Kitap VII

1. Tanımlar

1 **Birim**, var olan her şeyin özellikleriyle kıyaslandığında kendisine bir denilendir.

2 Birimlerden oluşan niceliğe **sayı** denir.

3 Kendinden büyük bir sayıyı ölçen sayı büyük sayının **parçasıdır**;

> *["Ölçmek" tam olarak bölmek demektir. Parça böldüğü sayıdan küçüktür; bir sayı kendi kendisinin parçası değildir.]*

4 ama ölçmüyorsa **parçalarıdır**.

> *[Eğer* $\mathfrak{m} < \mathfrak{n}$ *iken,* $\mathfrak{m}$*,* $\mathfrak{n}$*'yi bölüyorsa, Öklid* $\mathfrak{m}$ *için 'parça", bölmüyorsa "parçalar" terimini kullanıyor. Tanımlarda ve önermelerde "parçalar" dendiğinde ne zaman pek çok parçadan söz edildiği, ya da ne zaman bir tek parçalardan söz edildiği konunun içeriğinden anlaşılıyor.]*

5 Kendinden küçük sayı tarafından ölçülen sayı küçük sayının **katıdır**.

6 İki eşit parçaya bölünebilen sayı **çift sayıdır**.

7 İki eşit parçaya bölünemeyen, ya da çift bir sayıdan farkı bir olan sayı **tek sayıdır**.

8 **Çift kere çift sayı**, bir çift sayı tarafından çift bir sayı kadar ölçülen sayıdır.

> *[İki çift sayının çarpımı olan sayı.]*

9 **Çift kere tek sayı**, bir çift sayı tarafından tek bir sayı kadar ölçülen sayıdır.

> *[Bir çift sayıyla tek sayının çarpımı olan sayı.]*

10 **Tek kere tek sayı**, bir tek sayı tarafından tek bir sayı kadar ölçülen sayıdır.

[İki tek sayının çarpımı olan sayı.]

11 **Asal sayı**, yalnızca birim tarafından ölçülen sayıdır.

12 **Aralarında asal** sayılar, ortak ölçü olarak yalnızca birimle ölçülen sayılardır.

13 **Bileşik sayı**, bir sayı tarafından ölçülen sayıdır.

[Antik Yunan matematiğinde birim *bir sayı olarak düşünülmez.]*

14 **Aralarında bileşik** sayılar, ortak bir ölçü olarak bir sayıyla ölçülen sayılardır.

15 Bir sayının bir sayıyı **çarpması** demek, çarpılan sayının diğer sayının içindeki birim kadar kendi kendisiyle toplanması, ve böylece bir sayı oluşturulması demektir.

16 Ve iki sayı birbiriyle çarpılıp bir sayı elde edildiğinde o sayıya **düzlem**, ve onu elde etmek için çarpılan sayılara onun **kenarları** denir.

17 Ve üç sayı birbiriyle çarpılarak elde edilen sayıya **cisim**, ve onu elde etmek için çarpılan sayılara onun **kenarları** denir.

18 İki eşit sayının çarpılmasıyla elde edilen sayıya, ya da iki eşit sayı tarafından içerilen sayıya, **kare sayı** denir.

19 Üç eşit sayının çarpılmasıyla elde edilen sayıya, ya da üç eşit sayı tarfından içerilen sayıya, **küp** denir.

20 Birinci sayı ikincinin hangi katı, parçası, ya da parçalarıysa, üçüncü de dördüncüye göre aynıysa, bu dört sayı **orantılıdır**.

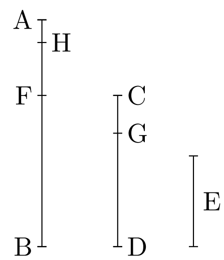
21 **Benzer düzlem** ve **cisim** sayıları, kenarları orantılı olanlardır.

22 **Mükemmel sayı**, parçalarının toplamına eşit olandır.

2. Önermeler

1. Önerme:

Eşit olmayan iki sayı alındığında, sürekli olarak sırasıyla küçük olan büyük olandan çıkarıldığında, eğer birim kalana kadar hiçbir kalan sayı bir öncekini ölçmüyorsa, ilk sayılar aralarında asal olacaktır.



Eşit olmayan AB, CD sayılarından küçük olan sürekli olarak büyük olandan çıkarıldığında, kalan sayı sonuna kadar, hiçbir zaman bir öncekini ölçmesin;

diyorum ki, AB, CD aralarında asaldır, yani yalnızca birim AB, CD'yi ölçer.

Çünkü, eğer AB, CD aralarında asal değilse, bir sayı onları ölçecektir.

Bir sayı onları ölçsün ve o sayı E olsun; CD, BF'i ölçsün ve kendinden küçük FA kalan olsun.

AF, DG'yi ölçsün ve kendinden küçük GC kalan olsun, ve GC, FH'yi ölçsün ve kalan HA birim olsun.

E, CD'yi ölçtüğünden, ve CD, BF'yi ölçtüğünden, E, BF'yi de ölçer.

Ama BA'yı da ölçer; bu durumda AF'yi de ölçecektir.

Ama AF, DG'yi ölçer; öyleyse E, DG'yi de ölçer. Ama DC'nin tamamını da ölçer; bu durumda kalan CG'yi de ölçecektir.

Ama CG, FH'yi ölçer; öyleyse E, FH'yi ölçer.

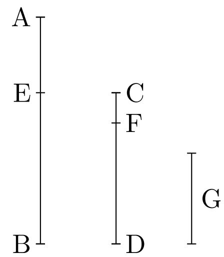
Ama FA'nın tamamını da ölçer; bu durumda kendisi sayı olmasına rağmen, kalanı yani birim olan AH'yi de ölçecektir: bu olamaz.

Öyleyse AB, CD'yi hiçbir sayı ölçemez; bu durumda AB, CD aralarında asaldır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

2. Önerme:

Aralarında asal olmayan iki sayı verildiğinde, bunların en büyük ortak ölçüsünü bulmanın yolu.



AB, CD aralarında asal olmayan iki sayı olsun. Böylece AB, CD'nin en büyük ortak ölçüsünün bulunması isteniyor.

Şimdi, eğer CD, AB'yi ölçerse, kendisini de ölçtüğünden, AB, CD'nin ortak ölçüsü CD'dir.

Ve en büyük olduğu da açıkça bellidir, çünkü CD'den büyük hiçbir sayı CD'yi ölçmez.

Ama eğer CD, AB'yi ölçmezse, o zaman AB, CD sayılarının küçük olanı sürekli olarak büyük olandan çıkarıldığında, kendinden bir öncekini ölçen bir sayı kalacaktır.

Çünkü, bir birim kalamaz, yoksa AB, CD aralarında asal olurlardı **[VII.1]**

ki bu varsayıma aykırıdır.

Öyleyse, kendinden bir öncekini ölçen bir sayı kalacak.

Şimdi, CD, BE'yi ölçsün ve kendinden küçük EA kalsın; EA, DF'yi ölçsün, kendinden küçük FC kalsın; ve CF, AE'yi ölçsün.

O zaman, CF, AE'yi ölçtüğünden, ve AE, DF'yi ölçtüğünden, CF, DF'yi de ölçer.

Ama kendisini de ölçer; bu durumda CD'nin tamamını da ölçer.

Ama CD, BE'yi ölçer; öyleyse CF, BE'yi de ölçer.

Ama EA'yı da ölçer; öyleyse BA'nın tamamını da ölçer.

Ama CD'yi de ölçer; öyleyse CF sayısı AB, CD'yi ölçer.

Bu durumda CF sayısı AB, CD'nin ortak ölçüsüdür.

Şimdi de diyorum ki en büyüktür de.

Çünkü, eğer CF sayısı AB, CD'nin en büyük ortak ölçüsü değilse, CF'den daha büyük bir sayı AB, CD sayılarını ölçecektir.

Böyle bir sayı onları ölçsün, ve bu G olsun.

Şimdi, G, CD'yi ölçtüğünden, ve bu arada CD, BE'yi ölçtüğünden, G, BE'yi de ölçer.

Ama BA'nın tamamını da ölçer; bu durumda kalan AE'yi de ölçecektir.

Ama AE, DF'yi ölçer; bu durumda G, DF'yi de ölçecektir.

Ama DC'nin tamamını da ölçer; öyleyse kalan CF'yi de ölçecektir, yani büyük olan küçük olanı ölçecektir: bu olamaz.

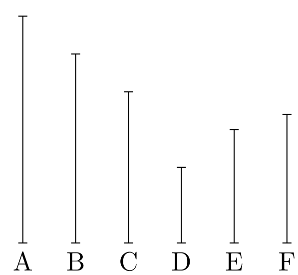
Bu nedenle CF'den büyük hiçbir sayı AB, CD'yi ölçmeyecektir.

Öyleyse CF sayısı AB, CD'nin en büyük ortak ölçüsüdür.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

Doğal Sonuç: Buradan açıkça görülür ki eğer bir sayı iki sayıyı ölçerse, onların en büyük ortak ölçüsünü de ölçer.

3. Önerme:
Aralarında asal olmayan üç sayı verildiğinde, bunların en büyük ortak ölçüsünü bulmanın yolu.



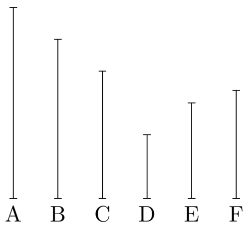
A, B, C aralarında asal olmayan üç sayı olsun; böylece A, B, C'nin en büyük ortak ölçüsünün bulunması isteniyor.

A, B'nin en büyük ortak ölçüsü D alınsın; **[VII.2]**

o zaman D, C'yi ya ölçer, ya da ölçmz.

Önce ölçsün.

Ama A, B'yi de ölçer; öyleyse D sayısı A, B, C'yi ölçer; bu durumda D sayısı A, B, C'nin ortak ölçüsüdür.



Diyorum ki en büyüktür de.

Çünkü, eğer D sayısı A, B, C'nin en büyük ortak ölçüsü değilse, D'den daha büyük bir sayı A, B, C'yi ölçecektir.

Böyle bir sayı onları ölçsün, ve bu E olsun.

E sayısı A, B, C'yi ölçtüğünden, A, B'yi de ölçecektir; o zaman A, B'nin en büyük ortak ölçüsünü de ölçecektir. **[DS. VII.2]**

Ama A, B'nin en büyük ortak ölçüsü D'dir; bu durumda E, D'yi ölçecektir, yani büyük olan küçük olanı: bu olamaz.

Öyleyse D'den daha büyük hiçbir sayı A, B, C'yi ölçemez.

Bu durumda D sayısı A, B, C'nin en büyük ortak ölçüsüdür.

Şimdi de, D, C'yi ölçmesin.

İlk olarak diyorum ki, C, D aralarında asal değildir.

Çünkü, A, B, C aralarında asal olmadığından, bir sayı onları ölçecektir.

Şimdi, A, B, C, yi ölçen sayı A, B'yi de ölçecektir, ve A, B'nin en büyük ortak ölçüsü D'yi ölçecektir. **[DS. VII.2]**

Ama C'yi de ölçer; öyleyse bir sayı D, C'yi ölçecektir; bu durumda D, C aralarında asal değildir.

O zaman onların en büyük ortak ölçüsü E alınsın. **[VII.2]**

O zaman, E, D'yi ölçtüğünden, ve D sayısı A, B'yi ölçtüğünden, E sayısı A, B'yi ölçer.

Ama C'yi de ölçer;

öyleyse E sayısı A, B, C'yi ölçer; bu durumda E sayısı A, B, C'nin ortak ölçüsüdür.

Şimdi diyorum ki en büyüktür de.

Çünkü, eğer A, B, C'nin en büyük ortak ölçüsü E değilse, E'den daha büyük bir sayı A, B, C'yi ölçecektir.

Böyle bir sayı onları ölçsün, ve bu F olsun.

Şimdi, F sayısı A, B, C'yi ölçtüğünden, A, B'yi de ölçer; öyleyse A, B'nin en büyük ortak ölçüsünü de ölçecektir. **[DS. VII.2]**

Ama A, B'nin en büyük ortak ölçüsü D'dir; bu durumda F, D'yi ölçer.

Ve C'yi de ölçer; öyleyse F sayısı D, C'yi ölçer; bu durumda D, C'nin en büyük ortak ölçüsünü de ölçecektir. **[DS. VII.2]**

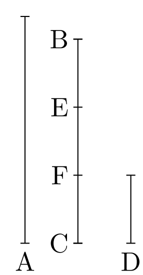
Ama D, C'nin en büyük ortak ölçüsü E'dir; bu durumda F, E'yi ölçer, yani büyük olan küçük olanı: bu olamaz.

Bu nedenle E'den büyük hiçbir sayı A, B, C sayılarını ölçmeyecektir.

Öyleyse A, B, C'nin en büyük ortak ölçüsü E'dir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

4. Önerme:
Her sayı, kendinden büyük başka bir sayının ya parçasıdır ya da parçalarıdır.



A, BC iki sayı olsun, ve BC de küçük olan.

Diyorum ki BC, A'nın ya parçasıdır, ya da parçalarıdır.

Çünkü, A, BC, ya aralarında asaldır, ya da değil.

Önce, A, BC aralarında asal olsun.

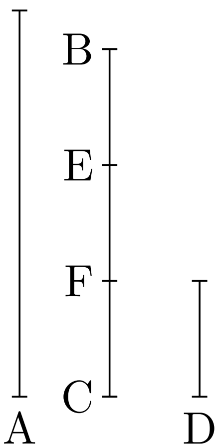
O zaman, eğer BC içindeki birimlere ayrılırsa, BC'deki her bir birim A'nın bir parçası olacaktır; böylece BC, A'nın parçaları olur.

Şimdi de A, BC aralarında asal olmasın; o zaman BC, A'yı ya ölçer ya da ölçmez.

Şimdi eğer BC, A'yı ölçerse, BC, A'nın parçasıdır.

Ama eğer ölçmezse, A, BC'nin en büyük ortak ölçüsü D alınsın; **[VII.2]**

ve BC, D'ye eşit sayıda parçaya ayrılsın, bunlar BE, EF, FC olsun.

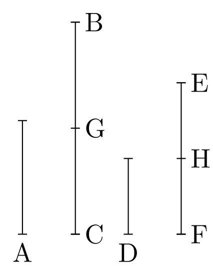


Şimdi, D, A'yı ölçtüğünden, D, A'nın parçasıdır. Ama D sayısı BE, EF, FC sayılarının her birine eşittir; bu durumda BE, EF, FC sayılarının her biri A'nın parçasıdır; böylece BC, A'nın parçaları olur.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

5. Önerme:
Eğer bir sayı bir başka sayının parçasıysa ve başka bir sayı da daha başka bir sayının aynı parçasıysa, bu sayıların toplamı da diğer sayıların toplamının aynı parçası olacaktır.

[$a = \frac{1}{n}\, b$, *ve* $c = \frac{1}{n}\, d$ *olursa,* $a + c = \frac{1}{n}\,(b + d)$ *olur.*]



A sayısı BC sayısının parçası olsun, ve bir başkası D de başka EF'nin aynı parçası olsun, yani A'nın BC'ye oranında.

Diyorum ki, A, D toplamı da BC, EF'nin aynı parçası olur, yani A'nın BC'ye oranında.

Çünkü, A, BC'nin hangi parçasıysa D de EF'nin aynı parçasıdır, bu yüzden BC içinde A'ya eşit kaç tane sayı varsa, EF'nin içinde de D'ye eşit o kadar sayı vardır.

BC sayısı A'ya eşit BG, GC sayılarına ayrılsın, ve EF de D'ye eşit EH, HF'ye ayrılsın;

o zaman BG, GC'nin adedi EH, HF'nin adedine eşit olacaktır.

Ve BG, A'ya, EH de D'ye eşit olduğundan, BG, EH de A, D'ye eşit olur.

Aynı nedenden dolayı GC, HF de A, D'ye eşittir.

Böylece BC'nin içinde A'ya eşit kaç tane sayı varsa, BC, EF'nin içinde de A, D'ye eşit o kadar sayı vardır. Bu durumda BC, A'nın hangi katıysa, BC, EF de A, D'nin aynı katı olur.

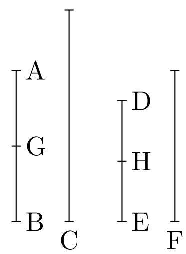
Öyleyse BC'nin içinde A hangi parçaysa, BC, EF içinde A, D de aynı parçadır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

6. Önerme:

Eğer bir sayı bir başka sayının parçalarıysa ve başka bir sayı da daha başka bir sayının aynı parçalarıysa, bu sayıların toplamı da diğer sayıların toplamının aynı parçaları olacaktır.

[$a = \frac{m}{n}\, b$, *ve* $c = \frac{m}{n}\, d$ *olursa,* $a + c = \frac{m}{n}\, (b + d)$ *olur.*]



AB sayısı C sayısının parçaları olsun, ve bir başka DE de bir başka F'nin aynı parçaları olsun, yani AB'nin C'ye oranında.

Diyorum ki, AB, DE toplamı da C, F'nin aynı parçalarıdır, yani AB'nin C'ye oranında.

Çünkü, AB sayısı C'nin hangi parçalarıysa, DE de F'nin aynı parçaları olduğundan, AB'nin içinde C'nin kaç parçası varsa, DE'nin içinde de o kadar F'nin parçası vardır.

AB, her biri C'nin parçası olan AG, GB'ye ayrılsın, ve DE de her biri F'nin parçası olan DH, HE'ye ayrılsın.

Ve C'nin içinde AG hangi parçaysa, F'nin içinde DH aynı parça olduğundan, C'nin içinde AG hangi parçaysa, AG, DH toplamı da C, F toplamının aynı parçası olur. **[VII.5]**

Aynı nedenden dolayı, C'nin içinde GB hangi parçaysa, GB, HE toplamı da C, F toplamının aynı parçası olur.

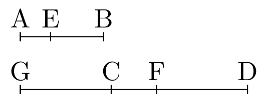
Öyleyse AB sayısı C'nin hangi parçalarıysa, AB, DE toplamı da C, F toplamının aynı parçalarıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

7. Önerme:

Eğer bir sayı bir sayının hangi parçasıysa, ondan çıkarılan sayı da öbüründen çıkarılan sayının aynı parçasıysa, kalan da kalanın aynı parçası olacaktır.

[$a = \frac{1}{n}\, b$, *ve* $c = \frac{1}{n}\, d$ *olursa,* $a - c = \frac{1}{n}\,(b - d)$ *olur.]*



AB sayısı CD sayısının hangi parçasıysa, çıkarılan AE de çıkarılan CF'nin aynı parçası olsun.

Diyorum ki, EB kalanı da FD kalanı içinde, bütün AB, bütün CD'nin hangi parçasıysa, aynı parçası olur.

Çünkü, AE, CF'nin hangi parçasıysa, EB de CG'nin aynı parçası olsun.

Şimdi, AE, CF'nin hangi parçasıysa, EB de CG'nin aynı parçası olduğundan, AE, CF'nin hangi parçasıysa, AB, GF'nin aynı parçasıdır. **[VII.5]**

Ama varsayıma göre, AE, CF'nin hangi parçasıysa, AB de CD'nin aynı parçasıdır; bu durumda AB, GF'nin hangi parçasıysa, CD'nin da aynı parçasıdır;

öyleyse GF eşittir CD.

Bunlardan CF çıkarılsın; bu durumda GC kalanı, FD kalanına eşit olur.

Şimdi, AE, CF'nin hangi parçasıysa, EB de GC'nin aynı parçası olduğundan, ve ayrıca GC eşittir FD olduğundan, AE, CF'nin hangi parçasıysa, EB de FD'nin aynı parçasıdır.

Ama AE, CF'nin hangi parçasıysa, AB de CD'nin aynı parçasıdır;

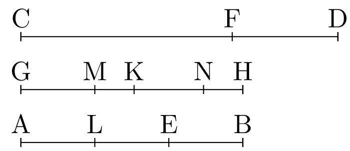
öyleyse EB kalanı FD kalanının, AB'nin tamamı CD'nin tamamının hangi parçasıysa, aynı parçasıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

8. Önerme:

Eğer bir sayı bir sayının hangi parçalarıysa, ondan çıkarılan sayı da öbüründen çıkarılan sayının aynı parçalarıysa, kalan da kalanın aynı parçaları olacaktır.

$$\left[\ a = \frac{m}{n}\,b,\ \textit{ve}\ c = \frac{m}{n}\,d\ \textit{olursa},\ a - c = \frac{m}{n}\,(b - d)\ \textit{olur.}\ \right]$$



AB sayısı CD sayısının hangi parçalarıysa, çıkarılan AE de çıkarılan CF'nin aynı parçaları olsun.

Diyorum ki, AB, CD'nin hangi parçalarıysa, EB kalanı da FD kalanının aynı parçalarıdır.

Çünkü, GH, AB'ye eşit çizilsin; bu durumda GH, CD'nin hangi parçalarıysa, AE de CF'nin aynı parçaları olur.

GH, her biri CD'nin parçası olan GK, KH'ye ayrılsın, ve AE de her biri CF'nin parçası olan AL, LE'ye ayrılsın; bu durumda GK, KH'nın adedi AL, LE'nin adedine eşittir.

Şimdi, CD'nin GK hangi parçasıysa, AL de CF'nin aynı parçası olduğundan, ve ayrıca CD, CF'den büyük olduğundan, GK de AL'den büyüktür.

GM, AL'ye eşit çizilsin.

Öyleyse, CD'nin GK hangi parçasıysa, GM de CF'in aynı parçasıdır; bu durumda MK kalanı FD kalanının hangi parçasıysa, GK'nin tamamı da CD'nin tamamının aynı parçası olur. **[VII.7]**

Yine, CD'nin KH hangi parçasıysa, EL de CF'nin aynı parçası olduğundan, ve ayrıca CD, CF'den büyük olduğundan, HK de EL'den büyüktür.

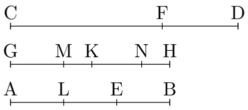
KN, EL'ye eşit çizilsin.

Öyleyse, CD'nin KH hangi parçasıysa, KN de CF'nin aynı parçasıdır; bu durumda NH kalanı FD kalanının hangi parçasıysa, KH'nin tamamı da CD'nin tamamının aynı parçasıdır. **[VII.7]**

Ama MK kalanı FD kalanının hangi parçasıysa, GK'nin tamamının CD'nin tamamının da aynı parçası olduğu kanıtlanmıştı;

öyleyse MK, NH toplamı DF'nin hangi parçalarıysaıysa, HG'nin tamamı da CD'nin tamamının aynı parçalarıdır.

Ama MK, NH toplamı EB'ye eşittir, ve HG, BA'ya eşittir;



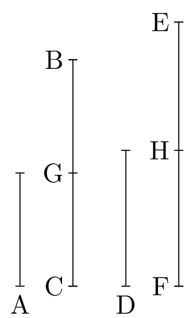
öyleyse AB'nin tamamı CD'nin tamamının hangi parçalarıysa EB kalanı da FD kalanının aynı parçalarıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

9. Önerme:

Bir sayı bir sayının parçasıysa, ve bir başka sayı da başka bir sayının aynı parçasıysa, yer değiştirerek, birinci sayı üçüncü sayının hangi parçası ya da parçalarıysa, ikinci sayı da dördüncü sayının aynı parçası ya da parçalarıdır.

[$a = \frac{1}{n}\,b$, *ve* $c = \frac{1}{n}\,d$ *olduğunda* $a = \frac{k}{\ell}\,c$ *olursa,* $b = \frac{k}{\ell}\,d$ *olur; burada* $k = 1$ *veya* $k > 1$ *olabilir.]*



A sayısı BC sayısının bir parçası olsun, ve bir başkası, D, başka bir EF'nin, BC'nin A hangi parçasıysa, aynı parçası olsun.

Diyorum ki, yer değiştirerek, D sayısının A sayısı hangi parçası ya da parçalarıysa, BC de EF'nin aynı parçası ya da parçalarıdır.

Çünkü, BC'nin A hangi parçasıysa, D de EF'nin aynı parçası olduğundan, BC'nin içinde A'ye eşit kaç sayı varsa, EF'nin içinde de D'ye eşit o kadar vardır.

BC, her biri A'ya eşit olan BG, GC'ye ayrılsın, ve EF de D'ye eşit EH, HF'ye ayrılsın.

Şimdi, BG, GC sayıları birbirine eşit olduğundan, ve EH, HF sayıları da birbirine eşit olduğundan, ve ayrıca BG, GC'nin adedi EH, HF'nin adedine eşit olduğundan,

EH'nin BG hangi parçası ya da parçalarıysa, GC de HF'nin aynı parçası ya da parçalarıdır;

böylece, buna ek olarak, BG, EH'nin hangi parçası ya da parçalarıysa, BC toplamı da EF toplamının aynı parçası ya da parçalarıdır.
[VII,5, VII.6]

Ama BG eşittir A, ve EH eşittir D;

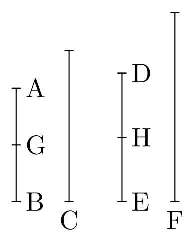
öyleyse, A, D'nin hangi parçası ya da parçalarıysa, BC de EF'nin aynı parçası ya da parçalarıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

10. Önerme:

Bir sayı bir sayının parçalarıysa, ve bir başka sayı da başka bir sayının aynı parçalarıysa, yer değiştirerek, birinci sayı üçüncü sayının hangi parçaları ya da parçasıysa, ikinci sayı da dördüncü sayının aynı parçaları ya da parçasıdır.

[$a = \frac{m}{n}\, b$, *ve* $c = \frac{m}{n}\, d$ *olduğunda* $a = \frac{k}{\ell}\, c$ *olursa,* $b = \frac{k}{\ell}\, d$ *olur; burada* $k = 1$ *veya* $k > 1$ *olabilir.]*



AB sayısı C sayısının parçaları olsun, ve başka bir DE de başka bir F'nin aynı parçaları olsun.

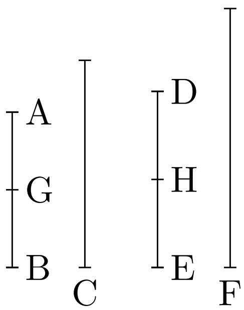
Diyorum ki, yer değiştirerek, AB, DE'nin hangi parçaları ya da parçasıysa, C de F'nin aynı parçaları ya da parçasıdır.

Çünkü, AB, C'nin hangi parçalarıysa, DE de F'nin aynı parçaları olduğundan, C'nin kaç parçası AB'nin içindeyse, F'nin de o kadar parçası DE'nin içindedir.

AB, her biri C'nin parçası olan AG, GB'ye ayrılsın, ve DE de her biri F'nin parçası olan DH, HE'ye ayrılsın;

böylece AG, GB'nin adedi DH, HE'nin adedine eşittir.

Şimdi, AG, C'nin hangi parçasıysa , DH de F'nin aynı parçası olduğundan, yer değiştirerek, AG, DH'nin hangi parçası ya da parçalarıysa, C de F'nin aynı parçası ya da parçalarıdır. **[VII.9]**



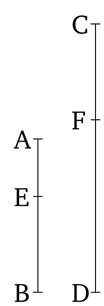
Aynı nedenden dolayı, GB, HE'nin hangi parçası ya da parçalarıysa, C de F'nin aynı parçası ya da parçalarıdır;

böylece, buna ek olarak, AB, DE'nin hangi parçaları ya da parçasıysa, C de F'nin aynı parçaları ya da parçasıdır. **[VII.5, VII.6]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

11. Önerme:
Bir sayının bir sayıya oranı, çıkarılan bir sayının çıkarılan bir sayıya oranıyla aynıysa, kalanların oranı da aynıdır.

[$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *olursa,* $\frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b}$ *olur.]*



AB'nin tamamının CD'nin tamamına oranı neyse, çıkarılan AE'nin çıkarılan CF'ye oranı aynı olsun.

Diyorum ki, EB kalanının FD kalanına oranı da AB'nin tamamının CD'nin tamamına oranıyla aynıdır.

AB'nin CD'ye oranı, AE'nin CF'ye oranıyla aynı olduğundan, AB, CD'nin hangi parçası ya da parçalarıysa, AE'de CF'nin aynı parçası ya da parçalarıdır; **[Tan. VII.20]**

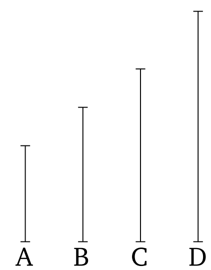
bu durumda AB, CD'nin hangi parçası ya da parçalarıysa, EB kalanı da FD kalanının aynı parçası ya da parçaları olur. **[VII.7, VII.8]**

Öyleyse, EB'nin FD'ye oranı, AB'nin CD'ye oranına eşittir. **[Tan. VII.20]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

12. Önerme:
Öncüllerin ardıllara oranlarının eşit olduğu sayılar alındığında öncüllerin hepsinin ardılların hepsine oranı da aynı olur.

$$[\ \frac{a_1}{b_1} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} \textit{ olursa, } \frac{a_1 + \cdots + a_n}{b_1 + \cdots + b_n} = \frac{a_1}{b_1} \textit{ olur. }]$$



İstediğimiz miktarda aldığımız A, B, C, D sayıları orantılı olsun, yani A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşit olsun.

Diyorum ki, A'nın B'ye oranı neyse, A, C'nin B, D'ye oranı aynıdır.

Çünkü, A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranıyla aynı olduğundan, A, B'nin hangi parçası ya da parçalarıysa, C de D'nin aynı parçası ya da parçalarıdır. **[Tan. VII.20]**

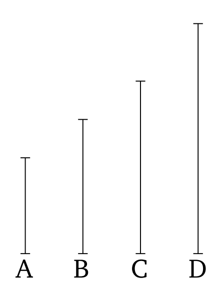
Bu durumda A, B'nin hangi parçası ya da parçalarıysa, A, C toplamı da B, D toplamının aynı parçası ya da parçaları olur. **[VII.5, VII.6]**

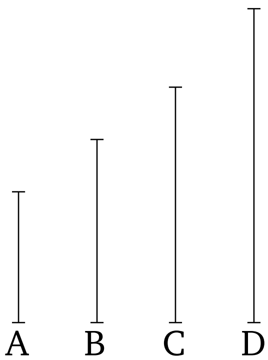
Öyleyse, A'nın B'ye oranı neyse, A, C'nin B, D'ye oranı da aynıdır. **[Tan. VII.20]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

13. Önerme:
Orantılı dört sayının değiştirilmiş oranları aynıdır.

$$[\ \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \textit{ ise } \frac{a}{c} = \frac{b}{d} \textit{ olur. }]$$





A, B, C, D orantılı dört sayı olsun, yani A'nın B'ye oranı C'nin D'ye oranına eşit olsun.

Diyorum ki, bunların değiştirilmiş oranları da eşit olacaktır, yani A'nın C'ye oranı, B'nin D'ye oranına eşit olacak.

Çünkü, A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşit olduğundan, A, B'nin hangi parçası ya da parçalarıysa, C de D'nin aynı parçası ya da parçalarıdır. **[Tan. VII.20]**

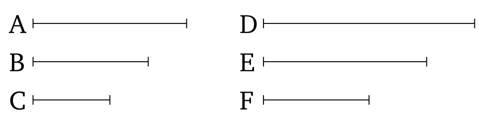
Bu durumda, yer değiştirerek, A, C'nin hangi parçası ya da parçalarıysa, B de D'nin aynı parçası ya da parçalarıdır. **[VII.10]**

Öyleyse, A'nın C'ye oranı, B'nin D'ye oranına eşittir. **[Tan. VII.20]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

14. Önerme:
Verilen bir miktar sayının ikişer ikişer alınan oranları aynı miktardaki başka sayıların ikişer ikişer alınan oranlarına sırasıyla eşitse, bu sayılar eşit dış oranlı sayılardır.

$$\left[\ \frac{a_i}{a_{i+1}} = \frac{b_i}{b_{i+1}},\ i = 1, \ldots, n-1 \textit{ ise } \frac{a_1}{a_n} = \frac{b_1}{b_n} \textit{ olur.}\ \right]$$



İstediğimiz miktarda seçtiğimiz A, B, C sayıları, eşit miktardaki D, E, F sayılarıyla ikişer ikişer alındığında aynı oranda olsun,

yani, A'nın B'ye oranı, D'nin E'ye oranına, ve B'nin C'ye oranı, E'nin F'ye oranına eşit olsun.

Diyorum ki, eşit dış oranlar olarak, A'nın C'ye oranı, D'nin F'ye oranına eşittir.

Çünkü, A'nın B'ye oranı, D'nin E'ye oranına eşit olduğundan, değiştirilmiş oranlar olarak, A'nın D'ye oranı, B'nin E'ye oranına eşittir. **[VII.13]**

Yine, B'nin C'ye oranı, E'nin F'ye oranına eşit olduğundan, değiştirilmiş oranlar olarak, B'nin E'ye oranı, C'nin F'ye oranına eşittir. **[VII.13]**

Ama B'nin E'ye oranı, A'nın D'ye oranına eşittir; bu durumda, A'nın D'ye oranı da C'nin F'ye oranına eşit olur.

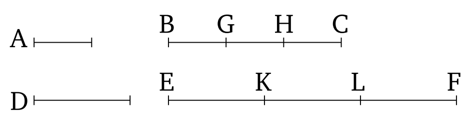
Öyleyse, değiştirilmiş oranlar olarak A'nın C'ye oranı, D'nin F'ye oranına eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

15. Önerme:

Eğer bir birim bir sayıyı kaç defa ölçüyorsa, başka bir sayı da başka bir sayıyı o kadar ölçüyorsa, yer değiştirerek, birim üçüncü sayıyı, ikinci sayının dördüncü sayıyı ölçtüğü kadar ölçer.

[Birinci sayı birim olmak üzere $a_2 = \frac{a_4}{a_3}$ *ise* $a_3 = \frac{a_4}{a_2}$ *olur.]*



A birimi bir BC sayısını ölçsün, ve bir diğer sayı D de başka bir EF sayısını aynı sayıda ölçsün.

Diyorum ki, yer değiştirerek, A birimi D sayısını kaç kere ölçüyorsa, BC de EF'yi o kadar ölçecektir.

Çünkü, A birimi BC sayısını, D'nin EF'yi ölçtüğü sayıda ölçtüğünden, BC içinde ne kadar birim varsa, EF içinde D'ye eşit o kadar sayı vardır.

BC, her biri birim olan BG, GH, HC'ye ayrılsın, ve EF de her biri D'ye eşit olan EK, KL, LF sayılarına ayrılsın.

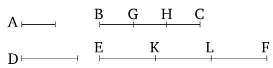
Ve, BG, GH, HC birimleri birbirine eşit olduğundan, ve EK, KL, LF sayıları da birbirine eşit olduğundan, ve ayrıca BG, GH, HC'nin miktarı EK, KL, LF'nin miktarına eşit olduğundan,

BG biriminin EK sayısına oranı, GH biriminin KL sayısına oranına, ve HC biriminin LF sayısına oranına eşit olacaktır.

Öyleyse, öncüllerden birinin ardıllardan birine oranı, öncüllerin hepsinin ardılların hepsine oranına eşit olacaktır; **[VII.12]**

bu durumda BG biriminin EK sayısına oranı, BC'nin EF'ye oranına eşit olur.

Ama BG birimi A birimine eşittir, ve EK sayısı da D sayısına eşittir.



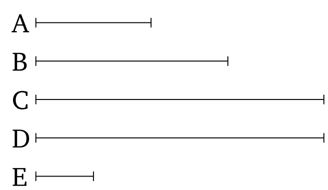
Bu durumda A biriminin D sayısına oranı, BC'nin EF'ye oranına eşittir.

Öyleyse, A birimi D sayısını kaç kere ölçüyorsa, BC de EF'yi o kadar ölçer.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

16. Önerme:
İki sayı birbirini çarparak bazı sayılar oluşturuyorsa, bu oluşan sayılar birbirine eşittir.

[Çarpma işleminin tanımı simetrik olmadığından $ab = ba$ *için böyle bir önermeye gerek var.]*



A, B iki sayı olsun, ve A, B'yi çarparak C'yi, ve B, A'yı çarparak D'yi oluştursun.

Diyorum ki, C eşittir D.

Çünkü, A, B'yi çarparak C'yi oluşturdğundan, B, C'yi A'daki birimler kadar ölçer.

Ama E birimi de A'yı içindeki birimler kadar ölçer; bu durumda E birimi A'yı, B'nin C'yi ölçtüğü sayıda ölçer.

Öyleyse, yer değiştirerek, E birimi B sayısını, A'nın C'yi ölçtüğü kadar ölçer. **[VII.15]**

Yine, B, A'yı çarparak D'yi oluşturduğundan, A, D'yi B'deki birimler kadar ölçer.

Ama E birimi de B'yı içindeki birimler kadar ölçer; bu durumda E birimi B'yi, A'nın D'yi ölçtüğü sayıda ölçer.

Ama E birimi B sayısını, A'nın C'yi ölçtüğü kadar ölçmüştü;

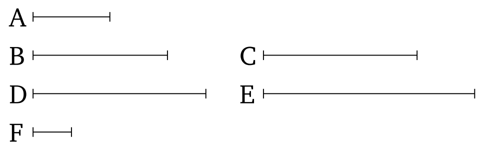
bu durumda A sayısı C, D'nin her birini aynı sayıda ölçer.

Öyleyse C eşittir D.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

17. Önerme:

Eğer bir sayı diğer iki sayıyı çarparak bazı sayılar oluşturuyorsa, oluşan sayıların oranı çarpılan sayıların oranına eşittir.



A sayısı B, C sayılarını çarparak D, E'yi oluştursun.

Diyorum ki, B'nin C'ye oranı, D'nin E'ye ornanına eşitir.

Çünkü, A, B'yi çarparak D'yi oluşturduğundan, B, D'yi A'daki birimler kadar ölçer.

Ama F birimi de A'yı içindeki birimler kadar ölçer.

Öyleyse, F birimi A sayısını, B'nin D'yi ölçtüğü sayıda ölçer.

Bu durumda, F biriminin A'ya oranı, B'nin D'ye oranına eşittir. **[Tan. VII.20]**

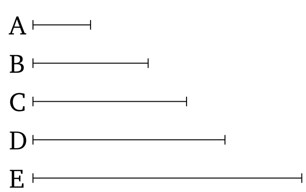
Aynı nedenden dolayı, F biriminin A'ya oranı, C'nin E'ye oranına eşittir; bu durumda B'nin D'ye oranı, C'nin E'ye oranına eşit olur.

Öyleyse, değiştirilmiş oranlar olarak, B'nin C'ye oranı, D'nin E'ye oranına eşittir. **[VII.13]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

18. Önerme:

Eğer iki sayı, bir sayıyı çarparak bazı sayılar oluşturuyorsa, oluşan sayıların oranı çarpan sayıların oranına eşittir.

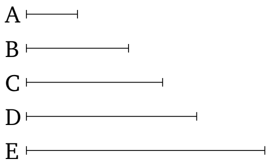


A, B sayıları bir C sayısını çarparak D, E'yi oluştursun.

Diyorum ki, A'nın B'ye oranı, D'nin E'ye oranına eşittir.

Çünkü, A, C'yi çarparak D'yi oluşturduğundan, C de A'yı çarparak D'yi oluşturmuş olur. **[VII.16]**

Aynı nedenden dolayı, C, B'yi de çarparak E'yi oluşturmuş olur.



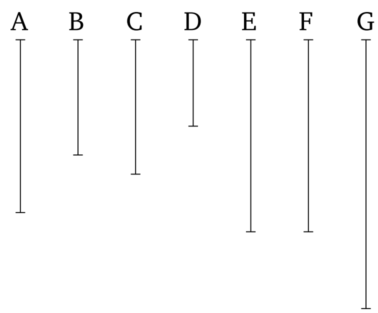
Bu durumda, C sayısı A, B sayılarını çarparak D, E'yi oluşturmuş oldu.

Öyleyse A'nın B'ye oranı, D'nin E'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

19. Önerme:

Orantılı dört sayı verildiğinde, birinciyle dördüncünün çarpımı, ikinciyle üçüncünün çarpımına eşittir; dört sayı verildiğinde birinciyle dördüncünün çarpımı, ikinciyle üçüncünün çarpımına eşitse, bu dört sayı orantılıdır.



A, B, C, D, orantılı dört sayı olsun, yani A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranın eşit olsun;

A, D'yi çarparak E'yi, ve B, C'yi çarparak F'yi oluştursun.

Diyorum ki, E eşittir F.

Çünkü, A, C'yi çarparak G'yi oluştursun.

O zaman, A, C'yi çarparak G'yi, ve D'yi çarparak E'yi oluşturduğundan, A sayısı C, D'yi çarparak G, E'yi oluşturmuş oldu.

Bu durumda, C'nin D'ye oranı, G'nin E'ye oranına eşit olur. **[VII.17]**

Ama, C'nin D'ye oranı, A'nın B'ye oranına eşittir; öyleyse A'nın B'ye oranı, G'nin E'ye oranına da eşittir.

Yine, A, C'yi çarparak G'yi oluşturduğundan, ama ayrıca B de C'yi çarparak F'yi oluşturduğundan, A, B sayıları bir C sayısını çarparak G, F'yi oluşturmuş olur.

Öyleyse, A'nın B'ye oranı, G'nin F'ye oranına eşittir. **[VII.18]**

Ama ayrıca A'nın B'ye oranı, G'nin E'ye oranına eşittir; bu durumda G'nin E'ye oranı, G'nin F'ye oranına eşit olur.

Böylece, G sayısı, E, F sayılarının her birine aynı orandadır;

öyleyse E eşittir F. **[V.9]**

Şimdi, E eşittir F olsun.

Diyorum ki, A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranın eşit olur.

Çünkü, aynı kurguyla, E, F'ye eşit olduğundan, G'nin E'ye oranı, G'nin F'ye oranına eşittir. **[V.7]**

Ama G'nin E'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşittir, **[VII.17]**

ve G'nin F'ye oranı, A'nın B'ye oranına eşittir. **[VII.18]**

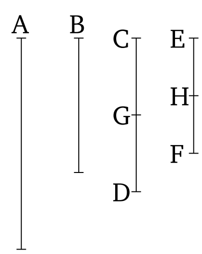
Öyleyse A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranın eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

20. Önerme:

Aynı orandaki sayılardan en küçükleri, kendileriyle aynı oranda olan sayıları aynı sayıda ölçer, büyük olan büyük olanı, küçük olan küçük olanı.

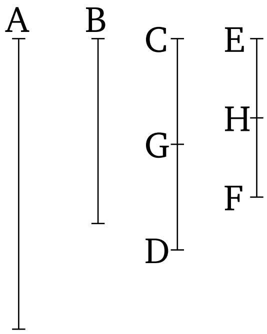
[Eğer a *ve* b *sayıları verildiğinde* c *ve* d *sayıları* $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ *eşitliğini sağlıyor, ama* $e < c$ *ve* $f < d$ *şeklinde verilen hiç bir* e, f *çifti* $\frac{a}{b} = \frac{e}{f}$ *eşitliğini sağlamıyorsa, aynı* n *sayısı için* $a = cn$ *ve* $b = dn$ *olur.]*



A, B ile aynı orandaki en küçük sayılar CD, EF olsun.

Diyorum ki, CD, A'yı, EF'nin B'yi ölçtüğü sayıda ölçer.

Şimdi, CD, A'nın parçaları değildir. Çünkü, mümkünse, öyle olsun; o zaman CD, A'nın hangi parçalarıysa, EF de B'nin aynı parçalarıdır. **[VII.13, Tan. VII.20]**



Öyleyse, CD'nin içinde A'nın kaç parçası varsa, EF'nin içinde de B'nin o kadar prçası vardır.

CD, her biri A'nın parçası olan CG, GD'ye ayrılsın, ve EF de her biri B'nin parçası olan EH, HF'ye ayrılsın;

böylece CG, GD'nin miktarı EH, HF'nin miktarına eşit olur.

Şimdi, CG, GD sayıları birbirine eşit olduğundan, ve EH, HF sayıları da bir birine eşit olduğundan, ve ayrıca CG, GD'nin miktarı EH, HF'nin miktarına eşit olduğundan,

CG'nin EH'ye oranı, GD'nin HF'ye oranına eşittir.

Ayrıca, öncüllerden birinin ardıllardan birine oranı, öncüllerin hepsinin ardılların hepsine oranına eşit olacaktır. **[VII.12]**

Öyleyse, CG'nin EH'ye oranı, CD'nin EFye oranına eşittir.

Bu durumda CG, EH sayıları CD, EF ile aynı orandadır ama onlardan küçüktür: bu olamaz.

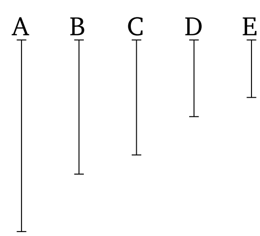
Öyleyse, CD, A'nın parçaları değildir; bu durumda parçası olur. **[VII.4]**

Ve CD, A'nın hangi parçasıysa, EF, B'nin aynı parçasıdır. **[VII.13, Tan. VII.20]**

Öyleyse, CD, A'yı, EF'nin B'yi ölçtüğü sayıda ölçer.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

21. Önerme:
Aralarında asal olan sayılar, onlarla aynı orandaki sayıların en küçükleridir.



A, B sayıları aralarında asal olsun.

Diyorum ki onlarla aynı orandaki sayılar arasında en küçükleri A, B'dir.

Çünkü değilse, A, B'den daha küçük ve A, B ile aynı oranda iki sayı olacaktır.

Bu sayılar C, D olsun.

O zaman, aynı orandaki sayılardan en küçükleri, kendileriyle aynı oranda olan sayıları aynı sayıda ölçtüğünden, büyük olan büyük olanı, küçük olan küçük olanı, yani öncül öncülü, ardıl ardılı, **[VII.20]**

C, A'yı, D'nin B'yi ölçtüğü sayıda ölçecektir.

Şimdi, C, A'yı kaç kez ölçüyorsa, E'nin içinde de o kadar birim olsun.

Bu durumda, D, B'yi E'deki birimler kadar ölçer.

Ve C, A'yı E'deki birimler kadar ölçtüğünden, E de A'yı C'deki birimler kadar ölçer. **[VII.16]**

Aynı nedenden dolayı, E, B'yi de D'deki birimler kadar ölçer. **[VII.16]**

Öyleyse, E, aralarında asal olan A, B'yi ölçer: bu olamaz. **[Tan. VII.12]**

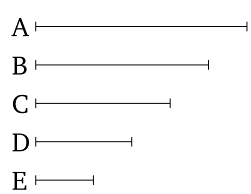
Bu durumda A, B'den daha küçük ve A, B ile aynı oranda başka sayılar olmayacaktır.

Öyleyse, A, B sayıları kendileriyle aynı orandaki sayılar arasında en küçükleridir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

22. Önerme:

Aynı orandaki sayıların en küçükleri aralarında asaldır.



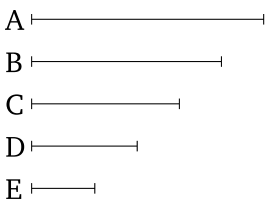
A, B sayıları, kendileriyle aynı orandaki sayılar arasında en küçükleri olsun.

Diyorum ki, A, B aralarında asaldır.

Çünkü, eğer aralarında asal değilseler, bir sayı onları ölçer.

Bir sayı onları ölçsün, ve bu sayı C olsun.

Ve, C, A'yı kaç kez ölçüyorsa, D'nin içinde de o kadar birim olsun, ve C, B'yi kaç kez ölçüyorsa, E'nin içinde de o kadar birim olsun.



C, A'yı D'nin içindeki birimler kadar ölçtüğünden, C, D'yi çarparak A'yı oluşturur. **[Tan. VII.15]**

Aynı nedenden dolayı, C, E'yi çarparak B'yi oluşturur.

Böylece C sayısı D, E sayılarını çarparak A, B sayılarını oluşturmuş oldu; öyleyse D'nin E'ye oranı, A'nın B'ye oranına eşittir; **[VII.7]**

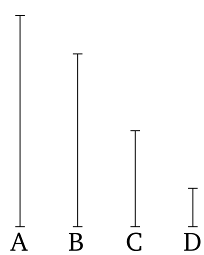
bu durumda D, E sayıları A, B ile aynı orandadır ve onlardan küçüktür: bu olamaz.

Bu nedenle hiç bir sayı A, B'yi ölçmeyecektir.

Öyleyse A, B aralarında asaldır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

23. Önerme:
Eğer iki sayı aralarında asalsa, birini ölçen sayı diğerine asal olacaktır.



A, B aralarında asal iki sayı olsun, ve bir C sayısı A'yı ölçsün.

Diyorum ki, C, B aralarında asaldır.

Çünkü, eğer C, B aralarında asal değilse, bir sayı onları ölçecektir.

Bir sayı onları ölçsün ve bu sayı D olsun.

D, C'yi ölçtüğünden, ve C, A'yı ölçtüğünden, D, A'yı da ölçer.

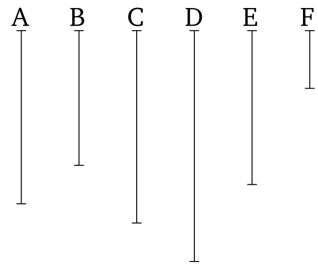
Ama B'yi de ölçer; bu durumda D, aralarında asal olan A, B'yi ölçer: bu olamaz. **[Tan. VII.12]**

Bu nedenle hiç bir sayı A, B'yi ölçmeyecektir.

Öyleyse, A, B aralarında asaldır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

24. Önerme:
Aynı sayıya asal olan iki sayının çarpımı da o sayıya asal olacaktır.



A, B sayıları bir C sayısına asal olsun, ve A, B'yi çarparak D'yi oluştursun.

Diyorum ki, C, D aralarında asaldır.

Çünkü, eğer C, D aralarında asal değilse, bir sayı C, D'yi ölçecektir.

Bir sayı onları ölçsün, ve bu sayı E olsun.

Şimdi, C, A aralarında asal olduğundan, ve bir E sayısı C'yi ölçtüğünden, A, E aralarında asaldır. **[VII.23]**

O zaman, E, D'yi kaç kez ölçüyorsa, F'nin içinde o kadar birim olsun; bu durumda F de D'yi E'deki birimler kadar ölçer. **[VII.16]**

Öyleyse E, F'yi çarparak D'yi oluşturdu. **[Tan. VII.15]**

Ama A da B'yi çarparak D'yi oluşturmuştu; bu durumda E, F çarpımı A, B çarpımına eşit olur.

Ama, uçtakilerin çarpımı aradakilerin çarpımına eşitse, bu dört sayı orantılıdır; **[VII.19]**

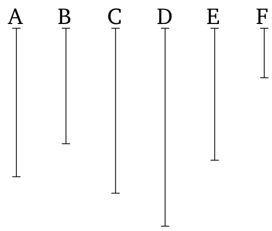
bu durumda E'nin A'ya oranı, B'nin F'ye oranına eşit olur.

Ama A, E aralarında asaldır, ve aralarında asal olan sayılar aynı orandaki sayıların en küçükleridir, **[VII.21]**

ve aynı orana sahip sayıların en küçükleri, onlarla aynı oranda olanları büyüğün büyüğü ve küçüğün küçüğü ölçtüğü aynı sayıda ölçerler, yani öncülün öncülü, ardılın ardılı ölçtüğü sayıda; **[VII.20]**

öyleyse E, B'yi ölçer. Ama C'yi de ölçer; öyleyse E sayısı aralarında asal olan B, C'yi ölçer: bu olamaz. **[Tan. VII.12]**

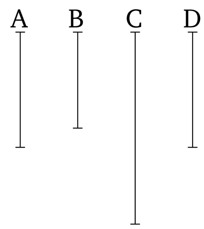
Bu nedenle hiç bir sayı C, D sayılarını ölçmeyecektir.



Öyleyse C, D aralarında asaldır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

25. Önerme:
İki sayı aralarında asalsa, birisinin karesi diğerine asaldır.



A, B sayıları aralarında asal olsun, ve *A*, kendisini çarparak C'yi oluştursun.

Diyorum ki, B, C aralarında asaldır.

Çünkü, D, *A*'ya eşit alınsın.

A, B aralarında asal olduğundan, ve *A*, D'ye eşit olduğundan, D, B de aralarında asaldır.

Öyleyse D, *A* sayılarının her biri B'ye asaldır; bu durumda D, *A* çarpımı da B'ye asal olacaktır. **[VII.24]**

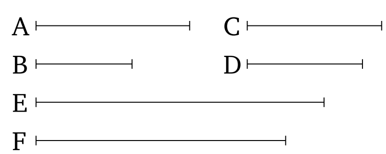
Ama D, *A* çarpımı olan sayı C'dir.

Öyleyse C, B aralarında asaldır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

26. Önerme:
Eğer iki sayı hem diğer iki sayıya asalsa, ve hem de her ikisi de her birine asalsa, çarpımları da aralarında asal olacaktır.

[a, b *sayılarıyla* c, d *sayıları verildiğinde,* $(a,c)=1$, $(a,d)=1$, $(b,c)=1$ *ve* $(b,d)=1$ *ise* $(ab,cd)=1$ *olur.]*



A, B sayıları C, D sayılarına asal olsun, her ikisi de her birine, ve *A*, B'yi çarparak E'yi oluştursun, ve C, D'yi çarparak F'yi oluştursun.

Diyorum ki, E, F aralarında asaldır.

Çünkü, A, B sayılarının her biri C'ye asal olduğundan, A,B çarpımı da C'ye asaldır. **[VII.24]**

Ama A, B çarpımı E'dir; öyleyse E, C aralarında asaldır.

Aynı nedenden dolayı, E, D de aralarında asaldır.

Bu durumda C, D sayılarının her biri E'ye asaldır.

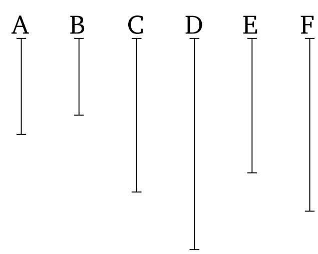
Öyleyse C, D çarpımı E'ye asaldır. **[VII.24]**

Ama C, D çarpımı F'dir.

Öyleyse E, F aralarında asaldır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

27. Önerme:
Eğer iki sayı aralarında asalsa, her biri kendi kendini çarparak yeni sayılar oluşturusa, bu çarpımlar aralarında asaldır; ve eğer baştaki sayılar bu çarpımları çarparak başka bazı sayılar oluştururrsa, bu yeni sayılar da aralarında asaldır.



A, B aralarında asal iki sayı olsun, A kendisini çarparak C'yi oluştursun, ve C'yi çarparak D'yi oluştursun, ve B kendisini çarparak E'yi oluştursun, ve E'yi çarparak F'yi oluştursun.

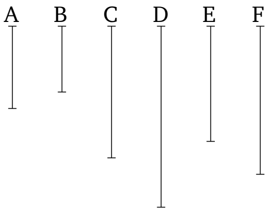
Diyorum ki, hem C, E, hem de D, F aralarında asaldır.

Çünkü, A, B aralarında asal olduğundan, ve A kendisini çarparak C'yi oluşturmuş olduğundan, C, B aralarında asaldır. **[VII.25]**

O zaman, C, B aralarında asal olduğundan, ve B kendisini çarparak E'yi oluşturmuş olduğundan, C, E aralarında asaldır. **[VII.25]**

Yine, A, B aralarında asal olduğundan, ve B kendisini çarparak E'yi oluşturmuş olduğundan, A, E aralarında asaldır. **[VII.25]**

O zaman, A, C sayıları B, E sayılarına asal olduğundan, her ikisi de her birine, A, C çarpımı da B, E çarpımına asaldır. **[VII.26]**



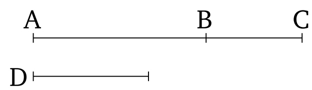
Ve A, C çarpımı D, ve B, E çarpımı F'dir.

Öyleyse D, F aralarında asaldır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

28. Önerme:

İki sayı aralarında asalsa bunların toplamı da her birine asaldır; iki sayının toplamı bunlardan birine asalsa o iki sayı aralarında asaldır.



Aralarında asal olan iki sayı AB, BC toplansın.

Diyorum ki toplam AC sayısı AB, BC sayılarının her biriyle asaldır.

Çünkü, eğer CA, AB aralarında asal değilse, bir sayı CA, AB'yi ölçecektir.

Bir sayı onları ölçsün ve bu sayı D olsun.

O zaman, D sayısı CA, AB'yi ölçtüğünden, kalan BC'yi de ölçecektir.

Ama BA'yı da ölçer; bu durumda D, aralarında asal olan AB, BC'yi ölçer: bu olamaz. **[Tan. VII.12]**

Bu durumda, hiçbir sayı CA, AB'yi ölçmeyecektir; öyleyse CA, AB aralarında asaldır.

Aynı nedenden dolayı, AC, CB de aralarında asaldır.

Öyleyse CA sayısı, AB, BC sayılarının her birine asaldır.

Şimdi de CA, AB aralarında asal olsun.

Diyorum ki, AB, BC aralarında asaldır.

Çünkü, eğer AB, BC aralarında asal değilse, bir sayı AB, BC'yi ölçecektir.

Bir sayı onları ölçsün ve bu sayı D olsun.

Şimdi, D sayısı AB, BC sayılarının her birini ölçtüğünden, CA'nın tamamını da ölçecektir.

Ama AB'yi de ölçer; bu durumda D, aralarında asal olan CA, AB'yi ölçer: bu olamaz. **[Tan. VII.12]**

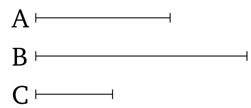
Bu nedenle hiçbir sayı AB, BC'yi ölçmeyecektir.

Öyleyse AB, BC aralarında asaldır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

29. Önerme:

Her asal sayı ölçmediği her sayıya asaldır.



A bir asal sayı olsun ve B'yi ölçmesin.

Diyorum ki, B, A aralarında asaldır.

Çünkü, eğer B, A aralarında asal değilse, bir sayı onları ölçecektir.

C onları ölçsün.

C, B'yi ölçtüğünden, ve A, B'yi ölçmediğinden, C ile A aynı değildir.

Şimdi, C sayısı B, A'yı ölçtüğünden, asal olan A'yı da, onunla aynı olmadığı halde, ölçer: bu olamaz.

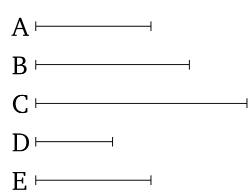
Bu nedenle hiçbir sayı B, A'yı ölçmeyecektir.

Öyleyse A, B aralarında asaldır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

30. Önerme:

Eğer iki sayı birbirine çarparak bir sayı oluştururursa, ve bir asal sayı bu çarpımı ölçerse, baştaki sayılardan birini de ölçer.

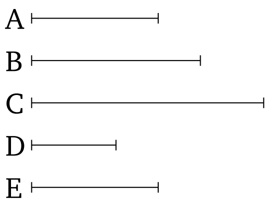


A, B sayıları birbirini çarparak C'yi oluştursun, ve bir asal sayı D, C'yi ölçsün.

Diyorum ki, D sayısı A, B sayılarından birini ölçer.

Çünkü, A'yı ölçmesin. Şimdi D asal, o yüzden A, D aralarında asaldır. **[VII.29]**

Ve, D, C'yi kaç kez ölçüyorsa E'de de o kadar birim olsun.



D sayısı C′yi E′deki birimler kadar ölçtüğünden, D, E′yi çarparak C′yi oluşturmuştur. **[Tan. VII.15]**

Ayrıca, A, B′yi çarparak C′yi oluşturmuştu; bu durumda D, E çarpımı A, B çarpımına eşit olur.

Öyleyse, D′nin A′ya oranı, B′nin E′ye oranına eşittir. **[VII.19]**

Ama D, A aralarında asaldır, ve asallar aynı orandaki sayılar arasında en küçüktür,

ve en küçükler aynı orandaki sayıları, büyüklerin büyükleri ve küçüklerin küçükleri ölçtüğü sayıda, yani öncüllerin öncülleri, ardılların ardılları ölçtüğü sayıda ölçer; **[VII.20]**

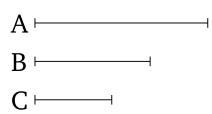
bu durumda D sayısı B′yi ölçer.

Benzer şeklide, eğer D, B′yi ölçmezse A′yı ölçeceğini gösterebiliriz.

Öyleyse D sayısı A, B sayılarından birini ölçer.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

31. Önerme:
Her bileşik sayıyı bir asal ölçer.



A bileşik bir sayı olsun.

Diyorum ki A bir asal tarafından ölçülür.

Çünkü, A bileşik olduğundan, bir sayı onu ölçecektir.

Bir sayı onu ölçsün ve o sayı B olsun.

Şimdi, eğer B asalsa, istenen gerçekleşmiştir.

Ama bileşikse, bir bir sayı onu ölçecektir.

Bir sayı onu ölçsün ve o sayı C olsun.

O zaman, C, B′yi ölçtüğünden, ve B, A′yı ölçtüğünden, C, A′yı da ölçer.

Ve, eğer C asalsa, istenen gerçekleşmiştir.

Ama bileşikse, bir sayı onu ölçecektir.

Böylece, bu inceleme bu şekilde sürdürülürse, bir önceki sayıyı ölçen, ve dolayısıyla A'yı ölçen bir asal bulunacaktır.

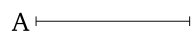
Çünkü, eğer bulunmazsa, her biri diğerinden küçük sonsuz tane sayı A'yı ölçecektir: sayılarda bu olmaz.

Bu nedenle, bir öncekini ve dolayısıyla A'yı ölçen bir asal sayı bulunacaktır.

Öyleyse her bileşik sayı bir asal tarafından ölçülür.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

32. Önerme:
Her sayı ya asaldır ya da bir asal tarafından ölçülür.



A bir sayı olsun.

Diyorum ki, A ya asaldır, ya da bir asal tarafından ölçülür.

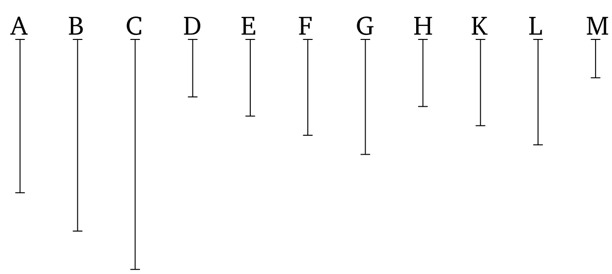
Şimdi, eğer A asalsa, istenen gerçekleşmiştir.

Ama bileşikse, bir asal onu ölçecektir. **[VII.31]**

Öyleyse her sayı ya asaldır, ya da bir asal tarafından ölçülür.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

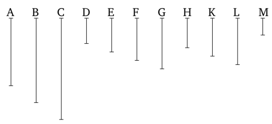
33. Önerme:
İstediğimiz miktarda verilen sayılarla aynı oranda olan en küçük sayıları bulmanın yolu.



İstediğimiz miktarda seçtiğimiz sayılar A, B, C olsun;

böylece A, B, C ile aynı oranda olan sayılar arasında en küçüklerinin bulunması isteniyor.

A, B, C sayıları ya aralarında asaldır, ya da değil.



Şimdi, eğer A, B, C aralarında asalsa, kendileriyle aynı oranda olan sayılar arasında en küçük olanı onlardır. **[VII.21]**

Ama değilse, A, B, C'nin en büyük ortak ölçüsü D alınsın, **[VII.3]**

ve D sayısı sırasıyla A, B, C'yi kaç kez ölçüyorsa E, F, G sayılarında sırasıyla o kadar birim olsun.

Bu durumda E, F, G sayıları sırasıyla A, B, C sayılarının D'deki birimler kadar ölçer. **[VII.16]**

Öyleyse E, F, G sayıları A, B, C sayılarını aynı sayıda ölçer; bu durumda E, F, G sayıları A, B, C sayılarıyla aynı orandadır. **[Tan. VII.20]**

Şimdi diyorum ki bunlar bu orandaki en küçük sayılardır.

Çünkü, eğer E, F, G sayıları A, B, C ile aynı oranda olan sayıların en küçükleri değilse, A, B, C ile aynı oranda ve E, F, G'den daha küçük sayılar olacaktır.

Bu sayılar H, K, L olsun;

öyleyse K, L sayıları sırasıyla B, C sayılarını kaç kez ölçüyorsa, H de A'yı o kadar ölçer.

Şimdi, H, A'yı kaç kez ölçüyorsa M'de de o kadar birim olsun; bu durumda K, L sayıları da sırasıyla B, C sayılarını M'deki birimler kadar ölçer.

Ve, H, A'yı M'deki birimler kadar ölçtüğünden, M de A'yı H'deki birimler kadar ölçer. **[VII.16]**

Aynı nedenden dolayı, M sayısı B, C sayılarını sırasıyla K, L'deki birimler kadar ölçer; öyleyse M sayısı A, B, C'yi ölçer.

Şimdi, H, A'yı M'deki birimler kadar ölçtüğünden, H, M'yi çarparak A'yı oluşturmuştur. **[Tan. VII.15]**

Aynı nedenden dolayı, E de D'yi çarparak A'yı oluşturmuştur.

Öyleyse E, D çarpımı H, M çarpımına eşittir.

Bu durumda, E'nin H'ye oranı, M'nin D'ye oranına eşit olur. **[VII.19]**

Ama E, H'den büyüktür; öyleyse M de D'den büyüktür.

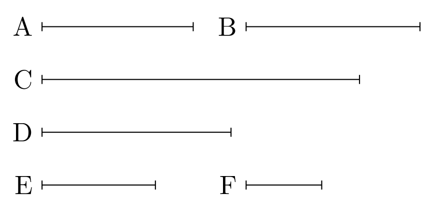
Ve A, B, C'yi ölçer: bu olamaz çünkü D sayısı A, B, C'nin en büyük ortak ölçüsüdür.

Bu nedenle A, B, C ile aynı oranda ve E, F, G'den daha küçük sayılar olamaz.

Öyleyse E, F, G sayıları A, B, C ile aynı orandaki sayılar arasında en küçükleridir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

34. Önerme:
Verilen iki sayının ölçtüğü en küçük sayıyı bulmanın yolu.



Verile iki sayı A, B olsun; böylece bunların ölçtüğü en küçük sayının bulunması isteniyor.

Şimdi, A, B sayıları ya aralarında asaldır, ya da değildir.

Önce A, B aralarında asal olsun, ve A, B'yi çarparak C'yi oluştursun; bu durumda B de A'yı çarparak C'yi oluşturmuş olur. **[VII.16]**

Öyleyse A, B sayıları C'yi ölçer.

Şimdi diyorumki, bu ölçtükleri en küçük sayıdır.

Çünkü, eğer değilse, A, B sayıları C'den daha küçük bir sayıyı ölçecekler.

D'yi ölçsünler.

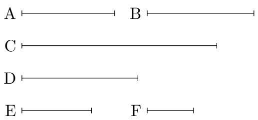
O zaman, A, D'yi kaç kez ölçerse, E'nin içinde o kadar birim olsun, ve B, D'yi kaç kez ölçerse, F'nin içinde o kadar birim olsun;

bu durumda A, E'yi çarparak D'yi oluşturur, ve B, F'yi çarparak D'yi oluşturur; **[Tan. VII.15]**

bu durumda A, E çarpımı B, F çarpımına eşit olur.

Öyleyse, A'nın B'ye oranı, F'nin E'ye oranına eşittir. **[VII.19]**

Ama A, B aralarında asaldır, ve asallar aynı orandaki sayılar arasında en küçük olanlarıdır, **[VII.21]**



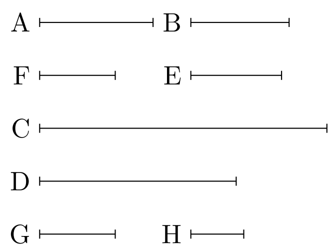
ve en küçükler, kendileriyle aynı orandaki sayıları aynı sayıda, büyüklerin büyükleri ve küçüklerin küçükleri ölçtüğü sayıda, ölçer; **[VII.20]**

öyleyse ardıl ardılı olarak, B, E'yi ölçer.

Ve, A sayısı B, E'yi çarparak C, D'yi oluşturduğundan, B'nin E'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Ama B, E'yi ölçer; öyleyse C de D'yi ölçer, büyük olan küçük olanı: bu olamaz.

Bu nedenle A, B sayıları C'den küçük hiçbir sayıyı ölçmez; öyleyse A, B'nin ölçtüğü en küçük sayı C'dir.



Şimdi de A, B aralarında asal olmasın,

ve A, B ile aynı oranda olan sayılar arasındaki en küçükleri F, E alınsın; **[VII.33]**

bu durumda A, E çarpımı B, F çarpımına eşit olur. **[VII.19]**

Ve, A, E'yi çarparak C'yi oluştursun; bu durumda B de F'yi çarparak C'yi oluşturmuş olur; öyleyse A, B sayıları C'yi ölçer.

Diyorum ki, bu onların ölçtüğü en küçük sayıdır.

Çünkü, eğer değilse, A, B sayıları C'den küçük başka bir sayıyı ölçecektir.

D'yi ölçsünler.

Ve, A, D'yi kaç kez ölçüyorsa, G'nin içinde de o kadar birim olsun,

ve B, D'yi kaç kez ölçüyorsa, H'nin içinde o kadar birim olsun.

Bu durumda, A, G'yi çarparak D'yi oluşturur, ve B, H'yi çarparak D'yi oluşturur.

Öyleyse A, G çarpımı B, H çarpımına eşittir; bu durumda A'nın B'ye oranı, H'nin G'ye oranına eşit olur. **[VII.19]**

Ama, A'nın B'ye oranı, F'nin E'ye oranına eşittir.

Öyleyse F'nin E'ye oranı, H'nin G'ye oranına eşittir.

Ama F, E en küçüklerdir,

ve en küçükler, kendileriyle aynı orandaki sayıları aynı sayıda, büyüklerin büyükleri ve küçüklerin küçükleri ölçtüğü sayıda, ölçer; **[VII.20]**

öyleyse E, G'yi ölçer.

Ve, A sayısı E, G'yi çarparak C, D'yi oluşturduğundan, E'nin G'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

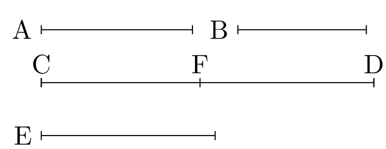
Ama E, G'yi ölçer; öyleyse C de D'yi ölçer, büyük olan küçük olanı: bu olamaz.

Bu nedenle A, B sayıları C'den küçük hiçbir sayıyı ölçmez.

Öyleyse C sayısı A, B'nin ölçtüğü en küçük sayıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

35. Önerme:
Eğer iki sayı bir sayıyı ölçüyorsa, o iki sayı tarafından ölçülen en küçük sayı da o sayıyı ölçer.



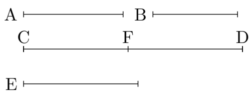
A, B sayıları bir CD sayısını ölçsün, ve E de onların ölçtüğü en küçük sayı olsun.

Diyorum ki E, CD'yi ölçer.

Çünkü, eğer E, CD'yi ölçmezse, E, DF'yi ölçerek kendinden küçük CF kalanını bıraksın.

Şimdi, A, B sayıları E'yi ölçtüğünden, ve E, DF'yi ölçtüğünden, A, B sayıları DF'yi de ölçecektir.

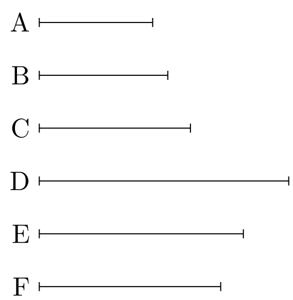
Ama CD'nin tamamını da ölçerler; öyleyse E'den küçük olan DF kalanını da ölçerler: bu olamaz.



Öyleyse E sayısı CD'yi ölçmemezlik yapamaz.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

36. Önerme:
Üç sayı verildiğinde, ölçtükleri en küçük sayıyı bulmanın yolu.



Verilen üç sayı A, B, C olsun; böylece bunların ölçtüğü en küçük sayının bulunması isteniyor.

A, B'nin ölçtüğü en küçük sayı D alınsın. **[VII.34]**

Şimdi C, D'yi ya ölçer ya da ölçmez.

Önce ölçsün.

Ama A, B de D'yi ölçer; öyleyse A, B, C sayıları D'yi ölçer.

Şimdi diyorum ki, ölçtükleri en küçük sayı budur.

Çünkü, eğer değilse, A, B, C sayıları D'den küçük bir sayıyı ölçerler.

E'yi ölçsünler.

A, B, C sayıları E'yi ölçtüğünden, A, B de E'yi ölçer.

Bu durumda A, B'nin ölçtüğü en küçük sayı da E'yi ölçer, **[VII.35]**

Ama A, B'nin ölçtüğü en küçük sayı D'dir; bu durumda D, E'yi bölecektir, büyük olan küçük olanı: bu olamaz.

Bu nedenle A, B, C sayıları D'den küçük hiçbir sayıyı ölçmeyecektir.

Öyleyse A, B, C'nin ölçtüğü en küçük sayı D'dir.

Şimdi de C, D'yi ölçmesin,

ve C, D'nin ölçtüğü en küçük sayı E alınsın. **[VII.34]**

A, B sayıları D'yi ölçtüğünden, ve D, E'yi ölçtüğünden, A, B sayıları E'yi ölçer.

Ama C de E'yi ölçer; öyleyse A, B, C sayıları E'yi ölçer.

Diyorum ki ölçtükleri en küçük sayı da budur.

Çünkü, eğer değilse, A, B, C sayıları E'den küçük bir sayıyı ölçeceklerdir.

F'yi ölçsünler.

A, B, C sayıları F'yi ölçtüğünden, A, B de F'yi ölçer; öyleyse A, B'nin ölçtüğü en küçük sayı da F'yi ölçer. **[VII.35]**

Ama A, B'nin ölçtüğü en küçük sayı D'dir; bu durmda D, F'yi ölçer.

Ama C de F'yi ölçer; öyleyse D, C sayıları F'yi ölçer, böylece D, C'nin ölçtüğü en küçük sayı da F'yi ölçer.

Ama C, D'nin ölçtüğü en küçük sayı E'dir; bu durumda E, F'yi ölçer, büyük olan küçük olanı: bu olamaz.

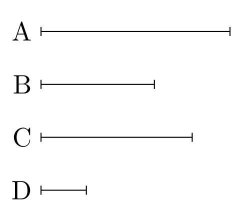
Bu nedenle A, B, C sayıları E'den küçük hiçbir sayıyı ölçemez.

Öyleyse A, B, C'nin ölçtüğü en küçük sayı E'dir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

37. Önerme:
Eğer bir sayı bir sayı tarafından ölçülürse, ölçülen sayının ölçen sayıyla aynı adı taşıyan bir parçası vardır.

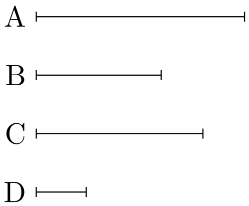
[Eğer B *sayısı* A *sayısını ölçerse,* A*'nın aynı adlı parçası denen parça, "*A*'nın* B*'de biri" adındaki parçadır.]*



A sayısı B sayısı tarafından ölçülsün.

Diyorum ki A'nın B ile aynı adda bir parçası vardır.

Çünkü, B, A'yı kaç kez ölçüyorsa, C'nin içinde o kadar birim olsun.



B, A'yı C'deki birimler kadar ölçtüğünden, ve D birimi de C'yi içindeki birimler kadar ölçtüğünden, D birimi C sayısını, B'nin A'yı ölçtüğü kadar ölçer.

Bu durumda, yer değiştirerek, D birimi B sayısını, C'nin A'yı ölçtüğü kadar ölçer; **[VII.15]**

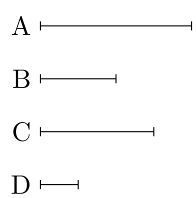
öyleyse D birimi B'nin hangi parçasıysa, C de A'nın aynı parçasıdır.

Ama D, B'nin kendisiyle aynı adlı parçasıdır; öyleyse C de A'nın B ile aynı adlı parçasıdır, böylece C, A'nın B ile aynı adlı parçasıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

38. Önerme:
Eğer bir sayının bir parçası varsa, o parçayla aynı addaki bir sayı tarafından ölçülür.

[A sayısının C'de bir oranında bir parçası varsa, A sayısı C tarafından ölçülür.]



A sayısının bir B parçası olsun, ve C de B parçasıyla aynı adda bir sayı olsun.

Diyorum ki, C, A'yı ölçer.

Çünkü, B, A'nın C ile aynı addaki bir parçası olduğundan, ve D birimi de C'nin aynı adlı parçası olduğundan, D birimi C sayısının hangi parçasıysa, B de A'nın aynı parçasıdır;

bu durumda D birimi C'yi, B, A'yı kaç kez ölçüyorsa, o kadar ölçer.

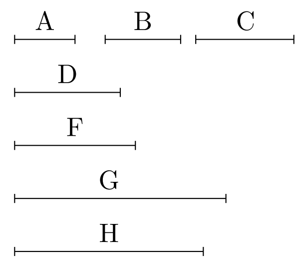
Bu nedenle, yer değiştirerek, D birimi B'yi, C, A'yı kaç kez ölçüyorsa, o kadar ölçer.

Öyleyse C, A'yı ölçer.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

39. Önerme:

Verilen parçalara sahip olan en küçük sayıyı bulmanın yolu.



Verilen parçalar A, B, C olsun; böylece A, B, C parçalarına sahip olan en küçük sayının bulunması isteniyor.

A, B, C parçalarıyla aynı adı taşıyan sayılar D, E, F olsun, ve D, E, F'nin ölçtüğü en küçük sayı G alınsın. **[VII.36]**

Bu durumda G'nin D, E, F ile aynı adda parçaları vardır. **[VII.37]**

Ama A, B, C de D, E, F ile aynı adlı parçalardır; öyleyse G de A, B, C parçalarına sahiptir.

Şimdi diyorum ki, bu parçalara sahip en küçük sayı odur.

Çünkü, eğer değilse, G'den küçük ve aynı parçalara sahip bir sayı vardır.

Bu sayı H olsun.

H'nin A, B, C parçaları olduğundan, H sayısı A, B, C parçalarıyla aynı adlı sayılar tarafından ölçülecektir. **[VII.38]**

Ama A, B, C parçalarıyla aynı adlı sayılar D, E, F'dir; öyleyse H sayısı D, E, F tarafından ölçülür.

Ama G'den küçüktür: bu olamaz.

Öyleyse G'den küçük hiçbir sayı A, B, C parçalarına sahip değildir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■