Kitap VI

1. Tanımlar

1 Karşılıklı açıları eşit ve bu eşit açıların etrafındaki kenarları orantılı olan düz kenarlı şekillere **benzer** denir.

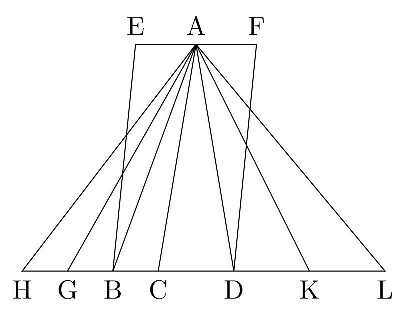
2 Bir doğrunun büyük parçasının küçük parçaya oranı tüm doğrunun büyük parçaya oranına eşitse bu doğru **uç ve orta oranda** bölünmüş denir.

[Bu orana bugün "altın oran" denmektedir.]

3 Bir şeklin **yüksekliği** tepesinden tabanına çizilen dik doğrudur.

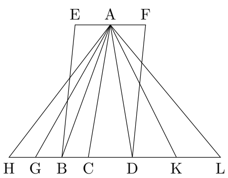
2. Önermeler

1. Önerme:
Yükseklikleri aynı olan üçgenlerin ve paralelkenarların alanlarının oranları tabanlarının oranlarına eşittir.



ABC, ACD, üçgenlerinin ve EC, CF paralelkenarların yükseklikleri aynı olsun.

Diyorum ki, BC tabanının CD tabanına oranı, ABC üçgeninin ACD üçgenine oranına, ve EC paralelkenarının CF paralelkenarına oranına eşittir.



Çünkü, BD doğrusu iki yönde H, L noktalarına kadar uzatılsın, ve BG, GH doğruları BC tabanına eşit çizilsin, ve yine rastgele sayıda DK, KL doğruları CD tabanına eşit çizilsin;

AG, AH, AK, AL birleştirilsin.

O zaman, CB, BG, GH birbirine eşit olduğundan, ABC, AGB, AHG üçgenleri de birbirine eşittir. **[I.38]**

Öyleyse, HC tabanı BC tabanının hangi katıysa AHC üçgeni de ABC üçgeninin aynı katıdır.

Aynı nedenden dolayı, LC tabanı CD tabanının hangi katıysa ALC üçgeni de ACD çgeninin aynı katıdır;

ve eğer HC tabanı CL tabanına eşitse, AHC üçgeni de ACL üçgenine eşittir, **[I.38]**

eğer HC tabanı CL tabanından büyükse, AHC üçgeni de ACL üçgeninden büyüktür, ve eğer küçükse küçüktür.

Böylece, dört nicelik olduğundan,

yani iki taban BC, CD, ve iki üçgen ABC, ACD,

bu durumda taban BC ve üçgen ABC'nin eşkatları, yani HC tabanı ve AHC üçgeni,

ve CD tabanı ve ADC üçgeninin rastgele başka eşkatları, yani LC tabanı ve ALC üçgeni alındığında,

ve eğer HC tabanı CL tabanından büyükse, AHC üçgeninin ALC üçgeninden büyük olacağı, eğer eşitse eşit ve küçükse küçük olacağı kanıtlandığından,

BC tabanının CD tabanına oranı, ABC üçgeninin ACD üçgenine oranına eşittir. **[Tan. V.5]**

Ayrıca, EC paralelkenarı ABC üçgeninin iki katı olduğundan, **[I.41]**

ve FC paralelkenarı ACD üçgeninin iki katı olduğundan, ve bu arada parçaların oranı eşkatlarının oranıyla aynı olduğundan, **[V.15]**

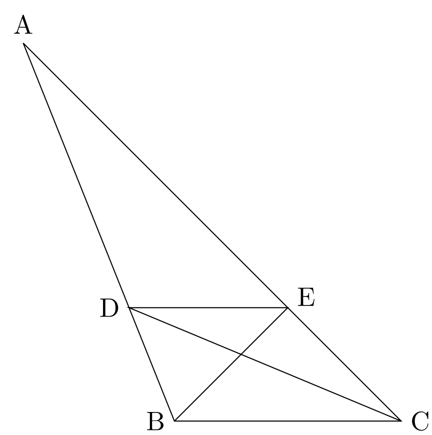
ABC üçgeninin ACD üçgenine oranı, EC paralelkenarının FC paralelkenarına oranına eşittir.

Ama BC tabanının CD tabanına oranının ABC üçgeninin ACD üçgenine oranına eşit olduğu kanıtlandığından, ve ABC üçgeninin ACD üçgenine oranı EC paralelkenarının CF paralelkenarına oranına eşit olduğundan,

BC tabanının CD tabanına oranı, EC paralelkenarının FC paralelkenarına oranına eşittir. **[V.11]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

2. Önerme:
Bir üçgende kenarlardan birine paralel bir doğru çizilirse bu doğru diğer iki kenarı orantılı kesecektir; ve eğer üçgenin kenarları orantılı kesilirse, bu kesim noktalarını birleştiren doğru üçgenin diğer kenarına paralel olacaktır.



ABC üçgeninin kenarlarından birine, BC kenarına, DE paraleli çizilsin.

Diyorum ki BD'nin DA'ya oranı, CE'nin EA'ya oranıyla aynıdır.

Çünkü önce BE, CD birleştirilsin.

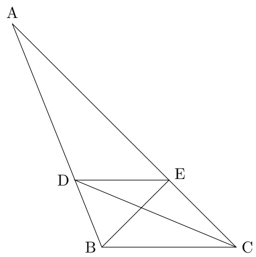
O zaman BDE üçgeni CDE üçgenine eşittir, çünkü aynı DE tabanı üstünde ve aynı DE, BC paralelleri arasındalar. **[I.38]**

Ve ADE üçgeni de bir başka üçgendir;

ama eşit niceliklerin aynı niceliğe oranları eşittir; **[V.7]**

öyleyse, BDE üçgeninin ADE üçgenine oranı, CDE üçgeninin ADE üçgenine oranına eşittir.

Ama BDE üçgeninin ADE üçgenine oranı BD'nin DA'ya oranına eşittir, çünkü yükseklikleri, yani E'den AB'ye çizilen dikme, aynı olduğundan birbirlerine oranları tabanlarının oranıyla aynıdır. **[VI.1]**



Aynı nedenden dolayı, CDE üçgeninin ADE üçgenine oranı, CE'nin EA'ya oranıyla aynıdır.

Öyleyse, BD'nin DA'ya oranı, CE'nin EA'ya oranıyla aynıdır. **[V.11]**

Yine, ABC üçgeninin AB, AC kenarları orantılı kesilsin, yani BD'nin DA'ya oranı, CE'nin EA'ya oranına eşit olsun; ve DE birleştirilsin.

Diyorum ki, DE doğrusu BC'ye paraleldir.

Çünkü, aynı çizimle, BD'nin DA'ya oranı, CE'nin EA'ya oranıyla aynı olduğundan, ama BD'nin DA'ya oranı, BDE üçgeninin ADE üçgenine oranıyla aynı, ve CE'nin EA'ya oranının da CDE üçgeninin ADE üçgenine oranıyla aynı olduğundan, **[VI.1]**

BDE üçgeninin ADE üçgenine oranı, CDE üçgeninin ADE üçgenine oranına eşit olur. **[V.11]**

Bu durumda BDE, CDE üçgenlerinin her birinin ADE üçgenine oranı aynıdır.

Öyleyse BDE üçgeni CDE üçgenine eşittir; **[V.9]**

ve aynı taban üzerindedirler.

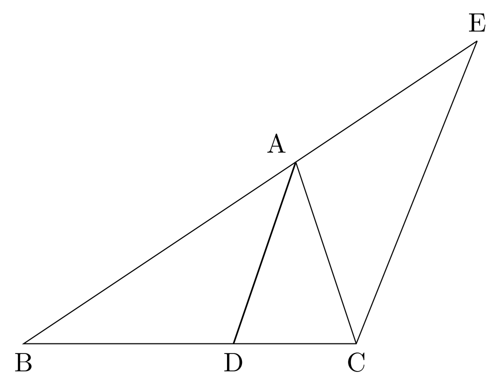
Ama aynı taban üzerindeki eşit üçgenler aynı paraleller arasındadırlar. **[I.39]**

Öyleyse DE doğrusu BC'ye paraleldir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

3. Önerme:

Bir üçgenin bir açısı ikiye bölünürse ve açıyı bölen doğru tabanı da keserse, tabanın parçalarının oranı diğer kenarların oranıyla aynı olacaktır; ve eğer tabanın parçalarının oranı diğer kenarların oranıyla aynıysa, üçgenin tepesini tabanın kesim noktasına birleştiren doğru üçgenin açısını ikiye bölecektir.



ABC bir üçgen olsun, ve AD doğrusu BAC açısını ikiye bölsün.

Diyorum ki, BD'nin CD'ye oranı, BA'nın AC'ye oranıyla aynıdır.

Çünkü, C noktasından DA'ye paralel CE çizilsin, ve BA onu E'de kesecek şekilde uzatılsın.

O zaman, AC doğrusu, AD, EC paralellerini kestiği için, ACE açısı CAD açısına eşittir. **[I.29]**

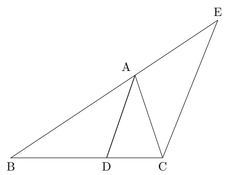
Ama CAD açısı varsayıma göre BAD açısına eşittir; öyleyse BAD açısı da ACE açısına eşittir.

Yine, BAE doğrusu, AD, EC paralellerini kestiği için, BAD dış açısı AEC iç açısına eşittir. **[I.29]**

Ama ACE açısının da BAD açısına eşit olduğu kanıtlanmıştı; bu durumda ACE açısı AEC açısına eşit olur, böylese AE kenarı da AC kenarına eşit olur. **[I.6]**

Ve AD doğrusu BCE üçgeninde EC kenarına paralel çizildiğinden, BD'nin DC'ye oranı, BA'nın AE'ye oranına eşittir. **[VI.2]**

Ama AE eşittir AC; öyleyse BD'nin DC'ye oranı, BA'nın AC'ye oranına eşittir.



Yine, BA'nın AC'ye oranı, BD'nin DC'ye oranıyla aynı olsun, ve AD birleştirilsin.

Diyorum ki, BAC açısı AD doğrusuyla ikiye bölünmüştür.

Çünkü, aynı çizimle, BD'nin DC'ye oranı, BA'nın AC'ye oranıyla aynı olduğundan, ve BCE üçgeninde AD'nin EC kenarına paralel çizilmesi nedeniyle BD'nin DC'ye oranı BA'nın AE'ye oranıyla aynı olduğundan, **[VI.2]**

BA'nın AC'ye oranı da BA'nın AE'ye oranına eşit olur. **[V.11]**

Öyleyse AC eşittir AE, **[V.9]**

ve bu yüzden AEC açısı ACE açısına eşittir. **[I.5]**

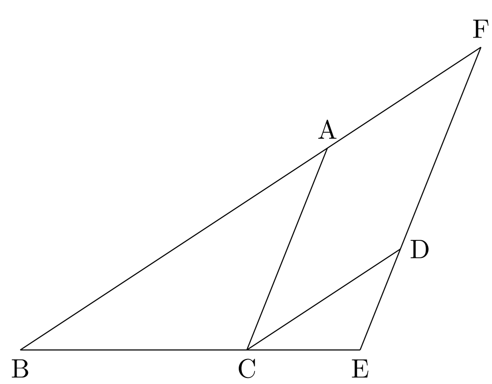
Ama AEC açısı BAD dışaçısına, ve ACE açısı CAD ters iç açısına eşittir. **[I.29]**

Bu durumda BAD açısı CAD açısına eşit olur.

Öyleyse BAC açısı AD doğrusu tarafından ikiye bölünmüştür.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

4. Önerme:
Eşaçılı üçgenlerde eşit açıların etrafındaki kenarlar orantılıdır, yani eşit açıları gören kenarlar.



ABC, DCE üçgenleri eşaçılı üçgenler olsun, öyle ki ABC açısı DCE açısına, BAC açısı CDE açısına, ve ayrıca ACB açısı CED açısına eşit olsun.

Diyorum ki, ABC, DCE üçgenlerinde eşit açıların etrafındaki kenarlar orantılıdır, ve bunlar eşit açıları gören kenarlardır.

Çünkü, BC kenarı CE ile aynı doğru üzerine yerleştirilsin; ABC, ACB açıları iki dik açıdan küçük olduğundan, **[I.17]**

ve ACB açısı DEC açısına eşit olduğundan, ABC, DEC açıları iki dik açıdan küçüktür;

öyleyse BA, ED uzatıldıklarında kesişecektir. **[Bel. I.5]**

Uzatılıp F noktasında kesişsinler.

Şimdi DCE açısı ABC açısına eşit olduğundan, BF doğrusu CD'ye paraleldir. **[I.28]**

Yine, ACB açısı DEC açısına eşit olduğundan, AC doğrusu FE'ye paraleldir. **[I.28]**

Öyleyse $FACD$ bir paralelkenardır; bu durumda FA eşittir DC, ve AC eşittir FD olur. **[I.34]**

Ve AC doğrusu FBE üçgeninin FE kenarına paralel olduğundan, BA'nın AF'ye oranı BC'nin CE'ye oranına eşittir. **[VI.2]**

Ama AF eşittir CD; bu durumda BA'nın CD'ye oranı BC'nin CE'ye oranına eşit olur; ve değiştirilmiş oran olarak, AB'nin BC'ye oranı DC'nin CE'ye oranına eşit olur. **[V.16]**

Yine, CD, BF'ye paralel olduğundan, BC'nin CE'ye oarnı FD'nin DE'ye oranına eşittir. **[VI.2]**

Ama FD, AC'ye eşittir;

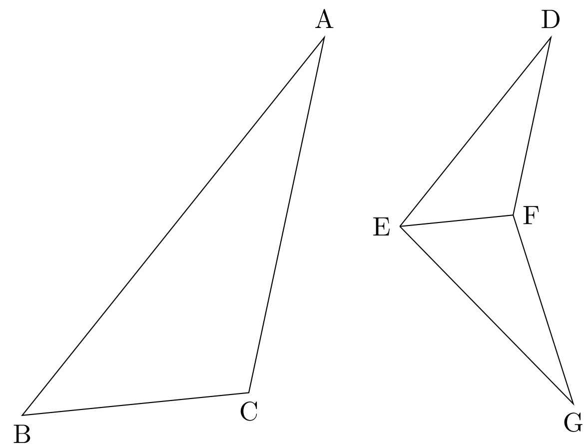
öyleyse, BC'nin CE'ye oranı, AC'nin DE'ye oranına eşittir,

ve değiştirilmiş oran olarak, BC'nin CA'ya oranı, CE'nin ED'ye oranına eşit olur. **[V.16]**

O zaman, AB'nin BC'ye oranının DC'nin CE'ye oranına, ve BC'nin CA'ya oranının CE'nin ED'ye oranına eşit olduğu kanıtlanmış olduğundan, eşit dış oranlar olarak BA'nın AC'ye oranı CD'nin DE'ye oranına eşit olur. **[V.22]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

5. Önerme:
Karşılıklı kenarları orantılı olan üçgenler eşaçılıdır, ve karşılıklı kenarların gördüğü açılar eşittir.



ABC, DEF üçgenleri, karşılıklı kenarları orantılı üçgenler olsun, yani AB'nin BC'ye oranı, DE'nin EF'ye oranına, BC'nin CA'ya oranı, EF'nin FD'ye oranına, ve ayrıca BA'nın AC'ye oranı, ED'nin DF'ye oranına eşit olsun.

Diyorum ki, ABC üçgeni DEF üçgeniyle eşaçılıdır, ve karşılıklı kenarların gördüğü açıları eşit olacaktır, yani ABC açısı DEF açısına, BCA açısı EFD açısına, ve ayrıca BAC açısı EDF açısına eşit olacaktır.

Çünkü, EF doğrusu üzerine E, F noktalarında ABC açısına eşit FEG açısı, ve ACB açısına eşit EFG açısı çizilsin; **[I.23]**

bu durumda A köşesindeki kalan açı, kalan G açısına eşit olur. **[I.32]**

Böylece ABC üçgeni GEF üçgeniyle eşaçılıdır.

Öyleyse ABC, GEF üçgenlerinde eşit açılar etrafındaki kenarlar orantılıdır, ve bunlar eşit açıları gören kenarlardır; **[VI.4]**

bu durumda AB'nin BC'ye oranı, GE'nin EF'ye oranına eşit olur.

Ama AC'nin BC'ye oranı, varsayım gereği DE'nin EF'ye oranına eşittir; bu durumda DE'nin EF'ye oranı, GE'nin EF'ye oranına eşit olur. **[V.11]**

Böylece DE, GE doğrularının her biri EF doğrusuyla aynı orandadır; bu nedenle DE eşittitir GE. **[V.9]**

Aynı nedenden dolayı DF eşittir GF.

O zaman, DE, EG'ye eşit, ve EF ortak olduğundan, iki kenar DE, EF, iki kenar GE, EF'ye eşit, ve DF tabanı FG tabanına eşit olduğundan, DEF açısı GEF açısına eşit olur, **[I.8]**

ve DEF üçgeni GEF üçgenine eşit olur, ve kalan açılar kalan açılara eşit olur, yani eşit kenarların gördüğü açılar. **[I.4]**

Öyleyse DFE açısı GFE açısına, ve EDF açısı EGF açısına eşittir.

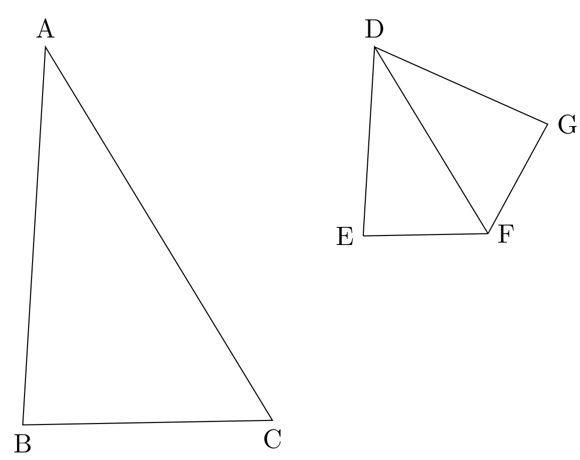
Ve FED açısı GEF açısına, ve GEF açısı ABC açısına eşit olduğundan, ABC açısı DEF açısına da eşittir.

Aynı nedenden dolayı ACB açısı DFE açısına eşittir, ve ayrıca A'daki açı da D'deki açıya eşit olur;

öyleyse ABC üçgeni DEF üçgeniyle eşaçılıdır.

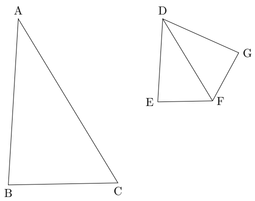
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

6. Önerme:
Eğer iki üçgenin birer açıları eşitse ve eşit açıların etrafındaki kenarlar orantılıysa, üçgenler eşaçılı olacaktır ve karşılıklı kenarların gördüğü açılar eşit olacaktır.



ABC, DEF üçgenlerinde BAC açısı EDF açısına eşit olsun, ve eşit açılar etrafındaki kenarlar orantılı olsun, öyle ki BA'nın AC'ye oranı, ED'nin DF'ye oranına eşit olsun.

Diyorum ki, ABC üçgeni DEF üçgeniyle eşaçılıdır, ve ABC açısı DEF açısına, ve ACB açısı DFE açısına eşit olacaktır.



Çünkü, DF doğrusu üzerine, ve D, F noktalarında BAC, EDF açılarından birine eşit FDG açısı, ve ACB açısına eşit DFG açısı çizilsin; **[I.23]**

bu durumda kalan B'deki açı G'de kalan diğer açıya eşittir. **[I.32]**

Öyleyse ABC üçgeni DGF üçgeniyle eşaçılıdır.

Bu durumda BA'nın AC'ye oranı, GD'nin DF'ye oranına eşit olur. **[VI.4]**

Ama, varsayımdan dolayı, BA'nın AC'ye oranı, ED'nin DF'ye oranına eşittir; öyleyse ED'nin DF'ye oranı, GD'nin DF'ye oranına eşittir. **[V.11]**

Öyleyse ED eşittir DG; **[V.9]**

ve DF ortaktır; bu durumda iki kenar ED, DF, iki kenar GD, DF'ye eşit, ve EDF açısı GDF açısına eşit olur; öyleyse EF tabanı GF tabanına, ve DEF üçgeni DGF üçgenine eşittir, ve kalan açılar da kalan açılara eşit olur, yani eşit kenarlar tarafından görülen açılar. **[I.4]**

Böylece DFG açısı DFE açısına, ve DGF açısı DEF açısına eşittir. Ama DFG açısı ACB açısına eşittir; bu durumda ACB açısı DFE açısına da eşittir.

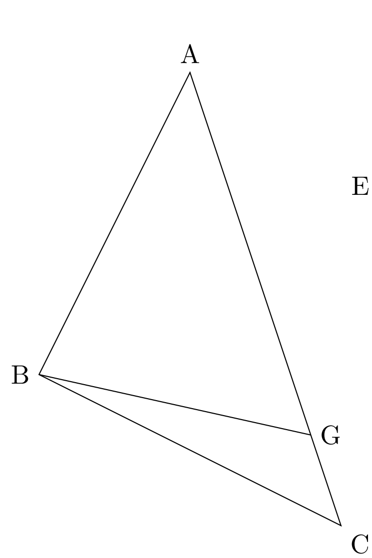
Ve varsayım gereği, BAC açısı EDF açısına eşittir; öyleyse kalan B'deki açı E'de kalan diğer açıya eşittir; **[I.32]**

Öyleyse ABC üçgeni DEF üçgeniyle eşaçılıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

7. Önerme:

Eğer iki üçgenin birer açıları eşitse, diğer açılar etrafındaki kenarlar orantılıysa, ve kalan açıların ikisi de ya bir dik açıdan küçük ya da ikisi de dik açıdan küçük değilse, üçgenler eşaçılı, ve orantılı kenarlar arasındaki açılar eşit olacaktır.



ABC, DEF üçgenlerinde BAC açısı EDF açısına eşit olsun, diğer ABC, DEF açıları etrafındaki kenarlar orantılı olsun, yani AB'nin BC'ye oranı, DE'nin EF'ye oranına eşit olsun, ve ilk olarak kalan C, F açılarının her biri dik açıdan küçük olsun.

Diyorum ki ABC üçgeni DEF üçgeniyle eşaçılıdır, ABC açısı DEF açısına eşit olacaktır, ve diğer açılar, yani C'deki ve F'deki açılar da eşit olacaktır.

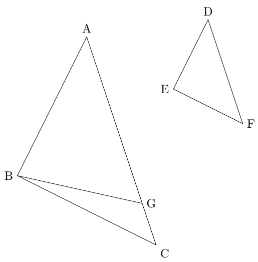
Çünkü, eğer ABC açısı DEF açısına eşit değilse, biri daha büyüktür.

ABC daha büyük olsun; AB doğrusu üzerine ve B noktasında DEF açısına eşit ABG açısı çizilsin. **[I.23]**

O zaman, A açısı D açısına, ve ABG açısı da DEF açısına eşit olduğundan, kalan AGB açısı kalan DEF açısına eşit olur. **[I.32]**

Öyleyse ABG üçgeni DFE üçgeniyle eşaçılıdır.

Öyleyse AB'nin BG'ye oranı, DE'nin EF'ye oranına eşittir. **[VI.4]**



Ama DE'nin EF'ye oranı, varsayıma göre AB'nin BCye oranına eşittir; bu durumda AB doğrusu BC, BG doğrularının her birine aynı orandadır; **[V.11]**

öyleyse BC eşittir BG, **[V.9]**

bu yüzden C'deki açı BGC açısına eşittir. **[I.5]**

Ama varsayıma göre C'deki açı dik açıdan küçüktür; öyleyse BGC açısı da dik açıdan küçüktür; bu durumda komşu AGB açısı dik açıdan büyüktür. **[I.13]**

Ve F açısına eşit olduğu kanıtlanmıştı; demek ki F açısı da dik açıdan büyüktür.

Ama varsayıma göre F açısı dik açıdan küçüktür: bu olamaz.

Öyleyse ABC'deki açı DEF açısından farklı olamaz; demek ki ona eşittir.

Ama A'daki açı D'deki açıya eşittir; bu durumda, kalan C'deki açı F'de kalan açıya eşit olur. **[I.32]**

Öyleyse ABC üçgeni DEF üçgebiyle eşaçılıdır.

Şimdi de C, F açıları dik açıdan küçük olmasın.

Diyorum ki bu durumda da ABC üçgeni DEF üçgeniyle eşaçılı olur.

Çünkü, aynı çizimle, ve aynı yolla BC'nin BG'ye eşit olduğunu kanıtlayabiliriz; böylece C'deki açı BGC açısına eşit olur. **[I.5]**

Ama C'deki açı dik açıdan küçük değildir. O zaman BGC üçgeninde dik açıdan küçük olmayan iki açı vardır: bu olamaz. **[I.17]**

Öyleyse, bir kez daha, ABC açısı DEF açısından farklı olamaz; demek ki ona eşittir.

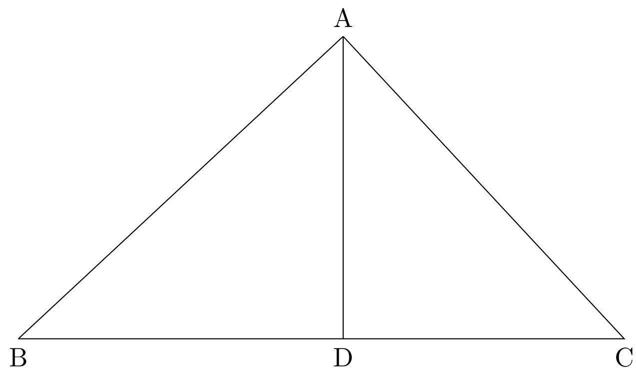
Ama A'daki açı D'deki açıya eşittir; bu durumda, kalan C'deki açı F'de kalan açıya eşit olur. **[I.32]**

Öyleyse ABC üçgeni DEF üçgeniyle eşaçılıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

8. Önerme:

Eğer bir dik üçgende, dik açıdan tabana bir dikme çizilirse, bu dikmenin iki kenarındaki üçgenler hem birbirine hem de tüm üçgene benzer olur.



ABC üçgeni BAC açısı dik olan bir diküçgen olsun, ve A'dan AD doğrusu BC'ye dik çizilsin.

Diyorum ki ABD, ADC üçgenlerinin her biri hem ABC üçgenine ve hem de birbirine benzerdir.

Çünkü, her biri dik olduğu için BAC açısı ADB açısına eşit olduğundan, ve B'deki açı ABC ve ABD üçgenlerinde ortak olduğundan, kalan ACB açısı diğer kalan BAD açısına eşittir; **[I.32]**

öyleyse ACB üçgeni BAD üçgeniyle eşaçılıdır.

Öyleyse, ABC üçgeninde dik açıyı gören BC'nin, ABD üçgeninde dik açıyı gören BA'ya oranı, ABC üçgeninde C açısını gören AB'nin, ABD üçgeninde BAD açısını gören BD'ye oranına, ve iki üçgende ortak olan B açısını gören AC'nin AD'ye oranına eşittir. **[VI.4]**

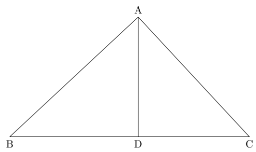
Böylece ABC üçgeni ABD üçgeniyle hem eşaçılıdır, hem de eşit açıların etrafındaki kenarlar orantılıdır.

Öyleyse ABC üçgeni ABD üçgenine benzerdir. **[Tan. VI.1]**

Benzer şekilde, ABC üçgeninin ADC üçgenine benzer olduğunu kanıtlayabiliriz;

öyleyse ABD, ADC üçgenlerinin her biri ABC üçgenine benzerdir.

Sonra diyorum ki, ABD, ADC üçgenleri birbirine de benzerdir.



Çünkü, BDA dik açısı ADC dik açısına eşit olduğundan, ve üstelik BAD açısının diğer C'deki açıya eşit olduğu kanıtlanmış olduğundan, kalan B açısı kalan DAC açısına eşittir; **[I.32]**

bu durumda ABD üçgeni ADC üçgeniyle eşaçılı olur.

Öyleyse, ABD üçgeninde BAD açısını gören BD'nin, ADC üçgeninde BAD açısına eşit olan C açısını gören DA'ya oranı, ABD üçgeninde B açısını gören AD'nin, ADC üçgeninde B açısına eşit DAC açısını gören DC'ye oranına, ve dik açıları gören BA'nın AC'ye oranına eşittir; **[VI.4]**

öyleyse ABD üçgeni ADC üçgenine benzerdir. **[Tan. VI.1]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

Doğal Sonuç: Buradan açıkça görülür ki bir dik üçgende dik köşeden karşı kenara indirilen doğru karşı kenarda oluşan parçalar arasında orta orantılıdır.

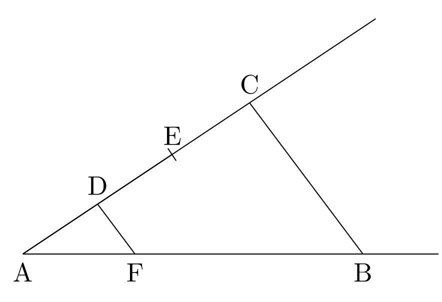
[Burada "orta orantı" terimi "geometrik ortalama" anlamında kullanılmıştır; önermenin şeklini kullanırsak

$$\frac{BD}{AD} = \frac{AD}{DC} \quad \textit{olur.}$$

]

9. Önerme:
Verilen bir doğrudan, önceden belirlenmiş bir parça kesmenin yolu.

[Buradaki "parça" terimi V. Kitap 1. tanımda anlatılmıştır: parça bütünü ölçer.]



Verilen doğru AB olsun; böylece AB'den önceden belirlenmiş bir parça kesmek isteniyor.

Önceden belirlenen parça üçte bir olsun.

AB ile bir açı yapan AC doğrusu çizilsin; AC üzerinde rastgele bir D noktası alınsın, ve AD'ye eşit DE, EC çizilsin. **[I.3]**

BC birleştirilsin, ve D'den ona paralel FD çizilsin. **[I.31]**

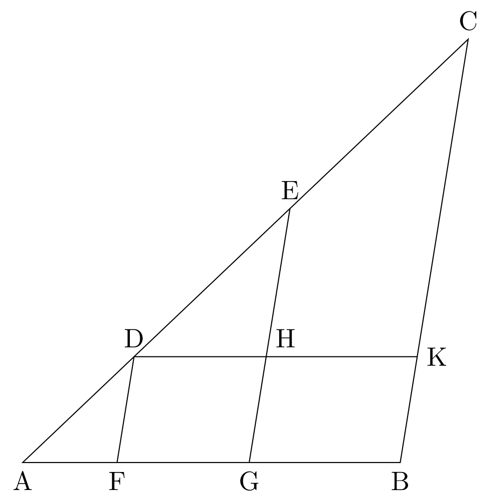
O zaman, ABC üçgeninde BC kenarına paralel FD çizilmiş olduğundan, CD'nin DA'ya oranı, BF'nin FA'ya oranına eşittir. **[VI.2]**

Ama CD, DA'nın iki katıdır; öyleyse BF de FA'nın iki katıdır; bu durumda BA, AF'nin üç katı olur.

Öyleyse verilen AB doğrusundan önceden belirlenen üçte bir parça AF kesilmiştir.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

10. Önerme:
Verilen kesilmemiş bir doğruyu belli oranlarda kesilmiş bir doğruyla aynı oranlarda kesmenin yolu.

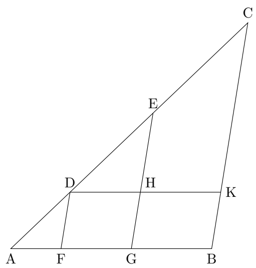


Verilen doğru AB olsun, ve AC doğrusu D, E noktalarında kesilmiş olsun; doğrular bir açı yapacak şekilde yerleştirilmiş olsun; CB birleştirilsin, ve D, E noktalarından BC'ye paralel DF, EG çizilsin, ve D'den AB'ye paralel DHK çizilsin. **[I.31]**

Öyleyse FH, HB şekillerinin her biri bir paralelkenardır; bu durumda DH eşittir FG, ve HK eşittir GB olur. **[I.34]**

Şimdi, HE doğrusu DKC üçgeninin bir kenarı KC'ye paralel çizildiğinden, CE'nin ED'ye oranı, KH'nin HD'ye oranına eşittir. **[VI.2]**

Ama, KH eşittir BG, ve HD eşittir GF'dir;



öyleyse CE'nin ED'ye oranı, BG'nin GF'ye oranına eşittir.

Yine, FD doğrusu AGE üçgeninin bir kenarı GE'ye paralel çizildiğinden, ED'nin DA'ya oranı, GF'nin FA'ya oranına eşittir. **[VI.2]**

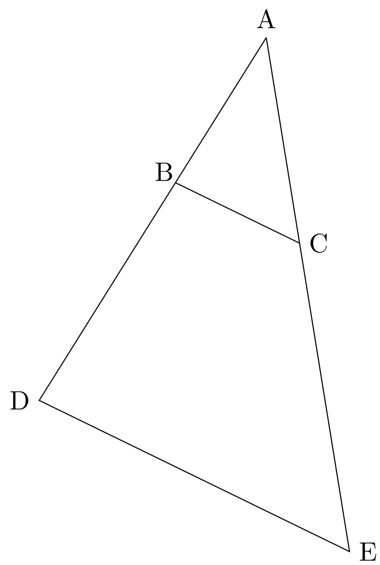
Ama CE'nin ED'ye oranının, BG'nin GF'ye oranına eşit olduğu kanıtlanmıştı; bu durumda CE'nin ED'ye oranı, BG'nin GF'ye oranına, ve ED'nin DA'ya oranı, GF'nin FA'ya oranına eşit olur.

Öyleyse verilen kesilmemiş doğru AB, verilen kesilmiş doğru AC'ye benzer şekilde kesilmiştir.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

11. Önerme:
İki doğru verildiğinde bir üçüncü orantılı bulmanın yolu.

[Yani: İki doğru verildiğinde, üçünün sürekli orantılı olmasını sağlayacak bir üçüncü doğru çizmenin yolu.]



BA, AC verilen iki doğru olsun, ve aralarında bir açı olacak şekilde yerleştirilmiş olsunlar; böylece BA, AC'ye üçüncü orantılı bulunması istenmekte.

Bunlar D, E noktalarına kadar uzatılsın, ve BD eşittir AC olsun; **[I.3]**

BC birleştirilsin, ve D'den ona paralel DE çizilsin. **[I.31]**

BC doğrusu ADE üçgeninin bir kenarı DE'ye paralel çizildiğinden, AB'nin BD'ye oranı, AC'nin CEye oranına eşittir. **[VI.2]**

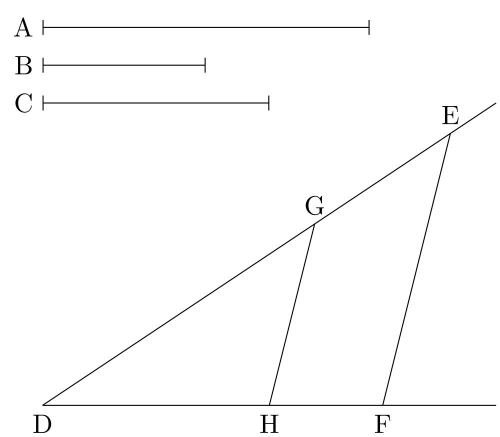
Ama BD eşittir AC;

bu durumda AB'nin AC'ye oranı, AC'nin CE'ye oranına eşit olur.

Öyleyse verilen iki AB, AC doğrusuna üçüncü orantılı CE bulunmuştur.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

12. Önerme:
Verilen üç doğruyla orantılı dördüncü doğruyu bulmanın yolu.



Verilen üç doğru A, B, C olsun; böylece A, B, C'ye orantılı dördüncü bulunması isteniyor.

Rastgele bir EDF açısını çevreleyen DE, DF doğruları çizilsin; DG eşittir A, GE eşittir B, ve ayrıca DH eşittir C olarak çizilsin; GH birleştirilsin, ve E'den ona paralel EF çizilsin. **[I.31]**

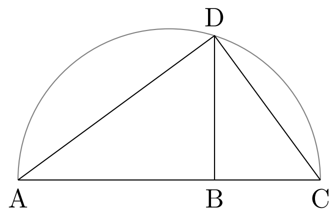
GH doğrusu, DEF üçgeninin kenarlarından biri EF'ye paralel çizildiğinden, DG'nin GE'ye oranı, DH'nin HF'ye oranına eşittir. **[VI.2]**

Ama DG eşittir A, GE eşittir B, ve DH eşittir C; bu durumda A'nın B'ye oranı, C'nin HF'ye oranına eşit olur.

Öyleyse verilen üç doğru A, B, C'ye orantılı dördüncü HF bulunmuş oldu.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

13. Önerme:
Verilen iki doğruya orta orantılı bulmanın yolu



AB, BC verilen iki doğru olsun; böylece AB, BC'ye orta orantılı bulunması isteniyor.

Bunlar bir doğru üzerine yerleştirilsin ve AC üzerine ACD yarıçemberi çizilsin;

B'den AC'ye dik açıyla BD çizilsin, ve AD, DC birleştirilsin.

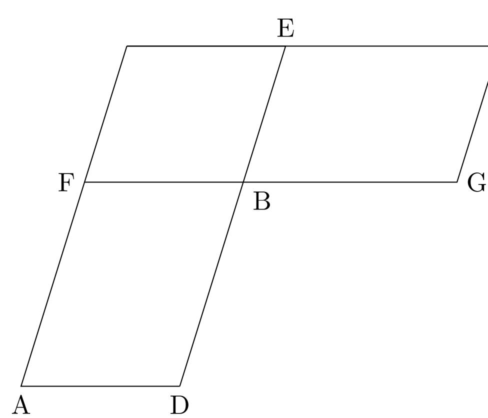
ADC açısı bir yarıçember içinde olduğundan diktir. **[III.31]**

Ve ADC diküçgeninde DB dik açıdan tabana dik açıyla çizildiğinden, tabanın parçaları AB, BC arasında DB orta orantılıdır. **[DS. VI.8]**

Öyleyse verilen iki AB, BC doğrularına orta orantılı DB bulunmuş oldu.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

14. Önerme:
Eşaçılı ve eşit paralelkenarlarda eşit açıları çevreleyen kenarlar karşılıklı ters orantılıdır; ve eşit açıları çevreleyen kenarları karşılıklı ters orantılı olan eşaçılı paralelkenarlar eşittir.



B’deki açıları eşit olan AB, BC paralelkenarları eşit olsun, ve DB, BE bir doğru üzerine yerleştirilsin; bu durumda FB, BG de bir doğru üzerinde olur. **[I.14]**

Diyorum ki AB, BC’de, eşit açıları çevreleyen kenarlar karşılıklı ters orantılıdır, yani DB’nin BE’ye oranı, GB’nin BF’ye oranına eşittir.

Çünkü, FE paralelkenarı tamamlansın; AB paralelkenarı BC paralelkenarına eşit olduğundan, ve FE de başka bir alan olduğundan, AB’nin FE’ye oranı, BC’nin FE’ye oranına eşittir. **[V.7]**

Ama AB’nin FE’ye oranı, DB’nin BE’ye oranıyla aynıdır, **[VI.1]**

ve BC’nin FE’ye oranı, GB’nin BF’ye oranıyla aynıdır. **[VI.1]**

Bu durumda DB’nin BE’ye oranı, GB’nin BF’ye oranına eşit olur. **[V.11]**

Öyleyse AB, BC paralelkenarlarında eşit açıları çevreleyen kenarlar karşılıklı ters orantılıdır.

Şimdi de GB’nin BF’ye oranı DB’nin BE’ye oranına eşit olsun;

diyorum ki AB paralelkenarı BC paralelkenarına eşittir.

Çünkü, DB’nin BE’ye oranı, GB’nin BE’ye oranına eşit olduğundan, ve bu arada DB’nin BE’ye oranı, AB paralelkenarının FE paralelkenara oranı olduğundan, **[VI.1]**

ve GB’nin BF’ye oranı, BC paralelkenarın FE paralelkenara oranı olduğundan, **[VI.1]**

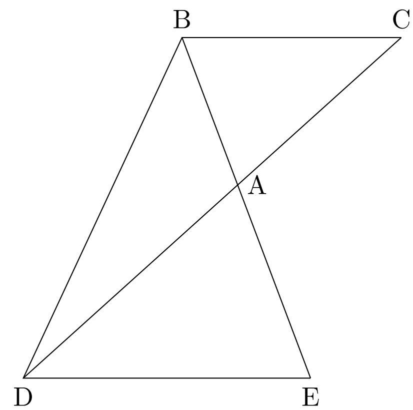
AB’nin FE’ye oranı da BC’nin FE’ye oranına eşit olur. **[V.11]**

Öyleyse AB paralelkenarı BC paralelkenara eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

15. Önerme:

Birer açıları eşit olan eşit üçgenlerde eşit açıları çevreleyen kenarlar karşılıklı ters orantılıdır; ve birer açıları eşit, ve eşit açıları çevreleyen kenarları karşılıklı ters orantılı olan üçgenler eşittir.



ABC, ADE, birer açıları, yani BAC açısı DAE açısına eşit olan, eşit üçgenler olsun;

diyorum ki ABC, ADE üçgenlerinde eşit açıları çevreleyen kenarlar karşılıklı ters orantılıdır, yani CA'nın AD'ye oranı, EA'nın AB'ye oranına eşittir.

Çünkü, öyle yerleştirilsinler ki CA ile AD aynı doğru üzerinde olsun; **[I.14]**

BD birleştirilsin. O zaman, ABC üçgeni, ADE üçgenine eşit olduğundan, ve BAD bir başka alan olduğundan, CAB üçgeninin BAD üçgenine oranı, EAD üçgeninin BAD üçgenine oranına eşittir. **[V.7]**

Ama CAB'nin BAD'ye oranı, CA'nın AD'ye oranıyla aynıdır, **[VI.1]**

ve EAD'nin BAD'ye oranı, EA'nın AB'ye oranıyla aynıdır. **[VI.1]**

Bu durumda CA'nın AD'ye oranı, EA'nın AB'ye oranına eşit olur. **[V.11]**

Öyleyse ABC, ADE üçgenlerinde eşit açıları çevreleyen kenarlar karşılıklı ters orantılıdır.

Şimdi de ABC, ADE üçgenlerinin kenarları karşılıklı ters orantılı olsun, yani EA'nın AB'ye oranı, CA'nin AD'ye oranına eşit olsun;

diyorum ki ABC üçgeni ADE üçgenine eşittir.

Çünkü, eğer BD yeniden birleştirilirse, CA'nın AD'ye oranı, EA'nın AB'ye oranına eşit olduğundan, ve bu arada CA'nın AD'ye oranı, ABC üçgeninin BAD üçgenine oranı olduğundan, ve EA'nın AB'ye oranı, EAD üçgeninin BAD üçgenine oranı olduğundan, **[VI.1]**

ABC üçgeninin BAD üçgenine oranı, EAD üçgeninin BAD üçgenine oranına eşit olur. **[V.11]**

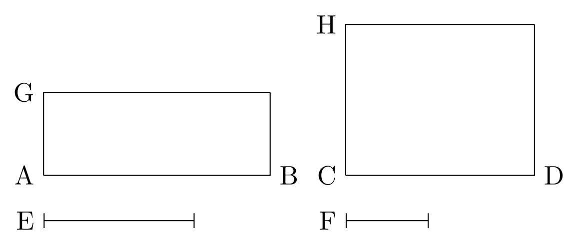
Bu durumda ABC, EAD üçgenlerinin her birinin BAD üçgenine oranı aynı olur.

Öyleyse ABC üçgeni, EAD üçgenine eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

16. Önerme:

Eğer dört doğru orantılıysa, uçtakilerin içerdiği dikdörtgenle ortadakilerin içerdiği dikdörtgen eşittir; ve eğer uçtakilerin içerdiği dikdörtgen ortadakilerin içerdiği dikdörtgene eşitse, bu dört doğru orantılıdır.



Dört doğru AB, CD, E, F orantılı olsun, yani AB'nin CD'ye oranı, E'nin F'ye oranına eşit olsun;

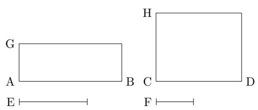
diyorum ki, AB, F'nin içerdiği dikdörtgen, CD, E'nin içerdiği dikdörtgene eşittir.

A, C noktalarından AB, CD doğrularına dik açıyla AG, CH çizilsin, ve AG, F'ye, CH, E'ye eşit olsun.

BG, DH paralelkenarları tamamlansın.

O zaman, AB'nin CD'ye oranı, E'nin F'ye oranına eşit olduğundan, ve bu arada E, CH'ye, ve F, AG'ye eşit olduğundan, AB'nin CD'ye oranı, CH'nin AG'ye oranına eşit olur.

Böylece BG, DH paralelkenarlarında, eşit açıları çevreleyen kenarlar karşılıklı ters orantılıdır.



Ama eşit açıları çevreleyen kenarların karşılıklı ters orantılı olduğu eşaçılı paralelkenarlar eşittir. **[VI.14]**

bu durumda BG paralelkenarı DH paralelkenarına eşittir.

Ve AG, F'ye eşit olduğundan, BG paralelkenarı AB, F dikdörtgenidir; ve E, CH'ye eşit olduğuğundan, DH paralelkenarı CD, E dikdörtgenidir;

öyleyse AB, F'nin içerdiği dikdörtgen, CD, E'nin içerdiği dikdörtgene eşittir.

Şimdi de AB, F'nin içerdiği dikdörtgen, CD, E'nin içerdiği dikdörtgene eşit olsun;

diyorum ki bu dört doğru orantılı olacaktır, yani AB'nin CD'ye oranı, E'nin F'ye oranına eşit olacaktır.

Çünkü, aynı çizimle, AB, F dikdörtgeni, CD, E dikdörtgenine eşit olduğundan, ve AG, F'ye eşit olduğu için AB, F dikdörtgeni BG paralelkenarı olduğundan, ve CH, E'ye eşit olduğu için CD, E dikdörtgeni DH paralelkenarı olduğundan, BG eşittir DH olur.

Ve bunlar eşaçılıdır.

Ama eşaçılı eşit paralelkenarlarda eşit açıları çevreleyen kenarlar karşılıklı ters orantılıdır. **[VI.14]**

Bu durumda AB'nin CD'ye oranı, CH'nin AG'ye oranına eşit olur.

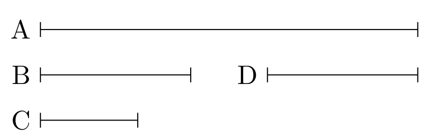
Ama CH, E'ye eşittir ve AG de F'ye;

öyleyse AB'nin CD'ye oranı, E'nin F'ye oranına eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

17. Önerme:

Eğer üç doğru orantılıysa, uçtakilerin içerdiği dikdörtgen ortadakinin üzerindeki kareye eşittir; ve eğer uçtakilerin içerdiği dikdörtgen ortadaki üzerindeki kareye eşitse, bu üç doğru orantılıdır.



Üç doğru A, B, C orantılı olsun, yani A'nın B'ye oranı, B'nin C'ye oranına eşit olsun.

Diyorum ki, A, C'nin içerdiği dikdörtgen, B'nin üzerindeki kareye eşittir.

B'ye eşit D alınsın.

O zaman, A'nın B'ye oranı, B'nin C'ye oranına eşit olduğundan, ve B de D'ye eşit olduğundan, A'nın B'ye oranı, D'nin C'ye oranına eşittir.

Ama, eğer dört doğru orantılıysa, uçtakilerin içerdiği dikdörtgen, ortadakilerin içerdiği dikdörtgene eşittir. **[VI.16]**

Bu durumda A, C'nin içerdiği dikdörtgen, B, D'nin içerdiği dikdörtgene eşittir.

Ama B, D dikdörtgeni, B üzerindeki karedir, çünkü B eşittir D.

Öyleyse, A, C'nin içerdiği dikdörtgen, B üzerindeki kareye eşittir.

Şimdi de A, C'nin içerdiği dikdörtgen, B üzerindeki kareye eşit olsun.

Diyorum ki, A'nın B'ye oranı, B'nin C'ye oranına eşittir.

Çünkü, aynı çizimle, A, C dikdörtgeni, B üzerindeki kareye eşit olduğundan, ve bu arada D, B'ye eşit olduğu için B üzerindeki kare B, D dikdörtgeni olduğundan, A, C dikdörtgeni, B, D dikdörtgenine eşittir.

Ama, uçtakilerin içerdiği dikdörtgen, ortadakillerin içerdiği dikdörtgene eşitse, bu dört doğru orantılıdır. **[VI.16]**

Bu durumda A'nın B'ye oranı, D'nin C'ye oranına eşit olur.

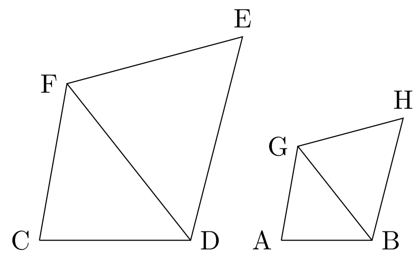
Ama B eşittir D;

öyleyse A'nın B'ye oranı, B'nin C'ye oranına eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

18. Önerme:

Verilen bir doğru üzerine verilen bir düzkenar şekle benzer ve aynı biçimde yerleştirilmiş bir düzkenar şekil çizmenin yolu.



Verilen doğru AB, ve verilen düzkenar şekil CE olsun; böylece AB doğrusu üzerine, CE düzkenar şekline benzer ve aynı biçimde yerleştirilmiş bir düzkenar şekil çizilmesi isteniyor.

DF birleştirilsin, ve AB doğrusunun üzerine, ve üzerindeki A, B noktalarında, C'deki açıya eşit GAB açısı, ve CDF açısına eşit ABG açısı çizilsin. **[I.23]**

Bu durumda kalan CFD açısı AGB açısına eşit olur; **[I.32]**

öyleyse FCD üçgeni, GAB üçgeniyle eşaçılıdır. Bu durumda FD'nin GB'ye oranı, FC'nin GA'ya oranına, ve CD'nin AB'ye oranına eşit olur.

Yine, BG doğrusu üzerine, ve üzerindeki B, G noktalarında, DFE açısına eşit BGH açısı, ve FDE açısına eşit GBH açısı çizilsin. **[I.23]**

Bu durumda E'deki açı, H'de kalan açıya eşit olur; **[I.32]**

öyleyse FDE üçgeni GBH üçgeniyle eşaçılıdır. Bu durumda FD'nin GB'ye oranı, FE'nin GH'ye oranına, ve ED'nin HB'ye oranına eşit olur. **[VI.4]**

Ama FD'nin GB'ye oranının, FC'nin GA'ya oranına, ve CD'nin AB'ye oranına eşit olduğu kanıtlanmıştı;

bu durumda FC'nin AG'ye oranı, CD'nin AB'ye oranına, ve FE'nin GH'ye oranına, ve ayrıca ED'nin HB'ye oranına eşit olur.

Ve, CFD açısı AGB açısına, ve DFE açısı BGH açısına eşit olduğundan, $CFE açısının tamamı,$AGH açısının tamamına eşit olur.

Aynı nedenden dolayı CDE açısı ABH açısına eşittir.

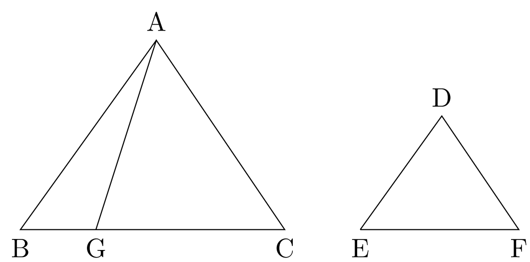
Ve C'deki açı A'daki açıya, ve E'deki açı da H'deki açıya eşittir.

Öyleyse AH şekli CE ile eşaçılıdır, ve eşit açıları çevreleyen kenarları orantılıdır; bu durumda AH düzkenar şekli, CE düzkenar şekliyle benzerdir. **[Tan. VI.1]**

Öyleyse verilen AB doğrusu üzerine, verilen CE düzkenar şekline benzer, ve aynı biçimde AH düzkenar şekli yerleştirilmiş oldu.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

19. Önerme:
Benzer üçgenlerin birbirine oranı karşılıklı kenarların oranının çift kat oranıdır.



ABC, DEF üçgenleri benzer üçgenler olsun, B'deki açı, E'deki açıya eşit olsun, öyle ki AB'nin BC'ye oranı DE'nin EF'ye oranına eşit olsun, yani BC kenarı EF'ye karşılık gelsin. **[Tan. V.11]**

Diyorum ki, ABC üçgeninin DEF üçgenine oranı, BC'nin EF'ye oranının çift oranıdır.

Çünkü, BC'nin EF'ye oranı, EF'nin BG'ye oranına eşit olacak şekilde, ve BC, EF'ye üçüncü orantılı olan BG çizilsin, **[VI.11]**

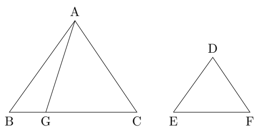
ve AG birleştirilsin.

O zaman, AB'nin BC'ye oranı, DE'nin EF'ye oranına eşit olduğundan, değiştirilmiş oran olarak, AB'nin DE'ye oranı, BC'nin EF'ye oranına eşit olur. **[V.16]**

Ama BC'nin EF'ye oranı, EF'nin BG'ye oranına eşittir; bu durumda AB'nin DE'ye oranı, EF'nin BG'ye oranına eşittir. **[V.11]**

Öyleyse ABG, DEF üçgenlerinde, eşit açıları çevreleyen kenarlar karşılıklı ters orantılıdır.

Ama bir açısı bir açısına eşit olan, ve eşit açıları çevreleyen kenarları karşılıklı ters orantılı olan üçgenler eşittir. **[VI.15]**



bu durumda ABG üçgeniyle DEF üçgeni eşittir.

Şimdi, BC'nin EF'ye oranı, EF'nin BG'ye oranına eşit olduğundan, ve eğer üç doğru orantılıysa, birincinin üçüncüye oranı, birincinin ikinciye oranının çift oranı olduğundan, **[Tan. V.9]**

BC'nin BG'ye oranı, CB'nin EF'ye oranının çift oranıdır.

Ama CB'nin BG'ye oranı, ABC üçgeninin DEF üçgenine oranına eşittir, **[VI.1]**

öyleyse ABC üçgeninin ABG üçgenine oranı da BC'nin EF'ye oranının çift oranıdır.

Ama ABG üçgeni DEF üçgenine eşittir;

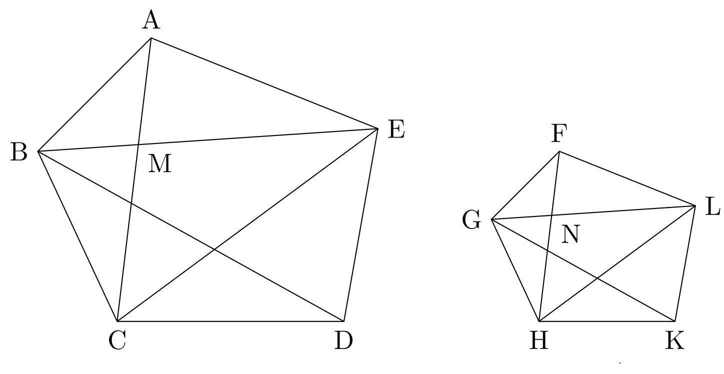
öyleyse ABC üçgeninin DEF üçgenine oranı, BC'nin EF'ye oranının çift oranıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

Doğal Sonuç: Buradan açıkça görülür ki, eğer üç doğru orantılıysa, birincinin üçüncüye oranı, birinci üzerine çizilen bir şeklin, ikinci üzerine aynı biçimde çizilen benzer şekle oranına eşittir.

20. Önerme:

Benzer çokgenler benzer üçgenlere ayrılır; bu üçgenlerin sayıları aynıdır ve oranları bütünlerin oranlarına eşittir, ve çokgenin çokgene oranı karşılık gelen kenarların oranının çift kat oranıdır.



ABCDE, FGHKL benzer çokgenler olsun, ve AB kenarı FG'ye karşılık gelsin.

Diyorum ki, ABCDE, FGHKL çokgenleri benzer üçgenlere ayrılır, ve bu üçgenlerin sayısı eşittir, ve üçgenlerin oranları bütünlerin oranına eşittir, ve ABCDE çokgeninin FGHKL çokgenine oranı, AB′nin FG′ye oranının çift oranıdır.

BE, EC, GL, LH birleştirilsin.

Şimdi, ABCDE çokgeni, FGHKL çokgenine benzer olduğundan, BAE açısı GFL açısına eşittir, ve BA′nın AE′ye oranı, GF′nin FL′ye oranına eşittir. **[Tan. VI.1]**

O zaman, ABE, FGL üçgenlerinin birer açıları eşit ve eşit açıları çevreleyen kenarlar orantılı olduğundan, ABE üçgeniyle FGL üçgeni eşaçılıdır; **[VI.6]**

ve bunlar aynı zamanda benzerdir de; **[VI.4, ve Tan. VI.1]**

bu durumda ABE açısı FGL açısına eşit olur.

Ama çokgenlerin benzerliğinden, ABC açısının tamamı FGH açısının tamamına eşittir; bu durumda kalan EBC açısı kalan LGH açısına eşit olur.

Ve ABE, FGL üçgenlerinin benzerliğinden, EB′nin BA′ya oranı, LG′nin GF′ye oranına, ve dahası, çokgenlerin benzerliğinden, AB′nin BC′ye oranı, FG′nin GH′ye oranına eşit olduğundan;

eşit dış oranlar olarak, EB′nin BC′ye oranı, LG′nin GH′ye oranına eşittir; **[V.22]**

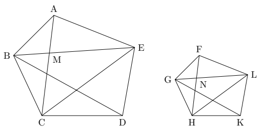
yani eşit EBC, LGH açılarını çevreleyen kenarlar orantılıdır; bu durumda EBC üçgeni LGH üçgeniyle eşaçılıdır, **[VI.6]**

böylece EBC üçgeni LGH üçgeniyle benzerdir de. **[VI.4, ve Tan. VI.1]**

Aynı nedenden dolayı ECD üçgeni de LHK üçgeniyle benzerdir. Böylece benzer ABCDE, FGHKL çokgenleri eşit sayıda benzer üçgenlere bölünmüş oldu.

Diyorum ki bunların oranları, bütünlerin oranlarıyla aynıdır, öyle ki üçgenlerin orantısında ABE, EBC, ECD öncül, FGL, LGH, LHK ardıl olur, ve ABCDE çokgeninin FGHKL çokgenine oranı, karşılıklı kenarların oranının,yani AB′nin FG′ye oranının, çift oranıdır.

Çünkü, AC, FH birleştirilsin; o zaman, çokgenlerin benzerliğinden, ABC açısı FGH açısına eşit, ve AB′nin BC′ye oranı, FG′nin GH′ye oranına eşit olduğundan, ABC üçgeni FGH üçgeniyle aşaçılıdır; **[VI.6]**



bu durumda BAC açısı GFH açısına, ve BCA açısı GHF açısına eşit olur.

Ve BAM açısı GFN açısına, ve ABM açısı da FGN açısına eşit olduğundan, kalan AMB açısı kalan FNG açısına eşit olur; **[I.32]**

böylece ABM üçgeni, FGN üçgeniyle eşaçılıdır.

Benzer şekilde, BMC üçgeninin GNH üçgeniyle eşaçılı olduğunu kanıtlayabiliriz.

Bu durumda, AM'nin MB'ye oranı, FN'nin NG'ye oranına, ve BM'nin MC'ye oranı, GN'nin NH'ye oranına eşit olur; ayrıca bu yüzden, eşit dış oranlar olarak AM'nin MC'ye oranı, FN'nin NH'ye oranına eşit olur.

Ama, AM'nin MC'ye oranı, ABM üçgeninin MBC üçgenine oranına, ve AME üçgeninin EMC üçgenine oranına eşittir, çünkü bunların birbirine oranı tabanlarının oranına eşittir. **[VI.1]**

Öyleyse, öncüllerden birinin, ardıllardan birine oranı, öncüllerin tümünün, ardılların tümüne oranına eşit olduğundan, **[V.12]**

AMB üçgeninin BMC üçgenine oranı, ABE üçgeninin CBE üçgenine oranına eşit olur.

Ama, AMB'nin BMC'ye oranı, AM'nin MC'ye oranına eşittir; öyleyse AM'nin MC'ye oranı, ABE üçgeninin EBC üçgenine oranına eşittir.

Aynı nedenden dolayı, FN'nin NH'ye oranı, FGL üçgeninin GLH üçgenine oranına eşittir.

Ve AM'nin MC'ye oranı, FN'nin NH'ye oranına eşit olduğundan, ABE üçgeninin BEC üçgenine oranı, FGL üçgeninin GLH üçgenine oranına eşittir; ve değiştirilmiş oranlar olarak, ABE üçgeninin FGL üçgenine oranı, BEC üçgeninin GLH üçgenine oranına eşit olur.

Benzer şekilde, eğer BD, GK birleştirilirse, BEC üçgeninin LGH üçgenine oranının, ECD üçgeninin LHK üçgenine oranına eşit olduğunu kanıtlayabiliriz.

Ve, ABE üçgeninin FGL üçgenine oranı, EBC'nin LGH'ye oranına, ve ayrıca ECD'nin LHK'ye oranına eşit olduğundan, ve öncüllerden birininin ardıllardan birine oranı, öncüllerin tümünün ardılların tümüne oranına eşit olduğundan, **[V.12]**

ABE üçgeninin FGL üçgenine oranı, $ABCDE$ çokgeninin $FGHKL$ çokgenine oranına eşittir.

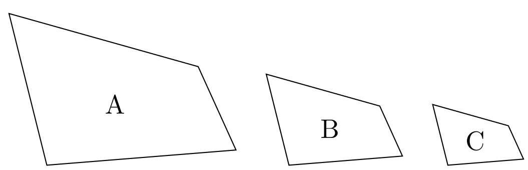
Ama ABE üçgeninin FGL üçgenine oranı, AB kenarının karşı gelen FG kenarına oranının çift oranıdır; çünkü benzer üçgenlerin oranı karşılıklı kenarların oranının çift oranıdır. **[VI.19]**

Öyleyse $ABCDE$ çokgeninin $FGHKL$ çokgenine oranı, karşılıklı kenarlar AB'nin FL'ye oranının çift oranıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

Doğal Sonuç: Dörtgenlerin oranının karşılıklı kenarların oranlarının çift oranı olduğu da benzer şekilde gösterilebilir. Ve bu sonuç üçgenler için de gösterilmişti; öyleyse, genel olarak, benzer düzkenar şekillerin birbirine oranı karşılıklı kenarların oranlarının çift oranıdır.

21. Önerme:
Aynı düzkenar şekle benzer şekiller birbirlerine de benzerdir.



A, B düzkenar şekillerinin her biri C'ye benzer olsun.

Diyorum ki A ve B de benzerdir.

Çünkü, A, C'ye benzer olduğundan, onunla eşaçılıdır ve eşit açıları çevreleyen kenarlar orantılıdır. **[Tan. VI.1]**

Yine, B, C'ye benzer olduğundan, onunla eşaçılıdır ve eşit açıları çevreleyen kenarlar orantılıdır.

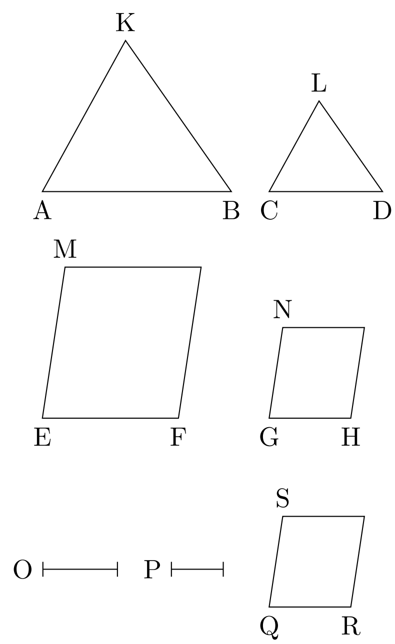
Bu durumda, A, B şekillerinin her biri C ile eşaçılıdır, ve C ile eşit açıları çevreleyen kenarları orantılıdır;

öyleyse A ve B benzerdir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

22. Önerme:

Eğer dört doğru orantılıysa, üzerlerine aynı biçimde çizilen benzer düzkenar şekiller de orantılı olacaktır; ve eğer üzerlerine aynı biçimde çizilen benzer düzkenar şekiller orantılıysa, doğruların kendileri de orantılı olacaktır.



AB, CD, EF, GH doğruları orantılı olsun, yani AB'nin CD'ye oranı, EF'nin GH'ye oranına eşit olsun, ve AB, CD üzerine KAB, LCD benzer düzkenar şekilleri aynı biçimde çizilmiş olsun, ve EF, GH üzerine MF, NH benzer düzkenar şekilleri çizilmiş olsun.

Diyorum ki, KAB'nin LCD'ye oranı, MF'nin NH'ye oranına eşittir.

Çünkü, AB, CD'ye üçüncü orantıtılı O, ve EF, GH'ye üçüncü orantılı P alınsın. **[VI.11]**

O zaman, AB'nin CD'ye oranı, EF'nin GH'ye oranına, ve CD'nin O'ya oranı, GH'nin P'ye oranına eşit olduğundan, eşit dış oranlar olarak AB'nin O'ya oranı, EF'nin P'ye oranına eşit olur. **[V.22]**

Ama AB'nin O'ya oranı, KAB'nin LCD'ye oranına, ve EF'nin P'ye oranı, MF'nin NH'ye oranına eşittir; **[DS. VI.19]**

bu durumda KAB'nin LCD'ye oranı, MF'nin NH'ye oranına eşit olur. **[V.11]**

Şimdi de MF'nin NH'ye oranı, KAB'nin LCD'ye oranına eşit olsun.

Diyorum ki, AB'nin CD'ye oranı, EF'nin GH'ye oranına eşittir.

Çünkü, eğer EF'nin GH'ye oranı, AB'nin CD'ye oranına eşit değilse, EF'nin QR'ye oranı, AB'nin CD'ye oranına eşit olsun, **[VI.12]**

ve QR üzerine MF, NH'den herhangi birine benzer, ve aynı biçimde yerleştirilmiş, SR düzkenar şekli çizilsin. **[VI.18]**

O zaman, AB'nin CD'ye oranı, EF'nin QR'ye oranına eşit olduğundan, ve AB, CD üzerine benzer ve ayni biçimde yerleştirilmiş KAB, LCD şekilleri çizilmiş olduğundan, ve EF, QR üzerinde de benzer ve aynı biçimde yerleştirilmiş MF, SR bulunduğundan,

KAB'nin LCD'ye oranı, MF'nin SR'ye oranına eşittir.

Ama varsayıma göre de KAB'nin LCD'ye oranı, MF'nin NH'ye oranına eşittir;

bu durumda MF'nin SR'ye oranı, MF'nin NH'ye oranına eşit olur. **[V.11]**

Böylece MF'nin NH, SR şekillerinin herbirine oranı aynı olur; öyleyse NH eşittir SR. **[V.9]**

Ama bunlar benzer, ve aynı biçimde yerleştirilmişlerdi; öyleyse GH eşittir QR.

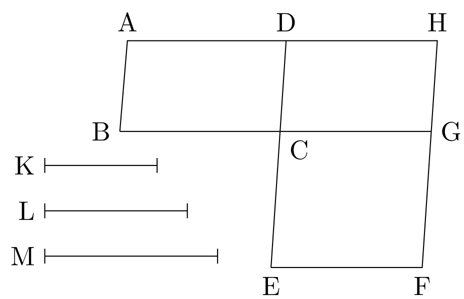
Ve, AB'nin CD'ye oranı, EF'nin QR'ye oranına eşit olduğundan, ve bu arada QR eşittir GH olduğundan,

AB'nin CD'ye oranı, EF'nin GH'ye oranına eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

23. Önerme:
Eşaçılı paralelkenarların birbirine oranı kenarlarının oranlarının bileşik oranına eşittir.

[Öklid "bileşik oran" tanımını hiçbir yerde yapmaz. Bu önermenin kanıtı içindeki kullanıma bakarak oranların bileşik oranının o oranların çarpımı olduğunu görebiliriz. Ama oranların çarpımından söz edilmediği için bileşik oran kavramını eşit dış oranlar kavramını kullanılarak tanımlayabiliriz. Buna göre a'nın b'ye oranıyla b'nin c'ye oranının bileşik oranı a'nın c'ye oranıdır. Aynı şekilde eğer $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$ ve $\frac{b}{c} = \frac{g}{h}$ ise, e'nin f'ye oranıyla g'nin h'ye oranının bileşik oranı a'nin c'ye oranıdır.]



AC, CF eşaçılı paralelkenarlar olsunlar, ve BCD açısı ECG açısına eşit olsun.

Diyorum ki, AC paralelkenarının CF paralelkenarına oranı, kenarlarının oranlarının bileşik oranına eşittir.

Çünkü, BC ile CG aynı doğru üzerinde olacak şekilde yerleştirilsinler; o zaman DC ile CE de aynı doğru üzerinde olur.

DG paralelkenarı tamamlansın; bir K doğrusu alınsın, ve BC'nin CG'ye oranının K'nin L'ye oranına, ve DC'nin CE'ye oranının L'nin M'ye oranına eşit olması sağlansın. **[VI.12]**

O zaman, K'nin L'ye, ve L'nin M'ye oranları kenarların oranlarıyla aynıdır, yani BC'nin CG'ye oranı, ve DC'nin CE'ye oranıyla.

Ama K'nin M'ye oranı, K'nin L'ye oranıyla L'nin M'ye oranının bileşik oranıdır;

yani K'nin M'ye oranı, kenarların oranlarının bileşik oranıdır.

Şimdi, BC'nin CG'ye oranı, AC paralelkenarının CH paralelkenarına oranına eşittir, **[VI.1]** bu arada BC'nin CG'e oranı, K'nin L'ye oranına eşittir.

Öyleyse, K'nin L'ye oranı, AC'nin CH'ye oranına eşit olur. **[V.11]**

Yine, DC'nin CE'ye oranı, CH paralekenarının CF paralelkenarına oranına eşittir, **[VI.1]**

bu arada DC'nin CE'ye oranı, L'nin M'ye oranına eşittir.

Öyleyse, L'nin M'ye oranı, CH paralelkenarının CF paralelkenarına oranına eşit olur. **[V.11]**

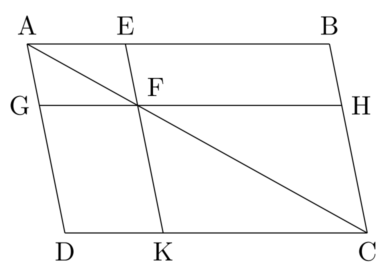
O zaman, K'nin L'ye oranının, AC paralelkenarının CH paralelkenarına oranına, ve L'nin M'ye oranının, CH paralelkenarının CF paralelkenarına oranına eşit olduğu kanıtlanmış olduğundan,

eşit dış oranlar olarak K'nin M'ye oranı, AC paralelkenarının CF paralekenarına oranına eşlittir.

Ama K'nin M'ye oranı, kenarların oranlarının bileşik oranıdır; bu durumda AC'nin CF'ye oranı da kenarların oranının bileşik oranı olur.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

24. Önerme:
Bir paralelkenarda köşegen etrafındaki paralelkenarlar hem birbirlerine hem de paralelkenarın tamamına benzerdir.

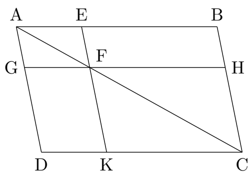


ABCD bir paralelkenar, ve AC köşegeni olsun; AC köşegeni etrafındaki paralelkenarlar EG, HK olsun.

Diyorum ki, EG, HK paralelkenarlarının her biri hem ABCD paralelkenarına hem de birbirine benzerdir.

Çünkü, EF doğrusu, ABC üçgeninin kenarlarından biri BC'ye paralel çizildiğinden, BE'nin EA'ya oranı, CF'nin FA'ya oranına eşittir. **[VI.2]**

Yine, FG doğrusu, ACD üçgeninin kenarların biri CD'ye paralel çizildiğinden, CF'nin FA'ya oranı, DG'nin GA'ya oranına eşittir. **[VI.2]**



Ama CF'nin FA'ya oranının BE'nin EA'ya oranına eşit olduğu kanıtlanmıştı; bu durumda BE'nin EA'ya oranı, DG'nin GA'ya oranına eşit olur, birleşik oran olarak, BA'nın AE'ye oranı DA'nın AG'ye oranına eşit olur, **[V.18]**

ve değiştirilmiş oran olarak BA'nın AD'ye oranı, EA'nın AG'ye oranına eşit olur. **[V.16]**

Böylece ABCD, EG paralelkenarlarında, ortak açı BAD'yi çevreleyen kenarlar orantılıdır.

Ve, GF, DC'ye paralel olduğundan, AFG açısı DCA açısına eşittir; ve ADC, AGF üçgenlerinde DAC açısı ortaktır; bu durumda ADC üçgeni AGF üçgeniyle eşaçılıdır.

Aynı nedenden dolayı, ACB üçgeni de AFE üçgeniyle eşaçılıdır, ve ABCD paralelkenarı EG paralelkenarıyla eşaçılıdır.

Bu durumda, AD'nin DC'ye oranı, AG'nin GF'ye oranına,
DC'nin CA'ye oranı, GF'nın FA'ya oranına,
AC'nin CB'ye oranı, AF'nin FE'ye oranına,
ve ayrıca CB'nin BA'ya oranı, FE'nin EA'ya oranına eşit olur.

Ve, DC'nin CA'ya oranının, GF'nin FA'ya oranına,
ve AC'nin CB'ye oranının, AF'nin FE'ye oranına eşit olduğu kanıtlanmış olduğundan,

eşit dış oranlar olarak DC'nin CB'ye oranı, GF'nin FE'ye oranına eşittir. **[V.22]**

Böylece ABCD, EG paralelkenarlarında, eşit açıları çevreleyen kenarlar orantılıdır; öyleyse ABCD paralelkenarı, EG paralelkenarıyla benzerdir. **[Tan. VI.1]**

Aynı nedenden dolayı, ABCD paralelkenarı, KH paralelkenarına da benzerdir; bu durumda EG, HK paralelkenarlarının her biri ABCD paralekenarına benzerdir.

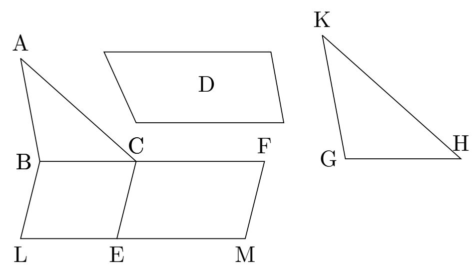
Ama aynı düzkenar şekle benzer olan şekiller birbirine de benzer; **[VI.21]**

öyleyse EG paralelkenarı, HK paralelkenarına benzerdir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

25. Önerme:

Verilen bir düzkenar şekle benzer ve verilen başka bir düzkenar şekle eşit tek bir şekil çizmenin yolu.



Çizilecek şeklin benzer olmak zorunda olduğu verilen düzkenar şekil ABC olsun, ve D de eşit olacağı şekil olsun.

BC üzerine ABC üçgenine eşit BE paralelkenarı çizilsin, **[I.44]**

ve CE üzerine, CBL açısına eşit FCE açısı içine, D'ye eşit CM paralelkenarı çizilsin. **[I.45]**

Bu durumda, BC, CF ile, ve LE, EM ile aynı doğru üzerinde olur.

Şimdi, BC, CF'nin orta orantılısı olarak GH alınsın, **[VI.13]**

ve ABC'ye benzer ve aynı biçimde yerleştirilmiş KGH çizilsin. **[VI.18]**

O zaman, BC'nin GH'ye oranı, GH'nin CF'ye oranına eşit olduğundan, ve eğer üç doğru orantılıysa, birincinin üçüncüye oranı, birinci üzerine çizilen şeklin ikinci üzerine çizilen benzer ve aynı biçimde çizilmiş şekle oranına eşit olduğundan, **[DS. VI.19]**

BC'nin CF'ye oranı, ABC üçgeninin KGH üçgenine oranına eşittir.

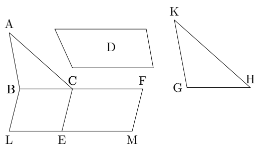
Ama BC'nin CF'ye oranı, BE paralelkenarının EF paralelkenarına oranına eşittir. **[VI.1]**

Öyleyse ABC üçgeninin KGH üçgenine oranı da, BE paralelkenarının EF paralelkenarına oranına eşittir;

bu durumda değiştirilmiş oranlar olarak, ABC üçgeninin BE paralelkenarına oranı, KGH üçgeninin EF paralelkenarına oranına eşit olur. **[V.16]**

Ama ABC üçgeni BE paralelkenarına eşittir; bu durumda KGH üçgeni de EF paralelkenarına eşit olur.

Ama EF paralelkenarı D'ye eşittir;



bu durumda KGH de D'ye eşit olur.

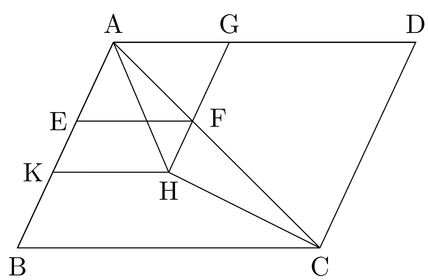
Ve KGH ile ABC benzerdir.

Öyleyse verilen düzkenar ABC şekline benzer, ve aynı biçimde yerleştirilmiş, ve verilen diğer düzkenar şekil D'ye eşit KGH şekli çizilmiş oldu.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

26. Önerme:

Eğer bir paralelkenardan ona benzer, aynı biçimde yerleştirilmiş ve bir ortak açıya sahip bir paralelkenar çıkarılırsa, çıkarılan paralelkenar bütününkiyle aynı köşegen etrafındadır.



$ABCD$ paralelkenarından, ona benzer, aynı biçimde yerleştirilmiş ve DAB ortak açısına sahip AF paralelkenarı çıkarılsın;

Diyorum ki $ABCD$ ve AF aynı köşegen etrafındadır.

Çünkü, öyle olmadığını varsayalım, ve mümkünse köşegen AHC olsun, ve GF doğrusu H'ye kadar uzatılsın, H noktasından AD, BC doğrularından birine HK paraleli çizilsin. **[I.31]**

O zaman, $ABCD$ ile KG aynı köşegen etrafında olduklarından, DA'nın AB'ye oranı, GA'nın AK'ye oranına eşittir. **[VI.24]**

Ama $ABCD$ ile EG'nin benzerliklerinden dolayı, DA'nın AB'ye oranı, GA'nın AE'ye oranına da eşittir;

bu durumda GA'nın AK'ye oranı, GA'nın AE'ye oranına eşit olur. **[V.11]**

Öyleyse GA'nın AK, AE doğrularından her birine oranı aynıdır.

bu durumda AE eşittir AK olur, **[V.9]**

yani küçük olan büyük olana eşit: bu olamaz.

Bu yüzden ABCD paralelkenarı AF'ninkinden başka bir köşegen etrafında olamaz.

Öyleyse ABCD paralelkenarı AF paralelkenarıyla aynı köşegen etrafındadır.

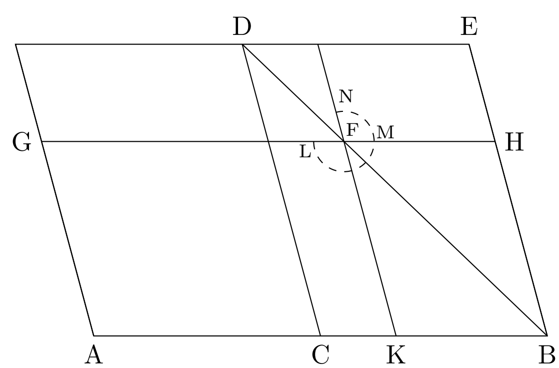
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

27. Önerme:

Bir doğru üzerine çizilen, ve doğrunun yarısı üzerine çizilmiş bir paralelkenara benzer ve aynı biçimde çizilmiş paralelkenarlar kadar tümden eksik kalan bütün paralelkenarlar arasında en büyüğü, doğrunun yarısı üzerine çizilen ve eksik kaldığı paralelkenara benzer olan paralelkenardır.

[DB paralelkenarı seçilip sabitlendikten sonra DB köşegeni üzerindeki her F noktası için çizilen AF paralelkenarları arasında alanı en büyük olan AD paralelkenarıdır.

Her F noktası için "tüm" denince AH paralelkenarı düşünülür. AF paralelkenarı tümden FB paralelkenarı kadar eksiktir.]

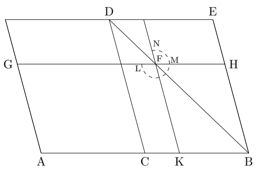


AB bir doğru olsun ve C'de ikiye bölünmüş olsun; AB'nin yarısı üzerine, yani CB üzerine çizilmiş bir DB paralelkenarı kadar tümden eksik kalan AD paralelkenarı AB üzerine çizilsin.

Diyorum ki, AB üzerine çizilen, ve tümden DB'ye benzer ve aynı biçimde çizilmiş paralelkenarlar kadar eksik olan paralelkenarlar arasında en büyüğü AD'dir.

Çünkü, DB'ye benzer ve aynı şekilde çizilmiş FB paralelkenarı kadar tümden eksik olan AF paralelkenarı AB üzerine çizilsin.

Diyorum ki, AD, AF'den büyüktür.



Çünkü, DB paralelkenarı FB paralelkenarına benzer olduğu için, aynı köşegen etrafındalar. **[VI.26]**

Köşegenleri DB olsun ve çizilsin, ve şekil tamamlansın.

O zaman, CF, FE'ye eşit olduğundan, **[I.43]**

ve FB ortak olduğundan, CH'nin tamamı, KE'nin tamamına eşittir.

Ama AC eşittir CB olduğundan, CH de CG'ye eşittir. **[I.36]**

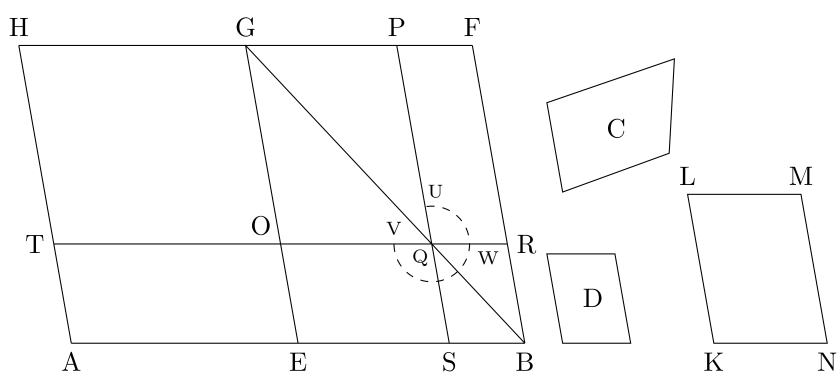
Bu durumda GC eşittir EK olur. Bunlara CF eklensin;

O zaman AF'nin tamamı LMN kadranına eşit olur;

Öyleyse DB paralelkenarı, yani AD paralelkenarı, AF paralelkenarından büyüktür.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

28. Önerme:
Bir doğru üzerine, verilen bir düzkenar şekle eşit, ve verilen bir paralelkenara benzer bir paralelkenar kadar tümden eksik, bir paralelkenar çizmenin yolu; böylece verilen düzkenar şekil, verilen paralelkenara benzer ve doğrunun yarısı üzerine çizilen paralelkenardan büyük olmamalıdır.



Verilen doğru AB olsun. C de, AB'nin yarısı üzerine ve fark şekline benzer çizilecek paralelkenardan büyük olmamak şartıyla, AB üzerine çizilecek paralelkenarın eşit olacağı düzkenar şekil olsun. D de fark paralelkenarının benzer olacağı paralelkenar olsun.

Böylece, AB üzerine, verilen C düzkenar şekle eşit, ve tümden D'ye benzer bir paralelkenar kadar eksik olan bir paralelkenar çizilmesi isteniyor.

AB doğrusu E'de ikiye bölünsün, ve EB üzerine D'ye benzer ve aynı biçimde yerleştirilmiş $EBFG$ paralelkenarı çizilsin, **[VI.18]**

ve AG paralelkenarı tamamlansın.

Eğer AG, C'ye eşitse, istenen çizim yapılmış olacaktır; çünkü AB üzerine C'ye eşit, ve bütünden D'ye benzer GB paralelkenarı kadar eksik, AG paralelkenarı çizilmiş oldu.

Ama eşit değilse, HE, C'den büyük olsun.

Şimdi HE eşittir GB; öyleyse GB de C'den büyüktür.

D'ye benzer ve aynı biçimde yerleştirilmiş, ve GB'nin C'den fazlalığına eşit olan $KLMN$ çizilsin. **[VI.25]**

Ama D ile GB benzerdir; öyleyse KM de GB'ye benzerdir. **[VI.21]**

O zaman, KL, GE'ye, ve LM, GF'ye karşılık gelsin.

Şimdi, GB paralelkenarı C, KM'ye eşit olduğundan, GB paralelkenarı KM'den büyüktür; bu durumda GE, KL'den, ve GF, LM'den büyük olur.

KL'ye eşit GO, ve LM'ye eşit GP çizilsin; ve $OGPQ$ paralelkenarı tamamlansın; o zaman bu paralelkenar KM'ye eşittir.

Öyleyse GQ da GB'ye benzerdir; **[VI.21]**

bu durumda GQ ve GB aynı köşegen etrafındadır. **[VI.26]**

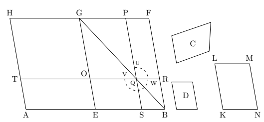
Köşegenleri GQB olsun ve şekil tamamlansın. O zaman, BG paralelkenarı C, KM'ye eşit olduğundan, ve içerde GQ eşittir KM olduğundan, kalan UWV kadranı, kalan C'ye eşittir.

Ve PR, OS'ye eşit olduğundan, bunlara QB eklensin; bu durumda PB eşittir OB olur.

Ama AE kenarı EB kenarına eşit olduğundan, OB de TE'ye eşit olur; **[I.36]**

bu durumda TE de PB'ye eşittir.

Bunlara OS eklensin; o zaman TS'nin tamamı, VWU kadranına eşit olur.



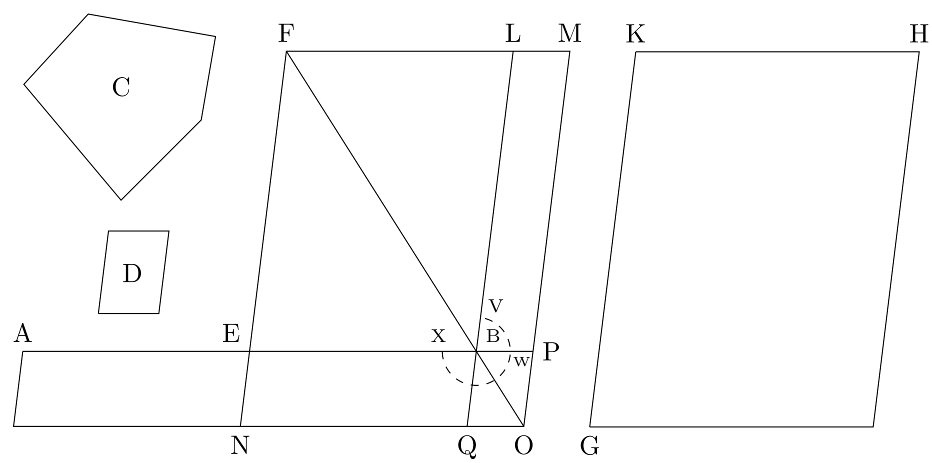
Ama VWU kadranının C'ye eşit olduğu kanıtlanmıştı; demek ki TS de C'ye eşittir.

Öyleyse verilen AB doğrusu üzerine, verilen C düzkenar şekle eşit, ve tümden D'ye benzer QB paralelkenarı kadar eksik olan TS paralelkenarı çizilmiş oldu.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

29. Önerme:
Bir doğrunun üzerine, taşan kısım verilen bir paralelkenara benzer olacak şekilde, verilen bir düzkenar şekle eşit paralelkenar çizmenin yolu.

[Bir doğruyu uzatıp üzerine öyle bir paralelkenar çizilecek ki alanı verilen bir çokgenin alanına eşit olacak ve uzatılan parça üzerinde kalan "taşan" paralelkenar verilen bir paralelkenara benzer olacak.]



Verilen doğru AB olsun, ve AB üzerine çizilecek paralelkenarın eşit olacağı düzkenar şekil C olsun, ve D de taşan kısmın benzer olması istenen paralelkenar olsun.

Böylece, AB üzerine, taşan kısmı D paralelkenarına benzer olan, C düzkenar şekline eşit bir paralelkenar çizilmesi isteniyor.

AB doğrusu E'de ikiye bölünsün; EB üzerine D'ye benzer ve aynı biçimde yerleştirilmiş BF paralelkenarı çizilsin;

ve BF, C toplamına eşit, D'ye benzer ve aynı biçimde yerleştirilmiş GH paralelkenarı çizilsin. **[VI.25]**

KH, FL'ye, ve KG, FE'ye karşılık gelsin

Şimdi, GH, FB'den büyük olduğundan, KH de FL'den, ve KG, FE'den büyüktür.

FL, FE uzatılsın, FLM, KH'ye, ve FEN, KG'ye eşit olsun, ve MN paralelkenarı tamamlansın.

Bu durumda MN paralelkenarı, D'ye hem eşit hem de benzer olur.

Ama GH, EL'ye benzerdir; öyleyse MN de EL'ye benzerdir. **[VI.21]**

Bu durumda EL ve MN aynı köşegen etrafındadır. **[VI.26]**

Köşegenleri FO çizilsin, ve şekil tamamlansın.

GH paralelkenarı EL,C'ye eşit olduğundan, ve bu arada GH eşittir MN olduğundan, MN de EL, C'ye eşit olur.

Bunlardan EL çıkarılsın; o zaman kalan *XWV* kadranı C'ye eşittir.

Şimdi, AE eşittir EB olduğundan, AN de NB'ye eşit olur, **[I.36]**

yani LP'ye. **[I.43]**

Bunlara EO eklensin; o zaman AO'nun tamamı *VWX* kadranına eşit olur.

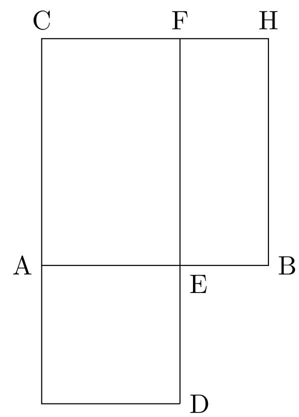
Ama *VWX* kadranı C'ye eşittir; bu durumda AO eşittir C olur.

Böylece, PQ, EL'ye benzer olduğundan, **[VI.24]**

verilen AB doğrusu üzerine, taşan QP paralelkenarı D'ye benzer olan, ve kendisi verilen C düzkenar şekline eşit AO paralelkenarı çizilmiş oldu.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

30. Önerme:
Verilen bir doğruyu uç ve orta oranda kesmenin yolu.



Verilen sonlu doğru AB olsun; böylece AB'nin uç ve orta oranda kesilmesi isteniyor.

AB üzerine BC karesi çizilsin; AC üzerine, taşan kısmı BC'ye benzer AD şekli olan, BC'ye eşit CD paralelkenarı çizilsin. **[VI.29]**

Şimdi, BC bir karedir; bu durumda AD de karedir.

Ve, BC eşittir CD olduğundan, bunlardan CE çıkarılsın; bu durumda kalan BF, kalan AD'ye eşit olur.

Ama aynı zamanda onunla eşaçılıdır da; bu nedenle BF, AD'de eşit açıları çevreleyen kenarlar karşılıklı ters orantılıdır; **[VI.14]**

bu durumda FE'nin ED'ye oranı, AE'nin EB'ye oranına eşit olur.

Ama FE eşittir AB, ve ED eşittir AE.

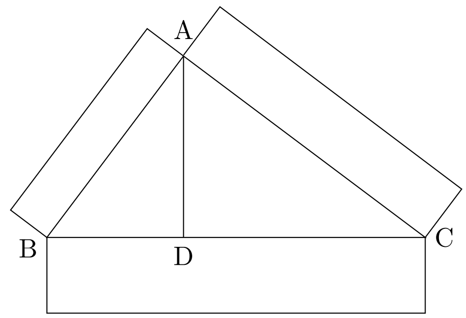
Bu durumda, BA'nın AE'ye oranı, AE'nin EB'ye oranına eşit olur.

Ve AB, AE'den büyüktür;

Öyleyse AB doğrusu, E'de uç ve orta oranda kesilmiştir, ve büyük parça AE'dir.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

31. Önerme:
Dik üçgenlerde dik açıyı gören kenar üzerine çizilen şekil, dik açıyı çevreleyen kenarlar üzerine çizilen benzer ve aynı biçimde yerleştirilmiş şekillerin toplamına eşittir.



ABC bir dik üçgen olsun; dik açısı BAC olsun.

Diyorum ki, BC üzerindeki şekil, BA, AC üzerine benzer ve aynı biçimde yerleştirilmiş şekillerin toplamına eşittir.

AD dik olarak çizilsin.

O zaman, ABC dik üçgeninde, AD doğrusu, A'daki dik açıdan BC tabanına dik çizildiğinden, dikmeye komşu ABD, ADC üçgenleri birbirlerine ve bütün ABC üçgenine benzerdir. **[VI.8]**

Ve, ABC, ABD'ye benzer olduğundan, CB'nin BA'ya oranı, AB'nin BD'ye oranına eşittir. **[Tan. VI.1]**

Ve, üç doğru orantılı olduğundan, birincinin üçüncüye oranı, birinci üzerindeki şeklin, ikinci üzerine çizilen benzer ve aynı biçimde yerleştirilmiş şekle oranına eşittir. **[DS. VI.19]**

Öyleyse CB'nin BD'ye oranı, CB üzerindeki şeklin BA üzerine çizilen benzer ve aynı biçimde yerleştirilmiş şekle oranına eşittir.

Aynı nedenden dolayı, BC'nin CD'ye oranı, BC'deki şeklin CA'daki şekle oranına eşittir;

ayrıca BC'nin BD, DC'ye oranları, BC üzerindeki şeklin, BA, AC üzerlerine çizilmiş benzer ve aynı biçimde yerleştirilmiş şekillere oranlarına eşittir.

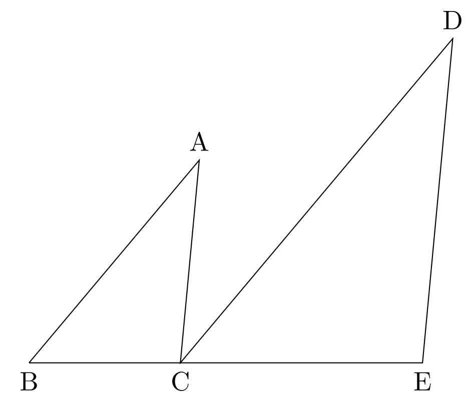
Ama BC eşittir BD, AC;

öyleyse BC üzerindeki şekil, BA, AC üzerlerine çizilmiş benzer ve aynı biçimde yerleştirilmiş şekillere eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

32. Önerme:

Karşılıklı ikişer kenarları orantılı olan iki üçgen, bu kenarlar aynı zamanda paralel olacak şekilde bir köşede bir araya getirilirlerse, kalan kenarları aynı doğru üzerinde olacaktır.



ABC, DCE üçgenlerinde, birinin iki kenarı BA, AC, diğerinin iki kenarı DC, DE ile orantılı olsun, yani AB'nin AC'ye oranı, DC'nin DE'ye oranına eşit olsun;

ve AB, DC'ye ve AC, DE'ye paralel olsun.

Diyorum ki, BC ile CE aynı doğru üzerindedir.

Çünkü, AB, DC'ye paralel olduğundan, ve AC doğrusu onları kestiğinden, ters iç açılar BAC, ACD birbirine eşittir. **[I.29]**

Aynı nedenden dolayı, CDE açısı da ACD açısına eşittir; böylece BAC açısı CDE açısına eşit olur.

Ve, ABC, DCE üçgenlerinde birinin bir açısı, A'daki açı, diğerinin bir açısına, D'deki açıya, eşit olduğundan,

ve eşit açıyı çevreleyen kenarlar orantılı olduğundan, yani BA'nin AC'ye oranı, CD'nin DE'ye oranına eşit olduğundan,

ABC üçgeni DCE üçgeniyle eşaçılıdır; **[VI.6]**

öyleyse ABC açısı, DCE açısına eşittir.

Ama ACD açısının BAC açısına eşit olduğu kanıtlanmıştı;

bu durumda ACE açısının tamamı ABC, BAC açılarına eşittir.

Bunlara ACB açısı eklensin;

bu durumda ACE, ACB açıları BAC, ACB, CBA açılarına eşit olur.

Ama BAC, ABC, ACB açıları iki dik açıya eşittir; **[I.32]**

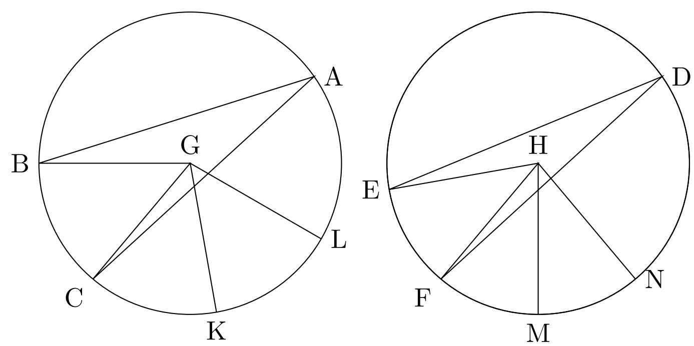
bu durumda ACE, ACB açıları da iki dik açıya eşit olur.

Bu nedenle, AC doğrusuyla C noktasında, onun aynı tarafında olmayan BC, CE doğruları komşu ACE, ACB açılarını iki dik açıya eşit yapar;

öyleyse BC ile CE aynı doğru üzerindedir. **[I.14]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

33. Önerme:
Eşit çemberlerde açılar, ister merkezde ister çevrede olsunlar, gördükleri çevreyle aynı orandadırlar.



ABC, DEF eşit çemberler olsun, ve merkezleri G, H'de alınan açılar BGC, EHF açıları olsun, ve BAC, EDF de çevre üzerindeki açılar olsun;

diyorum ki, BC çevresinin EF çevresine oranı, BGC açısının EHF açısına oranına, ve BAC açısının EDF açısına oranına eşittir.

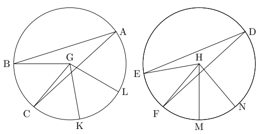
Çünkü, herhangi bir sayıda ardışık CK, KL çevresi BC çevresine eşit çizilsin,

ve herhangi bir sayıda ardışık FM, MN çevresi EF çevresine eşit çizilsin;

ve GK, GL, HM, HN birleştirilsin.

O zaman, BC, CK, KL çevreleri birbirine eşit olduğundan, BGC, CGK, KGL açıları da birbirine eşit olur; **[III.27]**

öyleyse, BL çevresi BC çevresinin hangi katıysa, BGL açısı da BGC açısının aynı katı olur.



Aynı nedenden dolayı, NE çevresi EF'in hangi katıysa, NHE açısı da EHF açısının aynı katıdır.

O zaman, eğer BL çevresi EN çevresine eşitse, BGL açısı da EHN açısına eşittir; **[III.27]**

eğer BL çevresi EN çevresinden büyükse, BGL açısı da EH açısından büyüktür; eğer küçükse, küçüktür.

Dört nicelik, iki çevre BC, EF, ve iki açı BGC, EHF, olduğundan, BC çevresi ve BGC açısının eşkatları, yani BL çevresi ve BGL açılsı alındı,

ve EF çevresi ve EHF açısının eşkatları, yani EN çevresi ve EHN açısı alındı.

Ve, eğer BL çevresi EN çevresinden büyükse, BGL açısının da EHN açısından büyük olacağı, eğer eşitse eşit, ve küçükse küçük olacağı kanıtlandı.

Öyleyse, BC çevresinin EF'ye oranı, BGC açısının EHF açısına oranına eşittir. **[Tan. V.5]**

Ama, BGC açısının EHF açısına oranı, BAC açısının EDF açısına oranına eşittir, çünkü bunlar sırasıyla öbürlerinin iki katıdır.

Öyleyse BC çevresinin EF çevresine oranı, BGC açısının EHF açısına oranına, ve BAC açısının EDF açısına oranına eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■