Kitap V

1. Tanımlar

*[Oranları söz konusu olan şeylerin her biri için **nicelik** terimini kullanacağız.*

"a niceliğinin b niceliğine oranı" anlamında $\frac{a}{b}$ gösterimini kullanacağız.

Yapılan açıklamalar, tanım ve önermelerdeki cümlelerin yalnızca okunmasına yardımcı olmayı amaçlamaktadır.]

1: Küçük nicelik büyük niceliği ölçüyorsa, küçük niceliğe büyük niceliğin **parçası** denir.

[Eğer $a > b$ olacak şekilde iki nicelik verildiğinde $a = mb$ şartını sağlayan bir m tamsayısı varsa b niceliği a niceliğinin parçasıdır.

Burada ve bundan sonra tüm nicelikler, özellikle tam sayılar, sıfırdan büyük olarak düşünülecek.]

2: Büyük nicelik küçük nicelik tarafından ölçülüyorsa, büyük niceliğe küçük niceliğin **katı** denir.

[Yukardaki gibi $a = mb$ ise, a niceliği b nin katıdır.]

3: Aynı türden niceliklerin büyüklükleri arasındaki ilişkiye **oran** denir.

4: Eğer iki nicelikten her birinin bir katı öbürünü geçebiliyorsa bu iki nicelik arasında bir **oran var** denir.

[Eğer $an > b$ ve $bm > a$ olacak şekilde m ve n tamsayıları varsa, a ve b arasında bir oran var denir.]

5: Nicelikler, eğer birinciyle üçüncünün herhangi eşit katları ikinciyle dördüncünün herhangi eşit katlarından sırasıyla aynı anda büyük, aynı anda eşit ya da aynı anda küçük olursa, **aynı orandadır** denir, yani birinci ikinciye ve üçüncü dördüncüye.

> *[a, b, c, d nicelikleri verildiğinde eğer her m, n tamsayıları için aşağıdaki üç durumdan mutlaka biri gerçekleşiyorsa*
> *1) $ma > nb$ ve $mc > nd$,*
> *2) $ma = nb$ ve $mc = nd$,*
> *3) $ma < nb$ ve $mc < nd$;*
> *bu durumda $a : b :: c : d$, yani $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ deriz.*
> *"**aynı oran**" ve "**eşit oran**" sözlerini birbirinin yerine kullanacağız.]*

6: Aynı orandaki niceliklere **orantılı** denir.

7: Eşit katlar alındığında, birincinin katı ikincinin katını aştığında üçüncünün katı dördüncünün katını aşmıyorsa, birincinin ikinciye **oranı** için, üçüncünün dördüncüye oranından **daha büyüktür** denir.

> *[Eğer $ma > nb$ olduğunda $mc \leqslant nd$ oluyorsa, o zaman $\frac{a}{b} > \frac{n}{m} \geqslant \frac{c}{d}$ olur. Dikkatli okuyucu farkedecektir ki eğer $ma = nb$ olduğunda $mc < nd$ oluyorsa, o zaman yine $\frac{a}{b} = \frac{n}{m} > \frac{c}{d}$ olur. Öklid bu sonucun önermelerden çıkarılmasını beklemiştir.]*

8: **Sürekli orantı** en az üç nicelik arasında olur.

> *[Eğer $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ise, a, b, c niceliklerine sürekli orantılı denir.*
> *Daha çok sayıdaki nicelik için, eğer $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \cdots = \frac{a_{n-2}}{a_{n-1}} = \frac{a_{n-1}}{a_n}$ ise, $a_1, \ldots, a_n$ nicelikleri sürekli orantılıdır denir.*
>
> *Eğer $a_0, \ldots, a_n$ nicelikleri sürekli orantılıysa ve $a_0 = 1$, $a_1 = r$ ise $a_n = r^n$ olur. Öklid'in sürekli orantılı nicelikleri geometrik dizi oluşturur.]*

9: Üç nicelik sürekli orantılıysa, birincinin üçüncüye oranı için birincinin ikinciye oranının **çift kat oranı** denir.

> *[$\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ ise $\frac{a}{c} = \left(\frac{a}{b}\right)^2$ olur. Oranlar çarpılmayan kavramlar olarak düşünüldüğü için söz konusu orana diğerinin karesi demek bu yaklaşımın ruhuna aykırıdır. İlerde "çift kat oran" yerine kısaca "**çift oran**" da diyeceğiz.]*

10: Ve dört nicelik sürekli orantılıysa, birincinin dördüncüye oranı için birincinin ikinciye oranının **üç kat oranı** denir. Daha çok sayıda nicelik sürekli orantılı olduğunda birincinin sonuncuya oranı için birincinin ikinciye oranının belli bir **çok kat oranı** olduğu söylenir.

[$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$ *ise* $\frac{a}{d} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$ *olur.*

Ve eğer $a_1, \ldots, a_n$ *sürekli orantılıysa* $\frac{a_1}{a_n} = \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{n-1}$ *olur.]*

11: Öncüller öncüllere, ardıllar da ardıllara **karşılık gelen** niceliklerdir.

[Bir niceliğin bir diğer niceliğe oranı düşünüldüğünde ilk niceliğe ***öncül****, ikinci niceliğe* ***ardıl*** *denir.*

$\frac{a}{b}$ *ve* $\frac{c}{d}$ *verildiğinde* a *ve* c*'ye öncül,* b *ve* d*'ye ardıl denir.* a *ve* c *öncülleri birbirine karşılık gelir,* b *ve* d *ardılları birbirine karşılık gelir.]*

12: Öncüllerin öncüllere, ardılların ardıllara oranına **değiştirilmiş oranı** denir.

[Eğer $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *ise* $\frac{a}{c}$ *ve* $\frac{b}{d}$ *oranları değiştirilmiş oranlar olarak tanımlanır. 16. önermede bu oranların eşit olduğu gösterilecek.]*

13: Ardılın öncüle oranına **ters oran** denir.

[$\frac{a}{b}$ *nin ters oranı* $\frac{b}{a}$ *dır.]*

14: Bir oranın **birleşik oranı** diye öncülle ardılının toplamının ardıla oranına denir.

[$\frac{a}{b}$ *nin birleşik oranı* $\frac{a+b}{b}$ *dir.]*

15: Bir oranın **ayrışık oranı** diye öncülün ardılı aşan niceliğinin ardıla oranına denir.

[$\frac{a}{b}$ *nin ayrışık oranı* $\frac{a-b}{b}$ *dir. Bu gibi durumlarda daima* $a-b > 0$ *olacağını düşünmemiz beklenir.]*

16: Bir oranın **çevrilmiş oranı** diye öncülün, öncülün ardılı aşan niceliğine oranına denir.

[$\frac{a}{b}$ *nin çevrilmiş oranı* $\frac{a}{a-b}$ *dir.]*

17: Verilen bir miktar niceliğin ikişer ikişer alınan oranları aynı sayıdaki başka niceliklerin ikişer ikişer alınan oranlarına sırasıyla eşit olduğu durumda eğer ilk gruptaki niceliklerin birinci niceliğinin sonuncu niceliğine oranı ikinci gruptaki niceliklerin ilk niceliğinin son niceliğine oranına eşitse, **eşit dış oran** oluştu denir. Bir başka deyişle, aradaki nicelikler atılarak uç nicelikler alınır.

[$a_1, \ldots, a_n$ *ve aynı sayıda* $b_1, \ldots, b_n$ *nicelikleri verilmiş olsun ve* $\frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{b_i}{b_{i+1}}$, $i = 1, \ldots, n-1$ *şartı sağlansın. Bu durumda eğer* $\frac{a_1}{a_n} = \frac{b_1}{b_n}$ *ise,* $a_1, \ldots, a_n$ *ve* $b_1, \ldots, b_n$ *niceliklerine **eşit dış oranlı** denir. Baştaki şartları taşıyan her iki nicelik topluluğunda eşit dış oranlar oluştuğu 22. önermede kanıtlanacak.]*

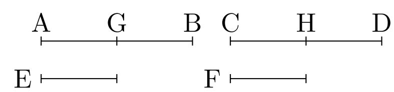
18: İki adet üçer nicelik verildiğinde birinci gruptaki öncülün ardıla oranı ikincideki bir öncülün ardıla oranına eşitse ve birincideki ardılın üçüncü niceliğe oranı ikinci gruptaki üçüncü niceliğin öncüle oranına eşitse **kaydırılmış orantı** oluştu denir.

[a, b, c *ve* d, e, f *niceliklerinin kaydırılmış orantısından söz ederken* a *ve* e *öncül,* b *ve* f *ardıl olarak düşünülür; ve eğer* $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$ *ve* $\frac{b}{c} = \frac{d}{e}$ *eşitlikleri varsa, kaydırılmış orantı oluştu denir. Kaydırılmış orantı oluşturan* a, b, c *nicelikleriyle* d, e, f *niceliklerinin eşit dış oranlı olduğu 23. önermede kanıtlanacak.]*

2. Önermeler

1. Önerme:
Bir miktar niceliğin her biri, sayıca aynı başka niceliklerin her birinin aynı katıysa, ilk niceliklerin hepsi ikinci niceliklerin hepsinin aynı katı olur.

[$a_1 = nb_1, \dots, a_k = nb_k$ *ise* $(a_1 + \cdots + a_k) = n(b_1 + \cdots + b_k)$ *olur.]*



Herhangi sayıdaki AB, CD nicelikleri aynı sayıdaki E, F niceliklerinin sırasıyla aynı katı olsun.

Diyorum ki AB, E'nin hangi katıysa AB, CD de E, F'nin aynı katıdır.

Çünkü CD, F'nin kaç katıysa AB de E'nin aynı katı olduğundan, AB'nin içindeki E'ye eşit niceliklerin sayısı CD'nin içinde F'ye eşit niceliklerin sayısıyla aynıdır.

AB, E'ye eşit AG, GB niceliklerine bölünsün, ve CD de F'ye eşit CH, HD olarak bölünsün;

o zaman AG, GB niceliklerinin sayısı CH, HD niceliklerinin sayısına eşit olacaktır.

Şimdi AG eşittir E, ve CH eşittir F olduğundan, AG eşittir E, ve AG, CH eşittir E, F olur.

Aynı nedendan dolayı GB eşittir E, ve GB, HD eşittir E, F olur;

Öyleyse AB'de E ye eşit ne kadar nicelik varsa AB, CD'de E, F'ye eşit o kadar nicelik vardır.

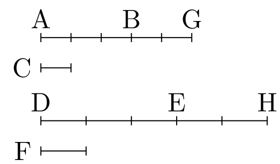
Böylece AB, E'nin kaç katıysa AB, CD de E, F'nin aynı katı olacaktır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

2. Önerme:

Birinci nicelik ikinci niceliğin, üçüncü nicelik de dördüncü niceliğin aynı katı olduğunda eğer beşinci nicelik ikinci niceliğin, altıncı nicelik de dördüncü niceliğin aynı katı oluyorsa birinciyle beşinci niceliğin toplamı ikinci niceliğin, üçüncüyle altıncı niceliğin toplamı da dördüncü niceliğin aynı katı olur.

[$a_1 = ma_2$, $a_3 = ma_4$ *ve* $a_5 = na_2$, $a_6 = na_4$ *ise* $a_1 + a_5 = (m+n)a_2$ *ve* $a_3 + a_6 = (m+n)a_4$ *olur.]*



Birinci nicelik AB, ikinci nicelik C'nin kaç katıysa, üçüncü nicelik DE de dördüncü nicelik F'nin aynı katı olsun; ve beşinci BG, ikinci C'nin hangi katıysa altıncı EH de dördüncü F'nin aynı katı olsun.

Diyorum ki birinciyle beşincinin toplamı AG, ikinci C'nin kaç katıysa, üçüncüyle altıncının toplamı DH de dördüncü F'nin aynı katıdır.

Çünkü DE, F'nin kaç katıysa AB de C'nin aynı katı olduğundan, AB içinde C'ye eşit kaç tane nicelik varsa DE'nin içinde de F'ye eşit o kadar nicelik vardır.

Aynı nedenden dolayı BG'nin içinde kaç tane C'ye eşit nicelik varsa EH'nin içinde de o kadar F'ye eşit nicelik vardır; bu durumda AG'nin tamamında kaç tane C'ye eşit parça varsa DH'nin tamamında da o kadar F'ye eşit parça vardır.

Öyleyse AG, C'nin kaç katıysa DH de F'nin o katıdır.

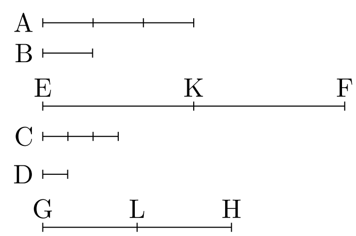
Böylece birinciyle beşincinin toplamı AG, ikinci C'nin kaç katıysa, üçüncüyle altıncının toplamı DH de F'nin o katıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

3. Önerme:

Birinci nicelik ikinci niceliğin, üçüncü nicelik de dördüncü niceliğin aynı katı olduğunda, birinci ve üçüncü niceliklerin aynı katı alınırsa bunlar sırasıyla ikinci ve dördüncü niceliklerin aynı katı olur.

[$a_1 = ma_2$ *ve* $a_3 = ma_4$ *ise* $na_1 = (nm)a_2$ *ve* $na_3 = (nm)a_4$ *olur.]*



Birinci nicelik A, ikinci nicelik B'nin kaç katıysa, üçüncü nicelik C, dördüncü nicelik D'nin aynı katı olsun, ve A, C'nin aynı katları olarak EF, GH alınsın.

Diyorum ki EF, B'nin kaç katıysa GH de D'nin aynı katıdır.

Çünkü, EF, A'nın kaç katıysa GH de C'nin aynı katı olduğundan, EF içinde A'ya eşit kaç nicelik varsa GH'nin içinde de C'ye eşit o kadar nicelik vardır.

EF niceliği A'ya eşit EK, KF niceliklerine bölünsün, ve GH de C'ye eşit GL, LH'ye bölünsün.

EK eşittir A, ve GL eşittir C olduğundan, ve C, D'nin kaç katıysa A da B'nin aynı katı olduğundan, GL, D'nin kaç katıysa EK de B'nın aynı katıdır.

Aynı nedenden dolayı LH, D'nin kaç katıysa KF de B'nin aynı katıdır.

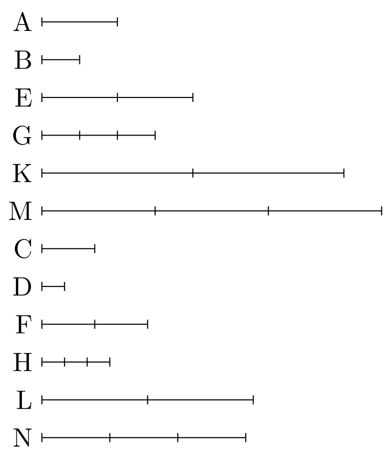
O zaman, birinci nicelik EK, ikinci nicelik B'nin kaç katıysa üçüncü nicelik GL, dördüncü nicelik D'nin aynı katı olduğundan, ve beşinci nicelik KF ikinci nicelik B'nin kaç katıysa altıncı nicelik LH dördüncü nicelik D'nin aynı katı olduğundan, birinci ve beşincinin toplamı EF de ikinci B'nin kaç katıysa üçüncü ile altıncının toplamı GH de dördüncünün toplamı D'nin aynı katıdır. **[V.2]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

4. Önerme:

Birinci niceliğin ikinciye oranıyla üçüncünün dördüncüye oranı aynıysa, birinciyle üçüncünün herhangi bir katının ikinciyle dördüncünün herhangi bir katına oranı aynıdır.

[$\dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{a_3}{a_4}$ *ise* $\dfrac{ma_1}{na_2} = \dfrac{ma_3}{na_4}$ *olur.]*



Birinci nicelik A’nın ikinci nicelik B’ye oranı, üçüncü nicelik C’nin dördüncü nicelik D’ye oranına eşit olsun; ve A, C’nin eşkatları E, F, ve B, D’nin rastgele eşkatları G, H alınsın.

Diyorum ki E’nin G’ye oranı, F’nin H’ye oranına eşittir.

E, F’nin eşkatları K, L alınsın, ve G, H’nin rastgele eşkatları M, N alınsın.

F, C’nin kaç katıysa, E de A’nın aynı katı olduğundan, ve E, F’nin eşkatları K, L alındığından, L, C’nin kaç katıysa K de A’nın aynı katı olur. **[V.3]**

Aynı nedenden dolayı N, D’nin kaç katıysa M de B’nin aynı katı olur.

Ve A’nın B’ye oranı C’nin D’ye oranına eşit olduğundan, ve A, C’nin eşkatları M, N, ve B, D’nin başka rastgele eşkatları M, N alındığından, eğer K, L’den büyükse, L de N’den büyüktür, eşitse eşit, küçükse küçüktür. **[Tan. V.5]**

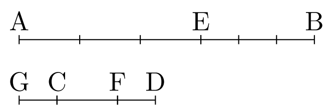
Ve K, L nicelikleri E, F'nin eşkatları, M, N de G, H'nin başka rastgele eşkatlardır; bu durumda E'nin G'ye oranı F'nin H'ye oranına eşit olur. **[Tan. V.5]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

5. Önerme:

Bir nicelik bir diğer niceliğin kaç katıysa, birinci nicelikten çıkarılan bir parça da ikinci nicelikten çıkarılan parçanın aynı katı oluyorsa, bu durumda birinci nicelikte kalan parça da ikinci nicelikte kalan parçanın aynı katıdır.

[$a_1 = ma_2$ *ve* $b_1 < a_1, b_2 < a_2$ *iken* $b_1 = mb_2$ *ise,* $a_1 - b_1 = m(a_2 - b_2)$ *olur.]*



AB niceliği CD niceliğinin kaç katıysa, çıkarılan AE, çıkarılan CF'in aynı katı olsun.

Diyorum ki AB'nin tamamı CD'nin tamamının kaç katıysa, kalan EB de kalan FD'nin aynı katıdır.

Çünkü, AE, CF'nin hangi katıysa, EB de CG'nin aynı katı alınsın.

O zaman, EB, GC'in hangi katıysa, AE de CF'nin aynı katı olduğundan, AB, GF'in hangi katıysa AE de CF'in aynı katı olur. **[V.1]**

Ama varsayıma göre AB, CD'nin hangi katıysa AE de CF'nin aynı katıdır. Öyleyse AB niceliği GF, CD niceliklerinin her birinin aynı katıdır; bu durumda GF eşittir CD olur.

Bunlardan CF çıkarılsın; o zaman kalan GC, kalan FD'ye eşit olur.

Ve EB, GC'nin hangi katıysa AE de CF'in aynı katı olduğundan, ve GC eşittir DF olduğundan, EB, FD'nin hangi katıysa AE de CF'in aynı katı olur.

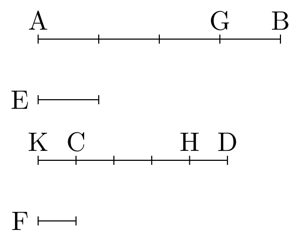
Ama varsayıma göre, AB, CD'nin hangi katıysa AE de CF'in aynı katıdır; bu durumda AB, CD'nin hangi katıysa EB de FD'nin aynı katı olur.

Öyleyse AB'nin tamamı CD'nin tamamının kaç katıysa, kalan EB de kalan FD'nin aynı katıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

6. Önerme:
İki nicelik diğer iki niceliğin eşit katlarıysa ve bunlardan o diğer iki niceliğin eşit katları çıkarılırsa kalanlar diğer iki niceliğe ya eşittir ya da onların eşit katıdır.

[Diğer nicelikler a ve b olsun. $n < m$ olacak şekilde iki tamsayı aldığımızda $ma - na$ ve $mb - nb$ sırasıyla a ve b'nin katları olur. Eşitlik durumu $m - n = 1$ için geçerlidir.]



AB, CD nicelikleri E, F niceliklerinin eşit katları olsun, ve onlardan çıkarılan AG, CH nicelikleri de aynı E, F niceliklerinin eşit katları olsun.

Diyorum ki kalan GB, HD nicelikleri ya E, F niceliklerine eşittir ya da onların eşit katlarıdır.

Çünkü, önce GB, E'ye eşit olsun; diyorum ki HD de F'ye eşit olur.

Çünkü, CK, F'ye eşit çizilsin; CH, F'nin hangi katıysa AG de E'nin aynı katı, ve GB eşittir E, ve KC eşittir F olduğundan, KH, F'nin hangi katıysa AB de E'nin aynı katı olur. **[V.2]**

Ama varsayıma göre CD, F'nin hangi katıysa AB de E'nin aynı katıdır; bu durumda CD, F'nin hangi katıysa KH de F'nin aynı katı olur.

KH, CD niceliklerinin her biri F'nin aynı katı olduğundan, KH eşittir CD olur.

Bunlardan CH çıkarılsın; bu durumda kalan KC kalan HD'ye eşit olur.

Ama F eşittir KC; bu durumda HD eşittir F olur.

Bu yüzden, eğer GB eşittir E ise, HD de F'ye eşittir.

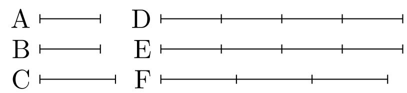
Benzer şekilde eğer GB, E'nin bir katı olsa bile, HD'nin de F'nin aynı katı olduğunu kanıtlayabiliriz.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

7. Önerme:

Eşit niceliklerin aynı niceliğe oranları eşittir. Ayrıca bir niceliğin eşit iki niceliğe oranları da eşittir.

[$a = b$ *ise* $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ *ve* $\frac{c}{a} = \frac{c}{b}$ *olur.*]



A, B eşit iki nicelik ve C rastgele başka bir nicelik olsun.

Diyorum ki, A, B'nin her birinin C'ye oranı aynıdır, ve C'nin de A, B'nin her birine oranı aynıdır.

Çünkü, A, B'nin eşkatları D, E alınsın, ve C'nin rastgele bir katı F alınsın; o zaman, E, B'nin hangi katıysa D de A'nın aynı katı, ve A eşittir B olduğundan, D eşittir E olur. Ama F rastgele bir kattır.

Öyleyse, eğer D, F'den büyükse, E de F'den büyüktür, eşitse eşit, küçükse küçüktür.

Ve D, E nicelikleri A, B'nin eşkatları, F de C'nin rastgele bir katıdır; bu durumda A'nın C'ye oranı neyse B'nin C'ye oranı da aynıdır. **[Tan. V.5]**

Sonra diyorum ki C'nin de A, B niceliklerinin her birine oranı aynıdır.

Çünkü, aynı çizimi kullanarak D'nin E'ye eşit olduğunu kanıtlayabiliriz.

Ve F bir başka nicelik olsun. Öyleyse, eğer F, D'den büyükse, E'den de büyüktür, eşitse eşit, küçükse küçüktür.

Ve D, E nicelikleri A, B'nin rastgele katlarıyken F de C'nin katıdır; bu durumda C'nin A'ya oranıyla C'nin B'ye oranı aynıdır. **[Tan. V.5]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

Doğal Sonuç:

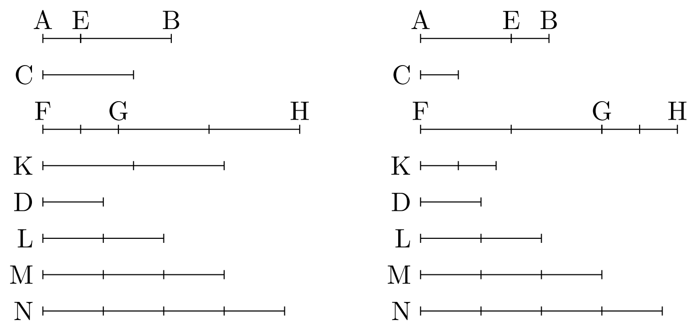
Bundan açıkça görüldüğü gibi eşit oranlı niceliklerin ters oranları da eşittir.

[*Bu sonuç,* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *ise* $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$ *olacağını söylüyor.*]

8. Önerme:

Eşit olmayan iki nicelikten büyüğünün bir niceliğe oranı küçük olanın o niceliğe oranından büyüktür; o niceliğin küçük niceliğe oranı büyüğe olan oranından büyüktür.

[$a > b$ *ise* $\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ *ve* $\frac{c}{b} > \frac{c}{a}$ *olur.]*



AB, C eşit olmayan iki nicelik olsun, ve AB daha büyük olsun; D de rastgele başka bir nicelik olsun.

Diyorum ki AB'nin D'ye oranı C'nin D'ye oranından, ve D'nin C'ye oranı AB'ye oranından büyüktür.

Çünkü, AB, C'den büyük olduğundan, C'ye eşit BE alınsın;

o zaman AE, BE niceliklerinden küçük olanın katları alındığında bir ara D'den büyük olacaktır. **[Tan. V.4]**

Önce AE, EB'den küçük olsun;

AE'nin katları alınsın, ve D'yi geçen bir katı FG olsun;

sonra, FG, AE'nin hangi katıysa, GH, EB'nin ve K de C'nin aynı katı olsun,

ve D'nin iki katı L alınsın, üç katı M, ta ki D'nin K'yi aşan ilk katına ulaşıncaya kadar; D'nin K'yi aşan ilk katı dört kat olsun ve N olsun.

O zaman K, ilk kez N'den küçük olduğundan, M'den küçük değildir.

Ve GH, EB'nin hangi katıysa FG de AE'nin aynı katı olduğundan, FH, AB'nin hangi katıysa FG de AE'nin aynı katı olur. **[V.1]**

Ama K, C'nin hangi katıysa FG de AE'nin aynı katıdır; bu durumda K, C'nin hangi katıysa FH de AB'nin aynı katı olur.

Öyleyse FH, K nicelikleri AB, C niceliklerinin aynı katlarıdır.

Yine, K, C'nin hangi katıysa GH, EB'nin aynı katı olduğundan, ve EB de C'ye eşit olduğundan, GH eşittir K olur.

Ama K, M'den küçük değildir; öyleyse GH de M'den küçük değildir.

Ve FG, D'den büyüktür; bu durumda FH'nin tamamı D, M'nin toplamından büyüktür.

Ama N niceliği D'nin dört katıyken, M, D'nin üç katı ve M, D birlikte D'nin dört katı olduğundan, D, M birlikte N'ye eşittir.

Ama FH niceliği M, D'den büyüktür; öyleyse K niceliği N'den büyük olmazken FH, N'den büyük olur.

Ama N niceliği D'nin rastgele bir katıyken FH, K nicelikleri AB, C niceliklerinin aynı katlarıdır; bu durumda AB'nin D'ye oranı C'nin D'ye oranından büyüktür. **[Tan. V.7]**

Sonra diyorum ki, D'nin C'ye oranı da D'nin AB'ye oranından büyüktür.

Çünkü, aynı çizimle ve benzer yolla N niceliği FH'den büyük olmazken K'den büyük olduğunu kanıtlayabiliriz.

Ve FH, K nicelikleri AB, C'nin rastgele aynı katlarıyken N de D'nin bir katıdır; bu durumda D'nin C'ye oranı D'nin AB'ye oranından büyüktür. **[Tan. V.7]**

Şimdi de AE, EB'den büyük olsun.

O zaman, küçük olan EB'nin katları alındığında bir ara D'den büyük olacaktır; **[Tan. V.4]**

öyleyse katları alınsın, ve EB'nin D'den büyük bir katı GH olsun; ve GH, EB'nin hangi katıysa FG, AE'nin, ve K de C'nin aynı katı olsun.

O zaman benzer şekilde FH, K niceliklerinin AB, C'nin aynı katı olduğunu kanıtlayabiliriz; ve benzer şekilde N, D'nin bir katı ama FG'den büyük ilk katı olsun, öyle ki FG yine M'den küçük olmasın.

Ama GH büyüktür D; öyleyse FH'nin tamamı D, M'den, yani N'den büyüktür.

FG, N'den büyük olmadığından, ve K'ye eşit olan GH'den büyük olduğundan, K de N'den büyük değildir.

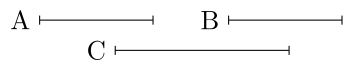
Ve aynı şekilde, yukardaki yolu izleyerek kanıtı tamamlarız.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

9. Önerme:

Aynı niceliğe oranları eşit olan nicelikler eşittir; aynı niceliğin kendilerine oranları eşit olan nicelikler eşittir.

[$\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$ *veya* $\frac{c}{a} = \frac{c}{b}$ *ise* $a = b$ *olur.]*



Çünkü, A, B niceliklerinin her birinin C'ye oranı aynı olsun;

diyorum ki A eşittir B.

Çünkü, aksi takdirde A, B niceliklerinin her birinin C'ye oranı aynı olmazdı; **[V.8]**

ama aynı; demek ki A eşittir B.

Yine, C'nin A, B niceliklerinin her birine oranı aynı olsun;

diyorum ki A eşittir B.

Çünkü, aksi takdirde C'nin A, B niceliklerinin her birine oranı aynı olmayacaktı; **[V.8]**

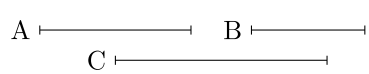
ama aynı; demek ki A eşittir B.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

10. Önerme:

İki niceliğin hangisinin aynı niceliğe oranı daha büyükse o nicelik diğerinden büyüktür; aynı niceliğin hangisine oranı daha büyükse o nicelik diğerinden küçüktür.

[$\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$ *veya* $\frac{c}{b} > \frac{c}{a}$ *ise* $a > b$ *olur.]*



A'nın C'ye oranı B'nin C'ye oranından büyük olsun;

diyorum ki A, B'den büyüktür.

Çünkü değilse A, ya B'ye eşittir ya da ondan küçüktür.

Şimdi, A, B'ye eşit değildir; çünkü öyle olsaydı A, B niceliklerinin her birinin C'ye oranı aynı olurdu; **[V.7]** ama değil;

öyleyse A, B'ye eşit değil.

Yine, A, B'den küçük de değildir; çünkü öyle olsaydı A'nın C'ye oranı B'nin C'ye oranından küçük olacaktı; **[V.8]**

ama değil;

öyleyse A, B'den küçük değil.

Ama eşit olmadığı da kanıtlanmıştı; bu durumda A, B'den büyüktür.

Yine, C'nin B'ye oranı C'nin A'ya oranından büyük olsun;

diyorum ki B, A'dan küçüktür.

Çünkü değilse ya eşittir ya da küçüktür.

Şimdi, B, A'ya eşit değildir; çünkü öyle olsaydı C'nin A, B niceliklerinin her birine oranı aynı olacaktı; **[V.7]**

ama değil.

öyleyse A, B'ye eşit değil.

Yine, B, A'den büyük de değildir; çünkü öyle olsaydı C'nın B'ye oranı C'nin A'ye oranından küçük olacaktı; **[V.8]**

ama değil;

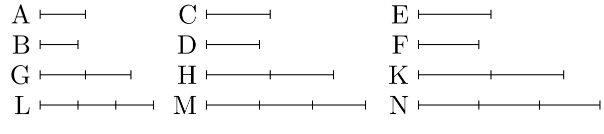
öyleyse B, A'den büyük değil.

Ama eşit olmadığı da kanıtlanmıştı; bu durumda B, A'den küçüktür.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

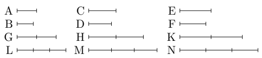
11. Önerme:
Aynı orana eşit olan oranlar birbirlerine de eşittir.

[$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *ve* $\frac{e}{f} = \frac{c}{d}$ *ise* $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$ *olur.]*



A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşit olsun, ve C'nin D'ye oranı E'nin F'ye oranına eşit olsun.

Diyorum ki A'nın B'ye oranı E'nin F'ye oranına eşittir.



Çünkü, A, C, E'nin eşkatları G, H, K alınsın, ve B, D, F'nin başka rastgele eşkatları L, M, N alınsın;

o zaman A'nın B'ye oranı C'nin D'ye oranına eşit olduğundan, ve A, C niceliklerinin G, H eşkatları alındığından, ve B, D niceliklerinin rastgele eşkatları L, M alındığından, eğer G, L'den büyükse, H de M'den büyük olur, eğer eşitse eşit, küçükse küçük olur.

Yine, C'nin D'ye oranı, E'nin F'ye oranına eşit olduğundan, ve C, E niceliklerinin H, K eşkatları alındığından, ve D, F niceliklerinin rastgele eşkatları M, N alındığından, eğer H, M'den büyükse, K de N'den büyük olur, eğer eşitse eşit, küçükse küçük olur.

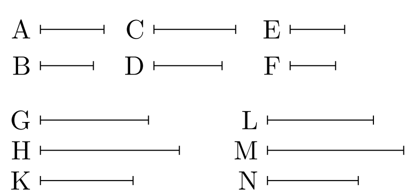
Ama gördük ki eğer H, M'den büyükse, G de L'den büyük olur, eğer eşitse eşit, küçükse küçük olur; ve buna ek olarak eğer G, L'den büyük olursa, K de N'den büyük olur, eğer eşitse eşit, küçükse küçük olur.

Ve G, K nicelikleri A, E'nin eşkatlarıdır, ve L N nicelikleri de B, F'nin başka rastgele katlarıdır; bu durumda A'nın B'ye oranı E'nin F'ye oranına eşit olur.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

12. Önerme:
Öncüllerin ardıllara oranlarının eşit olduğu nicelikler alındığında öncüllerin hepsinin ardılların hepsine oranı da aynı olur.

$$\left[\ \frac{a_1}{b_1} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} \text{ ise } \frac{a_1 + \cdots a_n}{b_1 + \cdots b_n} = \frac{a_1}{b_1} \text{ olur. } \right]$$



Herhangi bir sayıda A, B, C, D, E, F nicelikleri alınsın, öyle ki A'nın B'ye oranı neyse C'nin D'ye, ve E'nin F'ye oranı aynı olsun.

Diyorum ki, A'nın B'ye oranı neyse A, C, E'nin B, D, F'ye oranı aynıdır.

Çünkü, A, C, E′nin eşkatları G, H, K alınsın, ve B, D, F′nin rastgele başka eşkatları alınsın.

O zaman, A′nın B′ye oranı neyse C′nin D′ye, ve E′nin F′ye oranı aynı olduğundan, ve A, C, E′nin eşkatları G, H, K alındığından, ve B, D, F′nin başka rastgele eşkatları L, M, N alındığından, eğer G, L′den büyükse, H de M′den büyüktür, ve K de N′den büyüktür, eğer eşitse eşit, küçükse küçüktür.

Buna ek olarak eğer G, L′den büyükse, G, H, K de L, M, N′den büyüktür, eğer eşitse eşit, küçükse küçüktür.

Şimdi, bir miktar niceliğin her biri, sayıca aynı başka niceliklerin her birinin aynı katı olduğunda, ilk niceliklerin hepsi ikinci niceliklerin hepsinin aynı katı olduğundan, **[V.1]**

G ve G, H, K nicelikleri A ve A, C, E′nin eşkatı olur.

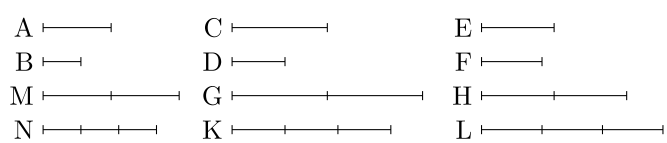
Aynı nedenden dolayı L ve L, M, N nicelikleri B ve B, D, F′nin eşkatıdır;

bu durumda A′nın B′ye oranı A, C, E′nin B, D, F′ye oranına eşittir. **[Tan. V.5]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

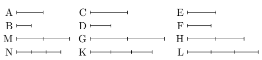
13. Önerme:
Eğer birinci niceliğin ikinci niceliğe oranı üçüncü niceliğin dördüncü niceliğe oranına eşitse, ve üçüncü niceliğin dördüncü niceliğe oranı beşinci niceliğin altıncı niceliğe oranından büyükse, birinci niceliğin ikinci niceliğe oranı da beşinci niceliğin altıncı niceliğe oranından büyüktür.

[$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4}$ *ve* $\frac{a_3}{a_4} > \frac{a_5}{a_6}$ *ise* $\frac{a_1}{a_2} > \frac{a_5}{a_6}$ *olur.*]



Birinci nicelik A′nın ikinci nicelik B′ye oranı, üçüncü C′nin dördüncü D′ye oranına eşit olsun, ve üçüncü C′nin dördüncü D′ye oranı beşinci E′nin altıncı F′ye oranından büyük olsun.

Diyorum ki birinci A′nın ikinci B′ye oranı da beşinci E′nin altıncı F′ye oranından büyük olacaktır.



Çünkü C'nin katı D'nin katından büyük olurken E'nin katı F'nin katından büyük olmayacak şekilde C, E'nin eşkatları, ve D, F'nin rastgele başka katları olacaktır, **[Tan. V.7]**

bu katlar alınsın, ve C, E'nin eşkatları G, H olsun, ve D, F'nin rastgele başka eşkatları K, L olsun,

öyle ki G, K'dan büyük olsun ama H, L'den büyük olmasın;

ve G, C'nin hangi katıysa M de A'nın aynı katı olsun, ve K, D'nin hangi katıysa N de B'nin aynı katı olsun.

Şimdi, A'nın B'ye oranı C'nin D'ye oranına eşit olduğundan, ve A, C'nin eşkatları olarak M, G alındığından, ve B, D'nin rastgele başka eşkatları olarak N, K alındığından, eğer M, N'den büyükse, G de K'den büyüktür, eğer eşitse eşit, küçükse küçüktür. **[Tan. V.5]**

Ama G, K'den büyüktür; bu durumda M de N'den büyük olur.

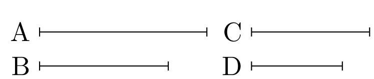
Ama H, L'den büyük değildir; ve M, H nicelikleri A, E'nin eşkatlarıdır, ve N, L de B, F'nin rastgele başka eşkatlarıdır;

bu durumda A'nın B'ye oranı E'nin F'ye oranından büyüktür. **[Tan. V.7]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

14. Önerme:
Birinci niceliğin ikinci niceliğe oranı üçüncü niceliğin dördüncü niceliğe oranına eşitse ve birinci nicelik üçüncü nicelikten büyükse, ikinci nicelik de dördüncü nicelikten büyük olur; eğer eşitse eşit, küçükse küçük olur.

[$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4}$ *iken* $a_1 > a_3$ *ise* $a_2 > a_4$ *olur. Aynı şekilde* $a_1 = a_3$ *ise* $a_2 = a_4$ *ve* $a_1 < a_3$ *ise* $a_2 < a_4$ *olur.]*



Birinci nicelik A'nın ikinci nicelik B'ye oranı üçüncü nicelik C'nin dördüncü nicelik D'ye oranına eşit olsun; ve A, C'den büyük olsun.

Diyorum ki B de D'den büyük olur.

Çünkü, A, C'den büyük olduğundan, ve B de rastgele başka bir nicelik olduğundan, A'nın B'ye oranı C'nin B'ye oranından büyük olur. **[V.8]**

Ama A'nın B'ye oranı C'nin D'ye oranına eşittir; bu durumda C'nin D'ye oranı da C'nin B'ye oranından büyük olur. **[V.13]**

Ama kendisine aynı şeyin oranı büyük olan küçüktür; **[V.10]**

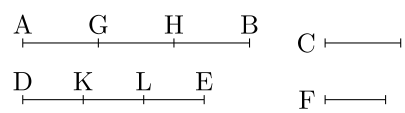
bu durumda D, B'den küçük olur; böylece B, D'den büyüktür.

Benzer şekilde, eğer A, C'ye eşitse B'nin de D'ye eşit olacağı, eğer A, C'den küçükse B'nin de D'den küçük olacağı kanıtlanabilir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

15. Önerme:
Parçaların oranıyla onların aynı katlarının aynı sırada alınan oranları eşittir.

$$[\ A = ma \textit{ ve } B = mb \textit{ ise } \frac{a}{b} = \frac{A}{B} \textit{ olur. }]$$



AB, C'nin hangi katıysa DE de F'nin aynı katı olsun.

Diyorum ki, C'nin F'ye oranı AB'nin DE'ye oranına eşittir.

Çünkü, AB, C'nin hangi katıysa DE de F'nin aynı katı olduğundan, AB içinde C'ye eşit ne kadar nicelik varsa DE içinde de F'ye eşit o kadar nicelik vardır.

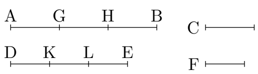
AB niceliği C niceliğine eşit AG, GH, HB niceliklerine bölünsün,

ve DE de F'ye eşit DK, KL, LE niceliklerine bölünsün;

o zaman, AG, GH, HB niceliklerinin miktarı DK, KL, LE niceliklerinin miktarına eşit olacaktır.

Ve, AG, GH, HB birbirine, ve DK, KL, LE birbirine eşit olduğundan, AG'nin GH'ye oranı, GH'nin KL'ye, ve HB'nin LE'ye oranına eşit olur. **[V.7]**

Öyleyse öncüllerden birinin ardıllardan birine oranı öncüllerin hepsinin ardılların hepsine oranına eşittir; **[V.12]**



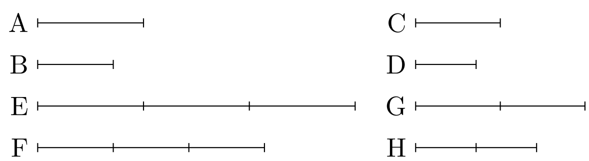
bu durmda AG'nin DK'ye oranı AB'nin DE'ye oranına eşit olur.

Ama AG eşittir C, ve DK eşittir F; öyleyse C'nin F'ye oranı AB'nin DE'ye oranına eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

16. Önerme:
Orantılı dört niceliğin değiştirilmiş oranları aynıdır.

[$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *ise* $\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$ *olur.*]



A, B, C, D orantılı dört nicelik olsun, yani A'nın B'ye oranı C'nin D'ye oranına eşit.

Diyorum ki değiştirilmiş oranları da eşit olacaktır, yani A'nın C'ye oranı B'nin D'ye oranına eşit olacak.

Çünkü, A, B'nin eşkatları E, F, ve C, D'nin rastgele başka eşkatları G, H alınsın.

O zaman, E, A'nın hangi katıysa F de B'in aynı katı olduğundan, ve parçalar katlarıyla aynı orana sahip olduklarından, **[V.15]**

A'nın B'ye oranı, E'nin F'ye oranına eşit olur.

Ama A'nın B'ye oranı C'nin D'ye oranına eşittir; bu durumda C'nin D'ye oranı E'nin F'ye oranına eşit olur. **[V.11]**

Yine, G, H nicelikleri C, D'nin eşkatları olduğundan, C'nin D'ye oranı, G'nin H'ye oranına eşit olur. **[V.15]**

Ama C'nin D'ye oranı E'nin F'ye oranına eşit olduğundan E'nin F'ye oranı da G'nin H'ye oranına eşit olur. **[V.11]**

Ama eğer dört nicelik orantılıysa ve birinci üçüncüden büyükse, ikinci de dördüncüden büyük olur, eğer eşitse eşit, küçükse küçük olur. **[V.14]**

Öyleyse, eğer E, G'den büyükse, F de H'den büyüktür, eğer eşitse eşit, küçükse küçüktür.

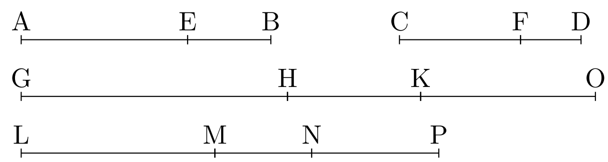
Şimdi, E, F nicelikleri A, B'nin eşkatlarıdır, ve G, H de C, D'nin rastgele başka eşkatlarıdrı; bu durumda A'nın C'ye oranı B'nin D'ye oranına eşit olur. **[Tan. V.5]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

17. Önerme:

Niceliklerin aynı olan birleşik oranları ayrışınca da aynı olur.

$$[\ \frac{a+b}{b} = \frac{c+d}{d} \textit{ ise } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \textit{ olur. }]$$



AB, BE, CD, DF birleşik oranları eşit nicelikler olsun, yani AB'nin BE'ye oranı CD'nin DF'ye oranına eşit olsun.

Diyorum ki bu niceliklerin ayrışık oranları da eşit olur, yani AE'nin EB'ye oranı, CF'nin DF'ye oranına eşit olur.

Çünkü, AE, EB, CF, FD niceliklerinin GH, HK, LM, MN eşkatları alınsın, ve EB, FD'nin rastgele başka eşkatları KO, NP alınsın.

O zaman, GH, AE'nin hangi katıysa HK de EB'nin aynı katı olduğundan, GK, AB'nin hangi katıysa GH de AE'nin aynı katı olur. **[V.1]**

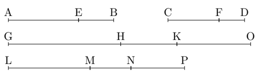
Ama, GH, AE'nin hangi katıysa LM, CF'in aynı katıdır; bu durumda LM, CF'nin hangi katıysa GK de AB'nin aynı katı olur.

Yine, LM, CF'nin hangi katıysa MN de FD'nin aynı katı olduğundan, LN, CD'nin hangi katıysa LM de CF'nin aynı katı olur. **[V.1]**

Ama GK, AB'nin hangi katıysa LM de CF'nin aynı katıydı; öyleyse LN, CF'nin hangi katıysa GK de AB'nin aynı katıdır.

Bundan dolayı GK, LN nicelikleri AB, CD'nin eşkatlarıdır.

Yine, MN, FD'nin hangi katıysa HK de EB'nin aynı katı olduğundan, ve KO da EB'nin hangi katıysa NP de FD'nin aynı katı olduğundan, HO toplamı EB'nin hangi katıysa MP de FD'nin aynı katıdır. **[V.2]**



Ama, AB'nin BE'ye oranı CD'nin DF'ye oranına eşit olduğundan, ve AB, CD'nin eşkatları GK, LN, ve EB, FD'nin eşkatları HO, MP alındığından, eğer GK, HO'dan büyükse, LN de MP'den büyük olur, eğer eşitse eşit, ve küçükse küçük olur.

GK, HO'dan büyük olsun; bunlardan HK çıkarılırsa, GH de KO'dan büyük olur.

Ama gördük ki eğer GK, HO'dan büyükse, LN de MP'den büyük olur; bu durumda LN, MP'den büyük olur, ve eğer bunlardan MN çıkarılırsa, LM de NP'den büyük olur;

bu yüzden eğer GH, KO'dan büyükse, LM de NP'den büyük olur.

Benzer şekilde, eğer GH eşittir KO ise, LM eşittir NP olacağını, ve küçükse küçük olacağını kanıtlayabiliriz.

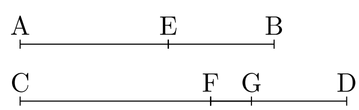
Ve, GH, LM nicelikleri AE, CF'nin eşkatları, KO, NP nicelikleri de EB, FD'nin rastgele başka eşkatlarıdır;

bu durumda AE'nin EB'ye oranı CF'nin FD'ye oranına eşit olur.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

18. Önerme:
Niceliklerin aynı olan ayrışık oranları birleşince de aynı olur.

$$[\ \frac{a-b}{b} = \frac{c-d}{d} \textit{ ise } \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \textit{ olur. }]$$



AE, EB, CF, FD ayrışık oranları eşit nicelikler olsun, yani AE'nin EB'ye oranı CF'nin FD'ye oranına eşit olsun.

Diyorum ki bu niceliklerin birleşik oranları da eşit olur, yani AB'nin BE'ye oranı, CD'nin FD'ye oranına eşit olur.

Çünkü, eğer CD'nin DF'ye oranı, AB'nin BE'ye oranına eşit değilse, o zaman AB'nin BE'ye oranı CD'nin DF'den daha küçük ya da daha büyük bir niceliğe oranına eşit olacaktır.

Önce, o orandaki nicelik daha küçük olsun ve DG olsun.

O zaman, AB'nin BE'ye oranı, CD'nin DG'ye oranına eşit olduğundan, bunlar birleşik oranları eşit nicelikler olarak, ayrışık oranları aynı nicelikler olacaktır. **[V.17]**

Öyleyse AE'nin EB'ye oranı, CG'nin GD'ye oranına eşit olur.

Ama varsayıma göre AE'nin EB'ye oranı, CF'nin FD'ye oranına eşittir.

Bu durumda CG'nin GD'ye oranı, CF'nin FD'ye oranına eşit olur. **[V.11]**

Ama birinci CG, üçüncü CF'den büyüktür; öyleyse ikinci GD de dördüncü FD'den büyüktür. **[V.14]**

Ama aynı zamanda küçüktür de: bu olamaz.

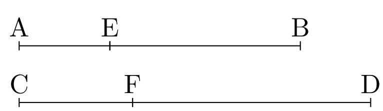
Öyleyse AB'nin BE'ye oranı CD'nin FD'den daha küçük bir niceliğe oranına eşit olamaz.

Benzer şekilde o oranda daha büyük bir nicelik de olamayacağını kanıtlayabiliriz; öyleyse o oranda FD'nin kendisi olur.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

19. Önerme:
İki niceliğin oranı karşılıklı bazı parçalarının oranına eşitse bu parçaları çıkardıktan sonra kalan parçaların oranına da eşittir.

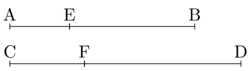
$$[\ \alpha > a \textit{ ve } \beta > b \textit{ olduğunda } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{a}{b} \textit{ ise } \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha - a}{\beta - b} \textit{ olur. }]$$



AB'nin tamamının CD'nin tamamına oranı, AE parçasının CF parçasına oranına eşit olsun.

Diyorum ki kalan EB'nin kalan FD'ye oranı da, AB'nin tamamının CD'nin tamamına oranına eşit olacaktır.

Çünkü, AB'nin CD'ye oranı, AE'nin CF'ye oranına eşit olduğundan, değiştirilmiş oranlar olarak BA'nın AE'ye oranı, DC'nin CF'ye oranına eşittir. **[V.16]**



Birleşik oran olarak eşit alındığından ayrışık oran olarak da eşit olacaklardır; **[V.17]**

yani BE'nin EA'ya oranı DF'nin CF'ye oranına eşit olur, ve değiştirilmiş oranlar olarak BE'nin DF'ye oranı, EA'nın FC'ye oranına eşittir. **[V.16]**

Ama varsayıma göre AE'nin CF'ye oranı, AB'nin tamamının CD'nin tamamına oranına eşittir.

Öyleyse kalan EB'nin kalan FD'ye oranı da, AB'nin tamamının CD'nin tamamına oranına eşittir. **[V.11]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

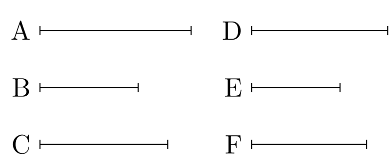
Doğal Sonuç:

Bundan açıkça görüldüğü gibi birleşik oranları eşit olan niceliklerin ayrışık oranları da eşittir.

20. Önerme:

Eğer üç nicelik varsa, ve aynı miktarda başka nicelikler varsa, öyle ki ikişer ikişer alınan oranları aynı olsun, ve eğer dış nicelikler olarak birinci üçüncüden büyükse, dördüncü de altıncıdan büyük olacaktır, eğer eşitse eşit, küçükse küçük olacaktır.

[$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_4}{a_5}$ *ve* $\frac{a_2}{a_3} = \frac{a_5}{a_6}$ *olduğu durumda* $a_1 > a_3$ *ise* $a_4 > a_6$ *olur;* $a_1 = a_3$ *ise* $a_4 = a_6$ *ve* $a_1 < a_3$ *ise* $a_4 < a_6$ *olur.]*



Üç A, B, C niceliği ve sayıca onlarla aynı miktarda D, E, F nicelikleri olsun, öyle ki ikişer ikişer alındığında aynı oranlarda olsunlar, yani

A'nın B'ye oranı, D'nin E'ye oranına, ve B'nin C'ye oranı E'nin F'ye oranına eşit olsun;

ve dış nicelikler olarak A, C'den büyük olsun.

Diyorum ki, D de F'den büyük olacaktır; eğer A, C'ye eşitse eşit, ve küçükse küçük olacaktır.

Çünkü, A, C'den büyük olduğundan, ve B de bir başka nicelik olduğundan, ve büyüğün bir niceliğe oranı küçüğün o niceliğe oranından büyük olduğundan, **[V.8]**

A'nın B'ye oranı, C'nin B'ye oranından büyüktür.

Ama A'nın B'ye oranı, D'nin E'ye oranına eşittir, ve ters oran olarak C'nin B'ye oranı, F'nin E'ye oranına eşittir;

bu durumda D'nin E'ye oranı da F'nin E'ye oranından büyüktür. **[V.13]**

Ama aynı niceliğe oranı olan niceliklerden daha büyük oranı olan daha büyüktür; **[V.10]**

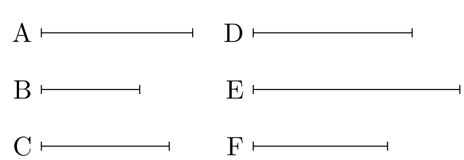
öyleyse D, F'den büyüktür.

Benzer şekilde, eğer A, C'ye eşitse D'nin de F'ye eşit olacağını, ve eğer küçükse küçük olacağını kanıtlayabiliriz.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

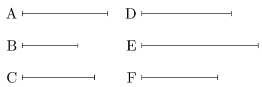
21. Önerme:
Eğer üç nicelik varsa, ve aynı miktarda başka nicelikler varsa, öyle ki ikişer ikişer alınan oranları aynı olsun, ve orantıları kaydırılmış olsun, dış nicelikler olarak birinci nicelik üçüncüden büyükse dördüncü nicelik de altıncıdan büyük olur; eşitse eşit, küçükse küçük olur.

[$\frac{a_1}{a_2} = \frac{a_5}{a_6}$ *ve* $\frac{a_2}{a_3} = \frac{a_4}{a_5}$ *olduğu durumda* $a_1 > a_3$ *ise* $a_4 > a_6$ *olur;* $a_1 = a_3$ *ise* $a_4 = a_6$ *ve* $a_1 < a_3$ *ise* $a_4 < a_6$ *olur.]*



Üç tane A, B, C niceliği ve sayıca onlara eşit D, E, F nicelikleri olsun, öyle ki ikişer ikişer alındıklarında aynı oranda olsunlar, ve oranları kaydırılmış olsun, yani

A'nın B'ye oranı E'nin F'ye oranına, ve B'nin C'ye oranı D'nin E'ye oranına eşit olsun,



ve dış nicelikler olarak A, C'den büyük olsun;

diyorum ki D'de F'den büyük olacaktır, eğer eşitse eşit, ve küçükse küçük olacaktır.

Çünkü, A, C'den büyük olduğundan ve B de bir başka nicelik olduğundan, A'nın B'ye oranı, C'nin B'ye oranından büyüktür. **[V.8]**

Ama A'nın B'ye oranı, E'nin F'ye oranına eşittir, C'nin B'ye oranı, ters oran olarak, E'nin D'ye oranına eşittir.

Öyleyse E'nin F'ye oranı E'nin D'ye oranından büyüktür. **[V.13]**

Ama aynı niceliğin hangisine oranı büyükse o daha küçüktür; **[V.10]**

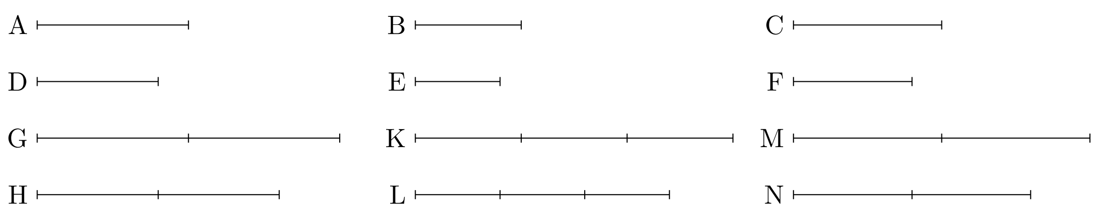
o zaman F, D'den küçüktür; bu durumda D, F'den büyük olur.

Benzer şekilde, eğer A, C'ye eşitse D'nin de F'ye eşit olacağı, ve eğer küçükse küçük olacağını kanıtlayabiliriz.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

22. Önerme:
Eğer bir miktar nicelik varsa, ve aynı miktarda başka nicelikler varsa, öyle ki ikişer ikişer alınan oranları aynı olsun, o zaman bunlar eşit dış oranlıdır.

[$a_1, \ldots, a_n$ ve $b_1, \ldots, b_n$ nicelikleri verilmiş olsun ve $\frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{b_i}{b_{i+1}}$, $i = 1, \ldots, n-1$ ise $\frac{a_1}{a_n} = \frac{b_1}{b_n}$ olur.]



Üç tane A, B, C niceliği ve sayıca onlara eşit D, E, F nicelikleri olsun, öyle ki ikişer ikişer alındıklarında aynı oranda olsunlar, yani

A'nın B'ye oranı D'nin E'ye oranına, ve B'nin C'ye oranı E'nin F'ye oranına eşit olsun,

diyorum ki bunlar eşit dış oranlı da olacaktır.

Çünkü, A, D'nin eşkatları G, H alınsın, ve B, E'nin rastgele başka eşkatları K, L alınsın; ve ayrıca C, F'nin rastgele eşkatları M, N alınsın.

O zaman, A'nın B'ye oranı D'nin E'ye oranına eşit oduğundan, ve A, D'nin eşkatları G, H, ve B, E'nin rastgele başka eşkatları K, L alındığından, G'nin K'ya oranı, H'nin L'ye oranına eşit olur. **[V.4]**

Aynı nedenden dolayı K'nin M'ye oranı, L'nin N'ye oranına eşittir.

Bu durumda, üç nicelik G, K, M, ve miktarca onlara eşit H, L, N nicelikleri olduğundan, öyle ki ikişer ikişer alınan oranları aynı olduğundan, dış nicelikler olarak eğer G, M'den büyükse, H de N'den büyüktür, eğer eşitse eşit, ve küçükse küçüktür. **[V.20]**

Ve G, H nicelikleri A, D'nin, ve M,N nicelikleri de C, F'nin rastgele başka eşkatlarıdır.

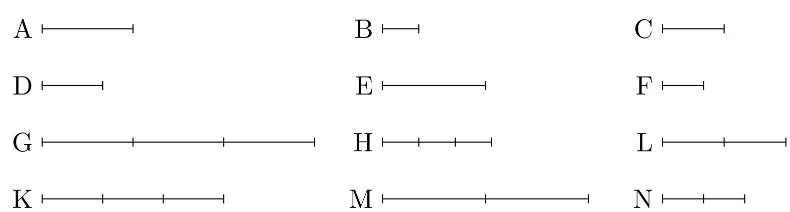
Öyleyse, A'nın C'ye oranı, D'nin F'ye oranına eşittir. **[Tan. V.5]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

23. Önerme:

Eğer üç nicelik varsa, ve aynı miktarda başka nicelikler varsa, öyle ki ikişer ikişer alınan oranları aynı olsun, ve orantıları kaydırılmış olsun, o zaman bunlar eşit dış oranlıdır.

[$\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}$ *ve* $\mathrm{d}, \mathrm{e}, \mathrm{f}$ *nicelikleri verildiğinde* $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \frac{\mathrm{e}}{\mathrm{f}}$ *ve* $\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}$ *ise* $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{c}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{f}}$ *olur.]*

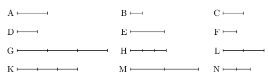


Üç tane A, B, C niceliği ve sayıca onlara eşit D, E, F nicelikleri olsun, öyle ki ikişer ikişer alındıklarında aynı oranda olsunlar, ve oranları kaydırılmış olsun, yani

A'nın B'ye oranı E'nin F'ye oranına, ve B'nin C'ye oranı D'nin E'ye oranına eşit olsun;

diyorum ki, A'nın C'ye oranı D'nin F'ye oranına eşittir.

A, B, D'nin eşkatları G, H, K, ve C, E, F'nin rastgele başka eşkatları L, M, N alınsın.



O zaman, G, H nicelikleri A, B′nin eşkatları olduğundan, ve parçalar eşkatlarıyla aynı oranda olduğundan, **[V.15]**

A′nın B′ye oranı G′nin H′ye oranına eşittir.

Aynı nedenden dolayı, E′nin F′ye oranı, M′nin N′ye oranına eşittir.

Ve A′nın B′ye oranı, E′nin F′ye oranına eşittir; bu durumda G′nin H′ye oranı da M′nin N′ye oranına eşit olur. **[V.11]**

Sonra, B′nin C′ye oranı D′nin E′ye oranına eşit olduğundan, değiştirilmiş oran olarak, B′nin D′ye oranı, C′nin E′ye oranına eşit olur. **[V.16]**

Ve, H, K nicelikleri B, D′nin eşkatları olduğundan, ve parçalar eşkatlarıyla aynı oranda olduğundan, **[V.15]**

B′nin D′ye oranı H′nin K′ye oranına eşit olur.

Ama B′nin D′ye oranı, C′nin E′ye oranına eşittir; demek ki H′nin K′ye oranı da C′nin E′ye oranına eşittir. **[V.11]**

Yine, L, M nicelikleri C, E′nin eşkatları olduğundan, C′nin E′ye oranı, L′nin M′ye oranına eşittir. **[V.15]**

Ama C′nin E′ye oranı, H′nin K′ye oranına eşittir; öyleyse H′nin K′ye oranı L′nin M′ye oranına eşit olur., **[V.11]**

ve değiştirilmiş oran olarak, H′nin L′ye oranı, K′nin M′ye oranına eşittir. **[V.16]**

Ama G′nin H′ye oranının M′nin N′ye oranına eşit olduğu da kanıtlanmıştı.

O zaman, üç tane G, H, L nicelikleri ve sayıca onlara eşit K, M, N nicelikleri alındığından, öyle ki ikişer ikişer alındıklarında oranları aynı olduğundan, ve oranları kaydırılmış olduğundan,

dış nicelikler olarak, eğer G, L′den büyükse, K de N′den büyüktür, eğer eşitse eşit, ve küçükse küçüktür. **[V.21]**

Ve, G, K nicelikleri A, D′nin eşkatları, ve L, N de C, F′nin eşkatlarıdır.

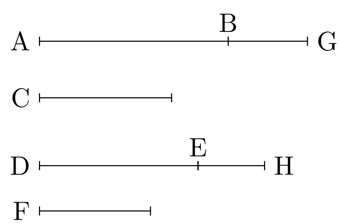
Öyleyse A′nın C′ye oranı, D′nin F′ye oranına eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

24. Önerme:

Birinci niceliğin ikinciye oranı üçüncünün dördüncüye oranına eşitse ve aynı zamanda beşincinin ikinciye oranı altıncının dördüncüye oranına eşitse, birinciyle beşincinin toplamının ikinciye oranı üçüncüyle altıncının toplamının dördüncüye oranına eşittir.

$$[\ \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_3}{a_4} \textit{ ve } \frac{a_5}{a_2} = \frac{a_6}{a_4} \textit{ ise } \frac{a_1 + a_5}{a_2} = \frac{a_3 + a_6}{a_4} \textit{ olur. }]$$



Birinci nicelik AB'nin ikinci nicelik C'ye oranı, üçüncü DE'nin dördüncü F'ye oranı aynı olsun; ve beşinci BG'nin ikinci C'ye oranı, altıncı EH'nin F'ye oranıyla aynı olsun.

Diyorum ki, birinci ve beşincinin toplamı AG'nin ikinci C'ye oranı, üçüncü ve altıncı DH'nin dördüncü F'ye oranıyla aynıdır.

Çünkü, BG'nin C'ye oranı, EH'nin F'ye oranına eşit olduğundan, ters oranlar olarak, C'nin BG'ye oranı, F'nin EHye oranına eşittir.

O zaman, AB'nin C'ye oranı, DE'nin F'ye oranına, ve C'nin BG'ye oranı, F'nin EH'ye oranına eşit olduğundan, eşit dış oranlı olarak, AB'nin BG'ye oranı, DE'nin EH'ye oranına eşittir. **[V.22]**

Ve ayrışık olarak aynı oranda olan nicelikler birleşince de aynı oranda olduğundan, **[V.18]**

AG'nin GB'ye oranı, DH'nin HE'ye oranına eşittir.

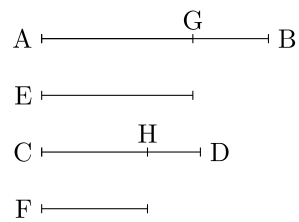
Ama aynı zamanda BG'nin C'ye oranı, EH'nin F'ye oranına eşittir;

bu durumda eşit dış oranlı olarak, AG'nin C'ye oranı DH'nin F'ye oranına eşittir. **[V.22]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

25. Önerme:
Orantılı dört nicelik arasında en büyükle en küçüğü birlikte diğer ikisinin toplamından büyüktür.

[$\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$ ise ve a en büyükse, o zaman d en küçüktür ve $a + d > b + c$ olur.]



Dört nicelik AB, CD, E, F orantılı olsun, yani AB'nin CD'ye oranı E'nin F'ye oranına eşit olsun, ve AB en büyükleri, F de en küçükleri olsun.

Diyorum ki, AB, F birlikte CD, E'nin toplamından büyüktür.

Çünkü, AG, E'ye eşit çizilsin, ve CH de F'ye eşit olsun.

AB'nin CD'ye oranı, E'nin F'ye oranına eşit olduğundan, ve E eşittir AG, ve F eşittir CH olduğundan, AB'nin CD'ye oranı, AG'nin CH'ye oranına eşittir.

Ve, AB'nin tamamının CD'nin tamamına oranı, çıkarılan parça AG'nin çıkarılan parça CH'ye oranına eşit olduğundan, kalan GB'nin kalan HD'ye oranı da AB'nin tamamının CD'nin tamamına oranına eşit olur. **[V.19]**

Ama AB, CD'den büyüktür; bu durumda GB de HD'den büyüktür.

Ve AG, E'ye, CH de F'ye eşit olduğundan, AG, F birlikte CH, E'ye eşittir.

Ve, GB, HD eşit olmadıklarından, GB daha büyüktür, eğer GB'ye AG, F eklenir ve HD'ye CH, E eklenirse, AB, F birlikte CD, E'den büyük olur.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■