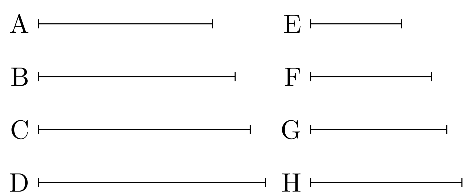
Kitap VIII

1. Önermeler

1. Önerme:
İstediğimiz miktarda alacağımız sürekli orantılı sayıların iki ucundakiler aralarında asalsa, bu sayılar kendileriyle aynı orandaki sayılar arasında en küçükleridir.

[Sürekli orantılı sayılar geometrik dizi oluşturur.]



İstediğimiz miktarda seçilen sürekli orantılı sayılar A, B, C, D olsun, ve uçtaki A, D aralarında asal olsun.

Diyorum ki, A, B, C, D sayıları kendileriyle aynı orandaki sayılar arasında en küçükleridir.

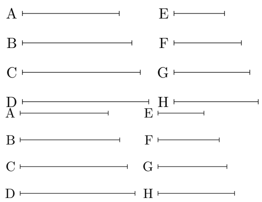
Çünkü, eğer değilse, E, F, G, H sayıları A, B, C, D'den küçük ve onlarla aynı oranda olsun.

Şimdi, A, B, C, D sayıları E, F, G, H ile aynı oranda olduğundan, ve A, B, C, D sayılarının miktarı, E, F, G, H sayılarının miktarıyla aynı olduğundan,

eşit dış oranlar olarak, A'nın D'ye oranı, E'nin H'ye oranına eşittir. **[VII.14]**

Ama A, D aralarında asaldır,

ve asal olanlar en küçüktür,



ve en küçükler aynı oranda olanları aynı oranda, büyüklerin büyükleri ve küçüklerin küçükleri böldüğü, yani öncüllerin öncülleri, ardılların ardılları böldüğü oranda böler. **[VII.20]**

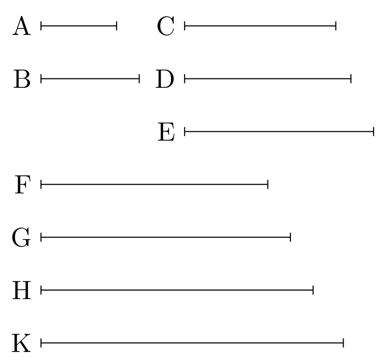
Bu durumda A, E'yi ölçer, büyük küçüğü: bu olamaz.

Bu nedenle A, B, C, D'den küçük olan E, F, G, H, onlarla aynı oranda olamaz.

Öyleyse A, B, C, D, kendileriyle aynı oranda olanlar arasında en küçükleridir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

2. Önerme:
Önceden belirlenen miktarda ve ortak oranı verilmiş en küçük terimli sürekli orantılı sayıları bulmanın yolu.



En küçük sayılarla verilen oran A'nın B'ye oranı olsun; böylece önceden belirlenen miktarda ve oranları A'nın B'ye oranına eşit olan sürekli orantılı sayıların bulunması isteniyor.

Önceden belirlenen miktar dört olsun;

A, kendisini çarparak C'yi oluştursun, ve B'yi çarparak D'yi oluştursun; ve B kendisini çarparak E'yi oluştursun;

ayrıca, A sayısı C, D, E'yi çarparak F, G, H'yi oluştursun, ve B de E'yi çarparak K'yi oluştursun.

Şimdi, A kendisini çarparak C'yi oluşturduğundan, ve B'yi çarparak D'yi oluşturduğundan, A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Yine, A, B'yi çarparak D'yi oluşturduğundan, ve B kendisini çarparak E'yi oluşturduğundan, A, B sayıları B'yi çarparak, sırasıyla D, E sayılarını oluşturmuş olur.

Öyleyse A'nın B'ye oranı D'nin E'ye oranına eşittir. **[VII.18]**

Ama A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşittir; bu durumda C'nın D'ye oranı, D'nin E'ye oranına da eşit olur.

Ve, A sayısı C, D'yi çarparak F, G'yi oluşturduğundan, C'nin D'ye oranı, F'nin G'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Ama, C'nin D'ye oranı, A'nın B'ye oranına eşitti; öyleyse A'nın B'ye oranı, F'nin G'ye oranına da eşittir.

Yine, A sayısı D, E'yi çarparak G, H'yi oluşturduğundan, D'nin E'ye oranı, G'nin H'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Ama, D'nin E'yen oranı, A'nın B'ye oranına eşittir.

Öyleyse A'nın B'ye oranı, G'nin H'ye oranına eşittir.

Ve, A, B sayıları E'yi çarparak H, K'yi oluşturduğundan, A'nın B'ye oranı, H'nin K'ye oranına eşittir. **[VII.18]**

Ama A'nın B'ye oranı, F'nin G'ye oranına, ve G'nin H'ye oranına eşittir.

Öyleyse F'nin G'ye oranı, G'nin H'ye oranına, ve H'nin K'ye oranına eşittir; bu durumda C, D, E ve F, G, H, K sayıları A'nın B'ye oranında orantılıdır.

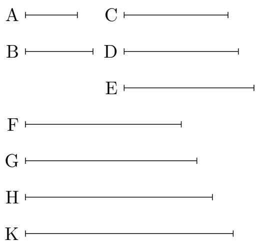
Şimdi diyorum ki, bunlar bu özellikteki en küçük sayılardır.

Çünkü, A, B, kendileriyle aynı oranda olanlar arasında en küçükleri olduklarından, ve kendileriyle aynı oranda olanlar arasında en küçük olanlar aralarında asal olduğundan, **[VII.22]**

A, B aralarında asaldır.

Ve A, B sayıları kendilerini çarparak sırasıyla C, E sayılarını, ve C, E sayılarını çarparak sırasıyla F, K sayılarını oluşturmuşlardır; öyleyse C, E ve F, K sayıları sırasıyla aralarında asaldır; **[VII.27]**

Ama, istediğimiz miktarda sürekli orantılı sayılar varsa ve uçtakiler aralarında asalsa, bu sayılar aynı orandakiler arasında en küçükleridir. **[VIII.1]**



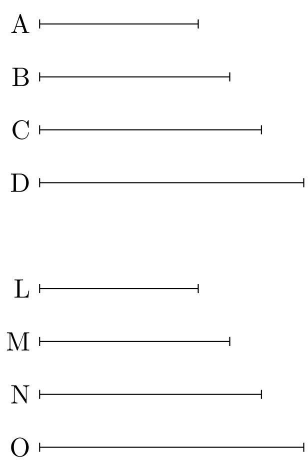
Öyleyse C, D, E, ve F, G, H K sayıları A'nın B'ye oranına sahip olanlar arasında en küçükleridir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

Doğal Sonuç: Buradan açıkça görülür ki, en küçük terimli ve sürekli orantılı üç sayı verilirse uçtaki sayılar karedir, dört sayı verilirse küptür.

3. Önerme:

Sürekli orantılı istediğimiz miktarda sayı aldığımızda eğer bunlar aynı orandaki sayılar arasında en küçükleriyse, uçtaki sayılar aralarında asaldır.



İstediğimiz miktarda seçilen sürekli orantılı sayılar A, B, C, D olsun ve bunlar kendileriyle aynı orandakiler arasında en küçükleri olsun.

Diyorum ki, uçtaki A, D aralarında asaldır.

Çünkü, A, B, C, D oranındaki en küçük sayılar, E, F alınsın, **[VII.33]**

ve aynı oranda sürekli orantılı en küçük G, H, K sayıları alınsın, **[VIII.2]**

ve miktarları A, B, C, D'nin miktarına ulaşıncaya kadar devam edilsin.

Bunlar alınmış olsun ve L, M, N, O olsunlar.

Şimdi, E, F aynı orandakiler arasında en küçükleri olduğundan, aralarında asaldır. **[VII.22]**

Ve, E, F sayıları kendilerini çarparak sırasıyla G, K'yi oluşturduğundan, ve G, K'yi çarparak sırasıyla L, O'yu oluşturduğundan, **[DS.VIII.2]**

G, K, ve L, O aralarında asaldır. **[VII.27]**

Ve, A, B, C, D, aynı orandakiler arasında en küçükleri olduğundan, ayrıca L, M, N, O sayıları A, B, C, D ile aynı oranda olanlar arasında en küçükleri olduğundan, ve A, B, C, D'nin miktarı L, M, N, O'nun miktarıyla aynı olduğundan,

A, B, C, D sayıları sırasıyla L, M, N, O sayılarına eşittir;

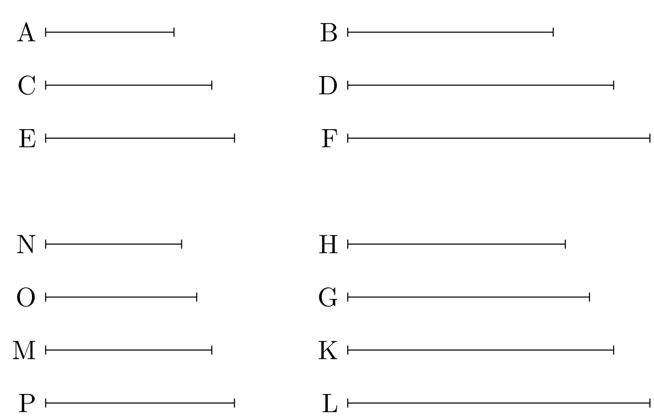
bu durumda A, L'ye eşittir, D de O'ya.

Öyleyse A, D aralarında asaldır.

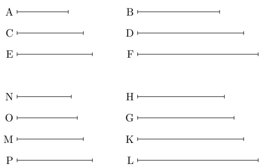
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

4. Önerme:
En küçük terimleriyle ifade edilen bir miktar oran verilmiş olsun. Her birinin bir sonrakine oranı, verilen bu oranlar olan, sürekli orantılı en küçük sayıları bulmanın yolu.

[Öklid burada sürekli orantılı kavramını farklı kullanıyor. Ardışık oranların eşit olması yerine ardışık oranların önceden verilen oranlara eşit olmasını istiyor. Yani, $(a_i, b_i) = 1$ *olacak şekilde* $\frac{a_i}{b_i}, i = 1, \ldots, n$, *oranları verilmiş olsun.* $(c_1, \ldots, c_{n+1}) = 1$ *ve* $\frac{c_i}{c_{i+1}} = \frac{a_i}{b_i}, i = 1, \ldots n$, *olacak şekilde* $c_1, \ldots, c_{n+1}$ *sayılarının bulunması isteniyor.]*



En küçük sayılarla verilen oranlar A'nın B'ye, C'nin D'ye, ve E'nin F'ye oranları olsun.



Böylece, A'nın B'ye, C'nin D'ye, ve E'nin F'ye oranında olan en küçük sürekli orantılı sayıların bulunması isteniyor.

B, C tarafından ölçülen en küçük sayı G alınsın. **[VII.34]**

Ve, B, G'yi kaç kez ölçüyorsa, A da H'yi o kadar ölçsün,

ve C, G'yi kaç kez ölçüyorsa, D de K'yi o kadar ölçsün.

Şimdi, E, K'yi ya ölçüyordur, ya da ölçmüyordur.

Önce ölçsün.

Ve, E, K'yi kaç kez ölçüyorsa, F de L'yi o kadar ölçsün.

Şimdi, A, H'yi, B'nin G'yi ölçtüğü kadar ölçtüğünden, A'nın B'ye oranı H'nin G'ye oranına eşittir. **[Tan. VII, VII.13]**

Aynı nedenden dolayı, C'nin D'ye oranı, G'nin K'ye oranına eşittir, ve ayrıca E'nin F'ye oranı, K'nin L'ye oranına eşittir;

öyleyse H, G, K, L sayıları, A'nın B'ye oranında, C'nin D'ye oranında, ve E'nin F'ye oranında sürekli orantılıdır.

Şimdi de diyorum ki, bunlar bu özelliktekiler arasında en küçükleridir.

Çünkü, eğer H, G, K, L sayıları, A'nın B'ye oranında, C'nin D'ye oranında, ve E'nin F'ye oranında sürekli orantılı olanların en küçükleri değilse, en küçükleri N, O, M, P olsun.

O zaman, A'nın B'ye oranı, N'nin O'ya oranına eşit olduğundan, ve bu arada A, B en küçük olduğundan,

ve en küçükler kendileriyle aynı oranda olanları aynı sayıda ölçtüğünden, büyük olan büyük olanı, küçük olan küçük olanı, yani öncül öncülü, ardıl ardılı,

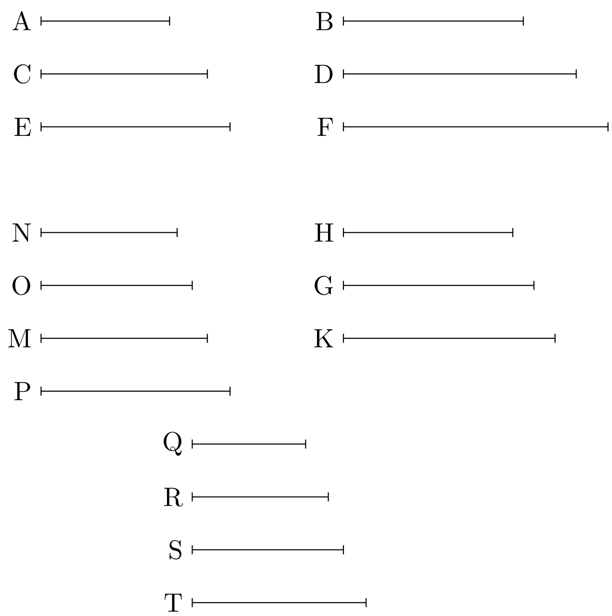
B, O'yu ölçer. **[VII.20]**

Aynı nedenden dolayı, C, Oyu ölçer; öyleyse B, C sayıları O'yu ölçer;

bu durumda B, C'nin ölçtüğü en küçük sayı da O'yu ölçecektir. **[VII.35]**

Ama B, C'nin ölçtüğü en küçük sayı G'dir; bu durumda G, O'yu ölçer, büyük olan küçük olanı: bu olamaz.

Öyleyse H, G, K, L sayılarından daha küçük, ve A'nın B'ye oranında, C'nin D'ye oranında, ve E'nin F'ye oranında sürekli orantılı olan başka sayılar yoktur.



Şimdi de E, K'yi ölçmesin.

E, K'nin ölçtüğü en küçük sayı M alınsın.

Ve, K, M'yi kaç kez ölçüyorsa, H, G sayıları da sırasıyla N, O'yu o kadar ölçsün,

E, M'yi kaç kez ölçüyorsa, F de P'yi o kadar ölçsün.

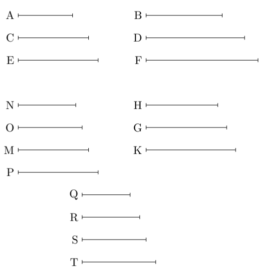
H, N'yi, G'nin O'yu ölçtüğü kadar ölçtüğünden, H'nin G'ye oranı, N'nin O2ya oranına eşittir. **[VII.13 ve Tan. VII.20]**

Ama H'nin G'ye oranı, A'nın B'ye oranına eşittir; bu durumda A'nın B'ye oranı, N'nin O'ya oranına eşit olur.

Aynı nedenden dolayı, C'nin D'ye oranı, O'nun M'ye oranına eşit olur.

Yine, E, M'yi, F'nin P'yi ölçtüğü sayıda ölçtüğünden, E'nin F'ye oranı, M'nin P'ye oranına eşittir. **[VII.13 ve Tan. VII.20]**

Öyleyse N, O, M, P sayıları, A'nın B'ye, C'nin D'ye, ve E'nin F'ye oranında sürekli orantılıdır.



Şimdi diyorum ki bunlar aynı zamanda A'nın B'ye, C'nin D'ye, ve E'nin F'ye oranlarında en küçük olanlardır.

Çünkü, eğer değillerse, N, O, M, P'den daha küçük ve A'nın B'ye, C'nin D'ye, ve E'nin F'ye oranlarında sürekli orantılı sayılar olacaktır.

Bunlar Q, R, S, T olsun.

Şimdi, Q'nun R'ye oranı, A'nın B'ye oranına eşit olduğundan, ve bu arada A, B en küçük olduğundan,

ve en küçükler kendileriyle aynı oranda olanları aynı sayıda ölçtüğünden, büyük olan büyük olanı, küçük olan küçük olanı, yani öncül öncülü, ardıl ardılı,

B, R'yi ölçer. **[VII.20]**

Aynı nedenden dolayı C, R'yi ölçer; öyleyse B, C sayıları R'yi ölçer.

bu durumda B, C'nin ölçtüğü en küçük sayı da R'yi ölçecektir. **[VII.35]**

Ama B, C'nin ölçtüğü en küçük sayı G'dir; bu durumda G, Ryi ölçer.

Ve G'nin R'ye oranı, K'nin S'ye oranına eşittir; **[VII.13]**

bu durumda K de S'yi ölçer.

Ama E de S'yi ölçer; bu durumda E, K sayıları S'yi ölçer.

Öyleyse E, K'nin ölçtüğü en küçük sayı da S'yi ölçer.

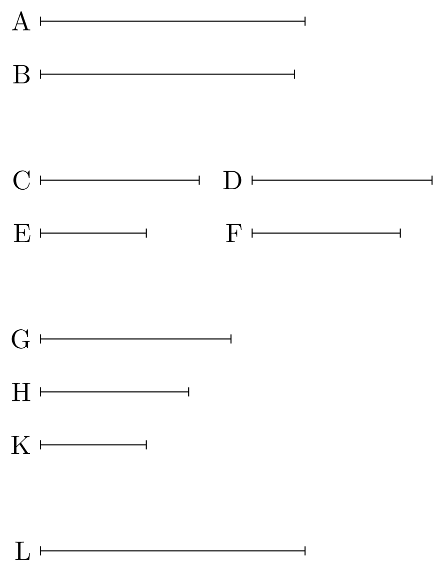
Ama E, K'nin ölçtüğü en küçük sayı M'dir; bu durumda M, S'yi ölçer, büyük olan küçük olanı: bu olamaz.

Öyleyse N, O, M, P sayılarından daha küçük, ve A'nın B'ye, C'nin D'ye, ve E'nin F'ye oranında sürekli orantılı olan başka sayılar yoktur.

Öyleyse N, O, M, P sayıları, A'nın B'ye, C'nin D'ye, ve E'nin F'ye oranlarında sürekli orantılı en küçük sayılardır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

5. Önerme:
Düzlem sayıların birbirine oranı, kenarların oranlarının bileşik oranına eşittir.



A, B düzlem sayıları olsun, C, D sayıları A'nın, E, F sayıları da B'nin kenarları olsun.

Diyorum ki, A'nın B'ye oranı kenarların oranlarının bileşik oranıdır.

Çünkü, C'nin E'ye, ve D'nin F'ye oranları verildiğinden, $C : E$, $D : F$ oranlarında sürekli orantılı olan en küçük G, H, K sayıları alınsın, yani C'nin E'ye oranı, G'nin H'ye oranına eşit, ve D'nin F'ye oranı, H'nin K'ye oranına eşit olsun. **[VIII.4]**

Ve, D sayısı E'yi çarparak L'yi oluştursun.

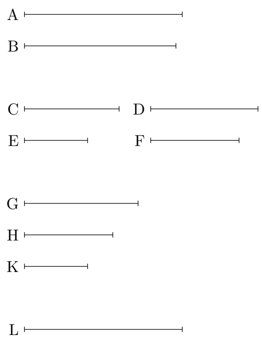
Şimdi, D sayısı C'yi çarparak A'yı oluşturduğundan, ve E'yi çarparak L'yi oluşturduğundan, C'nin E'ye oranı, A'nın L'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Ama, C'nin E'ye oranı, G'nin H'ye oranına eşittir; bu durumda G'nin H'ye oranı, A'nın L'ye oranına eşit olur.

Yine, E sayısı D'yi çarparak L'yi oluşturduğundan, ve ayrıca F'yi çarparak B'yi oluşturduğundan, D'nin F'ye oranı, L'nin B'ye oranına eşit olur. **[VII.17]**

Ama, D'nin F'ye oranı, H'nin K'ye oranına eşittir; bu durumda H'nin K'ye oranı, L'nin B'ye oranına eşit olur.

Ama G'nin H'ye oranının, A'nın L'ye oranına eşit olduğu kanıtlanmıştı;

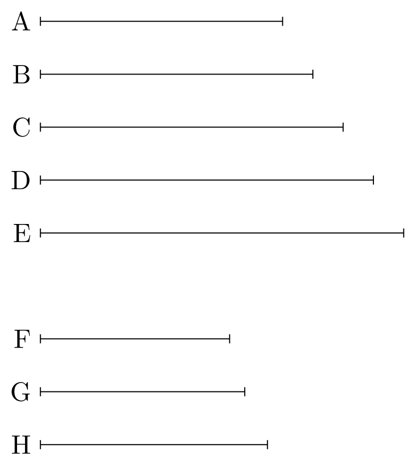


öyleyse eşit dış oranlar olarak G'nin K'ye oranı, A'nın B'ye oranına eşittir; **[VII.14]**

Ama G'nin Kye oranı kenarların oranlarının bileşik oranıdır;

öyleyse A'nın B'ye oranı, kenarların oranlarının bileşik oranıdır. Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

6. Önerme:
Sürekli orantılı istediğimiz miktarda sayı aldığımızda eğer birincisi ikinciyi ölçmüyorsa, hiçbiri diğerini ölçmeyecektir.



İstediğimiz miktarda aldığımız sürekli orantılı sayılar A, B, C, D, E olsun, ve A, B'yi ölçmesin.

Diyorum ki hiçbiri diğerini ölçmeyecektir.

Çünkü, eğer mümkünse, A, C'yi ölçsün.

Ve, A, B, C kaç taneyse, aynı sayıda ve A, B, C ile aynı oranda olan en küçük F, G, H sayılarını alalım. **[VII.33]**

Şimdi, F, G, H sayıları A, B, C ile aynı oranda olduklarından, ve A, B, C sayılarının miktarı F, G, H sayılarının miktarına eşit olduğundan, eşit dış oranlar olarak A'nın C'ye oranı, F'nin H'ye oranına eşittir. **[VII.14]**

Ve A'nın Bye oranı, F'nin G'ye oranına eşit olduğundan, ve bu arada A, B'yi ölçmediğinden, F de G'yi ölçmez; **[Tan. VII.20]**

öyleyse F bir birim değildir, çünkü birim her sayıyı ölçer.

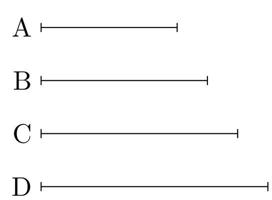
Şimdi, F, H aralarında asaldır. **[VIII.3]**

Ve F'nin H'ye oranı, A'nın C'ye oranına eşittir; öyleyse A da C'yi ölçmez.

Benzer şekilde hiçbirinin diğerini ölçmeyeceğini kanıtlayabiliriz.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

7. Önerme:
Sürekli orantılı istediğimiz miktarda sayı aldığımızda eğer birincisi sonuncuyu ölçüyorsa ikinciyi de ölçecektir.



İstediğimiz miktarda aldığımız sürekli orantılı sayılar A, B, C, D olsun, ve A, D'yi ölçsün.

Diyorum ki A, B'yi ölçer.

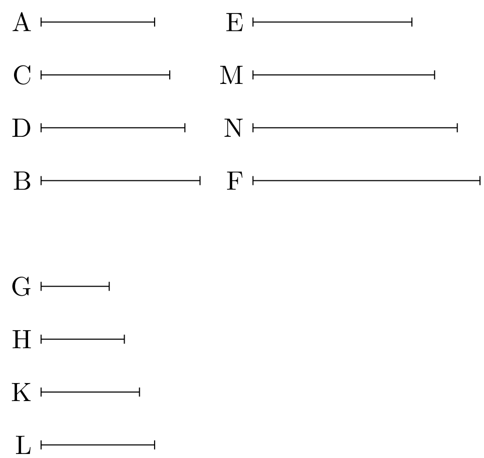
Çünkü, eğer A, B'yi ölçmezse, hiçbiri diğerini ölçmeyecektir. **[VIII.6]**

Ama A, D'yi ölçer. Öyleyse A, B'yi de ölçer.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

8. Önerme:

Eğer verilen iki sayı arasına onlarla sürekli orantılı bir dizi oluşturacak şekilde sayılar yerleştirmek mümkünse, bu ikisi arasına böyle kaç sayı yerleştirilebiliyorsa verilen o ilk iki sayıyla aynı oranda olan her iki sayı arasına da aynı sayıda ve onlarla sürekli orantılı dizi oluşturacak şekilde sayı yerleştirilebilir.



A, B sayıları arasına, onlarla sürekli orantılı olan C, D sayıları yerleştirilmiş olsun, ve E'nin F'ye oranının A'nın B'ye oranına eşit olması sağlansın.

Diyorum ki, A, B'nin arasına sürekli orantılı kaç sayı sığdıysa, E, F'nin arasına da aynı sayıda sürekli orantılı sayı sığacaktır.

Çünkü, A, B, C, D sayılarıyla aynı miktarda, ve A, B, C, D ile aynı oranda olan en küçük G, H, K, L sayıları alınsın; **[VII.33]**

bu durumda uçtakiler G, L aralarında asaldır. **[VIII.3]**

Şimdi, A, B, C, D sayıları G, H, K, L ile aynı oranda olduğundan, ve A, C, D, B sayılarının miktarı G, H, K, L sayılarının miktarıyla aynı olduğundan, eşit dış oranlar olarak A'nın B'ye oranı, G'nin L'ye oranına eşittir. **[VII.14]**

Ama A'nın B'ye oranı, E'nin F'ye oranına eşittir; bu durumda G'nin L'ye oranı, E'nin F'ye oranına eşit olur.

Ama G, L aralarında asaldır, ve asallar en küçüktür, **[VII.21]** ve en küçükler aynı orandakileri aynı sayıda ölçerler, büyük olan büyük olanı, ve küçük olan küçük olanı, yani öncüller öncülleri, ardıllar ardılları. **[VII.20]**

Öyleyse G, E'yi, L'nin F'yi ölçtüğü kadar ölçer.

Bunun yanısıra, G, E'yi kaç kez ölçüyorsa, sırasıyla H, K de M, N'yi o kadar ölçsün;

bu durumda G, H, K, L sayıları E, M, N, F'yi aynı sayıda ölçer.

Öyleyse G, H, K, L sayıları E, M, N, F ile aynı orandadır. **[Tan. VII.20]**

Ama G, H, K, L sayıları A, B, C, D ile aynı orandadır; bu durumda A, B, C, D sayıları E, M, N, F ile aynı oranda olur.

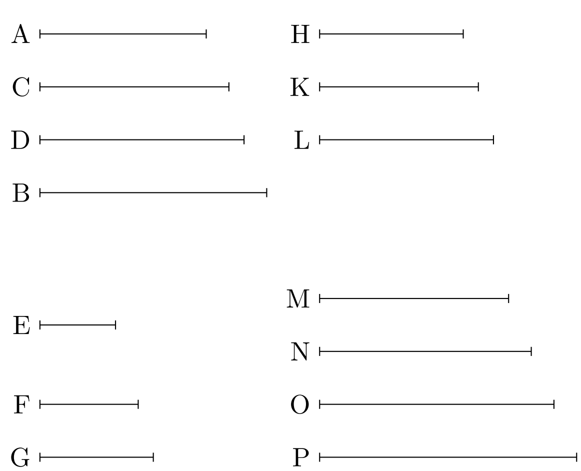
Ama A, B, C, D sayıları sürekli orantılıdır; öyleyse E, M, N, F de sürekli orantılıdır.

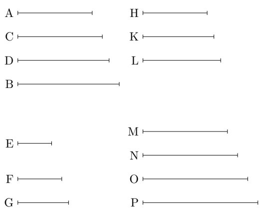
Öyleyse A, B'nin arasına sürekli orantılı kaç sayı sığdıysa, E, F'nin arasına da aynı sayıda sürekli orantılı sayı sığmıştır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

9. Önerme:

Aralarında asal olan iki sayı arasına onlarla sürekli orantılı bir dizi oluşturacak şekilde sayılar yerleştirilebiliyorsa, kaç tane böyle sayı yerleştirilebiliyorsa aynı miktarda sayı, aralarında asal olan o sayıların herbiriyle birim arasına da sürekli orantılı bir dizi oluşturacak şekilde yerleştirilebilir.





A, B aralarında asal olan iki sayı olsun ve aralarına C, D sayıları onlarla sürekli orantılı olacak şekilde yerleştirilsinler, ve bir E birimi seçilsin.

Diyorum ki, A, B arasına sürekli orantılı kaç sayı yerleştirilebiliyorsa, A, B'den herhangi biriyle birim arasına da sürekli orantılı aynı miktarda sayı yerleştirilebilir.

Çünkü, A, C, D, B oranında en küçük iki sayı F, G alınsın, **[VIII.2]**

aynı özellikte üç sayı H, K, L alınsın, **[VIII.2]**

ve bu şekilde, miktarları A, C, D, B'nin miktarına eşit olana kadar, aynı özellikte sayılar alınsın. **[VIII.2]**

Bunlar alınmış olsun ve M, N, O, P olsunlar.

Şimdi açıkça görülür ki F, kendisini çarparak H'yi, ve H'yi çarparak M'yi oluşturmuştur, ve aynı zamanda G, kendisini çarparak L'yi, ve L'yi çarparak P'yi oluşturmuştur. **[DS. VIII.2]**

Ve, M, N, O, P sayıları F, G ile aynı orandaki en küçük sayılar olduğundan,

ve A, C, D, B sayıları da F, G ile aynı orandaki en küçük sayılar olduğundan, **[VIII.1]**

ve bu arada M, N, O, P'nin miktarı A, C, D, B'nin miktarıyla aynı olduğundan,

M, N, O, P sayıları sırasıyla A, C, D, B sayılarına eşittir; bu durumda M, A'ya, ve P de B'ye eşit olur.

Şimdi, F, kendisini çarparak H'yi oluşturduğundan, F, H'yi F'nin içindeki birimler kadar ölçer.

Ama E birimi de F'yi içindeki birimler kadar ölçer; öyleyse E birimi F'yi, F'nin H'yi ölçtüğü sayıda ölçer.

O zaman, E biriminin F sayısına oranı, F'nin H'ye oranına eşittir. **[Tan. VII.20]**

Yine, F, H'yi çarparak M'yi oluşturduğundan, H, M'yi F'nin içindeki birimler kadar ölçer.

Ama E birimi F'yi içindeki birimler kadar ölçer; öyleyse E birimi F'yi H'nin M'yi ölçtüğü kadar ölçer.

O zaman, E biriminin F sayısına oranı, H'nin M'ye oranına eşittir.

Ama E biriminin F sayısına oranının F'nin H'ye oranına eşit olduğu da kanıtlanmıştı; bu durumda E biriminin F sayısına oranı, F'nin H'ye, ve H'nin M'ye oranına eşittir.

Ama M eşittir A; öyleyse E biriminin F sayısına oranı, F'nin H'ye, ve H'nin A'ya oranına eşittir.

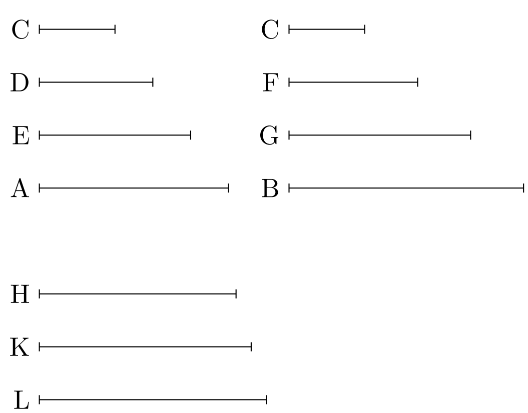
Aynı nedenden dolayı, E biriminin G sayısına oranı, G'nin L'ye, ve L'nin B'ye oranına eşittir.

Öyleyse, A, B arasına sürekli orantılı kaç sayı sığdıysa, aynı miktarda sayı A, B'den herhangi biriyle birim E arasına sürekli orantılı olarak sığmış oldu.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

10. Önerme:

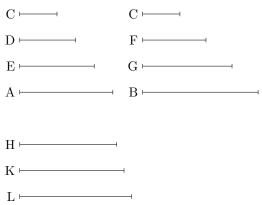
Verilen iki sayının her biriyle birim arasına ve onlarla sürekli orantılı olacak şekilde sayılar yerleştirilebiliyorsa, kaç tane böyle sayı yerleştirilebiliyorsa aynı miktarda sayı bu verilen iki sayı arasına ve onlarla sürekli orantılı olacak şekilde yerleştirilebilir.



A, B sayılarıyla C birimi arasına sürekli orantılı olarak D, E ve F, G sayıları yerleştirilsin.

[C, D, E, A, ve C, F, G, B sayıları sürekli orantılı olsun.]

Diyorum ki, A, B sayılarıyla C birimi arasına sürekli orantılı olarak kaç sayı yerleştirilmişse, o kadar sayı sürekli orantılı olarak A, B arasına yerleştirilir.



Çünkü, D, F'yi çarparak H'yi oluştursun, ve D, F sayıları H'yi çarparak sırasıyla K, L'yi oluştursun.

Şimdi, C biriminin D sayısına oranı, D'nin E'ye oranına eşit olduğundan, C birimi D sayısını D'nin E'yi ölçtüğü kadar ölçer. **[Tan. VII.20]**

Ama C birimi D sayısını D'nin içindeki birimler kadar ölçer; bu durumda D sayısı da E'yi D'deki birimler kadar ölçer;

öyleyse D sayısı kendisini çarparak E'yi oluşturmuştur.

Yine, C'nin D sayısına oranı, E'nin A'ya oranına eşit olduğundan, C birimi D sayısını E'nin A'yı ölçtüğü sayıda ölçer; bu durumda E, A'yı D'deki birimler kadar ölçer;

öyleyse D, E'yi çarparak A'yı oluşturmuştur.

Aynı nedenden dolayı, F, kendisini çarparak G'yi, ve G'yi çarparak B'yi oluşturmuştur.

Ve D, kendisini çarparak E'yi ve F'yi çarparak H'yi oluşturmuş olduğundan, D'nin F'ye oranı, E'nin H'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Aynı nedenden dolayı, D'nin F'ye oranı, H'nin G'ye oranına eşittir. **[VII.18]**

Öyleyse E'nin H'ye oranı da H'nin G'ye oranına eşittir.

Yine, D sayısı, E, H sayılarını çarparak sırasıyla A, K'yi oluşturduğundan, E'nin H'ye oranı, A'nın K'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Ama E'nin H'ye oranı, D'nin F'ye oranına eşittir; öyleyse D'nin F'ye oranı, A'nın K'ye oranına eşittir.

Yine, D, F sayıları H'yi çarparak, sırasıyla K, L'yi oluşturduğundan, D'nin F'ye oranı, K'nin L'ye oranına eşittir. **[VII.18]**

Ama D'nin F'ye oranı, A'nın K'ye oranına eşittir; öyleyse A'nın K'ye oranı, K'nin L'ye oranına eşittir.

Ayrıca, F sayısı H, G sayılarını çarparak sırasıyla L, B'yi oluşturduğundan, H'nin G'ye oranı, L'nin B'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Ama H'nin G'ye oranı, D'nin F'ye oranına eşittir; öyleyse D'nin F'ye oranı, L'nin B'ye oranına eşittir.

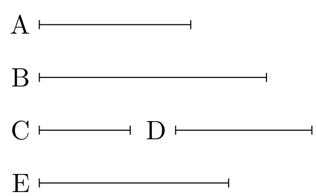
Ama D′nin F′ye oranının A′nın K′ye, ve K′nin L′ye oranına eşit olduğu da kanıtlanmıştı; bu durumda A′nın K′ye oranı, K′nin L′ye, ve L′nin B′ye oranına eşit olur.

Böylece A, K, L, B sürekli orantılı olur.

Öyleyse A, B sayılarının herbiriyle birim C arasına sürekli orantılı kaç tane sayı yerleştiriliyorsa, A, B sayıları rasaına da sürekli orantılı o kadar sayı yerleştirilir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

11. Önerme:
İki kare sayı arasında orta orantılı bir sayı vardır, ve karenin kareye oranı, kenarın kenara oranının çift oranıdır.



A, B sayıları kare sayılar olsun, A′nın kenarı C, B′nin kenarı D olsun.

Diyorum ki, A, B arasında orta orantılı bir sayı vardır, ve A′nın B′ye oranı, C′nin D′ye oranının çift oranıdır.

Çünkü, C, Dyi çarparak E′yi oluştursun.

Şimdi, A bir kare ve C de kenarı olduğundan, C, kendisini çarparak A′yı oluşturmuştur.

Aynı nedenden dolayı, D, kendisini çarparak B′yi oluşturmuştur.

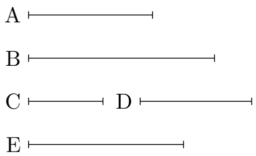
O zaman, C sayısı C, D sayılarını çarparak sırasıyla A, E′yi oluşturduğundan, C′nin D′ye oranı, A′nın E′ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Aynı nedenden dolayı, C′nin D′ye oranı, E′nin B′ye oranına eşittir. **[VII.18]**

Bu durumda A′nın E′ye oranı, E′nin B′ye oranına eşit olur.

Öyleyse A, B arasında orta orantılı bir sayı vardır.

Şimdi de diyorum ki, A′nın B′ye oranı, C′nin D′ye oranının çift oranıdır.



Çünkü, A, E, B sayıları orantılı üç sayı olduğundan, A'nın B'ye oranı, A'nın E'ye oranının çift oranıdır. **[Tan. V.9]**

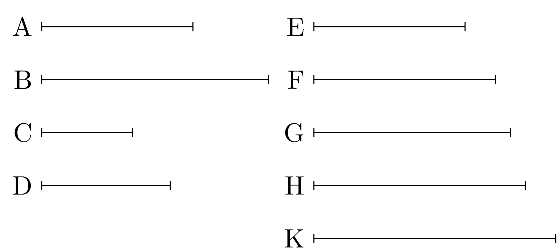
Ama A'nın E'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşittir.

Öyleyse A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranının çift oranıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

12. Önerme:
İki küp sayı arasında orta orantılı iki sayı vardır, ve küpün küpe oranı kenarların oranının üç kat oranıdır.

[Verilen iki küp sayının arasına onlarla sürekli orantılı bir dizi oluşturacak şekilde iki sayı yerleştirilebilir, ve küp sayıların birbirine oranı kenarlarının oranının küpüdür.]



A, B sayıları küp sayılar olsun, A'nın kenarı C, ve B'nin kenarı da D olsun.

Diyorum ki, A, B arasında orta orantılı iki sayı vardır, ve A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranının üç kat oranıdır.

Çünkü, C, kendisini çarparak E'yi, ve D'yi çarparak F'yi oluştursun; D, kendisini çarparak G'yi, ve C, D sayıları F'yi çarparak sırasıyla H, K'yi oluştursun.

Şimdi, A bir küp, ve C onun kenarı olduğundan, ve C kendisini çarparak E'yi oluşturmuş olduğundan, C kendisini çarparak E'yi, ve E'yi çarparak A'yı oluşturmuştur.

Aynı nedenden dolayı, D kendisini çarparak G'yi, ve G'yi çarparak B'yi oluşturmuştur.

Ve, C sayısı C, D sayılarını çarparak sırasıyla E, F'yi oluşturduğundan, C'nin D'ye oranı, E'nin F'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Aynı nedenden dolayı, C'nin D'ye oranı, F'nin G'ye oranına eşittir. **[VII.18]**

Yine, C sayısı E, F sayılarını çarparak sırasıyla A, H'i oluşturmuş olduğundan, E'nin F'ye oranı, A'nın H'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Ama E'nin F'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşittir.

Öyleyse C'nin D'ye oranı, A'nın H'ye oranına da eşittir.

Yine, C, D sayıları F sayısını çarparak sırasıyla H, K'yi oluşturduğundan, C'nin D'ye oranı, H'nin K'ye oranına eşittir. **[VII.18]**

Yine, D sayısı F, G sayılarını çarparak sırasıyla K, B'yi oluşturduğundan, F'nin G'ye oranı, K'nin B'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Ama F'nin G'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşittir;

öyleyse C'nin D'ye oranı, A'nın H'ye, H'nin K'ye, ve K'nin B'ye oranına eşittir.

Böylece H, K sayıları A, B arasında orta orantılı iki sayıdır.

Şimdi de diyorum ki, A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranının üç kat oranıdır.

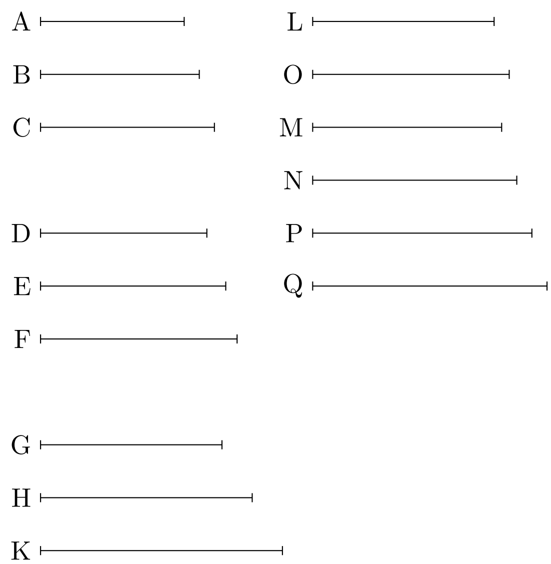
Çünkü, A, H, K, B sayıları orantılı dört sayı olduğundan, A'nın B'ye oranı, A'nın H'ye oranının üç kat oranıdır. **[Tan. V.10]**

Ama A'nın H'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşittir;

öyleyse A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranının üç kat oranıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

13. Önerme:
Sürekli orantılı bir dizi oluşturan istediğimiz kadar sayı alır ve bunların her birini kendisiyle çarparak yeni bir dizi oluşturursak, yeni dizi de sürekli orantılıdır, ve bu yeni diziyi tekrar ilk dizideki sayılarla çarpıp yeni sayılar elde edersek bu dizi de sürekli orantılıdır; ve bu böyle devam eder.



İstediğimiz miktarda seçtiğimiz A, B, C sayıları sürekli orantılı olsun, yani A'nın B'ye oranı, B'nin C'ye oranına eşit olsun; A, B, C sayıları kendilerini çarparak D, E, F sayılarını, ve D, E, F sayılarını çarparak G, H, K sayılarını oluştursun.

Diyorum ki, D, E, F, ve G, H, K sürekli orantılıdırlar.

Çünkü, A sayısı B'yi çarparak L'yi oluştursun, ve A, B sayıları L'yi çarparak sırasıyla M, N'yi oluştursun.

Ve yine, B sayısı C'yi çarparak O'yu oluştursun, ve B, C sayıları O'yu çarparak sırasıyla P, Q'yu oluştursun.

O zaman, bir önceki kanıtta olduğu gibi, D, L, E'nin ve G, M, N, H'nin, A'nın B'ye oranında, sürekli orantılı olduğunu,

ve ayrıca E, O, F'nin ve H, P, Q, K'nin, B'nin C'ye oranında, sürekli orantılı olduğunu kanıtlayabiliriz.

Şimdi, A'nın B'ye oranı, B'nin C'ye oranına eşittir; bu durumda D, L, E ile E, O, F aynı orandadır, ve ayrıca G, M, N, H ile H, P, Q, K de aynı orandadır.

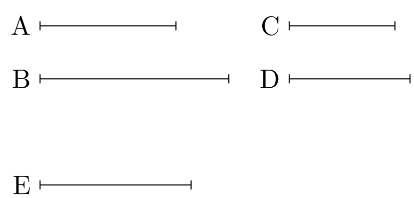
Ve D, L, E'nin miktarı E, O, F'nin miktarına, ve G, M, N, H'nin miktarı H, P, Q, K'nin miktarına eşittir;

bu durumda eşit dış oranlar olarak D'nin E'ye oranı, E'nin F'ye oranına,

ve G'nin H'ye oranı, H'nin K'ye oranına eşit olur. **[VII.14]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

14. Önerme:
Eğer bir kare sayı bir başka kare sayıyı ölçüyorsa, onun kenarı da diğerinin kenarını ölçer; ve eğer bir kenar diğer kenarı ölçüyorsa karesi de diğerinin karesini ölçer.



A, B sayıları kare sayılar olsun, C, D onların kenarları olsun, be A, B'yi ölçsün

diyorum ki, C de D'yi ölçer.

Çünkü, C, D'yi çarparak E'yi oluştursun; o zaman A, E, B sayıları, C'nin D'ye oranında, sürekli orantılı olur. **[VIII.11]**

Ve A, E, B sürekli orantılı olduğundan, ve A, B'yi ölçtüğünden, A, E'yi de ölçer. **[VIII.7]**

Ve, A'nın E'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşittir; öyleyse C, D'yi ölçer. **[Tan. VII.20]**

Yine, C, D'yi ölçsün;

diyorum ki, A da B'yi ölçer.

Çünkü, aynı kurguyla A, E, B sayılarının, C'nin D'ye oranında, sürekli orantılı olduğunu benzer yolla kanıtlayabiliriz.

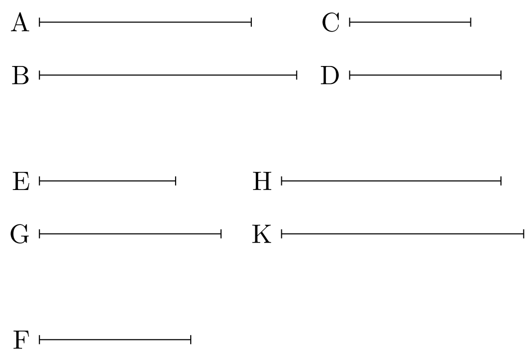
Ve C'nin D'ye oranı, A'nın E'ye oranına eşit olduğundan, ve C, D'yi ölçtüğünden, A da E'yi ölçer. **[Tan. VII.20]**

Ve A, E, B sürekli orantılıdır; öyleyse A, B'yi de ölçer.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

15. Önerme:

Eğer bir küp sayı bir başka küp sayıyı ölçüyorsa kenarı da diğerinin kenarını ölçer, ve eğer bir kenar diğer kenarı ölçüyorsa küpü de diğerinin küpünü ölçer.



Çünkü, A küp sayısı, B küp sayısını bölsün, ve A'nın kenarı C, B'nin kenarı D olsun;

diyorum ki C, D'yi ölçer.

Çünkü, C kendisini çarparak E'yi oluştursun, ve D kendisini çarparak G'yi oluştursun; ayrıca C, D'yi çarparak F'yi, ve C, D sayıları F'yi çarparak sırasıyal H, K'yi oluştursun.

Şimdi açıkça görülüyor ki, E, F, G ve A, H, K, B sayıları, C'nin D'ye oranında, sürekli orantılıdır. **[VIII.11, VIII.12]**

Ve, A, H, K, B sürekli orantılı olduğundan, ve A, B'yi ölçtüğünden, H'yi de ölçer. **[VIII.7]**

Ve, A'nın H'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşittir; bu durumda C de D'yi ölçer. **[Tan. VII.20]**

Şimdi de C, D'yi ölçsün;

diyorum ki, A da B'yi ölçecektir.

Çünkü, aynı kurguyla, A, H, K, B'nin, C'nin D'ye oranında, sürekli orantılı olduğunu benzer yolla kanıtlayabiliriz.

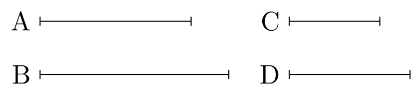
Ve, C, D'yi ölçtüğünden, ve C'nin D'ye oranı, A'nın H'ye oranına eşit olduğundan, A, H'yi ölçer, **[Tan. VII.20]**

böylece A, B'yi de ölçer.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

16. Önerme:

Eğer bir kare sayı bir başka kare sayıyı ölçmüyorsa, kenarı da diğerinin kenarını ölçmez, ve eğer bir kenar bir diğer kenarı ölçmüyorsa karesi de diğerinin karesini ölçmez.



A, B sayıları kare sayılar olsun, ve C, D onların kenarları olsun; ve A, B'yi ölçmesin;

diyorum ki, C de D'yi ölçmez.

Çünkü, eğer C, D'yi ölçerse, A da B'yi ölçecektir. **[VIII.14]**

Ama A, B'yi ölçmüyor; öyleyse C de D'yi ölçmez.

Şimdi de, C, D'yi ölçmesin;

diyorum ki, A da B'yi ölçmeyecektir.

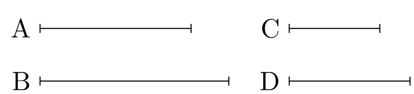
Çünkü, eğer A, B'yi ölçerse, C de D'yi ölçecektir. **[VIII.14]**

Ama C, D'yi ölçmüyor; öyleyse A da B'yi ölçmez.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

17. Önerme:

Eğer bir küp sayı bir başka küp sayıyı ölçmüyorsa, kenarı da diğerinin kenarını ölçmez, ve eğer bir kenar bir diğer kenarı ölçmüyorsa küpü de diğerinin küpünü ölçmez.



Çünkü, A küp sayısı, B küp sayısını ölçmesin, A'nın kenarı C, ve B'nin kenarı da D olsun;

diyorum ki, C, D'yi ölçmeyecektir.

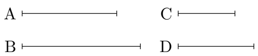
Çünkü, eğer C, D'yi ölçerse, A da B'yi ölçecektir. **[VIII.15]**

Ama A, B'yi ölçmüyor; öyleyse C de D'yi ölçmez.

Şimdi de C, D'yi ölçmesin;

diyorum ki, A da B'yi ölçmeyecektir.

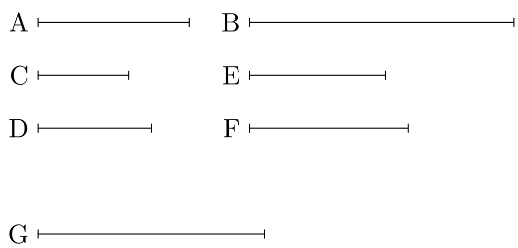
Çünkü, eğer A, B'yi ölçerse, C de D'yi ölçecektir. **[VIII.15]**



Ama C, D'yi ölçmüyor; öyleyse A da B'yi ölçmez.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

18. Önerme:
İki benzer düzlem sayısı arasına orta orantılı bir sayı yerleştirilebilir, ve bu düzlem sayıların oranı karşılıklı kenarların oranının çift oranıdır.



A, B, benzer iki düzlem sayısı olsun, ve A'nın kenarları C, D, ve B'nin kenarları E, F olsun.

Şimdi, benzer düzlem sayıları, kenarları orantılı olan sayılar olduğundan, **[Tan. VII.21]**

C'nin D'ye oranı, E'nin F'ye oranına eşittir.

Diyorum ki, o zaman A, B arasında orta orantılı bir sayı vardır, ve A'nın B'ye oranı, C'nin E'ye oranının, ya da D'nin F'ye oranının, yani karşılıklı kenarların oranlarının çift oranıdır.

Şimdi, C'nin D'ye oranı, E'nin F'ye oranına eşit olduğundan, yer değiştirerek, C'nin E'ye oranı, D'nin F'ye oranına eşittir. **[VII.13]**

Ve, A düzlem, ve C, D kenarları olduğundan, D, C'yi çarparak A'yı oluşturmuştur.

Aynı nedenden dolayı, E, F'yi çarparak B'yi oluşturmuştur.

Şimdi, D, E'yi çarparak G'yi oluştursun.

O zaman, D sayısı, C'yi çarparak A'yı, ve E'yi çarparak G'yi oluşturduğundan, C'nin E'ye oranı, A'nın G'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Ama, C'nin D'ye oranı, E'nin F'ye oranına eşittir; bu durumda D'nin F'ye oranı, A'nın G'ye oranına eşit olur.

Yine, E sayısı D'yi çarparak G'yi, ve F'yi çarparak B'yi oluştırduğundan, D'nin F'ye oranı, G'nin B'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Ama, D'nin F'ye oranının A'nın G'ye oranına eşit olduğu kanıtlanmıştı;

bu durumda A'nın G'ye oranı, G'nin B'ye oranına eşit olur.

Böylece A, G, B sürekli orantılı olur.

Öyleyse A, B arasında orta orantılı bir sayı vardır.

Ayrıca diyorum ki, A'nın B'ye oranı, karşılıklı kenarların oranının, yani C'nin E'ye, ya da D'nin F'ye oranının çift oranıdır.

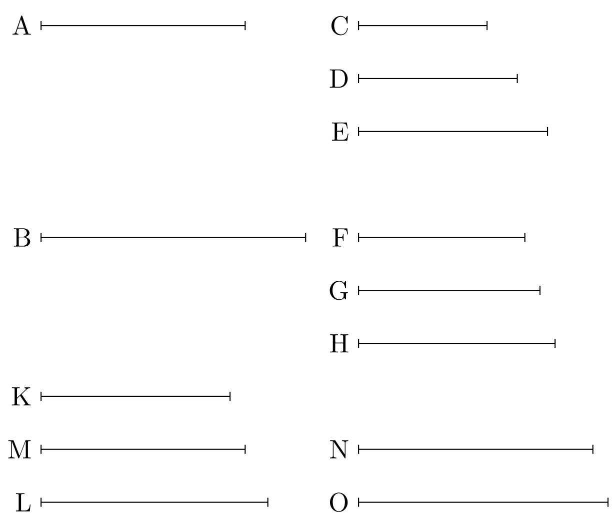
Çünkü, A, G, B sayıları sürekli orantılı olduğundan, A'nın B'ye oranı, G'ye oranının çift oranıdır. **[Tan. V.9]**

Ve, A'nın G'ye oranı, C'nin E'ye, ve D'nin F'ye oranına eşittir.

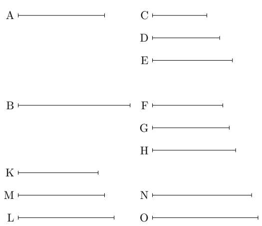
Öyleyse A'nın B'ye oranı, C'nin E'ye, ya da D'nin F'ye oranının çift oranıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

19. Önerme:
İki benzer cisim sayısı arasına orta orantılı iki sayı yerleştirilebilir, ve bu cisim sayıların oranı karşılıklı kenarların oranının üç kat oranıdır.



A, B iki benzer cisim sayısı olsun, A'nın kenarları C, D, E, ve B'nin kenarları F, G, H olsun.



Şimdi, benzer cisim sayıları, kenarları orantılı olan sayılar olduğundan, **[Tan. VII.21]**

C'nin D'ye oranı, F'nin G'ye oranına, ve D'nin E'ye oranı, G'nin H'ye oranına eşittir.

Diyorum ki, A, B arasına orta orantılı iki sayı yerleştirilebilir, ve A'nın B'ye oranı, C'nin F'ye oranının, ya da D'nin G'ye oranının, ya da E'nin H'ye oranının üç kat oranıdır.

Çünkü, C, D'yi çarparak K'yi oluştursun, ve F, G'yi çarparak L'yi oluştursun.

Şimdi, C, D ile F, G aynı oranda olduğundan, ve K sayısı C, D çarpımına, ve L sayısı F, G çarpımına eşit olduğundan, K, L sayıları benzer düzlem sayılarıdır; **[Tan. VII.21]**

öyleyse K, L arasına orta orantılı bir sayı yerleştirilebilir. **[VIII.18]**

Bu sayı M olsun.

Bu durumda, bir önceki önermede kanıtlandığı gibi, M sayısı D, F'nin çarpımıdır. **[VIII.18]**

Şimdi, D, C'yi çarparak K'yi, ve F'yi çarparak M'yi oluşturduğundan, C'nin F'ye oranı, K'nin M'ye oranına eşit olur. **[VII.17]**

Ama, K'nin M'ye oranı, M'nin L'ye oranına eşittir.

Öyleyse K, M, L sayıları, C'nin F'ye oranında, sürekli orantılıdır.

Ve, C'nin D'ye oranı, F'nin G'ye oranına eşit olduğundan, yer değiştirerek, C'nin F'ye oranı, D'nin G'ye oranına eşittir. **[VII.13]**

Aynı nedenden dolayı, D'nin G'ye oranı, E'nin H'ye oranına eşittir.

Öyleyse, K, M, L sayıları, hem C'nin F'ye oranında, hem D'nin G'ye oranında, ve hem de E'nin H'ye oranında, sürekli orantılıdır.

Şimdi de E, H sayıları M'yi çarparak sırasıyla N, O'yu oluştursun.

Şimdi, A bir cisim sayı, ve C, D, E onun kenarları olduğundan, E sayısı C, D çarpımını çarparak A'yı oluşturmuştur.

Ama C, D çarpımı K'dir; öyleyse E, K'yi çarparak A'yı oluşturmuştur.

Aynı nedenden dolayı, H, L'yi çarparak B'yi oluşturmuştur.

Şimdi, E, K'yi çarparak A'yı, ve ayrıca M'yi çarparak N'yi oluşturduğundan, K'nin M'ye oranı, A'nın N'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Ama, K'nin M'ye oranı, C'nin F'ye oranına, D'nin G'ye oranına, ve hem de E'nin H'ye oranına eşittir; bu durumda C'nin F'ye, D'nin G'ye, ve hem de E'nin H'ye oranı, A'nın N'ye oranına eşit olur.

Yine, E, H sayıları M'yi çarparak sırasıyla N, O'yu oluştuduğundan, E'nin H'ye oranı, N'nin O'ya oranına eşittir. **[VII.18]**

Ama, E'nin H'ye oranı, C'nin F'ye, ve D'nin G'ye oranına eşittir;

bu durumda C'nin F'ye, D'nin G'ye, ve E'nin H'ye oranı, A'nın N'ye, ve N'nin O'ya oranına eşit olur.

Yine, H, M'yi çarparak O'yu, ve ayrıca L'yi çarparak B'yi oluşturduğundan, M'nin L'ye oranı, O'nun B'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Ama, M'nin L'ye oranı, C'nin F'ye, D'nin G'ye, ve E'nin H'ye oranına eşittir.

Bu durumda C'nin F'ye, D'nin G'ye, ve E'nin H'ye oranı, yalnızca O'nun B'ye oranına değil, aynı zamanda A'nın N'ye ve N'nin O'ya oranına da eşit olur.

Öyleyse A, N, O, B sayıları, kenarların yukarda belirtilen oranlarında, sürekli orantılıdır.

Diyorum ki, A'nın B'ye oranı da karşılıklı kenarların oranlarının, yani C'nin F'ye oranının, ya da D'nin G'ye oranının, ya da E'nin H'ye oranının, üç kat oranına eşittir.

Çünkü, A, N, O, B sayıları sürekli orantılı olduğundan, A'nın B'ye oranı, A'nın N'ye oranının üç kat oranıdır. **[Tan. V.10]**

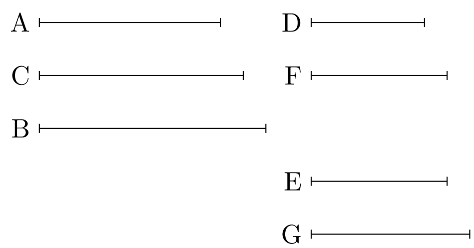
Ama, A'nın N'ye oranının C'nin F'ye, D'nin G'ye, ve hem de E'nin H'ye oranına eşit olduğu kanıtlanmıştı.

Öyleyse A'nın B'ye oranı, karşılıklı kenarların oranlarının, yani C'nin F'ye, D'nin G'ye, ve hem de E'nin H'ye oranın üç kat oranıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

20. Önerme:

Eğer iki sayı arasında orta orantılı bir sayı varsa, o iki sayı benzer düzlem sayılarıdır.



A, B sayıları arasında orta orantılı bir C sayısı olsun;

diyorum ki, A, B benzer düzlem sayılarıdır.

A, C ile aynı orandaki en küçük D, E sayıları alınsın; **[VII.33]**

bu durumda D, A'yı, E'nin C'yi ölçtüğü sayıda ölçer. **[VII.20]**

Şimdi, D, A'yı kaç kez ölçüyorsa, F'nin içinde o kadar birim olsun; bu durumda F, D'yi çarparak A'yı oluşturur, böylece A bir düzlem sayısı, ve D, F kenarları olur.

Yine, C, B ile aynı orandaki en küçük sayılar D, E olduğundan, D, C'yi, E'nin B'yi ölçtüğü sayıda ölçer. **[VII.20]**

O zaman, E, B'yi kaç kez ölçüyorsa, G'nin içinde o kadar birim olsun; bu durumda G, E'yi çarparak B'yi oluşturur.

Böylece B bir düzlem sayısı, ve E, G kenarları olur.

Öyleyse A, B düzlem sayılarıdır.

Şimdi de diyorum ki benzerdirler.

Çünkü, F, D'yi çarparak A'yı, ve E'yi çarparak C'yi oluşturduğundan, D'nin E'ye oranı, A'nın C'ye oranına, yani C'nin B'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

[Vatikan yazmasında bu son paragrafın yanlış olduğu düşünülüyor. Fitzpatrick hatayı göstermekle yetinip, doğruyu bulmayı okuyana bırakır. Heath aşağıdaki düzeltmeyi önerir.

"Çünkü, E, C'yi, D'nin A'yı ölçtüğü kadar ölçtüğünden, yani F'deki birimler kadar, F, E'yi çarparak C'yi oluşturur."

Peyrard hatadan söz etmeden Heath'in yukardaki önerisine benzer bir açıklayıcı cümle kullanır. Henrion başka bir metin kullandığından yukardaki paragraftaki ayrıntılara girmeden A *ve* B*'nin benzer düzlem sayıları olduğunu kanıtlar.]*

Ve E sayısı F, G'yi çarparak sırasıyla C, B'yi oluşturduğundan, F'nin G'ye oranı, C'nin B'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

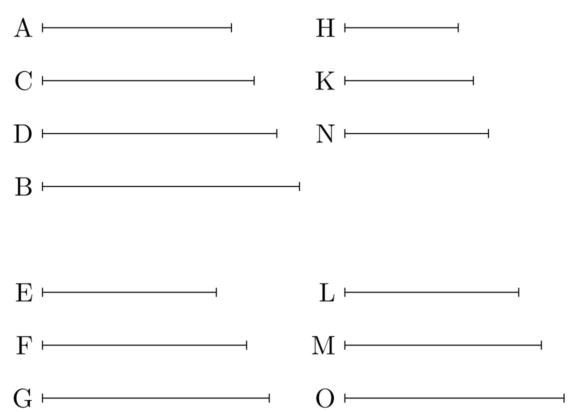
Ama, C'nin B'ye oranı, D'nin E'ye oranına eşittir; bu durumda D'nin E'ye oranı, F'nin G'ye oranına da eşit olur.

Ve yer değiştirerek, D'nin F'ye oranı, E'nin G'ye oranına eşit olur. **[VII.13]**

Öyleyse, A, B benzer düzlem sayılarıdır; çünkü kenarları orantılıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

21. Önerme:
Eğer iki sayı arasında orta orantılı iki sayı varsa, o ilk iki sayı benzer cisim sayılarıdır.



A, B sayıları arasında orta orantılı C, D sayıları olsun;

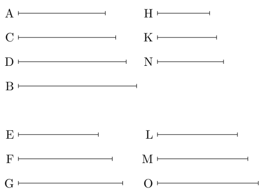
diyorum ki A, B benzer cisim sayılarıdır.

Çünkü, A, C, D sayılarıyla aynı oranda en küçük E, F, G sayıları alınsın; **[VII.33, VIII.2]**

bu durumda bunların ucundaki E, G aralarında asaldır. **[VIII.3]**

Şimdi, E, G arasında orta orantılı bir F sayısı olduğundan, E, G sayıları benzer düzlem sayılarıdır. **[VIII.20]**

O zaman, E'nin kenarları H, K, ve G'nin kenarları L, M olsun.



Bu durumda, bir önceki önermeden açıkça görülür ki E, F, G sayıları, H'nin L'ye oranı, ve K'nin M'ye oranında, sürekli orantılıdır.

Şimdi, E, F, G sayıları, A, C, D sayılarıyla aynı orandaki en küçük sayılar olduğundan, eşit dış oranlar olarak, E'nin G'ye oranı, A'nın D'ye oranına eşittir. **[VII.14]**

Ama E, G aralarında asaldır, ve asallar en küçüktür, ve en küçükler kendileriyle aynı oranda olanları aynı sayıda ölçerler, büyük olan büyük olanı, küçük olan küçük olanı, yani öncüller öncülleri ve ardıllar ardılları; **[VII.20]**

öyleyse E, A'yı G'nin D'yi ölçtüğü sayıda ölçer.

Şimdi, E'nin A'yı ölçtüğü sayıda birim N'nin içinde olsun.

Bu durumda N, E'yi çarparak A'yı oluşturur.

Ama E sayısı H, K çarpımıdır; bu durumda N sayısı H, K çarpımını çarparak A'yı oluşturmuştur.

Öyleyse A bir cisim sayıdır, ve H, K, N de kenarlarıdır.

Yine, E, F, G sayıları C, D, B sayılarıyla aynı orandaki en küçük sayılar olduğundan, E, C'yi, G'nin B'yi ölçtüğü sayıda ölçer.

Şimdi, E'nin C'yi ölçtüğü sayıda birim O'nun içinde olsun.

Öyleyse G, B'yi O'daki birimler kadar ölçer; bu durumda O, G'yi çarparak B'yi oluşturur.

Ama G sayısı L, M çarpımıdır; bu durumda O sayısı L, M çarpımını çarparak B'yi oluşturmuştur.

Öyleyse B bir cisim sayıdır, ve L, M, O da kenarlarıdır; böylece A, B cisim sayılardır.

Diyorum ki benzerdirler de.

Çünkü, N, O sayıları E'yi çarparak A, C'yi yaptıklarından, N'nin Oya oranı, A'nın C'ye, ve E'nin F'ye oranına eşittir. **[VII.18]**

Ama E'nin F'ye oranı, H'nin L'ye, ve K'nin M'ye oranına eşittir;

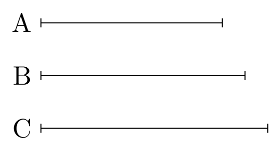
bu durumda H'nin L'ye oranı da, K'nin M'ye, ve N'nin O'ya oranına eşit olur.

Ve A'nın kenarları H, K, N, ve B'nin kenarları da O, L, M'dir.

Öyleyse A, B benzer cisim sayılarıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

22. Önerme:
Eğer üç sayı sürekli orantılıysa ve birincisi kareyse üçüncüsü de karedir.



A, B, C sayıları sürekli orantılı üç sayı olsun, ve A bir kare olsun;

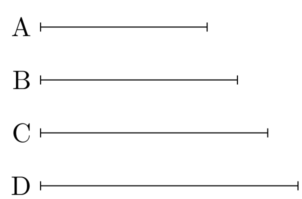
diyorum ki, üçüncü sayı C de karedir.

Çünkü, A, C arasında orta orantılı bir B sayısı olduğundan, A, C benzer düzlem sayılarıdır. **[VIII.20]**

Ama A karedir; öyleyse C de karedir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

23. Önerme:
Eğer dört sayı sürekli orantılıysa ve birincisi küpse üçüncüsü de küptür.



A, B, C, D sayıları sürekli orantılı dört sayı olsun, ve A bir küp sayı olsun;

diyorum ki, D de küptür.

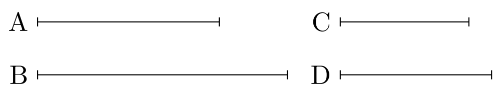
Çünkü, A, D sayıları arasında orta orantılı iki sayı, B, C vardır, öyleyse A, D benzer cisim sayılardır. **[VIII.21]**

Ama A küptür; öyleyse D de küptür.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

24. Önerme:

Eğer iki sayının birbirine oranı bir kare sayının başka bir kare sayıya oranına eşitse, ve birinci sayı bir kareyse ikinci sayı da karedir.



A, B sayılarının birbirine oranı, bir kare sayı C'nin başka bir kare sayı D'ye oranına eşit olsun, ve A bir kare olsun;

diyorum ki, B de karedir.

Çünkü, C, D kare olduklarından, benzer düzlem sayılarıdır.

Öyleyse C, D arasında orta orantılı bir sayı vardır. **[VIII.18]**

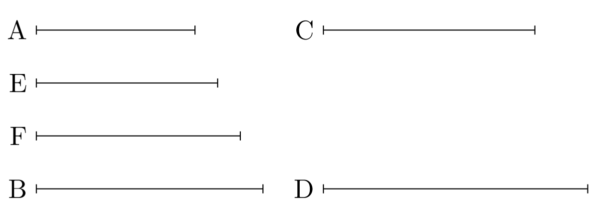
Ve C'nin D'ye oranı, A'nın B'ye oranına eşittir; öyleyse A, B'nin arasında da orta orantılı bir sayı vardır. **[VIII.8]**

Ve A bir karedir, öyleyse B de karedir. **[VIII.22]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

25. Önerme:

Eğer iki sayının birbirine oranı bir küp sayının başka bir küp sayıya oranına eşitse, ve birinci sayı bir küpse ikinci sayı da küptür.



A, B sayılarının birbirine oranı, bir küp sayı C'nin başka bir küp sayı D'ye oranına eşit olsun, ve A bir küp olsun;

diyorum ki, B de küptür.

Çünkü, C, D küp olduklarından, cisim sayılardır.

Öyleyse C, D arasında orta orantılı iki sayı vardır. **[VIII.19]**

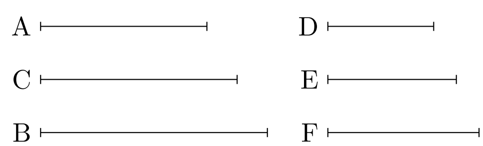
Ve C, D'nin arasında sürekli orantılı kaç sayı varsa, onlarla aynı orandaki sayıların arasında da sürekli orantılı o kadar sayı vardır; **[VIII.8]** böylece A, B arasında da orta orantılı iki sayı bulunur.

Bu sayılar E, F olsun.

O zaman, A, E, F, B sayıları sürekli orantılı olduğundan, ve A küp olduğundan, B de küptür. **[VIII.23]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

26. Önerme:
İki benzer düzlem sayısının birbirine oranı bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşittir.



A, B benzer düzlem sayıları olsun;

diyorum ki, A'nın B'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşittir.

Çünkü, A, B benzer düzlem sayıları olduğundan, A, B arasında orta orantılı bir sayı vardır. **[VIII.18]**

Bu sayı C olsun; ve A, C, B ile aynı orandaki en küçük sayılar, D, E, F, alınsın; **[VII.33, VIII.2]**

bu durumda uçlardaki D, F sayıları kare olur. **[DS. VIII.2]**

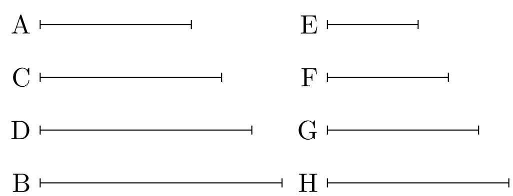
Ve D'nin F'ye oranı, A'nın B'ye oranına eşit olduğundan, ve D, F kare olduklarından,

A'nın B'ye oranı, bir karenin bir kareye oranına eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

27. Önerme:

İki benzer cisim sayısının birbirine oranı bir küp sayının bir küp sayıya oranına eşittir.



A, B benzer küp sayılar olsun;

diyorum ki, A'nın B'ye oranı, bir küp sayının bir küp sayıya oranına eşittir.

Çünkü, A, B benzer küp sayılar olduğundan, A, B arasında orta oranlı iki sayı vardır. **[VIII.19]**

Bu sayılar C, D olsun, ve A, C, D, B ile aynı oranda ve aynı miktardaki en küçük sayılar, E, F, G, H, alınsın; **[VII.33, VIII.2]**

bu durumda uçlardaki E, H sayıları küp olur. **[DS. VIII.2]**

Ve, E'nin H'ye oranı, A'nın B'ye oranına eşittir;

öyleyse A'nın B'ye oranı, bir küp sayının bir küp sayıya oranına eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■