $ADC$ parçasının içindeki açıdır.

Ayrıca diyorum ki daha büyük parçanın açısı, yani $AC$ doğrusuyla $ABC$ çevresinin içerdiği açı dik açıdan büyüktür; ve küçük çevrenin açısı, yani $AC$ doğrusuyla $ADC$ çevresinin içerdiği açı dik açıdan küçüktür.

Bu hemen görülür.

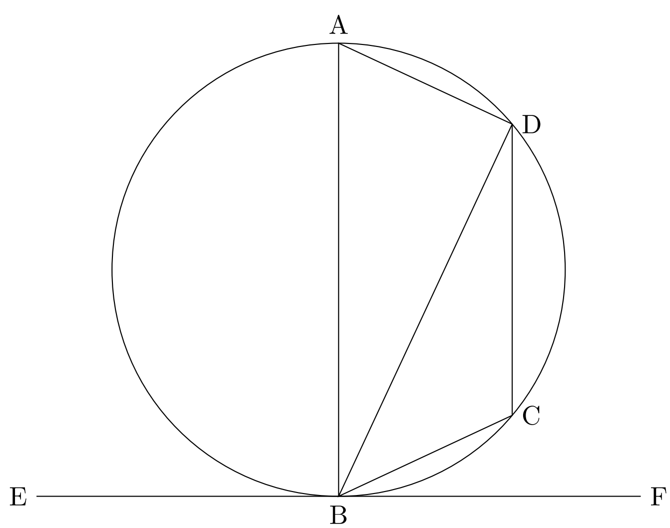
Çünkü, $BA$, $AC$ doğrularının içerdiği açı dik olduğundan, $ABC$ çevresi ve $AC$ doğrusunun içerdiği açı dik açıdan büyüktür.

Yine, $AC$, $AF$ doğrularının içerdiği açı dik olduğundan, $CA$ doğrusuyla $ADC$ çevresinin içerdiği açı dik açıdan küçüktür.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**32. Önerme:**

**Eğer bir doğru bir çembere değiyorsa, ve değme noktasından çemberin içine doğru çemberi kesecek şekilde bir doğru çizilirse, bu doğrunun teğetle yaptığı açılar diğer taraftaki çember parçasının içindeki açılara eşittir.**



Bir $EF$ doğrusu $ABCD$ çemberine $B$ noktasında değsin, ve $B$ noktasından $ABCD$ çemberine $BD$ doğrusu çizilsin;

Diyorum ki $BD$'nin $EF$ teğetiyle yaptığı açılar diğer taraftaki çember parçalarının içindeki açılara eşit olacaktır, yani $FBD$ açısı $BAD$ parçasının içine çizilen açıya, ve $EBD$ açısı $DCB$ parçasının içine çizilen açıya eşit olur.

Çünkü, $B$'den $EF$'ye dik açıyla $BA$ çizilsin, $BD$ parçası üzerinde rastgele bir $C$ noktası alınsın, ve $AD$, $DC$, $CB$ birleştirilsin.

O zaman, $EF$ doğrusu $ABCD$ çemberine $B$ noktasında değdiğinden, ve $BA$ doğrusu değme noktasında teğete dik açıyla çizildiğinden, $ABCD$ çemberinin merkezi $BA$ üzerindedir. **[III.19]**

Bu durumda $BA$ doğrusu $ABCD$ çemberinin çapı olur; öyleyse $ADB$ açısı, yarıçember içinde bir açı olduğu için diktir. **[III.31]**

bu durumda $BAD$, $ABD$ açıları bir dik açıya eşittir. **[I.32]**

Ama $ABF$ açısı da diktir; bu durumda $ABF$ açısı $BAD$, $ABD$ açılarına eşittir.

Bunlardan $ABD$ açısı çıkartısın; öyleyse kalan $DBF$ açısı diğer çember parçası içindeki $BAD$ açısına eşit olur.

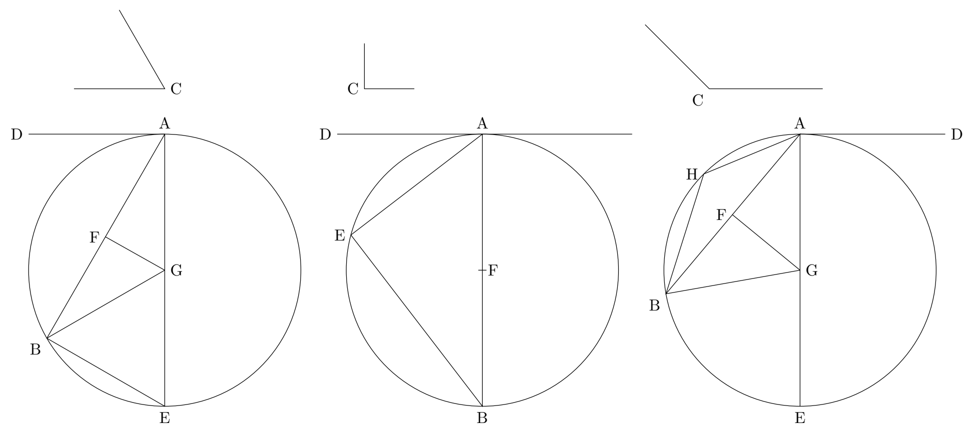
Sonra, $ABCD$, çember içine çizilmiş bir dötgen olduğundan karşılıklı açıları iki dik açıya eşittir. **[III.22]**

Ama $DBF$, $DBE$ açıları da iki dik açıya eşittir; öyleyse $DBF$, $DBE$ açıları $BAD$, $BCD$ açılarına eşittir ki bunlardan $BAD$ açısının $DBF$ açısına eşit olduğu kanıtlanmıştı; bu durumda kalan $DBE$ açısı diğer çember parçası $DCB$ içindeki $DCB$ açısına eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**33. Önerme:**

**Verilen bir doğru üzerine iç açısı verilen bir düzkenar açıya eşit olan bir çember parçası çizmenin yolu.**




$AB$ doğrusu verilen doğru, ve $C$ deki açı da verilen düzkenar açı olsun; böylece $AB$ doğrusu üzerine iç açısı $C$ açısına eşit bir çember parçası çizilmesi isteniyor.

$C$'deki açı dar, dik ya da geniş olabilir.

Önce dar olsun, şekilde olduğu gibi, $AB$ üzerine $A$ noktasında $C$ açısına eşit $BAD$ açısı çizilsin; bu durumda $BAD$ açısı da dar olur.

$DA$'ya $AE$ dikmesi çizilsin, $AB$ doğrusu $F$'de ikiye bölünsün, $AB$'ye $F$'den $FG$ dikmesi çizilsin, ve $GB$ birleştirilsin.

O zaman, $AF$ eşittir $FB$ olduğundan, ve $FG$ ortak olduğundan, $AF$, $FG$ kenarları $BF$, $FG$ kenarlarına eşittir, ve $AFG$ açısı $BFG$ açısına eşittir; bu durumda $AG$ tabanı $BG$ tabanına eşit olur. **[I.4]**

Öyleyse $G$ merkezi ve $GA$ uzaklığıyla çizilen çember $B$'den de geçer. Bu çember çizilsin ve $ABE$ olsun; $EB$ birleştirilsin.

Şimdi, $AD$ doğrusu $AE$ çapının ucu $A$'dan $AE$'ye dik çizildiğinden, $AD$ doğrusu $ABE$ çemberine değer. **[III.16, DS]**

Öyleyse, bir $AD$ doğru parçası $ABE$ çemberine değdiğinden, ve değme noktası $A$'dan bir $AB$ doğrusu $ABE$ çemberine çizildiğinden, $DAB$ açısı diğer çember parçası içindeki $AEB$ açısına eşit olur. **[III.32]**

Ama $DAB$ açısı $C$'deki açıya eşittir; bu durumda $C$'deki açı $AEB$ açısına da eşittir.

Öyleyse, verilen AB doğrusu üzerine, verilen C açısına eşit bir AEB iç açısı kabul eden AEB çember parçası çizilmiştir.

Sonra C'deki açı dik olsun; ve yine AB üzerine bir iç açısı C'deki dik açıya eşit olan bir çember parçası çizilmesi istensin.

İkinci şekilde olduğu gibi C'deki dik açıya eşit BAD açısı çizilsin; AB doğrusu F'de ikiye bölünsün, ve F merkezi ile FA ya da FB uzaklığıyla AEB çemberi çizilsin.

Öyleyse, A'daki açı dik olduğundan AD doğrusu ABE çemberine değer. **[III.16, DS]**

Ve BAD açısı AEB parçasının içindeki açıya eşittir çünkü bir yarı çember içindeki açı olması nedeniyle içerdeki açı da bir dik açıdır. **[III.31]**

Ama BAD açısı C'deki açıya da eşittir. Bu durumda AEB açısı da C'deki açıya eşit olur.

Öyleyse yine AB üzerine C'deki açıya eşit bir iç açı kabul eden AEB çember parçası çizilmiştir.

Sonra C'deki açı geniş olsun; ve üçüncü şekilde olduğu gibi AB doğrusuna A noktasında C'deki açıya eşit BAD açısı çizilsin;

AD'ye dik açıyla AE çizilsin, AB yine F'de ikiye bölünsün, AB'ye dik açıyla FG çizilsin, ve GB birleştirilsin.

O zaman, yine AF eşit FB, ve FG ortak olduğundan, AF, FG kenarları BF, FG kenarlarına, ve AFG açısı BFG açısına eşittir; bu durmda AG tabanı BG tabanına eşit olur. **[I.4]**

Öyleyse G merkezi ve GA uzaklığıyla çizilen çember B noktasından da geçecektir; geçsin ve AEB olsun.

Şimdi, AD doğrusu AE çapına ucundan dik çizildiğinden, AD doğrusu AEB çemberine değer. **[III.16, DS]**

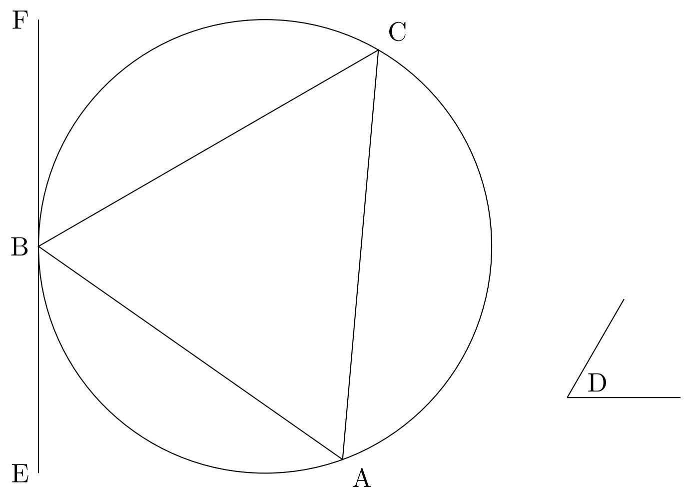
Ve AB doğrusu değme noktası A'dan çizilmişti; bu durumda BAD açısı çemberin diğer AHB parçası içine çizilmiş açıya eşit olur. **[III.32]**

Ama BAD açısı C'deki açıya eşittir.

Böylece AHB parçası içindeki açı da C'deki açıya eşittir.

Öyleyse verilen AB doğrusu üzerinde C'deki açıya eşit bir iç açı kabul eden AHB çember parçası çizilmiştir.
Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

**34. Önerme:**
**Verilen bir çemberden iç açısı verilen bir düzkenar açıya eşit olan bir parça kesmenin yolu.**




ABC verilen çember ve D'deki açı da verilen düzkenar açı olsun; öyleyse ABC çemberinden verilen bir düzkenar açıya, yani D'deki açıya eşit bir iç açı kabul eden bir parça kesilmesi isteniyor.

ABC çemberine B noktasında değen EF çizilsin, ve FB doğrusu üzerine B noktasında D'deki açıya eşit FBC açısı çizilsin. **[I.23]**

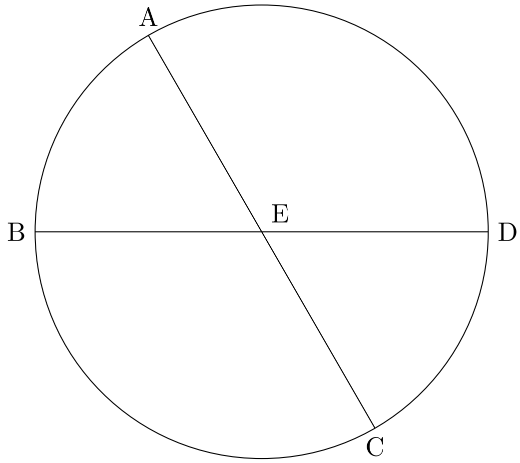
O zaman, EF doğrusu ABC çemberine değdiğinden, ve BC doğrusu değme noktası B'den karşıya çizildiğinden, FBC açısı diğer taraftaki parça BAC içine çizilen açıya eşittir. **[III.32]**

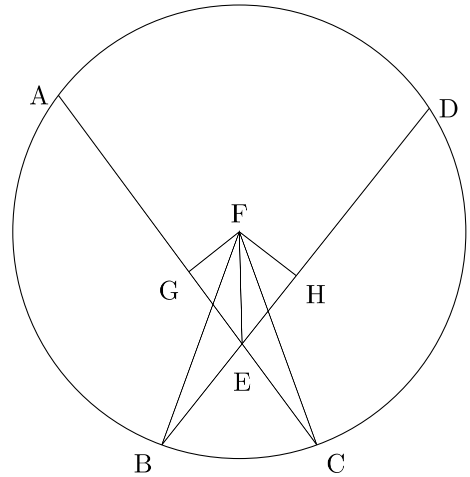
Ama FBC açısı D'deki açıya eşittir; bu durumda BAC parçası içindeki açı D'deki açıya eşit olur.

Öyleyse verilen ABC çemberinden verilen düzkenar açıya, yani D'deki açıya eşit bir açı kabul eden BAC parçası kesilmiştir.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

**35. Önerme:**
**Bir çemberin içinde iki doğru kesişirse, birinin parçaları tarafından içerilen dikdörtgen diğerinin parçaları tarafından içerilen dikdörtgene eşittir.**




ABCD çemberi içinde AC, BD doğruları birbirini E noktasında kessin;

Diyorum ki AE, EC tarafından içerilen dikdörtgen DE, EB tarafından içerilen dikdörtgene eşittir.

Şimdi eğer AC, BD merkezden geçiyorsa, yani E noktası ABCD çemberinin merkeziyse, apaçıktır ki AE, EC, DE, EB eşit olduklarından, AE, EC tarafından içerilen dikdörtgen DE, EB tarafından içerilen dikdörtgene eşittir.

Sonra, AC, DB merkezden geçmesin; ABCD'nin merkezi alınsın, F olsun;

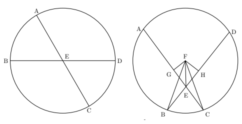
F'den AC, DB doğrularına FG, FH dikmeleri çizilsin, ve FB, FC, FE birleştirilsin.

O zaman, merkezden geçen GF doğrusu merkezden geçmeyen AC doğrusunu dik olarak kestiği için onu ikiye böler; **[III.3]**

bu durumda AG eşittir GC olur.

O zaman, AC doğrusu G'de eşit iki parçaya kesildiği, ve E'de eşit olmayan iki parçaya kesildiğinden, AE, EC tarafından içerilen dikdörtgen ve EG üzerindeki kare birlikte, GC üzerindeki kareye eşittir; **[II.5]**

bunlara GF üzerindeki kare eklensin; bu durumda AE, EC dikdörtgeni, GE, GF kareleriyle birlikte, CG, GF karelerine eşittir.



Ama $FE$ üzerindeki kare $EG$, $GF$ üzerindeki karelere eşittir, ve $FC$ üzerindeki kare $CG$, $GF$ üzerindeki karelere eşittir; **[I.47]**

bu durumda $AE$, $EC$ dikdörtgeni $FE$ üzerindeki kareyle birlikte $FC$ üzerindeki kareye eşittir.

Ve $FC$ eşittir $FB$; öyleyse $AE$, $EC$ dikdörtgeni $EF$ üzerindeki kareyle birlikte $FB$ üzerindeki kareye eşittir.

Aynı nedenle $DE$, $EB$ dikdörtgeni $FE$ üzerindeki kareyle birlikte $FB$ üzerindeki kareye eşittir.

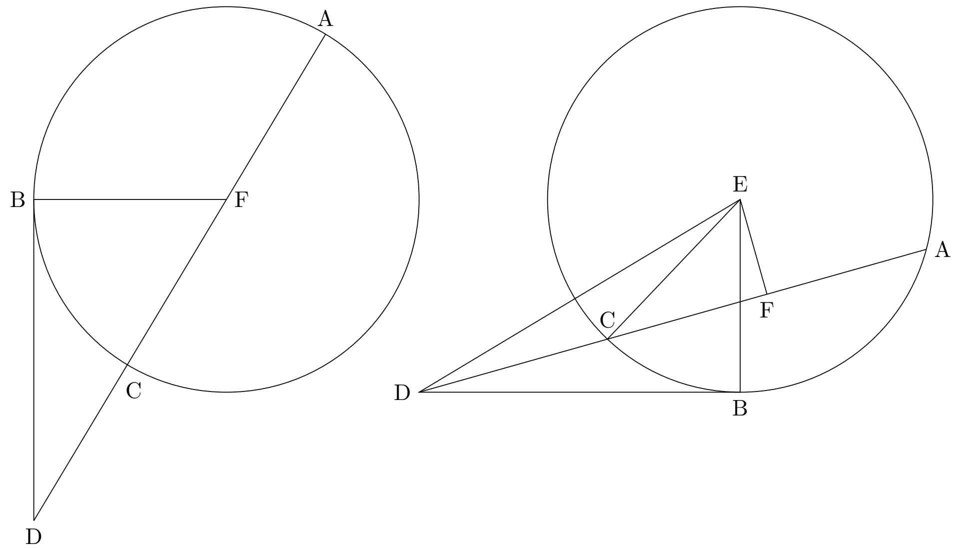
Ama $AE$, $EC$ dikdörtgeninin $FE$ üzerindeki kareyle birlikte $FB$ üzerindeki kareye eşit olduğu kanıtlanmıştı; bu durumda $AE$, $EC$ dikdörtgeni $EF$ üzerindeki kareyle birlikte $DE$, $EB$ dikdörtgeni ve $FE$ üzerindeki kareye eşittir.

Bunlardan $FE$ üzerindeki kare çıkarılsın; öyleyse kalan $AE$, $EC$ tarafından içerilen dikdörtgen $DE$, $EB$ tarafından içerilen dikdörtgene eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**36. Önerme:**

**Eğer bir çemberin dışında bir nokta alınsa ve bu noktadan çembere, biri çemberi kesen diğeri çembere değen, iki doğru çizilse, çemberi kesen doğrunun tamamıyla, o doğrunun çemberin dışbükey çevresiyle nokta arasında kalan kısmının içerdiği dikdörtgen teğet üzerindeki kareye eşittir.**




ABC çemberinin dışında bir D noktası alınsın ve DCA, DB gibi iki doğru çembere çizilsin; DCA doğrusu çemberi kessin, ve BD değsin.

Diyorum ki AD, DC tarafından içerilen dikdörtgen DB üzerindeki kareye eşittir.

DCA ya merkezden geçer ya da merkezden geçmez.

Önce merkezden geçsin, F noktası ABC çemberinin merkezi olsun; FB birleştirilsin; bu durumda FBD açısı dik olur. **[III.18]**

Ve AC doğrusu F'de ikiye bölündüğünden ve CD eklendiğinden, AD, DC dikdörtgeni ve FC üzerindeki kare birlikte, FD üzerindeki kareye eşittir. **[II.6]**

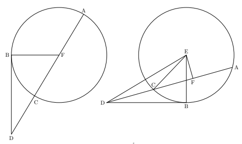
Ama FC eşittir FB; bu durumda AD, DC dikdörtgeni ve FB üzerindeki kare birlikte, FD üzerindeki kareye eşittir.

Ve FB, BD üzerindeki kareler FD üzerindeki kareye eşittir; **[I.47]**

bu durumda AD, DC dikdörtgeni ve FB üzerindeki kare birlikte, FB, BD üzerindeki karelere eşittir.

Bunlardan FB üzerindeki kare çıkarılsın; bu durumda kalan AD, DC dikdörtgeni DB teğeti üzerindeki kareye eşit olur.

Şimdi de, DCA doğrusu ABC çemberinin merkezinden geçmesin; E merkezi alınsın, E'den AC'ye EF dikmesi çizilsin; EB, EC, ED birleştirilsin.



O zaman EBD açısı dik olur. **[III.18]**

Ve, merkezden geçen EF doğrusu merkezden geçmeyen AC doğrusunu dik olarak kestiğinden, onu ikiye böler; **[III.3]**

bu durumda AF eşittir FC olur.

Şimdi, AC doğrusu F'de ikiye bölündüğü ve ona CD eklendiğinden, AD, DC tarafından içerilen dikdörtgen ve FC üzerindeki kare birlikte, FD üzerindeki kareye eşit olur. **[II.6]**

Bunlara FE üzerindeki kare eklensin; bu durumda AD, DC dikdörtgeni CF, FE üzerindeki karelerle birlikte FD, FE üzerindeki karelere eşit olur.

Ama EFC açısı dik olduğundan EC üzerindeki kare CF, FE üzerindeki karelere eşittir; **[I.47]**

ve ED üzerindeki kare DF, FE üzerindeki karelere eşittir;

bu durumda AD, DC dikdörtgeni ve EC üzerindeki kare birlikte, ED üzerindeki kareye eşit olur.

Ve EC eşittir EB; bu durumda AD, DC dikdörtgeni ve EB üzerindeki kare birlikte, ED üzerindeki kareye eşit olur.

Ama EBD açısı dik olduğundan EB, BD üzerindeki kareler ED üzerindeki kareye eşittir; **[I.47]**

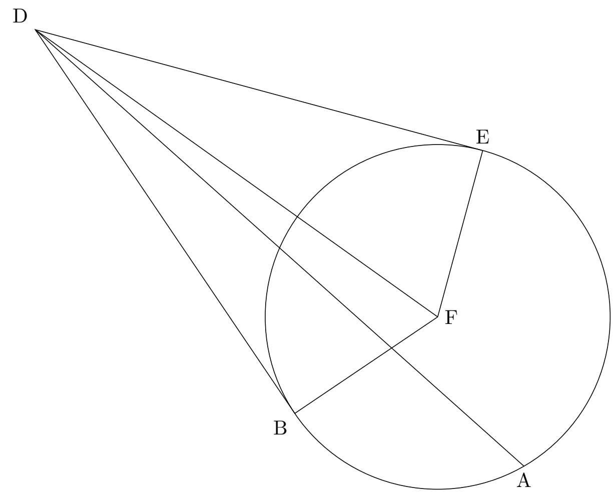
bu durumda AD, DC dikdörtgeni ve EB üzerindeki kare birlikte, EB, BD üzerindeki karelere eşit olur.

Bunlardan EB üzerindeki kare çıkarılsın; bu durumda AD, DC dikdörtgeni DB üzerindeki kareye eşit olur.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**37. Önerme:**

**Eğer bir çemberin dışında bir nokta alınsa ve bu noktadan çembere, biri çemberi kesen diğeri çemberin üzerindeki bir noktaya düşen, iki doğru çizilse, ve dahası çemberi kesen doğrunun tamamıyla o doğrunun çemberin dışbükey çevresiyle nokta arasında kalan kısmının içerdiği dikdörtgen diğer doğru üzerindeki kareye eşitse, o diğer doğru çembere değecektir.**




ABC çemberi dışında bir D noktası alınsın, ve D'den DCA, DB doğruları ABC çemberine çizilsin; DCA çemberi kessin ve DB çemberin üzerinde bir noktaya düşsün; ve AD, DC dikdörtgeni DB üzerindeki kareye eşit olsun.

Diyorum ki DB doğrusu ABC çemberine değer.

Çünkü; ABC'ye değen DE çizilsin; ABC çemberinin merkezi alınsın ve F olsun; FE, FB, FD birleştirilsin.

Böylece FED açısı dik olur. **[III.18]**

Şimdi, DE doğrusu ABC çemberine değdiğinden, ve DCA kestiğinden, AD, DC dikdörtgeni DE üzerindeki kareye eşittir. **[III.36]**

Ama AD, DC dikdörtgeni DB üzerindeki kareye de eşitti; bu durumda DE üzerindeki kare DB üzerindeki kareye eşit olur; öyleyse DE eşittir DB.

Ama FE eşittir FB; bu durumda DE, EF kenarları DB, BF kenarlarına eşittir, ve FD bu üçgenlerin ortak tabanıdır; bu durumda DEF açısı DBF açısına eşit olur. **[I.8]**

Ama DEF açısı diktir; öyleyse DBF açısı da diktir.

Ve FB uzatıldığında çap olur; ve çapa ucundan dik açıyla çizilen doğru çembere değer; öyleyse DB çembere değer. **[III.16, DS]**

Merkez AC üzerinde olsa bile aynı sonuç benzer şekilde kanıtlanabilir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■