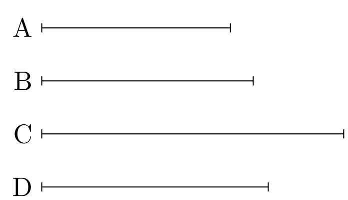
Kitap IX

1. Önermeler

1. Önerme:
İki benzer düzlem sayısının çarpımı karedir.



A, B, iki benzer düzlem sayısı olsun, ve A, B'yi çarparak C'yi oluşturmuş olsun;

diyorum ki, C karedir.

Çünkü, A kendisini çarparak D'yi oluştursun. Bu durumda D kare olur.

A kendisini çarparak D'yi, ve B'yi çarparak C'yi oluşturduğundan, A'nın B'ye oranı, D'nin C'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Ve, A, B benzer düzlem sayıları olduğundan, A, B arasında orta orantılı bir sayı vardır. **[VIII.18]**

Ama, iki sayı arasına sürekli orantılı olacak şekilde kaç sayı yerleştirilebiliyorsa, onlarla aynı oranlı olanlar arasına da o kadar yerleştirilir; **[VIII.8]**

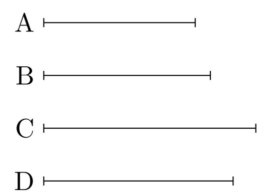
öyleyse D, C arasında da orta orantılı bir sayı vardır.

Ve D bir karedir;

öyleyse C de karedir. **[VIII.22]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

2. Önerme:
Eğer iki sayının çarpımı kareyse o sayılar benzer düzlem sayılarıdır.



A, B iki sayı olsun, ve A, B'yi çarparak kare sayı C'yi oluşturmuş olsun;

diyorum ki, A, B benzer düzlem sayılarıdır.

Çünkü, A kendisini çarparak D'yi oluştursun; bu durumda D karedir.

Şimdi, A kendisini çarparak D'yi, ve B'yi çarparak C'yi oluşturduğundan, A'nin B'ye oranı, D'nin C'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Ve, D bir kare olduğundan, ve C de öyle olduğundan, D, C benzer düzlem sayıları olur.

Öyleyse D, C arasında orta orantılı bir sayı vardır. **[VIII.18]**

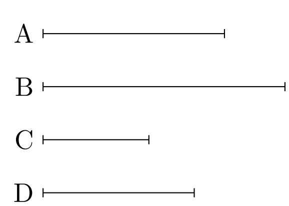
Ve, D'nin C'ye oranı, A'nın B'ye oranına eşittir; öyleyse A, B arasında da orta orantılı bir sayı vardır. **[VIII.8]**

Ama, eğer iki sayı arasında orta orantılı bir sayı varsa, o sayılar benzer düzlem sayılarıdır; **[VIII.20]**

öyleyse A, B benzer düzlem sayılarıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

3. Önerme:
Bir küp sayının kendi kendisiyle çarpımı bir küptür.



Çünkü, A küp sayısı kendisini çarparak B'yi oluştursun;

diyorum ki, B bir küptür.

Çünkü, A'nın kenarı C alınsın, ve C kendisini çarparak D'yi oluştursun.

Açıkça görülür ki C, D'yi çarparak A'yı oluşturur.

Şimdi, C kendisini çarparak D'yi oluşturduğundan, C, D'yi kendi içindeki birimler kadar ölçer; öyleyse birimin C'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşittir. **[Tan. VII.20]**

Yine, C, D'yi çarparak A'yı oluşturduğundan, D, A'yı, C'deki birimler kadar ölçer.

Ama birim C'yi de C'deki birimler kadar ölçer; öyleyse birimin C'ye oranı, D'nin A'ye oranına eşittir.

Ama, birimin C'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşittir; bu durumda birimin C'ye oranı, C'nin D'ye, ve D'nin A'ya oranına eşit olur. Öyleyse, birimle A arasında sürekli orantılı olacak şekilde orta orantılı iki sayı, C, D, vardır.

Yine, A kendisini çarparak B'yi oluşturduğundan, A, B'yi kendi içindeki birimler kadar ölçer.

Ama birim A'yı da içindeki birimler kadar ölçer; öyleyse birimin A'ye oranı, A'nın B'ye oranına eşittir. **[Tan. VII.20]**

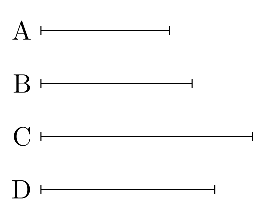
Ama, birimle A arasında orta orantılı iki sayı vardır, öyleyse A, B arasında da orta orantılı iki sayı vardır. **[VIII.8]**

Ama, eğer iki sayı arasında orta orantılı iki sayı varsa, ve birincisi küpse, ikincisi de küptür. **[VIII.23]**

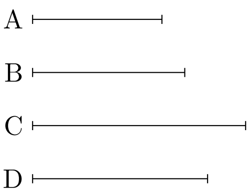
Ve A küptür; öyleyse B de küptür.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

4. Önerme:
İki küp sayının çarpımı bir küptür.



Çünkü, A küp sayısı, B küp sayısını çarparak C'yi oluşturmuş olsun;



diyorum ki, C bir küptür.

Çünkü, A kendisini çarparak D'yi oluştursun; o zaman D küptür. **[IX.3]**

Ve, A kendisini çarparak D'yi, ve B'yi çarparak C'yi oluşturduğundan, A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

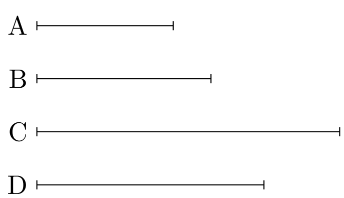
Ve, A, B küp sayılar olduğundan, A, B benzer cisim sayılarıdır. Öyleyse A, B arasında orta orantılı iki sayı vardır; **[VIII.19]**

böylece C, D arasında da orta orantılı iki sayı vardır. **[VIII.8]**

Ve D bir küptür; öyleyse C de küptür. **[VIII.23]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

5. Önerme:
Bir küp sayı bir sayıyı çarparak bir küp oluşturursa, çarpılan sayı da küptür.



Çünkü, A küp sayısı B'yi çarparak C küp sayısını oluşturmuş olsun;

diyorum ki, B bir küptür.

Çünkü, A kendisini çarparak D'yi oluştursun; bu durumda D bir küptür. **[IX.3]**

Şimdi, A kendisini çarparak D'yi, ve B'yi çarparak C'yi oluşturduğundan, A'nın B'ye oranı, D'nin C'ye oranına eşittir. **[VII.17]**

Ve, D, C küp olduklarından, benzer cisim sayılarıdır.

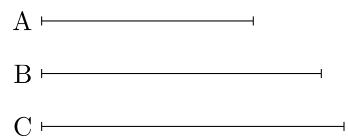
Öyleyse, C, D arasında orta orantılı iki sayı vardır. **[VII.19]**

Ve, D'nin C'ye oranı, A'nın B'ye oranına eşittir; öyleyse A, B arasında da orta orantılı iki sayı vardır. **[VIII.8]**

Ve A küptür; öyleyse B de küptür. **[VIII.23]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

6. Önerme:
Bir sayının kendisiyle çarpımı küpse, sayının kendisi de küptür.



Çünkü, A sayısı kendisini çarparak B küp sayısını oluşturmuş olsun;

diyorum ki, A da küptür.

Çünkü, A, B'yi çarparak C'yi oluştursun.

A kendisini çarparak B'yi, ve B'yi çarparak C'yi oluşturduğundan, C küptür.

Ve, A kendisini çarparak B'yi oluşturduğundan, A, B'yi kendi içindeki birimler kadar ölçer.

Ama birim de A'yı içindeki birimler kadar ölçer.

Öyleyse, birimin A'ya oranı, A'nın B'ye oranına eşittir. **[Tan. VII.20]**

Ve, A, B'yi çarparak C'yi oluşturduğundan, B, C'yi A'daki birimler kadar ölçer.

Ama birim de A'yı içindeki birimler kadar ölçer.

Öyleyse, birimin A'ya oranı, B'nin C'ye oranına eşittir. **[Tan. VII.20]**

Ama, birimin A'ya oranı, A'nın B'ye oranına eşittir; bu durumda A'nın B'ye oranı, B'nin C'ye oranına da eşit olur.

Ve B, C küp olduklarından, benzer cisim sayılarıdır.

Öyleyse B, C arasında orta orantılı iki sayı vardır. **[VIII.19]**

Ve B'nin C'ye oranı, A'nın B'ye oranına eşittir.

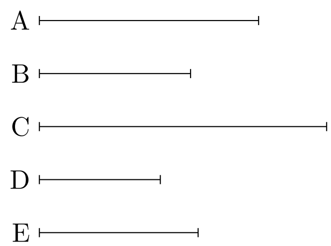
Öyleyse A, B arasında da orta orantılı iki sayı vardır. **[VIII.8]**

Ve B küptür; öyleyse A da küptür. **[VII.23]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

7. Önerme:

Bileşik bir sayıyla bir sayının çarpımı bir cisim sayıdır.



Çünkü, A bileşik sayısı bir B sayısını çarparak C'yi oluşturmuş olsun;

diyorum ki, C cisimdir.

Çünkü, A bileşik olduğundan, bir sayı tarafından ölçülecektir. **[Tan. VII.13]**

Bu sayı D olsun; ve D'nin A'yı ölçtüğü kadar birim E'nin içinde olsun.

D, A'yı, E'deki birimler kadar ölçtüğünden, E, D'yi çarparak A'yı oluşturur. **[Tan. VII.15]**

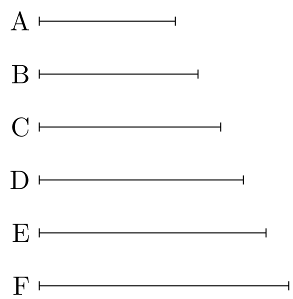
Ve A, B'yi çarparak C'yi oluşturmuş olduğundan, ve A sayısı D, E çarpımı olduğundan, D, E çarpımı B'yi çarparak C'yi oluştumuş olur.

Öyleyse C sayısı cisimdir, D, E, B de kenarlarıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

8. Önerme:

Birimden başlayarak istediğimiz miktarda aldığımız sayılar sürekli orantılıysa, üçüncü sayı bir karedir, ve ondan sonra birer atlayarak gelenlerin hepsi karedir; dördüncü bir küptür ve ondan sonra ikişer atlayarak gelenlerin hepsi küptür; ve yedinci hem kare hem küptür, ondan sonra beşer atlayarak gelenlerin hepsinin olduğu gibi.



Birimden başlayarak sürekli orantılı istediğimiz miktarda seçtiğimiz sayılar A, B, C, D, E, F olsun;

[1, A, B, C, D, E, F sürekli orantılı olsun.]

diyorum ki, birimden itibaren üçüncü olan B, ve birer atlayarak alınanlar karedir; dördüncü olan C, ve ikişer atlayarak alınanlar küptür; ve yedinci olan F, ve beşer atlayarak alınanlar hem küp hem karedir.

Çünkü, birimin A'ya oranı, A'nın B'ye oranına eşit olduğundan, birim A'yı, A'nın B'yi ölçtüğü sayıda ölçer. **[Tan. VII.20]**

Ama birim A'yı içindeki birimler kadar ölçer; öyleyse A, B'yi A'daki birimler kadar ölçer.

Demek ki A kendisini çarparak B'yi oluşturmuştur; öyleyse B karedir.

Ve B, C, D sürekli orantılı olduğundan, ve B kare olduğundan, D da karedir. **[VIII.22]**

Aynı nedenden dolayı F de karedir.

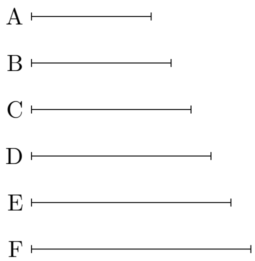
Benzer şekilde, birer atlayarak alınanların kare olduğunu kanıtlayabiliriz.

Şimdi diyorum ki birimden sonra dördüncü olan C, ve ikişer atlayarak alınanlar küptür.

Çünkü, birimin A'ya oranı, B'nin C'ye oranına eşit olduğundan, birim A'yı, B'nin C'yi ölçtüğü sayıda ölçer.

Ama birim A'yı A'nın içindeki birimler kadar ölçer; bu durumda B, C'yi A'daki birimler kadar ölçer.

Öyleyse A, B'yi çarparak C'yi oluşturmuştur.



A kendisini çarparak B'yi oluşturduğundan, ve B'yi çarparak C'yi oluşturduğundan, C küptür.

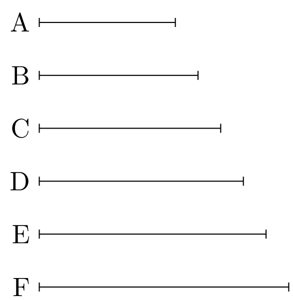
Ve C, D, E, F sürekli orantılı olduğundan, ve C küp olduğundan F de küptür. **[VIII.23]**

Ama kare olduğu da kanıtlanmıştı; öyleyse, birimden sonra yedinci gelen sayı hem küp hem karedir.

Benzer şekilde, beşer atlayarak alınan sayıların da hem küp hem kare olduğunu kanıtlayabiliriz.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

9. Önerme:
Birimden başlayarak istediğimiz miktarda aldığımız sayılar sürekli orantılıysa, birimden sonra gelen sayı kareyse diğerlerinin hepsi de karedir; Ve birimden sonra gelen sayı küpse diğerlerinin hepsi de küptür.



Birimden başlayarak sürekli orantılı istediğimiz miktarda seçtiğimiz sayılar A, B, C, D, E, F olsun, ve birimden sonraki ilk sayı olan A bir kare olsun;

diyorum ki diğerlerinin hepsi karedir.

Şimdi, birimden sonra üçüncü olan B'nin, ve birer atlayarak alınanların kare olduğu kanıtlanmıştı; **[IX.8]**

diyorum ki diğerleri de karedir.

Çünkü, A, B, C sürekli orantılı olduğundan, ve A kare olduğundan, C de karedir. **[VII.22]**

Yine, B, C, D sürekli orantılı olduğundan, ve B kare olduğundan, D de karedir. **[VIII.22]**

Benzer şekilde diğerlerinin de kare olduğunu kanıtlayabiliriz.

Şimdi, A küp olsun;

diyorum ki diğerlerinin hepsi küptür.

Şimdi, birimden sonra dördüncü olan C'nin, ve ikişer atlayarak alınanların küp olduğu kanıtlanmıştı; **[IX.8]**

diyorum ki diğerleri de hepsi küptür.

Çünkü, birimin A'ya oranı, A'nın B'ye oranına eşit olduğundan, birim A'yı, A'nın B'yi ölçtüğü sayıda ölçer.

Ama birim A'yı içindeki birimler kadar ölçer; öyleyse A da B'yi içindeki birimler kadar ölçer; öyleyse A kendisini çarparak B'yi oluşturmuştur.

Ve A, küptür.

Ama, eğer bir küp kendisini çarparak bir sayı oluşturusa, çarpım küptür. **[IX.3]**

Öyleyse B küptür.

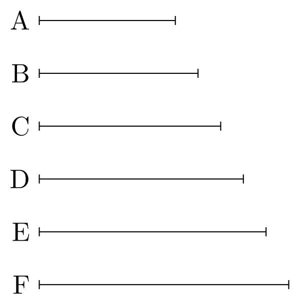
Ve, dört sayı A, B, C, D sürekli orantılı olduğundan, ve A küp olduğundan, D küptür.

Aynı nedenden dolayı E de küptür, ve benzer şekilde diğerlerinin hepsi küptür.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

10. Önerme:

Birimden başlayarak istediğimiz miktarda aldığımız sayılar sürekli orantılıysa, birimden sonra gelen sayı kare değilse, birimden sonra gelen üçüncü sayı ve ondan sonra birer atlayarak gelenlerin dışında hiç biri kare değildir; ve ikinci sayı küp değilse, dördüncü sayı ve ondan sonra ikişer atlayarak gelenlerin dışında hiç biri küp değildir



Birimden başlayarak sürekli orantılı istediğimiz miktarda seçtiğimiz sayılar A, B, C, D, E, F olsun, birimden sonraki ilk sayı A kare olmasın;

diyorum ki, birimden sonraki üçüncü sayı ve ondan sonra birer atlayarak alınanların dışında hiçbiri kare değildir.

Çünkü, eğer mümkünse C bir kare olsun.

Ama B de karedir; **[IX.8]**

bu durumda B, C'nin birbirine oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olur.

Ve, B'nin C'ye oranı, A'nın B'ye oranına eşittir; öyleyse A, B'nin birbirine oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşittir; bu durumda A, B benzer düzlem sayıları olur. **[VIII.28]**

Ve B bir karedir; öyleyse A da karedir: bu varsayıma aykırıdır.

Öyleyse C kare değildir.

Benzer şekilde, birimden sonra gelen üçüncü sayı ve ondan sonra birer atlayarak alınanlar dışında hiçbirinin kare olmadığını kanıtlayabiliriz.

Şimdi de A küp olmasın.

diyorum ki, birimden sonra gelen dördüncü sayı ve ondan sonra ikişer atlayarak alınanlar dışında hiçbiri küp değildir.

Çünkü, eğer mümkünse D küp olsun.

Şimdi, C de küptür; çünkü birimden sonra gelen dördüncü sayıdır. **[IX.8]**

Ve, C'nin D'ye oranı, B'nin C'ye oranına eşittir; öyleyse B'nin C'ye oranı, küpün küpe oranına eşittir.

Ve C küptür; öyleyse B de küptür. **[VIII.25]**

Ve, birimin A'ya oranı, A'nın B'ye oranına eşit olduğundan, ve birim A'yı içindeki birimler kadar ölçtüğünden, A da B'yi içindeki birimler kadar ölçer; öyleyse A kendisini çarparak B küp sayısını oluşturmuştur.

Ama, eğer bir sayı kendisini çarparak bir küp sayı oluşturursa, kendisi de küptür. **[IX.6]**

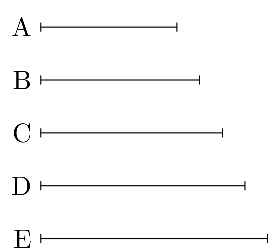
Öyleyse A küptür: bu varsayıma aykırıdır.

Öyleyse D küp değildir.

Benzer şekilde, birimden sonra dördüncü gelen sayı ve ondan sonra ikişer atlayarak alınanlar dışında hiçbirinin küp olmadığını kanıtlayabiliriz.

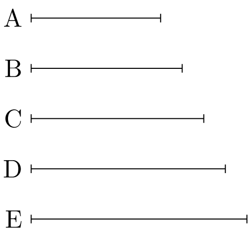
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

11. Önerme:
Birimden başlayarak istediğimiz miktarda aldığımız sayılar sürekli orantılıysa, daha küçük sayı daha büyük sayıyı orantılı sayılardan birisi kadar ölçer.



Birim A'dan başlayarak sürekli orantılı olan ve istediğimiz miktarda seçtiğimiz sayılar B, C, D, E olsun;

diyorum ki, B, C, D E sayılarının en küçüğü olan B sayısı E'yi C, D sayılarından birine göre ölçer.



Çünkü, birim A'nın B'ye oranı, D'nin E'ye oranına eşit olduğundan, birim A, B'yi, D'nin E'yi ölçtüğü sayıda ölçer;

bu durumda, yer değiştirerek, birim A, D'yi, B'nin E'yi ölçtüğü sayıda ölçer. **[VII.15]**

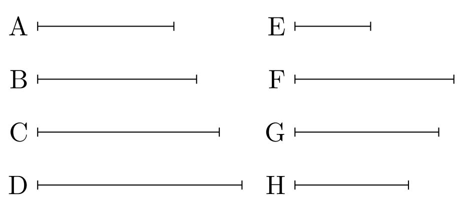
Ama birim A, D'yi D'deki birimler kadar ölçer; öyleyse B de E'yi D'deki birimler kadar ölçer;

böylece daha küçük olan B, daha büyük olan E'yi orantılı sayılar arasında bulunan sayılardan birisi kadar ölçer.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

Doğal Sonuç: Buradan açıkça görüldüğü gibi, ölçen sayının ölçülen sayıyı hangi sayıya göre ölçtüğünü bulmak için ölçülen sayıdan geriye doğru ölçen sayının birime uzaklığı kadar gitmek gerekir.

12. Önerme:
Birimden başlayarak istediğimiz miktarda aldığımız sayılar sürekli orantılıysa, sonuncu sayıyı hangi asallar ölçerse, birimden sonraki ilk sayıyı da aynı asallar ölçer.



Birimden başlayarak istediğimiz miktarda aldığımız sürekli orantılı sayılar A, B, C, D olsun;

diyorum ki D'yi hangi asallar ölçerse, A da aynı asallar tarafından ölçülecektir.

Çünkü, D sayısı E asalı tarafından ölçülsün;

diyorum ki, E, A'yı ölçer.

Çünkü, ölçmediğini varsayalım; E asaldır ve her asal ölçmediği sayıyla aralarında asaldır; **[VII.29]**

bu durumda E, A aralarında asaldır.

Ve, E, D'yi ölçtüğünden, F'ye göre ölçsün, E, F'yi çarparak D'yi oluşturmuştur.

Yine, A, D'yi C'deki birimler kadar ölçtüğünden, **[IX.11, DS. IX.11]**

A, C'yi çarparak D'yi oluşturur.

Ama, ayrıca E de F'yi çarparak D'yi oluşturmuştu; öyleyse A, C çarpımı E, F çarpımına eşittir.

Bu durumda A'nın E'ye oranı, F'nin C'ye oranına eşittir. **[VII.19]**

Ama A, E aralarında asaldır, ve asallar en küçüklerdir, **[VII.21]**

ve küçükler kendileriyle aynı oranda olanları aynı sayıda ölçerler, öncüller öncülleri, ardıllar ardılları; **[VII.20]**

öyleyse E, C'yi ölçer.

G'ye göre ölçsün; yani E, G'yi çarparak C'yi oluşturur.

Ama, bundan önceki önermeye göre, A da B'yi çarparak C'yi oluşturmuştur. **[IX.11, DS. IX.11]**

Öyleyse A, B çarpımı, E, G çarpımına eşittir.

Öyleyse, A'nın E'ye oranı, G'nin B'ye oranına eşittir. **[VII.19]**

Ama A, E aralarında asaldır, ve asallar en küçüklerdir, **[VII.21]**

ve küçükler kendileriyle aynı oranda olanları aynı sayıda ölçerler, öncüller öncülleri, ardıllar ardılları; **[VII.20]**

öyleyse E, B'yi ölçer.

H'ye göre ölçsün; yani E, H'yi çarparak B'yi oluşturur.

Ama ayrıca A da kendisini çarparak B'yi oluşturmuştur; **[IX.8]**

öyleyse E, H çarpımı A üzerindeki kareye eşittir.

Bu durumda E'nin A'ya oranı, A'nın H'ye oranına eşit olur. **[VII.19]**

Ama A, E aralarında asaldır, ve asallar en küçüklerdir, **[VII.21]**

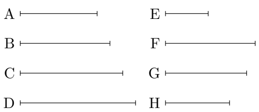
ve küçükler kendileriyle aynı oranda olanları aynı sayıda ölçerler, öncüller öncülleri, ardıllar ardılları; **[VII.20]**

öyleyse öncüller olarak E, A'yi ölçer.

Ama aynı zamanda ölçmez de: bu olamaz.

Öyleyse E, A aralarında asal değildir.

Öyleyse aralarında bileşiktirler.



Ama aralarında bileşik olan sayılar bir sayıyla ölçülür. **[Tan. VII.14]**

Ve varsayıma göre E asal olduğundan, ve asal bir sayı kendinden başka bir sayıyla ölçülmediğinden, A, E'yi E ölçer,

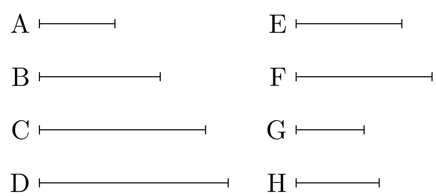
yani E, A'yı ölçer.

Ama D'yi de ölçer; öyleyse E asalı A, D'yi ölçer.

Benzer şekilde, D ne kadar asalla ölçülürse, A'nın da aynı asallarla ölçüleceğini kanıtlayabiliriz.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

13. Önerme:
Birimden başlayarak istediğimiz miktarda aldığımız sayılar sürekli orantılıysa, eğer birimden sonra gelen sayı asalsa, son sayı orantılı sayılardan başka bir sayıya bölünmez.



Birimden başlayarak istediğimiz miktarda aldığımız sürekli orantılı sayılar A, B, C, D olsun, ve birimden sonra gelen A sayısı asal olsun;

diyorum ki, en büyükleri olan D sayısı, A, B, C sayılarından başka sayılara bölünmez.

Çünkü, eğer mümkünse E'ye bölünsün, ve E sayısı A, B, C sayılarından biri olmasın.

Bu durumda açıkça görülür ki E bir asal değildir. Çünkü asal olsaydı ve D'yi ölçseydi, asal olan A'yı da ölçecekti, **[IX.12]**

ama ondan farklıdır: bu olamaz.

Öyleyse E asal değildir. Demek ki bileşik sayıdır.

Ama her bileşik sayı bir asal tarafından ölçülür; **[VII.31]**

öyleyse E bir asal tarafından ölçülür.

Şimdi diyorum ki A'dan başka hiçbir asal tarafından ölçülmez.

Çünkü, eğer E başkası tarafından ölçülürse, E, D'yi ölçtüğünden, o başkası D'yi de ölçer; o zaman asal olan A'yı da ölçer, **[IX.12]**

ama ondan farklıdır: bu olamaz.

Öyleyse A, E'yi ölçer.

Ve E, D'yi ölçtüğünden, F'ye göre ölçsün.

Diyorum ki, F sayısı A, B, C sayılarından hiçbirine eşit değildir.

Çünkü, eğer F sayısı A, B, C sayılarından birine eşit olsaydı, D'yi E'ye göre ölçtüğünden, A, B, C sayılarından biri D'yi E'ye göre ölçecekti.

Ama A, B, C sayılarından biri D'yi A, B, C sayılarından birine göre ölçer; **[IX.11]**

o zaman E sayısı da A, B, C sayılarından biri olurdu ki bu varsayıma aykırıdır.

Öyleyse F sayısı A, B, C sayılarından biri değildir.

Benzer şekilde, F'nin A tarafından ölçüldüğünü, F'nin asal olmadığını göstererek, kanıtlayabiliriz.

Çünkü asal olsaydı, D'yi ölçtüğünden, asal olan A'yı da ölçecekti, **[IX.12]**

ama ondan farklıdır: bu olamaz; öyleyse F asal değildir. Bileşik sayıdır.

Ama her bileşik sayı bir asal tarafından ölçülür; **[VII.31]**

öyleyse F bir asal tarafından ölçülür.

Şimdi diyorum ki A'dan başka hiçbir asal tarafından ölçülmez.

Çünkü, eğer başka bir asal F'yi ölçerse, ve F de D'yi ölçtüğünden, o başka asal D'yi de ölçer; dolayısıyla asal olan A'yı da ölçer, **[IX.12]**

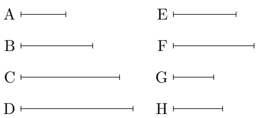
ama ondan farklıdır: bu olamaz.

Öyleyse A, F'yi ölçer.

Ve, E, D'yi F'ye göre ölçtüğünden, E, F'yi çarparak D'yi oluşturmuştur.

Ama ayrıca A da C'yi çarparak D'yi oluşturmuştur; **[IX.11]**

bu durumda A, C çarpımı E, F çarpımına eşit olur.



O zaman oran olarak, A′nın E′ye oranı, F′nin C′ye oranına eşittir. **[VII.19]**

Ama A, E′yi ölçer; öyleyse F de C′yi ölçer.

G′ye göre ölçsün.

Benzer şekilde, G′nin A, B, C′den birine eşit olmadığını ve A′nın G′yi ölçtüğünü kanıtlayabiliriz.

Ve F, C′yi G′ye göre ölçtüğünden, F, G′yi çarparak C′yi oluşturur.

Ama ayrıca A da B′yi çarparak C′yi oluşturur; **[IX.11]**

bu durumda A, B çarpımı F, G çarpımına eşit olur.

O zaman oran olarak, A′nın F′ye oranı, G′nin B′ye oranına eşittir. **[VII.19]**

Ama A, F′yi ölçer; öyleyse G de B′yi ölçer.

H′ye göre ölçsün.

Benzer şekilde H′nin A′ya eşit olmadığını kanıtlayabiliriz.

Ve G, B′yi H′ye göre ölçtüğünden, G, H′yi çarparak B′yi oluşturur.

Ama ayrıca A da kendisini çarparak B′yi oluşturur; **[IX.8]**

bu durumda H, G çarpımı A üzerindeki kareye eşit olur.

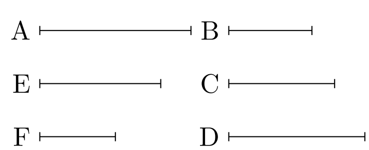
Öyleyse H′nin A′ya oranı, A′nın G′ye oranına eşittir. **[VII.19]**

Ama A, G′yi ölçer; öyleyse H de asal olan A′yı ölçer, ama ondan farklıdır: bu olamaz.

Öyleyse en büyük olan D sayısı, A, B, C′den farklı bir sayı tarafından ölçülmez.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

14. Önerme:
Verilen bazı asallar tarafından ölçülen en küçük sayı, bu asalların dışında başka hiç bir asal tarafından ölçülmez.



A sayısı B, C, D asalları tarafından ölçülen en küçük sayı olsun;

diyorum ki, A sayısı B, C, D asalları dışında hiçbir asal tarafından ölçülmez.

Çünkü, eğer mümkünse E asalı tarafından ölçülsün, ve E asalı B, C, D'nin hiçbirine eşit olmasın.

Şimdi, E, A'yı ölçtüğüne göre, F'ye göre ölçer; bu durumda E, F'yi çarparak A'yı oluşturur.

Ama A sayısı B, C, D asalları tarafından ölçülür.

Ama eğer iki sayı birbirini çarparak bir sayı oluşturursa, çarpımı ölçen her asal, bu iki sayıdan birini ölçecektir; **[VII.30]**

öyleyse B, C, D'den biri E, F'den birini ölçecektir.

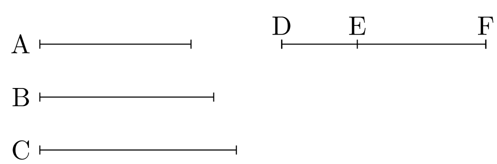
Şimdi, E'yi ölçmeyeceklerdir; çünkü E asaldır ve B, C, D'den farklıdır.

Öyleyse A'dan küçük olan F'yi ölçeceklerdir: bu olamaz, çünkü varsayıma göre A sayısı B, C, D'nin ölçtüğü en küçük sayıdır.

Öyleyse A'yı B, C, D'den başka asal ölçmeyecektir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

15. Önerme:
Sürekli orantılı olan üç sayı bu oranlara sahip en küçük sayılarsa, herhangi ikisinin toplamıyla diğer sayı aralarında asaldır.

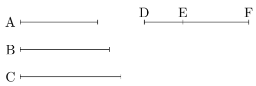


Sürekli orantılı A, B, C sayıları bu orandaki en küçük üç sayı olsun;

diyorum ki, A, B, C sayılarının herhangi ikisinin toplamı ile üçüncüsü aralarında asaldır, yani

hem A, B ile C, hem B, C ile A, ve hem de A, C ile B aralarında asaldır.

Çünkü, A, B, C ile aynı orandaki en küçük DE, EF sayıları alınsın. **[VIII.2]**



Buradan açıkça görüldüğü gibi DE kendisini çarparak A'yı, ve EF'yi çarparak B'yi oluşturur, ve ayrıca EF kendisini çarparak C'yi oluşturur. **[VIII.2]**

Şimdi, DE, EF en küçük olduklarından aralarında asaldır. **[VIII.22]**

Ama eğer iki sayı aralarında asalsa, toplamları her biriyle asaldır. **[VIII.28]**

bu durumda DF sayısı DE, EF sayılarının her biriyle arasında asaldır.

Ama ayrıca DE ile DF de aralarında asaldır; bu durumda DF, DE sayıları EF'ye asal olur.

Ama eğer iki sayı herhangi bir sayıya asalsa, çarpımları da o sayıya asal olur; **[VII.24]**

yani FD, DE çarpımı EF'ye asaldır; bu yüzden FD, DE çarpımı EF üzerindeki kareye de asaldır. **[VII.25]**

Ama FD, DE çarpımı, DE, EF çarpımıyla DE üzerindeki kareye eşittir; **[II.3]**

bu durumda DE üzerindeki kareyle DE, EF çarpımının toplamı EF üzerindeki kareye asaldır.

Ve DE üzerindeki kare A'dır, DE, EF çarpımı B'dir, ve EF üzerindeki kare C'dir;

öyleyse A, B toplamı C'ye asaldır.

Benzer şekilde, B, C toplamının A'ya asal olduğunu gösterebiliriz.

Şimdi de diyorum ki, A, C toplamı B'ye asaldır.

Çünkü, DF sayısı DE, EF sayılarının her birine asal olduğundan, DF üzerindeki kare de DE, EF çarpımına asaldır. **[VII.24, VII.25]**

Ama DE, EF üzerindeki kareler, DE, EF çarpımının iki katıyla beraber, DF üzerindeki kareye eşittir. **[II.4]**

bu durumda DE, EF üzerindeki kareler, DE, EF çarpımının iki katıyla beraber, DE, EF çarpımına asal olur.

Ayırınca, DE, EF üzerindeki kareler, DE, EF çarpımının tek katıyla beraber, DE, EF çarpımına asal olur.

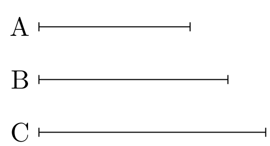
Tekrar ayırarak, DE, EF üzerindeki kareler, DE, EF çarpımına asal olur.

Ve, DE üzerindeki kare A'dır, DE, EF çarpımı B'dir, ve EF üzerindeki kare C'dir.

Öyleyse A, C toplamı, B'ye asaldır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

16. Önerme:
İki sayı aralarında asalsa, ikincinin hiçbir sayıya oranı, birincinin ikinciye oranına eşit olmaz.



Çünkü, iki sayı A, B aralarında asal olsun;

diyorum ki, B'nin hiçbir sayıya oranı, A'nın B'ye oranına eşit olmaz.

Çünkü, eğer mümkünse, A'nın B'ye oranı, B'nin C'ye oranına eşit olsun.

Şimdi, A, B aralarında asaldır, ve asallar en küçüktür,

ve küçükler kendileriyle aynı oranda olanları aynı sayıda ölçerler, öncüller öncülleri, ardıllar ardılları; **[VII.20]**

öyleyse öncüller olarak A, B'yi ölçer.

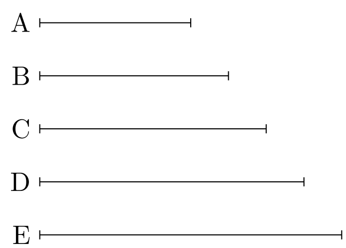
Ama kendisini de ölçer; bu durumda A sayısı aralarında asal olan A, B'yi ölçer: bu olamaz.

Öyleyse B'nin C'ye oranı, A'nın B'ye oranına eşit olmayacaktır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

17. Önerme:

İstediğimiz miktarda aldığımız sayılar sürekli orantılıysa, ve eğer iki uçtaki sayılar aralarında asalsa, sonuncunun hiçbir sayıya oranı, birincinin ikinciye oranına eşit olmayacaktır.



Sürekli orantılı olarak istediğimiz miktarda aldığımız sayılar A, B, C, D olsun, ve iki uçtaki sayılar A, D aralarında asal olsun;

diyorum ki, D'nin hiçbir sayıya oranı, A'nın B'ye oranına eşit olmaz.

Çünkü, eğer mümkünse, A'nın B'ye oranı, D'nin E'ye oranına eşit olsun; öyleyse, yer değiştirerek, A'nın D'ye oranı, B'nin E'ye oranına eşittir. **[VII.13]**

Ama, A, D aralarında asaldır, ve asallar en küçüktür,

ve küçükler kendileriyle aynı oranda olanları aynı sayıda ölçerler, öncüller öncülleri, ardıllar ardılları; **[VII.20]**

öyleyse A, B'yi ölçer.

Ve, A'nın B'ye oranı, B'nin C'ye oranına eşittir. Bu durumda B de C'yi ölçer; böylece A, C'yi de ölçer.

Ve, B'nin C'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşit olduğundan, ve B, C'yi ölçtüğünden, C de D'yi ölçer.

Ama A, C'yi ölçüyordu; o zaman A, D'yi de ölçer.

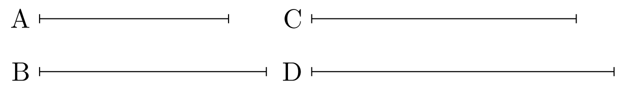
Ama kendisini de ölçer; bu durumda aralarında asal olan A, D sayılarını A ölçer: bu olamaz.

Öyleyse D'nin hiçbir sayıya oranı, A'nın B'ye oranına eşit olmaz.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

18. Önerme:

İki sayı verildiğinde, onlarla orantılı olacak bir üçüncü sayı bulmanın mümkün olup olmadığını araştırmanın yolu.



A, B sayıları verilmiş olsun, ve bunlarla sürekli orantılı bir üçüncü sayı bulmanın mümkün olup olmadığının araştırılması istenmiş olsun.

Şimdi, A, B sayıları ya aralarında asaldır ya da değildir.

Ve eğer aralarında asalsalar, onlarla orantılı bir üçüncü sayı bulmanın imkansız olduğu kanıtlanmıştı. **[IX.16]**

Öyleyse A, B aralarında asal olmasın, ve B kendisini çarparak C'yi oluştursun.

O zaman A, C'yi ya ölçer ya da ölçmez.

Önce, D'ye göre ölçsün; yani A, D'yi çarparak C'yi oluştursun.

Ama ayrıca, B de kendisini çarparak C'yi oluşturmuştu; bu durumda A, D çarpımı, B üzerindeki kareye eşit olur.

Öyleyse A'nın B'ye oranı, B'nin Dye oranına eşittir; **[VII.19]**

böylece A, B'ye orantılı üçüncü bir D sayısı bulunmuş oldu.

Şimdi de A, C'yi ölçmesin;

diyorum ki, A, B'ye orantılı bir üçüncü sayı bulmak mümkün değildir.

Çünkü, eğer mümkünse üçüncü bir orantılı sayı D bulunmuş olsun.

Bu durumda A, D çarpımı, B üzerindeki kareye eşit olur.

Ama B üzerindeki kare C'dir; öyleyse A, D çarpımı C'ye eşittir.

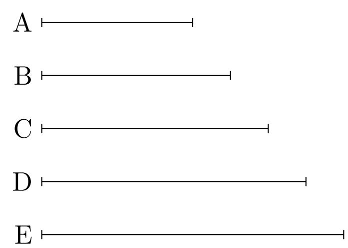
Öyleyse A, D'yi çarparak C'yi oluşturmuştur; dolayısıyla A, C'yi D'ye göre ölçer.

Ama varsayıma göre ölçmez: bu olamaz.

Öyleyse eğer A, C'yi ölçmezse, A, B'ye orantılı bir üçüncü sayı bulmak mümkün değildir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

19. Önerme:
Üç sayı verildiğinde, ne zaman onlarla orantılı olacak bir dördüncü sayı bulmanın mümkün olduğunu araştırmanın yolu.



A, B, C sayıları verilmiş olsun, ve bunlarla orantılı bir dördüncü sayı bulmanın ne zaman mümkün olacağının araştırılması istenmiş olsun.

[Aranan orantılı dördüncü sayının var olması için gerek ve yeter şart A'nın BC'yi bölmesidir. Dikkatli okuyucu aşağıdaki kanıtın gereksiz derecede uzun olduğunu, özellikle ikinci durumun kanıtının yanlış olduğunu görecektir. Heath, Vatikan yazmasında bu kanıtın olduğu yerin zor okunduğunu, okunan yerlerin de düzeltilemeycek kadar yanlış olduğunu söyler. Fitzpatrick ayrıntıya girmeden kanıtın yanlış olduğunu söyler. Peyrard bir yorum yapmadan kendi doğru kanıtını verir.]

Şimdi, ya bunlar sürekli orantılı değildir ve uçtaki sayılar aralarında asaldır;

ya da bunlar sürekli orantılıdır ve uçtaki sayılar aralarında asal değildir;

ya da hem bunlar sürekli orantılı değildir hem de uçtaki sayılar aralarında asal değildir;

ya da bunlar sürekli orantılıdır ve uçtaki sayılar aralarında asaldır.

Eğer A, B, C sürekli orantılıysa ve uçtaki sayılar A, C aralarında asalsa, bunlara dördüncü orantılı bir sayı bulmanın mümkün olmadığı daha önce kanıtlanmıştı. **[IX.17]**

[Hatalı kısım başlangıcı]

Şimdi A, B, C sürekli orantılı olmasın ve uçtaki A, C yine aralarında asal olsun;

diyorum ki, bu durumda da bunlara orantılı bir dördüncü bulmak mümkün değildir.

Çünkü, eğer mümkünse, A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşit olacak şekilde bir D bulunmuş olsun,

ve B'nin C'ye oranının, D'nin E'ye oranına eşit olması sağlansın.

Şimdi, A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına, ve B'nin Cye oranı, D'nin E'ye oranına eşit olduğundan,

eşit dış oranlar olarak A'nın C'ye oranı, C'nin E'ye oranına eşittir. **[VII.14]**

Ama A, C aralarında asaldır, ve asallar en küçüktür, **[VII.21]**

ve küçükler kendileriyle aynı oranda olanları aynı sayıda ölçerler, öncüller öncülleri, ardıllar ardılları; **[VII.20]**

öyleyse öncüller olarak A, C'yi ölçer.

Ama kendisini de ölçer; bu durumda A, aralarında asal olan A, C'yi ölçer: bu olamaz.

Öyleyse A, B, C'ye orantılı dördüncü bulunamaz.

> *[Hatalı kısım sonu.*
> *Eğer* A, B, C *yerine* $4, 8, 9$ *alınırsa, bu kanıtın varsayımları sağlanır ama* 18 *aranan orantılı dördüncü sayı olmasına rağmen, kanıt böyle bir sayı bulunamaz diye biter. Kanıttaki hatayı dikkatli okuyucu bulacaktır.]*

Şimdi A, B, C sürekli orantılı olsun ama A, C aralarında asal olmasın.

Diyorum ki, bunlara orantılı dördüncü bulmak mümkündür.

Çünkü, B, C'yi çarparak D'yi oluştursun; bu durumda A, D'yi ya ölçer ya da ölçmez.

Önce, E'ye göre ölçsün; yani A, E'yi çarparak D'yi oluşturmuştur.

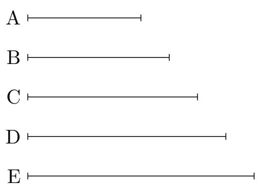
Ama, ayrıca B de C'yi çarparak D'yi oluşturmuştur; öyleyse A, E çarpımı B, C çarpımına eşittir;

bu durumda, oran olarak, A'nın B'ye oranı, C'nin E'ye oranına eşit olur. **[VII.19]**

Öyleyse A, B, C'ye orantılı dördüncü olarak E bulunmuştur.

Şimdi de A, D'yi ölçmesin;

diyorum ki, A, B, C'ye orantılı dördüncü bulmak mümkün değildir.



Çünkü, eğer mümkünse, E bulunmuş olsun; bu durumda A, E çarpımı, B, C çarpımına eşit olur. **[VII.19]**

Ama B, C çarpımı D'dir; öyleyse A, E çarpımı D'ye eşittir.

Demek ki A, E'yi çarparak D'yi oluşturmuştur; öyleyse A, D'yi E'ye göre ölçer.

Ama aynı zamanda ölçmez d: bu olamaz.

Öyleyse, A, D'yi ölçmediği durumda A, B, C'ye orantılı dördüncü bulunamaz.

Şimdi de hem A, B, C sürekli orantılı olmasın, hem de A, C aralarında asal olmasın.

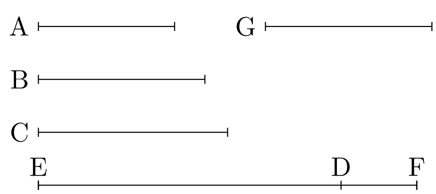
Ve B, C'yi çarparak D'yi oluştursun.

Benzer şekilde, eğer A, D'yi ölçerse, orantılı dördüncü bulmanın mümkün oladuğu, ama ölçmezse mümkün olmadığı kanıtlanabilir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

20. Önerme:
Asal sayıların miktarı, seçilen her asal sayı topluluğunun miktarından fazladır.

[Asalların sonsuz olduğunun kanıtı. Öklid, asalların sonlu olduğunu kabul edip bundan bir çelişki çıkararak kanıtlamaz asalların sonsuz olduğunu; sonlu sayıda asal seçersek, bunların dışında bir asal daha olacağını gösterir.]



Seçilen asal sayılar A, B, C olsun;

diyorum ki, asal sayılar A, B, C'den çoktur.

Çünkü, A, B, C'nin ölçtüğü en küçük sayı alınsın, bu sayı DE olsun; ve DF birimi DE'ye eklensin.

O zaman EF ya asaldır, ya da değildir.

Önce, asal olsun; o zaman A, B, C'den daha çok olan A, B, C, DE asalları bulunmuş olur.

Şimdi de EF asal olmasın; bu durumda bir asal tarafından ölçülür. **[VII.31]**

G asal sayısı tarafından ölçülsün.

Diyorum ki, G asal sayısı A, B, C sayılarından biri değildir.

Çünkü, eğer mümkünse, öyle olsun.

Şimdi A, B, C asalları DE'yi ölçer; öyleyse G de DE'yi ölçer.

Ama EF'yi de ölçer. Öyleyse G, bir sayı olarak, kalan birim EF'yi de ölçer: bu olamaz.

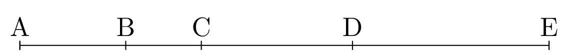
Demek ki G sayısı A, B, C sayılarından biri değildir.

Ama varsayıma göre asaldır.

Öyleyse A, B, C'den daha çok olan A, B, C, DE asalları bulunmuş olur.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

21. Önerme:
İstediğimiz miktarda çift sayıyı toplarsak, toplam yine bir çift sayıdır.



İstediğimiz miktardaki çift sayı AB, BC, CD, DE toplansın;

diyorum ki, AE toplamı çifttir.

Çünkü, AB, BC, CD, DE sayılarının herbiri çift olduğundan, herbirinin yarısı vardır; **[Tan. VII.6]**

böylece AE'nin tamamının da yarısı vardır.

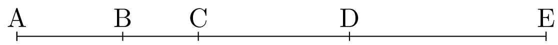
Ama, çift sayı iki eşit parçaya bölünebilendir; **[Tan. VII.6]**

öyleyse AE çifttir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

22. Önerme:

İstediğimiz miktarda tek sayıyı toplarsak, eğer miktarları çift ise, toplam da bir çift sayıdır.



İstediğimiz kadar ama çift sayıda AB, BC, CD, DE tek sayıları alınsın ve toplansın;

diyorum ki, AE toplamı çifttir.

Çünkü, AB, BC, CD, DE sayılarının herbiri tek olduğundan, herbirinden birim çıkarılırsa, her kalan çift olacaktır; **[Tan. VII.7]**

böylece bunların toplamı çift olur. **[IX.21]**

Ama birimlerin miktarı da çifttir.

Öyleyse AE toplamı da çifttir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

23. Önerme:

İstediğimiz miktarda tek sayıyı toplarsak, eğer miktarları tek ise, toplam da bir tek sayıdır.

Miktarları tek olan istediğimiz miktardaki AB, BC, CD tek sayıları toplansın;

diyorum ki AD toplamı da tektir.

Çünkü, CD'den DE birimi çıkartılsın; bu durumda CE çift olur. **[Tan. VII.7]**

Ama CA da çifttir; **[IX.22]**

öyleyse AE toplamı da çifttir. **[IX.21]**

Ve DE birimdir.

Öyleyse AD tektir. **[Tan. VII.7]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

24. Önerme:

Bir çift sayıdan bir çift sayı çıkarılırsa, kalan çifttir.

AB çift sayısında BC çift sayısı çıkarılsın;

diyorum ki, CA kalanı çifttir.

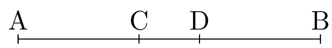
Çünkü, AB çift olduğundan yarısı vardır. **[Tan. VII.7]**

Aynı nedenden dolayı, BC'nin de yarısı vardır.

Öyleyse kalan CA'nın da yarısı vardır, ve AC çifttir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

25. Önerme:
Bir çift sayıdan bir tek sayı çıkarılırsa, kalan tektir.



AB çift sayısından BC tek sayısı çıkarılsın;

diyorum ki, CA tektir.

Çünkü, BC'den CD birimi çıkarılsın; bu durumda DB çift olur. **[Tan. VII.7]**

Ama AB de çifttir; öyleyse AD kalanı da çifttir. **[IX.24]**

Ve CD birimdir;

öyleyse CA tektir. **[Tan. VII.7]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

26. Önerme:
Bir tek sayıdan bir tek sayı çıkarılırsa, kalan çifttir.

AB tek sayısından BC tek sayısı çıkarılsın;

diyorum ki, CA kalanı çifttir.

Çünkü, AB tek olduğundan, BD birimi çıkarılsın; bu durumda kalan AD çift olur. **[Tan. VII.7]**

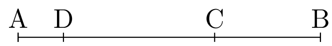
Aynı nedenden dolayı CD de çifttir; **[Tan. VII.7]**

öyleyse kalan CA çifttir. **[IX.24]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

27. Önerme:

Bir tek sayıdan bir çift sayı çıkarılırsa, kalan tektir.



AB tek sayısından, BC çift sayısı çıkarılsın;

diyorum ki, kalan CA tektir.

AD birimi çıkarılsın; bu durumda DB çift olur. **[Tan. VII.7]**

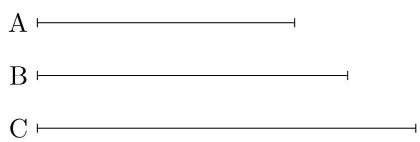
Ama BC de çifttir; bu durumda kalan CD çift olur. **[IX.24]**

Öyleyse CA tektir. **[Tan. VII.7]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

28. Önerme:

Bir tek sayının bir çift sayıyla çarpımı çifttir.



A tek sayısı B çift sayısını çarparak C'yi oluştursun;

diyorum ki, C çifttir.

Çünkü, A, B'yi çarparak C'yi oluşturduğundan, C sayısı A'daki birimler kadar ve B'ye eşit sayılardan yapılmıştır. **[Tan. VII.15]**

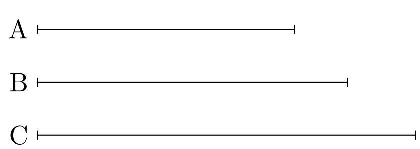
Ve B çifttir; öyleyse C çift sayılardan yapılmıştır. Ama istediğimiz miktarda çift sayının toplamı çifttir. **[IX.21]**

Öyleyse C çifttir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

29. Önerme:

Bir tek sayının bir tek sayıyla çarpımı tektir.



A tek sayısı B tek sayısını çarparak C'yi oluştursun;

diyorum ki, C tektir.

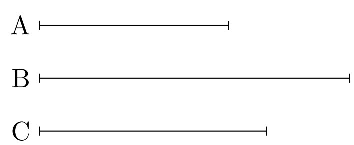
Çünkü, A, B'yi çarparak C'yi oluşturduğundan, C sayısı A'daki birimler kadar ve B'ye eşit sayılardan yapılmıştır. **[Tan. VII.15]**

Ve A, B sayılarının her biri tektir; demek ki C sayısı tek miktardaki tek sayılardan oluşmuştur.

Öyleyse C tektir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

30. Önerme:
Eğer bir tek sayı bir çift sayıyı ölçerse, onun yarısını da ölçer.



A tek sayısı B çift sayısını ölçsün;

diyorum ki, yarısını da ölçecektir.

Çünkü, A, B'yi ölçtüğüne göre, C'ye göre ölçsün;

diyorum ki C tek değildir.

Çünkü, eğer mümkünse, tek olsun.

O zaman, A, B'yi C'ye göre ölçtüğünden, A, C'yi çarparak B'yi oluşturmuştur.

Öyleyse B sayısı tek miktarda tek sayıdan yapılmıştır.

Bu durumda B tektir: **[IX.23]**

ama bu olamaz çünkü varsayıma göre çifttir.

Öyleyse C tek değildir; bu durumda C çift olur.

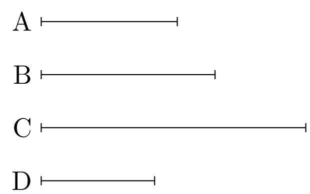
Böylece A, B'yi çift defa ölçer.

Bu nedenden dolayı yarısını da ölçer.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

31. Önerme:

Eğer bir tek sayı bir başka sayıyla aralarında asalsa, o sayının iki katıyla da aralarında asaldır.



A tek sayısı herhangi bier B sayısına asal olsun, ve B'nin iki katı C olsun;

diyorum ki, A, C'ye asaldır.

Çünkü, eğer aralarında asal değilseler, bir sayı onları ölçer.

Bir sayı onları ölçsün ve o sayı D olsun.

Şimdi A tektir; öyleyse D de tektir.

Ve tek olan D, C'yi ölçtüğünden, ve C çift olduğundan, D, C'nin yarısını da ölçecektir. **[IX.30]**

Ama C'nin yarısı B'dir; öyleyse D, B'yi ölçer.

Ama A'yı da ölçer; bu durumda D sayısı aralarında asal olan A, B'yi ölçer: bu olamaz.

Dolayısıyla A'nın C'ye asal olmaktan başka seçeneği yoktur.

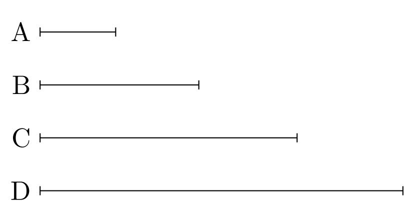
Öyleyse A, C aralarında asaldır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

32. Önerme:

İkiden başlayarak ve hep bir önceki sayının iki katı alınarak elde edilen sayıların her biri yalnızca çift kere çifttir.

[Ölid "yalnızca çift kere çift" tanımını vermez; burada bütün bölenleri çifttir anlamında kullanılıyor.]



İki olan A'dan başlayarak, sürekli iki katını alarak elde ettiğimiz ve istediğimiz miktardaki sayılar B, C, D olsun;

diyorum ki, B, C, D sayıları yalnızca çift kere çifttir.

Şimdi, B, C, D sayılarının her birinin çift kere çift olduğu açıktır; çünkü ikiden katlanarak elde edilmiştir.

Diyorum ki, aynı zamanda yalnızca çift kere çifttir.

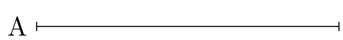
Çünkü, bir birim seçilsin. Birimden başlayarak istediğimiz miktarda seçtiğimiz bu sayılar sürekli orantılı olduğundan, ve birimden sonra gelen A asal olduğundan, A, B, C, D'nin en büyüğü olan D sayısı, A, B, C dışında başka hiçbir sayı tarafından ölçülmeyecektir. **[IX.13]**

Ve A, B, C sayılarının her biri çifttir; öyleyse D sayısı yalnızca çift kere çifttir. **[Tan. VII.8]**

Benzer şekilde B, C sayılarının her birinin de yalnızca çift kere çift olduğunu kanıtlayabiliriz.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

33. Önerme:
Bir sayının yarısı tekse, o sayı yalnızca çift kere tektir.



A sayısının yarısı tek olsun;

diyorum ki, A sayısı yalnızca çift kere tektir.

Şimdi, çift kere tek olduğu açıktır; çünkü tek olan yarısı onu çift kere ölçer. **[Tan. VII.9]**

Şimdi diyorum ki, yalnızca çift kere tektir de.

Çünkü, eğer A çift kere çift de olsaydı, çift bir sayı tarafından çift bir sayıya göre ölçülecekti; **[Tan. VII.8]**

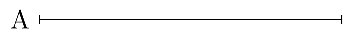
böylece yarısı da, tek olmasına rağmen, çift bir sayı tarafından ölçülecektir: bu olamaz.

Öyleyse A sayısı yalnızca çift kere tektir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

34. Önerme:

Bir sayı, ne ikiden başlayıp ikiyle katı alınarak elde edilmiş olsun, ne de yarısı tek olsun, o zaman o sayı hem çift kere çift hem de çift kere tektir.



A sayısı, ne ikiden başlayarak ikiyle katı alınarak elde edilmiş olsun, ne de yarısı tek olsun;

diyorum ki, A sayısı hem çift kere çift, hem de çift kere tektir.

Şimdi, yarısı tek olmadığından A'nın çift kere çift olduğu açıktır. **[Tan. VII.8]**

Şimdi de diyorum ki, çift kere tektir.

Çünkü, eğer A'yı ikiye bölersek, sonra yarısını ikiye bölersek, ve bunu sürekli yaparsak, A'yı çift bir sayıya göre ölçen bir tek sayıya varacağız.

Çünkü aksi durumda ikiye varacağız, ve A sayısı ikiden iki katı alınarak elde edilen sayılardan biri olacak: bu varsayıma aykırıdır.

Demek ki A sayısı çift kere tektir.

Ama çift kere çift olduğu da kanıtlanmıştı.

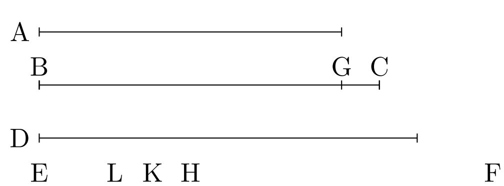
Öyleyse A sayısı hem çift kere çift, hem de çift kere tektir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

35. Önerme:

İstediğimiz miktarda sayı sürekli orantılıysa, ve ikinciden ve sonuncudan birinci çıkarılırsa, ikincinin artanının birinciye oranı, sonuncunun artanının öncekilerin hepsinin toplamına oranına eşit olacaktır.

[Dikkatli okuyucu burada geometrik dizi toplamı için bir kural verildiğini hemen görecektir.]



En küçüğü A olmak üzere istediğimiz miktarda ve sürekli orantılı olan sayılar A, BC, D, EF olsun, BC ve EF'den her biri A'ya eşit olan BG, FH sayıları çıkarılsın;

diyorum ki, GC'nin A'ya oranı, EH'nin A, BC, D'nin toplamına oranına eşittir.

Çünkü, FK, BCye, ve FL, D'ye eşit alınsın.

O zaman, FK, BC'ye eşit olduğundan, ve bunların FH parçası BG parçasına eşit olduğundan, kalan HK, kalan GC'ye eşittir.

Ve EF'nin D'ye oranı, D'nin BC'ye, ve BC'nin A'ya oranına eşit olduğundan, ve ayrıca D, FL'ye, BC, FK'ye, ve A da FH'ye eşit olduğundan,

EF'nin FLye oranı, LF'nin FKye oranına, ve FK'nin FH'ye oranına eşittir.

Ayrışık oranlar olarak, EL'nin LF'ye oranı, LK'nin FK'ye oranına, ve KH'nin FH'ye oranına eşittir. **[VII.11, VII.13]**

Ayrıca, öncüllerden birinin ardılına oranı, tüm öncüllerin tüm ardıllara oranına eşittir. **[VII.12]**

Öyleyse KH'nin FH'ye oranı, EL, LK, KH'nin LF, FK, HF'ye oranına eşittir.

Ama KH, CG'ye eşittir, FH, A'ya, ve LF, FK, HF de D, BC, A'ya eşittir.

Bu durumda CG'nin A'ya oranı, EH'nin D, BC, A'ya oranına eşittir.

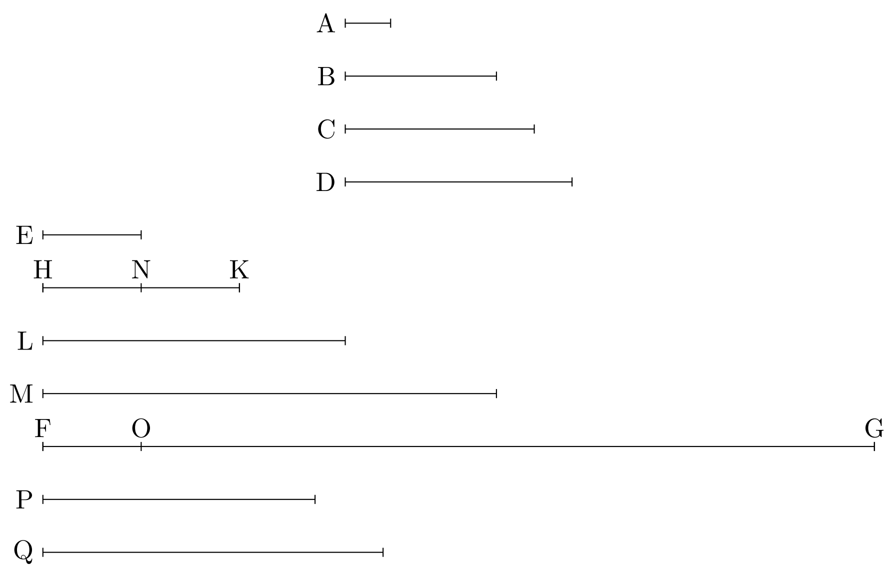
Öyleyse ikincinin artanının birinciye oranı, sonuncunun artanının diğerlerinin toplamının oranına eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

36. Önerme:

Birimden başlayarak, ve toplamları bir asal sayı olana kadar, hep bir önceki sayının iki katı alınsa, ve son sayı bu toplamla çarpılsa, çarpım bir mükemmel sayıdır.

[$1+2+2^2+\cdots+2^n$ asalsa, $(1+2+2^2+\cdots+2^n)2^n$ bir mükemmel sayı olur.]



Toplamları bir asal sayı olana kadar, hep bir önceki sayının iki katını alınarak oluşan sayılar birimden sonra A, B, C, D olsun, toplam E olsun, ve E, D'yi çarparak FG'yi oluştursun;

diyorum ki, FG mükemmeldir.

Çünkü, A, B, C, D'nin miktarına eşit miktarda ve E'den başlayıp, bir önceki sayı ikiyle çarpılarak E, HK, L, M alınsın;

bu durumda eşit dış oranlar olarak, A'nın D'ye oranı, E'nin M'ye oranına eşit olur. **[VII.14]**

Öyleyse E, D çarpımı, A, M çarpımına eşittir. **[VII.19]**

Ve E, D çarpımı FG'dir; öyleyse A, M çarpımı FG'ye eşittir.

Demek ki A, M'yi çarparak FG'yi oluşturmuştur; bu durumda M, FG'yi A'daki birimler kadar ölçer.

Ve A ikiye eşittir; öyleyse FG, M'nin iki katıdır.

Ama M, L, HK, E hep bir sonrakinin iki katıdır; öyleyse E, HK, L, M, FG, ortak oranı iki olan, sürekli orantılı sayılardır.

Şimdi, ikinci olan HK'den, ve sonuncu olan FG'den, birinci olan E'ye eşit olan HN, FO sayıları çıkarılsın;

öyleyse ikincinin birinciye fazlalığının birinciye oranı, sonuncunun fazlalığının kendinden öncekilerin toplamına oranına eşittir. **[IX.35]**

Demek ki, NK'nin E'ye oranı, OG'nin M, L, KH, E'ye oranına eşittir.

Ve NK eşittir E; öyleyse OG de M, L, HK, E'ye eşittir.

Ama FO eşittir E, ve E eşittir A, B, C, D ve birim.

Öyleyse FG'nin tamamı eşittir E, HK, L, M ve A, B, C, D ve birim; ve onlar tarafından ölçülür.

Ayrıca diyorum ki, A, B, C, D, E, HK, L, M sayıları ve birimden başka hiçbir sayı FG'yi ölçmez.

Çünkü, eğer mümkünse, bir P sayısı FG'yi ölçsün, ve P sayısı A, B, C, D, E, HK, L, M sayılarından biri olmasın.

Ve P, FG'yi kaç kez ölçüyorsa Q'nun içinde de o kadar birim olsun; bu durumda Q, P'yi çarparak FG'yi oluşturmuştur.

Ama, E de D'yi çarparak FG'yi oluşturmuştu; bu durumda E'nin Q'ya oranı, P'nin D'ye oranına eşit olur. **[VII.19]**

Ve, A, B, C, D sayıları birimden başlayarak sürekli orantılı olduğundan, D sayısı A, B, C dışında hiçbir sayı tarafından ölçülmeyecektir. **[IX.13]**

Ve varsayıma göre, P sayısı A, B, D'den farklıdır; bu durumda P sayısı D'yi ölçmeyecektir.

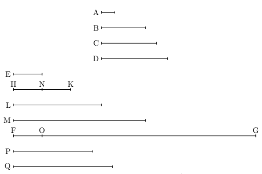
Ama P'nin D'ye oranı, E'nin Q'ya oranına eşittir; öyleyse E de Q'yu ölçmez. **[Tan. VII.20]**

Ve E asaldır; ve her asal sayı ölçmediği sayıya asaldır. **[VII.29]**

Öyleyse E, Q aralarında asaldır.

Ama asallar en küçüktür, ve en küçük sayılar, kendileriyle aynı orandaki sayıları aynı sayıda ölçerler, öncüller öncülleri, ve ardıllar ardılları; **[VII.20]**

ve E'nin Q'ya oranı, P'nin D'ye oranına eşittir;



bu durumda E, P'yi, Q'nun D'yi ölçtüğü sayıda ölçer.

Ama D sayıdı A, B, C dışında bir sayı tarafından ölçülmez; öyleyse Q sayısı A, B, C sayılarından birine eşittir.

B'ye eşit olsun.

Ve B, C, D'nin miktarına eşit olacak şekilde E'den başlayarak E, HK, L alınsın.

Şimdi, E, HK, L sayıları B, C, D ile aynı orandadır; öyleyse eşit dış oranlar olarak, B'nin D'ye oranı, E'nin L'ye oranına eşittir. **[VII.19]**

Öyleyse B, L çarpımı D, E çarpımına eşittir. **[VII.19]**

Ama D, E çarpımı, Q, P çarpımına eşitti; bu durumda Q, P çarpımı da B, L çarpımına eşit olur.

Öyleyse Q'nun B'ye oranı, L'nin P'ye oranına eşittir. **[VII.19]**

Ve Q eşittir B; demek ki L de P'ye eşittir: bu olamaz çünkü varsayım gereği P bu sayılardan biri değildi.

Öyleyse A, B, C, D, E, HK, L, M sayıları ve birimden başka hiçbir sayı FG'yi ölçmez.

Ve FG'nin A, B, C, D, E, HK, L, M ve birime eşit olduğu kanıtlanmıştı; ve mükemmel sayı parçalarının toplamına eşit olandı; **[Tan. VII.22]**

öyleyse FG mükemmeldir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■