Kitap IV

1. Tanımlar

1 Karşılıklı olarak açıları bir diğer düzkenarlı şeklin kenarları üzerinde olan düzkenarlı şekle **düzkenarlı şekil içine çizilmiş** denir.

2 Benzer şekilde, karşılıklı olarak kenarları bir diğer şeklin açıları üzerinde olan şekle **şekil dışına çizilmiş** denir.

3 Her açısı bir çemberin çevresi üzerinde olan düzkenarlı şekle o **çemberin içine çizilmiş** denir.

4 Her kenarı bir çemberin çevresine değen düzkenarlı şekle o **çemberin dışına çizilmiş** denir.

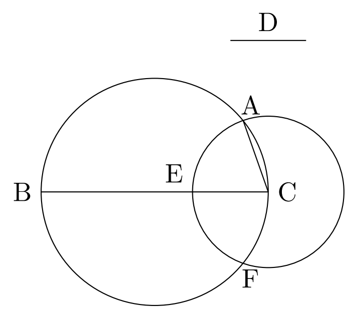
5 Benzer şekilde, çevresi bir şeklin her kenarına değen çembere **şekil içine çizilmiş** denir.

6 Çevresi bir şeklin her köşesinden geçen çembere **şekil dışına çizilmiş** denir.

7 Bir doğrunun uçları bir çember üzerindeyse o doğruya **çembere yerleştirildi** denir.

2. Önermeler

1. Önerme:
Verilen bir çembere çapından daha büyük olmayacak şekilde verilmiş bir doğru yerleştirmenin yolu.



ABC verilen çember olsun, ve D de çemberin çapından büyük olmayacak şekilde verilen doğru olsun; böylece ABC çemberi içine D doğrusuna eşit bir doğru yerleştirilmesi isteniyor.

ABC çemberinin bir BC çapı çizilsin.

O zaman, eğer BC, D'ye eşitse istenen yapılmış olacak; çünkü BC' ABC çemberine yerleştirilmiştir ve D'ye eşittir.

Ama eğer BC, D'den büyükse, o zaman D'ye eşit CE alınsın, ve C merkezi ve CE uzaklığıyla EAF çemberi çizilsin; CA birleştirilsin.

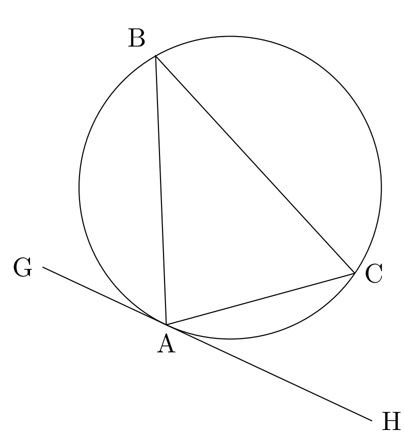
O zaman, C noktası EAF çemberi üzerinde olduğundan, CA eşittir CE olur.

Ama CE eşittir D'dir; bu durumda D de CA'ya eşit olur.

Böylece verilen ABC çemberi içine D doğrusuna eşit CA doğrusu yerleştirilmiş oldu.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

2. Önerme:
Verilen bir çemberin içine verilen bir üçgenle eşaçılı bir üçgen çizmenin yolu.



ABC verilen çember, DEF de verilen üçgen olsun; böylece ABC çemberi içine DEF üçgeniyle eşaçılı bir üçgen çizilmesi isteniyor.

ABC çemberine A noktasında değen GH çizilsin; **[III.16, DS]**

AH doğrusu üzerine A noktasında DEF açısına eşit HAC açısı çizilsin, ve AG doğrusu üzerine A noktasında DFE açısına eşit GAB açısı çizilsin; **[I.23]**

BC birleştirilsin.

O zaman, AH doğrusu ABC çemberine değdiğinden, ve değme noktası A'dan çembere doğru AC doğrusu çizildiğinden, HAC açısı çemberin diğer tarafındaki parçasının içindeki ABC açısına eşittir. **[III.32]**

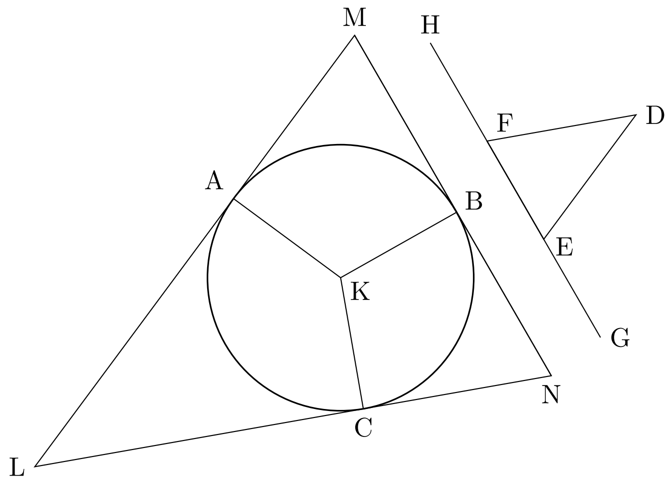
Ama HAC açısı DEF açısına eşittir; bu durumda ABC açısı da DEF açısına eşittir.

Aynı nedenden dolayı ACB açısı DFE açısına eşittir; bu durumda kalan BAC açısı da kalan EDF açısına eşit olur. **[I.32]**

Böylece verilen çemberin içine verilen üçgenle eşaçılı bir üçgen çizilmiştir.

□

3. Önerme:
Verilen bir çemberin dışına verilen bir üçgenle eşaçılı bir üçgen çizmenin yolu.



ABC verilen çember, DEF de verilen üçgen olsun; böylece ABC çemberi dışına DEF üçgeniyle eşaçılı bir üçgen çizilmesi isteniyor.

EF her iki yönde G, H noktalarına kadar uzatılsın, ABC çemberinin merkeze K alınsın, **[III.1]**

ve KB doğrusu rastgele çizilsin; KB doğrusu üzerine ve K noktasında DEG açısına eşit BKA açısı, ve DFH açısına eşit BKC açısı çizilsin; **[I.23]**

ve A, B, C noktalarında ABC çemberine değen LAM, MBN, NCL doğruları çizilsin. **[III.16, DS]**

Şimdi, LM, MN, NL doğruları ABC çemberineA, B, C noktalarında değdiğinden, ve KA, KB, KC doğruları K merkezinden A, B, C'ye çizildiğinden, A, B, C'deki açılar diktir. **[III.18]**

Ve AMBK dörtgeninin dört açısı, AMBK'nin aslında iki üçgene ayrılabilmesinden dolayı, dört dik açıya eşittir, ve KAM, KBM açıları diktir, bu durumda kalan AKB, AMB açıları iki dik açıya eşittir.

Ama DEG, DEF açıları da iki dik açıya eşittir; **[I.13]**

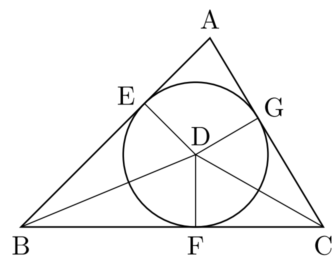
bu durumda AKB, AMB açıları DEG, DEF açılarına eşittir, ki bunlardan AKB, DEG'ye eşittir; öyleyse kalan AMB açısı kalan DEF açısına eşittir.

Benzer şekilde LMN açısının da DFE açısına eşit olduğu kanıtlanabilir; bu durumda kalan MLN açısı EDF açısına eşittir. **[I.32]**

Öyleyse LMN üçgeni DEF üçgeniyle eşaçılıdır, ve ABC üçgeni dışına çizilmiştir.

Böylece verilen bir çemberin dışına verilen bir üçgenle eiaçılı bir üçgen çizilmiştir. □

4. Önerme:
Verilen bir üçgenin içine bir çember çizmenin yolu.



ABC verilen üçgen olsun; böylece ABC üçgeni içine bir çember çizilmesi isteniyor.

ABC, ACB açıları BD, CD doğrularıyla ikiye bölünsün, **[I.9]**

ve bunlar birbiriyle D noktasında kesişsin; D noktasından AB, BC, CA doğrularına DE, DF, DG dik olarak çizilsin.

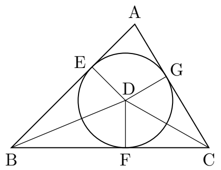
Şimdi, ABD açısı CBD açısına eşit olduğundan, ve BED dik açısı BFD dik açısına eşit olduğundan, EBD, FBD üçgenlerinin karşılıklı iki açıları iki açılarına eşit olduğundan ve bir kenar bir kenara eşit olduğundan, yani eşit açılardan birini gören ortak BD kenarı, kalan kenarları da kalan kenarlarına eşit olacaktır; **[I.26]**

bu durumda DE eşittir DF olur.

Aynı nedenle DG de DF'ye eşittir.

Öyleyse üç doğru DE, DF, DG birbirine eşittir; bu durumda D merkezi ve DE, DF, DG uzaklıklarından biriyle çizilen çember diğer noktalardan da geçecek, ve AB, BC, CA doğrularına değecektir, çünkü E, F, G'deki açılar diktir.

Çünkü eğer onları keserse, çapa ucundan dik olarak çizilen bir doğru çemberin içine düşecektir ki bunun saçma olduğu kanıtlanmıştı; **[III.16]**

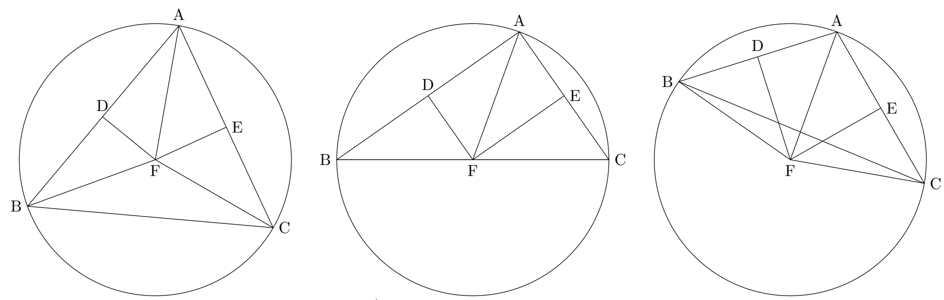


bu durumda D merkezi ve DE, DF, DG uzaklıklarından biriyle çizilen çember AB, BC, CA doğrularını kesmeyecektir.; öyleyse onlara değecektir, ve ABC üçgeninin içine çizilen çember olacaktır. **[Tan. IV.5]**

FGE olarak çizilmiş olsun.

Öyleyse ABC üçgeni içine EFG çemberi çizilmiştir. □

5. Önerme:
Verilen bir üçgenin dışına bir çember çizmenin yolu.



ABC verilen üçgen olsun; böylece ABC üçgeni dışına bir çember çizilmesi isteniyor.

AB, AC doğruları D, E noktalarında ikiye bölünsünler, **[I.10]**

ve D, E noktalarından AB, AC doğrularına dik açıyla DF, EF doğruları çizilsin; o zaman bunlar ya ABC üçgeninin içinde, ya BC doğrusu üzerinde, ya da BC'nin dışında kesişecek.

Önce içerde F'de kesişsinler, ve FB, FC, FA birleştirilsin.

O zaman, AD eşittir DB olduğundan, ve DF ortak ve dik açılı olduğundan, AF tabanı FB tabanına eşit olur. **[I.4]**

Benzer şeklide CF eşittir AF olduğunu kanıtlayabiliriz; böylece FB doğrusu FC'ye de eşittir; bu durumda üç doğru FA, FB, FC birbirine eşittir.

Böylece F merkezi ve FA, FB, FC uzaklıklarından biriyle çizilen çember diğer noktalardan da geçecek ve çember ABC üçgeninin dışına çizilmiş olacaktır.

ABC olarak dışa çizilmiş olsun.

Sonra, DF, DE ikinci şekilde olduğu gibi, BC doğrusu üzerinde F'de kesişsin, ve AF birleştirilsin.

O zaman benzer şekilde ABC dışına çizilen çemberin merkezinin F olduğunu kanıtlayabiliriz.

Yine, DF, EF üçüncü şekilde olduğu gibi, ABC üçgeni dışında F'de kesişsin, ve AF, BF, CF birleştirilsin.

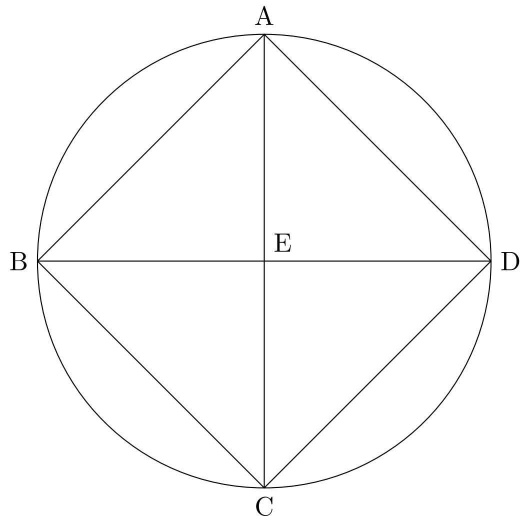
O zaman yine AD eşittir DB olduğundan, ve DF ortak ve dik açılı olduğundan, AF tabanı BF tabanına eşit olur. **[I.4]**

Benzer şeklide CF'nin AF'ye de eşit olduğunu kanıtlayabiliriz; böylece BF, FC'ye de eşit olur; bu durumda F merkezi ve FA, FB, FC uzaklıklarından biriyle çizilen çember kalan noktalardan da geçecek ve ABC üçgeninin dışına çizilmiş olacaktır.

Böylece verilen bir üçgenin dışına bir çember çizilmiştir. □

Şurası apaçıktır ki, çemberin merkezi üçgenin içine düşerse, BAC açısı yarı çemberden daha büyük bir parçanın içinde olduğundan bir dik açıdan küçüktür; merkez BC doğrusu üzerine düştüğünde, BAC açısı bir yarı çember içinde olduğundan diktir; ve merkez üçgenin dışına düştüğünde, BAC açısı yarıçemberden daha küçük bir parçanın içinde olduğundan bir dik açıdan büyüktür.

6. Önerme:
Verilen bir çemberin içine bir kare çizmenin yolu.



$ABCD$ verilen çember olsun; böylece $ABCD$ çemberinin içine bir kare çizilmesi isteniyor.

$ABCD$ çemberinin iki çapı AC, BD birbirine dik açıyla çizilsin, ve AB, BC, CD, DA birleştirilsin.

O zaman, BE eşittir ED olduğundan, çünkü E merkezdir, ve EA ortak ve dik açılı olduğundan, AB tabanı AD tabanına eşittir. **[I.4]**

Aynı nedenden BC, CD doğrularının her biri AB, AD doğrularının her birine eşittir; bu durumda $ABCD$ dörtgeni eşkenarlıdır.

Sonra diyorum ki dik açılıdır da.

Çünkü, BD doğrusu $ABCD$ çemberinin çapı olduğundan, BAD yarı çemberdir; bu durumda BAD açısı dik olur. **[III.31]**

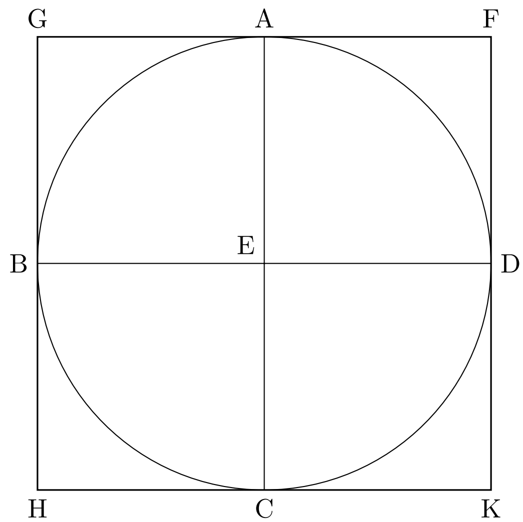
Aynı nedenden dolayı ABC, BCD, CDA açılarının her biri diktir; bu durumda $ABCD$ dörtgeni dik açılıdır.

Ama eşkenarlı olduğu da kanıtlanmıştı; bu durumda kare olur; **[Tan. I.22]**

ve $ABCD$ çemberinin içine çizilmiştir.

Böylece verilen çemberin içine $ABCD$ kaersi çizilmiştir. □

7. Önerme:
Verilen bir çemberin dışına bir kare çizmenin yolu.



$ABCD$ verilen çember olsun; böylece $ABCD$ çemberinin dışına bir kare çizilmesi isteniyor.

$ABCD$ çemberinin iki çapı AC, BD birbirine dik açıyla çizilsin, ve A, B, C, D noktalarından $ABCD$ çemberine değen FG, GH, HK, KF çizilsin. **[III.16, DS]**

O zaman, FG, $ABCD$ çemberine değdiğinden, ve EA doğrusu merkez E'den değme noktası A'ya çizildiğinden, A'daki açılar diktir. **[III.18]**

Aynı nedenden dolayı B, C, D'deki açılar da diktir.

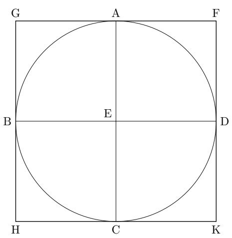
Şimdi, AEB açısı dik olduğundan, ve EBG açısı da dik olduğundan, GH, AC'ye paraleldir. **[I.28]**

Aynı nedenden dolayı AC, FK'ye de paraleldir; öyleyse GH, FK'ye de paraleldir. **[I.32]**

Benzer şekilde GF, HK doğrularının her birinin BED'ye paralel olduğunu kanıtlayabiliriz.

Öyleyse GK, GC, AK, FB, BK'nin her biri paralelkenardır; bu durumda GF eşittir HK, ve GH eşittir FK olur. **[I.34]**

Ve AC eşittir BD olduğundan, ve BD doğrusu GF, HK doğrularının her birine eşit olurken, AC de GH, FK doğrularının her birine eşit olduğundan, **[I.34]**



FGHK dörtgeni eşkenarlıdır.

Sonra diyorum ki dik açılıdır da.

GBEA bir paralelkenar olduğundan ve AEB açısı dik olduğundan, AGB açısı da diktir. **[I.34]**

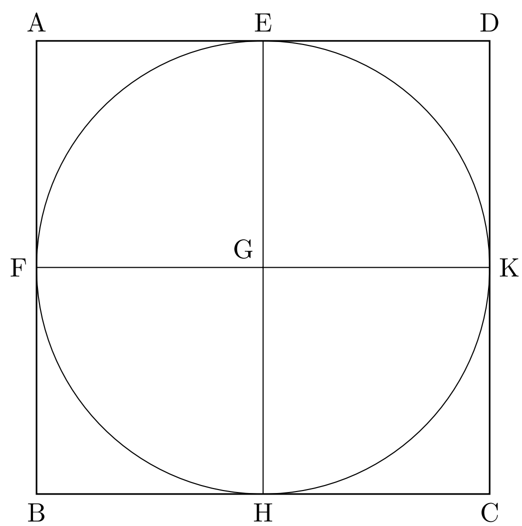
Benzer şekilde H, K, F'deki açıların da dik olduğunu kanıtlayabiliriz.

Bu durumda FGHK dik açılı olur.

Ama eşkenarlı olduğu da kanıtlanmıştı; bu durumda kare olur; ve ABCD çemberinin dışına çizilmiştir.

Öyleyse verilen bir çemberin dışına bir kare çizilmiştir. □

8. Önerme:
Verilen bir karenin içine bir çember çizmenin yolu.



ABCD verilen kare olsun; böylece ABCD karesinin içine bir çember çizilmesi isteniyor.

AD, AB doğruları sırasıyla E, F noktalarında ikiye bölünsün, **[I.10]**

E'den AB ya da CD'ye paralel EH çizilsin, ve F'den AD ya da BC'ye paralel FK çizilsi; **[I.31]**

bu durumda AK, KB, AH, HD, AG, GC, BG, GD şekillerinin her biri bir paralelkenardır, ve karşı kenarları besbelli eşittir. **[I.34]**

Şİmdi, AD eşittir AB olduğundan, ve AE, AD,nin yarısı, ve AF de AB'nin yarısı olduğundan, AE eşittir AF olur, böylece karşılarındaki kenarlar da eşit olur; bu durumda FG eşittir GE olur.

Benzer şekilde GH, GK doğrularının her biri FG, GE doğrularının her birine eşittir; bu durumda dört doğru GE, GF, GH, GK birbirine eşittir.

Öyleyse G merkezi ve GE, GF, GH, GK uzaklıklarından biriyle çizilen çember kalan noktalardan da geçecektir.

Ve AB, BC, CD, DA doğrularına değecektir, çünkü E, F, H, K'deki açılar diktir.

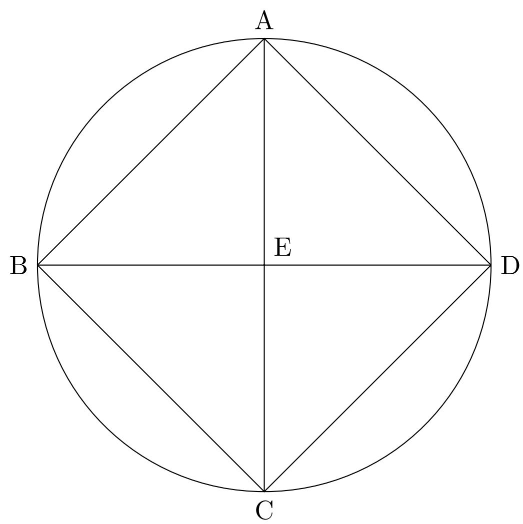
Çünkü eğer çember AB, BC, CD, DA doğrularını keserse, çemberin çapına ucundan çizilen doğru çemberin içine düşecektir ki bunun saçma olduğu kanıtlanmıştı; **[III.16]**

bu durumda G merkezi ve GE, GF, GH, GK uzaklıklarından biriyle çizilen çember AB, BC, CD, DA doğrularını kesmeyecektir.

Öyleyse onlara değecektir ve $ABCD$ karesinin içine çizilmiş olacaktır.

Böylece verilen karenin içine bir çember çizilmiştir. □

9. Önerme:
Verilen bir karenin dışına bir çember çizmenin yolu.



ABCD verilen kare olsun; böylece ABCD karesinin dışına bir çember çizilmesi isteniyor.

AC, BD birleştirilsin ve birbirine E'de kessin.

O zaman, DA eşittir AB olduğundan, ve AC ortak olduğundan, DA, AC kenarları BA, AC kenarlarına eşit olur; ve DC tabanı BC tabanına eşittir; bu durumda DAC açısı BAC açısına eşit olur. **[I.8]**

Öyleyse DAB açısı AC tarafından ikiye bölünmüştür.

Benzer şekilde ABC, BCD, CDA açılarının her birinin AC, DB doğruları tarafından ikiye bölündüğünü kanıtlayabiliriz.

Şimdi, DAB açısı ABC açısına eşit olduğunda, ve EAB açısı DAB açısının yarısı olduğundan, ve EBA açısı ABC açısının yarısı olduğundan, EAB açısı EBA açısına da eşittir; böylece EA kenarı da EB kenarına eşit olur. **[I.6]**

Benzer şekilde EA, EB doğrularının her birinin EC, ED doğrularının her birine eşit olduğunu kanıtlayabiliriz.

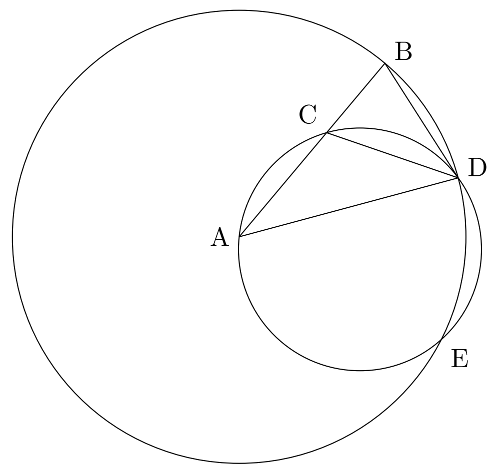
Bu durumda EA, EB, EC, ED doğruları birbirine eşittir.

Öyleyse E merkezi ve EA, EB, EC, ED uzaklıklarından biriyle çizilen çember kalan noktalardan geçecektir; ve ABCD çemberinin dışına çizilmiş olacaktır.

Böylece verilen karenin dışına bir çember çizilmiştir. □

10. Önerme:

Taban açılarının her biri tepe açısının iki katı olan bir ikizkenar üçgen çizmenin yolu.



Bir AB doğrusu çizilsin ve C noktasında öyle kesilsin ki AB, BC tarafından içerilen dikdörtgen CA üzerindeki kareye eşit olsun; **[II.11]**

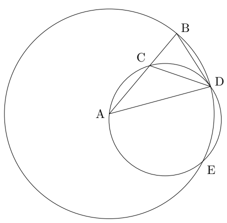
A merkezi ve AB uzaklığıyla BDE çemberi çizilsin, ve BDE çemberinin içine, BDE çemberinin çapından büyük olmayan AC doğrusuna eşit BD doğrusu yerleştirilsin. **[IV.1]**

AD, DC birleştirilsin, ve ACD üçgeni dışına ACD çemberi çizilsin. **[IV.5]**

O zaman, AB, BC dikdörtgeni AC üzerindeki kareye eşit olduğundan, ve AC eşittir BD olduğundan, AB, BC dikdörtgeni BD üzerindeki kareye eşittir.

Ve, ACD çemberi dışında bir B noktası alındığından, ve B'den ACD üzerine, biri onu kesen biri de üzerine düşen iki doğru BA, BD çizildiğinden, ve AB, BC dikdörtgeni BD üzerindeki kareye eşit olduğundan, BD doğrusu ACD çemberine değer. **[III.37]**

O zaman, BDC açısı DAC açısına eşit olduğundan, bunlara CDA açısı eklensin; bu durumda BDA açısının tamamı CDA, DAC açılarına eşittir.



Ama BCD dış açısı CDA, DAC açılarına eşittir; bu durumda BDA açısı BCD açısına eşit olur.

Ama AD kenarı AB kenarına eşit olduğundan BDA açısı CBD açısına eşittir; **[I.5]**

böylece DBA açısı BCD açısına da eşit olur.

Bu durumda üç açı BDA, DBA, BCD birbirine eşit olur.

Ve DBC açısı BCD açısına eşit olduğundan BD kenarı da DC kenarına eşittir. **[I.6]**

Ama BD baştan CA'ya eşit alınmıştı; bu durumda CA eşittir CD olur, böylece CDA açısı da DAC açısına eşit olur; **[I.5]**

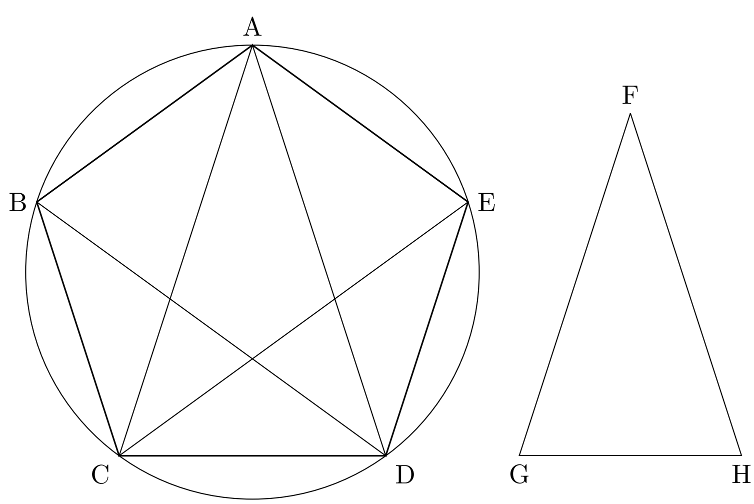
bu durumda CDA, DAC açıları birlikte DAC açısının iki katıdır.

Ama BCD açısı CDA, DAC açılarına eşittir; bu durumda BCD açısı CAD açısının da iki katıdır.

Ama BCD açısı BDA, DBA açılarının her birine eşittir; bu durumda BDA, DBA açılarının her biri de DAB açısının iki katıdır.

Böylece tabandaki açılarının her biri kalan tepe açısının iki katı olan ABD ikizkenar üçgeni çizilmiştir. □

11. Önerme:
Verilen bir çemberin içine eşkenarlı ve eşaçılı bir beşgen çizmenin yolu.



$ABCDE$ verilen çember olsun; böylece $ABCDE$ çemberi içine eşkenarlı ve eşaçılı bir beşgen çizilmesi isteniyor.

G, H'deki her bir açısı F'deki açısının iki katı olan FGH ikizkenar üçgeni ile başlansın; **[IV.10]**

$ABCDE$ çemberi içine FGH üçgeniyle eşaçılı ACD üçgeni çizilsin, öyle ki CAD açısı F'deki açıya, ve G, H'deki açılar sırasıyla ACD, CDA açılarına eşit olsun; **[IV.2]**

bu durumda ACD, CDA açılarının her biri de CAD açısının iki katı olur.

Şimdi ACD, CDA açıları sırasıyla CE, DB doğruları tarafından ikiye bölünsünler, **[I.9]**

ve AB, BC, DE, EA birleştirilsin.

O zaman, ACD, CDA açılarının her biri CAD açısının iki katı olduğundan, ve CE, DB doğruları tarafından ikiye bölündüklerinden, beş açı DAC, ACE, ECD, CDB, BDA birbirine eşittir.

Ama eşit açılar eşit çevreleri görürler; **[III.26]**

bu durumda beş çevre AB, BC, CD, DE, EA birbirine eşittir.

Ama eşit çevreler eşit doğrular tarafından görülür; **[III.29]**

bu durumda beş doğru AB, BC, CD, DE, EA birbirine eşit olur; öyleyse $ABCDE$ beşgeni eşkenarlıdır.

Sonra diyorum ki eşaçılıdır da.

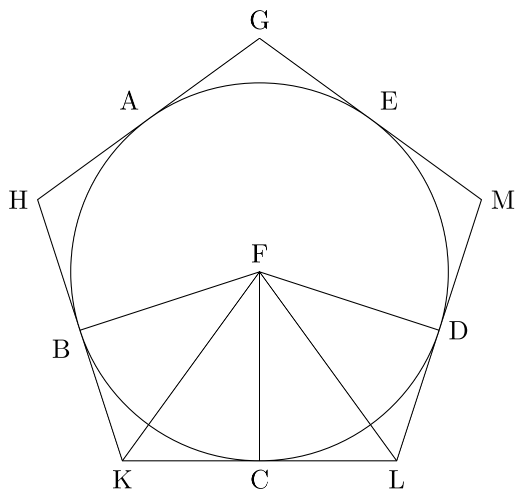
Çünkü, AB çevresi DE çevresine eşit olduğundan, bunlara BCD eklensin; bu durumda $ABCD$ çevresinin tamamı $EDCB$ çevresinin tamamına eşit olur.

Ve AED açısı $ABCD$ çevresini görür, BAE açısı $EDCB$ çevresini görür; bu durumda BAE açısı AED açısına eşit olur. **[III.27]**

Aynı nedenden dolayı ABC, BCD, CDE açılarının her biri BAE, AED açılarının her birine eşittir; öyleyse $ABCDE$ beşgeni eşaçılıdır.

Ama eşkenarlı olduğu da kanıtlanmıştı; böylece verilen çemberin içine eşkenarlı ve eşaçılı bir beşgen çizilmiş oldu. □

12. Önerme:
Verilen bir çemberin dışına eşkenarlı ve eşaçılı bir beşgen çizmenin yolu.



$ABCDE$ verilen çember olsun; böylece $ABCDE$ çemberi dışına eşkenarlı ve eşaçılı bir beşgen çizilmesi isteniyor.

A, B, C, D, E noktaları içeri çizilmiş bir beşgenin köşeleri olarak tasarlansın öyle ki AB, BC, CD, DE, EA çevreleri eşit olsun; **[IV.11]**

A, B, C, D, E noktalarından çembere değen GH, HK, KL, LM, MG çizilsin; **[III.16, DS]**

$ABCDE$ çemberinin F merkezi alınsın **[III.1]**

ve FB, FK, FC, FL, FD birleştirilsin.

O zaman, KL doğrusu $ABCDE$ çemberine C'de değdiğinden, ve FC merkez F'den değme noktası C'ye çizildiğinden, FC doğrusu KL'ye diktir; **[III.18]**

bu durumda C'deki açıların her biri dik olur.

Aynı nedenden dolayı B, D'deki açılar da diktir.

Ve, FCK açısı dik olduğundan, FK üzerindeki kare FC, CK üzerindeki karelere eşittir. **[I.47]**

Aynı nedenden dolayı FK üzerindeki kare FB, BK üzerindeki karelere de eşittir; öyleyse FC, CK üzerindeki kareler FB, BK üzerindeki karelere eşittir, ki bunlardan FC üzerindeki kare FB üzerindeki kareye eşittir; bu durumda kalan CK üzerindeki kare BK üzerindeki kareye eşit olur.

Öyleyse BK eşittir CK.

Ve, FB eşittir FC olduğundan, ve FK ortak olduğundan, BF, FK kenarları CF, FK kenarlarına eşit ve BK tabanı CK tabanına eşittir; bu durumda BFK açısı KFC açısına eşit olur, **[I.8]**

ve BKF açısı da FKC açısına eşit olur.

Öyleyse BFC açısı KFC açısının, ve BKC açısı FKC açısının iki katıdır.

Aynı nedenden dolayı, CFD açısı da CFL açısının, ve DLC açısı FLC açısının iki katıdır.

Şimdi, BC çevresi CD'ye eşit olduğundan, BFC açısı da CFD açısına eşittir. **[III.27]**

Ve BFC açısı KFC açısının, ve DFC açısı LFC açısının iki katı olduğundan, KFC açısı da LFC açısına eşittir.

Ama FCK açısı da FCL açısına eşittir; öyleyse FKC, FLC üçgenlerinde iki açı iki açıya, ve bir kenar bir kenara, yani ortak olan FC, eşit olur; bu durumda kalan kenarları kalan kenarlarına ve kalan açı kalan açıya eşit olur; **[I.26]**

öyleyse KC doğrusu CL doğrusuna eşittir, ve FKC açısı FLC açısına eşittir.

Ve KC, CL'ye eşit olduğundan KL, KC'nin iki katıdır.

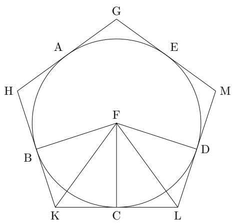
Aynı nedenden dolayı HK'nin de BK'nin iki katı olduğu kanıtlanabilir.

Ve BK eşittir KC; öyleyse HK eşittir KL olur.

Benzer şekilde HG, GM, ML doğrularının her birinin HK, KL doğrularının her birine eşit olduğu kanıtlanabilir; öyleyse GHKLM beşgeni eşkenarlıdır.

Sonra diyorum ki eşaçılıdır da.

Çünkü FKC açısı FLC açısına eşit olduğundan, ve HKL açısının FKC açısının iki katı ve KLM açısının FLC açısının iki katı olduğu kanıtlandığından, HKL açısı da KLM açısına eşittir.

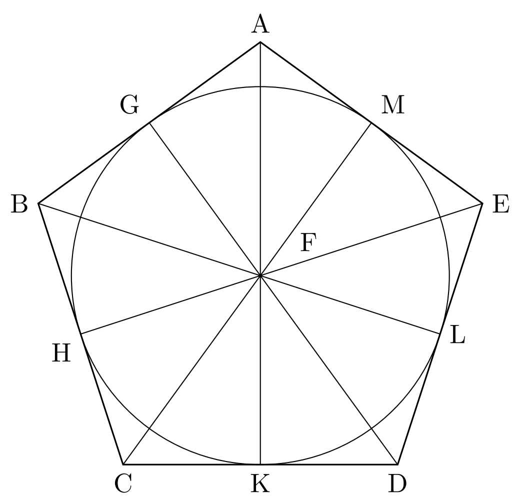


Benzer şekilde KHG, HGM, GML açılarının her birinin HKL, KLM açılarının her birine eşit olduğu kanıtlanabilir; bu durumda beş açı GHK, HKL, KLM, LMG, MGH birbirine eşittir.

Öyleyse $GHKLM$ beşgeni eşaçılıdır.

Ve eşkenarlı olduğu da kanıtlanmıştı; ve $ABCDE$ çemberi dışına çizilmiştir. □

13. Önerme:
Verilen eşkenarlı ve eşaçılı bir beşgenin içine bir çember çizmenin yolu.



$ABCDE$ verilen eşkenarlı ve eşaçılı beşgen olsun; böylece $ABCDE$ beşgeni içine bir çember çizilmesi isteniyor.

BCD, CDE açıları sırasıyla CF, DF doğruları tarafından ikiye bölünsün; ve CF, DF doğrularının kesiştiği F noktasından FB, FA, FE çizilsin.

O zaman, BC eşittir CD, ve CF ortak olduğundan, BC, CF kenarları DC, CF kenarlarına eşit, ve BCF açısı DCF açısına eşittir; bu durumda BF tabanı DF tabanına, ve BCF üçgeni DCF üçgenine, ve kalan açılar kalan açılara, yani eşit kenarları gören açılar, eşit olur. **[I.4]**

Öyleyse CBF açısı CDF açısına eşittir.

Ve, CDE açısı CDF açısının iki katı olduğundan, ve CDE açısı ABC açısına eşit olduğundan, ve bu arada CDF açısı CBF açısına eşit olduğundan, CBA açısı da CBF açısının iki katıdır; bu durumda ABF açısı FBC açısına eşit olur; öyleyse ABC açısı BF doğrusu tarafından ikiye bölünmüş olur.

Benzer şekilde BAE, AED açılarının sırasıyla FA, FE doğrularıyla ikiye bölündüğü kanıtlanabilir.

Şimdi AB, BC, CD, DE, EA doğrularına F noktasından FG, FH, FK, FL, FM dikmeleri çizilsin.

O zaman, HCF açısı KCF açısına eşit olduğundan, ve FHC dik açısı FKC dik açısına eşit olduğundan, FHC, FKC üçgenlerinde iki açı iki açıya ve bir kenar bir kanara, yani ortak olan ve eşit açılardan birini gören FC kenarı, eşittir; bu durumda kalan kenarlar da kalan kenarlara eşit olur. **[I.26]**

öyleyse FH dikmesi FK dikmesine eşittir.

Benzer şekilde FL, FM, FG doğrularının her biri FH, FK doğrularının her birine eşittir; bu durumda beş doğru FL, FM, FG, FH, FK birbirine eşittir.

Öyleyse F merkezi ve FL, FM, FG, FH, FK uzaklıklarından biriyle çizilen çember kalan noktalardan da geçecektir; ve AB, BC, CD, DE, EA doğrularına değecektir, çünkü G, H, K, L, M'deki açılar diktir.

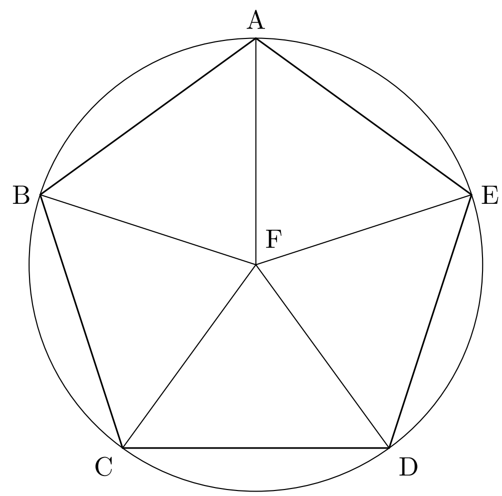
Çünkü, eğer onlara değmez ama keserse, çemberin çapının ucundan dik açıyla çizilen doğru çemberin içine düşecektir ki bunun saçma olduğu kanıtlanmıştı. **[III.16]**

Öyleyse F merkezi ve FG, FH, FK, FL, FM uzaklıklarından biriyle çizilen çember AB, BC, CD, DE, EA doğrularını kesmeyecektir; bu durumda onlara değecektir.

Bu çember $GHKLM$ olarak çizilmiş olsun;

Böylece verilen eşkenarlı ve eşaçılı beşgenin içine bir çember çizilmiş oldu. □

14. Önerme:
Verilen eşkenarlı ve eşaçılı bir beşgenin dışına bir çember çizmenin yolu.



$ABCDE$ verilen eşkenarlı ve eşaçılı beşgen olsun; böylece $ABCDE$ beşgeninin dışına bir çember çizilmesi isteniyor.

BCD, CDE açıları sırasıyla CF, DF doğrularıyla ikiye bölünsün, ve doğruların kesiştiği F noktasından B, A, E noktalarına FB, FA, FE doğruları çizilsin.

O zaman öncekinde olduğu biçimde CBA, BAE, AED açılarının sırasıyla FB, FA, FE doğrularıyla ikiye bölünmüş olduğu kanıtlanabilir;

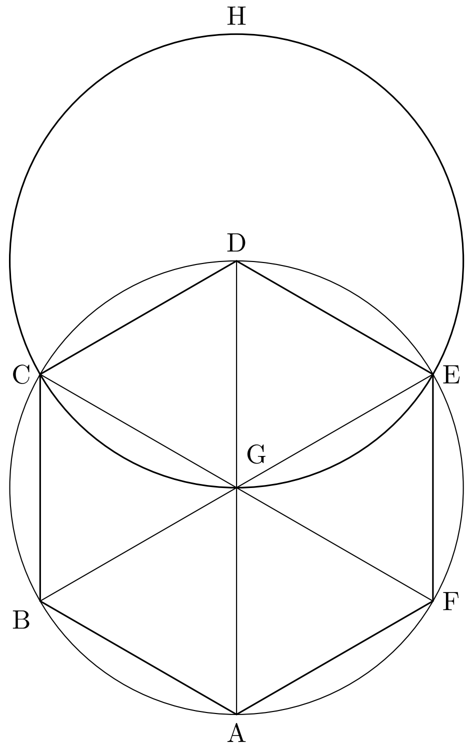
Şimdi, BCD açısı CDE açısına eşit olduğundan, ve FCD açısı BCD açısının, ve CDF açısı CDE açısının yarısı olduğundan, FCD açısı CDF açısına eşit olur; öyleyse FC kenarı FD kenarına eşittir. **[I.6]**

Benzer şekilde FB, FA, FE doğrularının her birinin FC, FD doğrularının her birine eşit olduğu kanıtlanabilir; bu durumda beş doğru FA, FB, FC, FD, FE birbirine eşittir.

Öyleyse F merkezi ve FA, FB, FC, FD, FE uzaklıklarından biriyle çizilen çember kalan noktalardan da geçecektir, ve dışa çizilmiş olacaktır.

Böylece verilen eşkenarlı ve eşaçılı bir beşgenin dışına bir çember çizilmiş oldu. □

15. Önerme:
Verilen bir çemberin içine eşkenarlı ve eşaçılı bir altıgen çizmenin yolu.



$ABCDEF$ verilen çember olsun; böylece $ABCDEF$ çemberi içine eşkenarlı ve eşaçılı bir altıgen çizilmesi isteniyor.

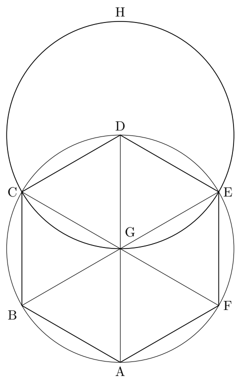
Çemberin AD çapı çizilsin; çemberin G merkezi alınsın, ve D merkezi ve DG uzaklığıyla $EGCH$ çemberi çizilsin; EG, CG birleştirilsin ve B, F noktalarına kadar uzatılsın, ve AB, BC, CD, DE, EF, FA birleştirilsin.

Diyorum ki $ABCDEF$ altıgeni eşkenarlı ve eşaçılıdır.

Çünkü, G noktası $ABCDEF$ çemberinin merkezi olduğundan, GE eşittir GD olur.

Yine, D noktası GCH çemberinin merkezi olduğundan DE eşittir DG olur.

Ama GE'nin GD'ye eşit olduğu kanıtlanmıştı; bu durumda GE, ED'ye de eşittir; bu durumda EGD üçgeni eşkenardır; öyleyse üç açı EGD,



GDE, DEG, ikizkenar üçgenlerde taban açıları birbirine eşit olduğundan, birbirine eşittir. **[I.5]**

Ve bir üçgenin üç açısı iki dik açıya eşittir; **[I.32]**

bu durumda EGD açısı iki dik açının üçte biridir.

Benzer şekilde DGC açısının da iki dik açının üçte biri olduğu kanıtlanabilir.

Ve EB üzerindeki CG doğrusu komşu EGC, CGB açılarını iki dik açıya eşit yaptığından, kalan CGB açısı da iki dik açının üçte biridir.

Öyleyse EGD, DGC, CGB açıları birbirine eşittir; öyleyse bunların ters açıları BGA, AGF, FGE eşittir. **[I.15]**

Öyleyse altı açı EGD, DGC, CGB, BGA, AGF, FGE birbirine eşittir.

Ama eşit açılar eşit çevreleri görürler; **[III.26]**

bu durumda altı çevre AB, BC, CD, DE, EF, FA birbirine eşittir.

Ve eşit çevreler eşit doğruların karşısında bulunur; **[III.29]**

bu durumda bu altı doğru birbirine eşittir; öyleyse ABCDEF altıgeni eşkenarlıdır.

Sonra diyorum ki eşaçılıdır da.

Çünkü, FA çevresi ED çevresine eşit olduğundan, bunlara ABCD çevresi eklensin; bu durumda FABCD'nin tamamı EDCBA'nın tamamına eşittir; ve FED açısı FABCD çevresini görür, AFE açısı EDCBA çevresini görür; bu durumda AFE açısı DEF açısına eşit olur. **[III.27]**

Benzer şekilde ABCDEF altıgeninin diğer açılarının da ayrı ayrı AFE, FED açılarının her birine eşit olduğu kanıtlanabilir; öyleyse ABCDEF altıgeni eşaçılıdır.

Ama eşkenarlı olduğu da kanıtlanmıştı; ve ABCDEF çemberinin içine çizilmişti.

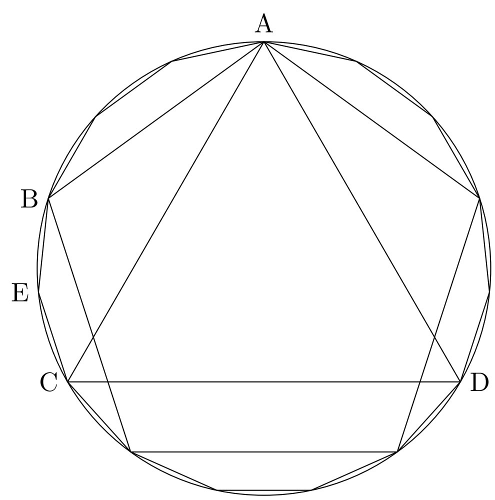
Böylece verilen bir çemberin içine eşkenarlı ve eşaçılı altıgen çizilmiş oldu. □

Doğal Sonuç: Buradan açıkça görülür ki bu altıgenin kenarı çemberin yarıçapına eşittir.

Ve beşgen durumunda olduğu gibi, çemberin üzerindeki bölüm noktalarından çembere teğetler çizersek çemberin dışına, beşgen durumunda açıklandığı gibi, eşkenarlı ve eşaçılı bir altıgen çizilmiş olur.

Ve yine beşgen durumundaki açıklamalardakine benzer yollarla bir altıgenin içine ve dışına çember çizebiliriz.

16. Önerme:
Verilen bir çemberin içine, hem eşkenar hem de eşaçılı olacak onbeş-açılı bir şekil çizmenin yolu.

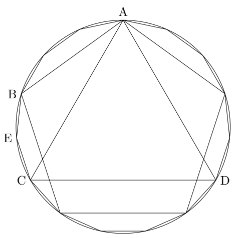


$ABCD$ verilen çember olsun; böylece $ABCD$ çemberinin içine hem eşkenarlı hem de eşaçılı olacak şekilde bir onbeş-kenarlı şekil çizilmesi isteniyor.

$ABCD$ çemberine, çember içine çizilen eşkenar üçgenin bir kenarı AC, ve çember içine çizilen eşkenar beşgenin bir kenarı AB çizilsin; $ABCD$ çemberinde oluşacak onbeş eşit parçanın beşi, çemberin üçte biri olan ABC çevresinde olacak, ve üçü çemberin beşte biri olan AB çevresinde olacak; bu durumda kalan BC çevresinde eşit parçalardan ikisi bulunacak.

BC çevresi E'de ikiye bölünsün; **[III.30]**

bu durumda BE, EC çevrelerinden her biri $ABCD$ çemberinin onbeşte biri olur.



Eğer BE, EC'yi birleştiri ve $ABCD$ çemberine bunlara eşit doğruları bitişik olarak sığdırırsak, çemberin içine hem eşkenarlı hem de eşaçılı onbeş kenarlı bir şekil çizilmiş olur. □

Ve, beşgende olduğu gibi, eğer çemberdeki bölüm noktalarından çembere teğetler çizersek, çember dışına onbeş açılı hem eşkenarlı hem de eşaçılı bir şekil çizilmiş olacak.

Ayrıca, beşgen durumundaki kanıtlara benzer kanıtlarla, verilen onbeş kenarlı şeklin hem içine hem de dışına çember çizebiliriz. □