Kitap X

1. Tanımlar I

1 Aynı ölçü tarafından ölçülebilen niceliklere **eşölçekli**, hiçbir ortak ölçüsü olmayan niceliklere **eşölçeksiz** denir.

[α, β nicelikleri verildiğinde, m, n tamsayı olacak şekilde $\alpha = m\,u$ ve $\beta = n\,u$ eşitliklerini sağlayan bir u niceliği varsa, o zaman α, β eşölçeklidir. Eğer bu koşullara uyan bir u niceliği yoksa, α, β eşölçeksizdir.]

2 Kenarlarını oluşturdukları karelerin alanları aynı alan tarafından ölçülebilen doğrulara **karede eşölçekli**, ve bu kareler için ortak ölçü olacak bir alanın olmaması durumunda ise **karede eşölçeksiz** denir.

[Uzunlukları sırasıyla α, β olan A, B doğruları verildiğinde, m, n tamsayı olacak şekilde $\alpha^2 = m\,u$ ve $\beta^2 = n\,u$ eşitliklerini sağlayan ve alanı u olan bir C şekli varsa, A, B doğruları karede eşölçeklidir. Eğer bu koşullara uyan bir C şekli yoksa, A, B doğruları karede eşölçeksizdir.

*Eğer α, β nicelikleri eşölçekliyse, Öklid A, B doğruları için **uzunlukta eşölçekli** deyimini kullanır. Eğer A, B doğruları uzunlukta eşölçekli değilse, onlar **uzunlukta eşölçeksiz** adını alır. Uzunlukta eşölçeksiz doğrular eğer karede eşölçekliyse, bu durumda Öklid onlara **yalnızca karede eşölçekli** der.*

Açıkça görüleceği üzere uzunlukta eşölçekli olan doğrular karede de eşölçeklidir, ama yalnızca karede eşölçekli olan doğrular da vardır.]

3 Bunlar kabul edildiğinde, verilen bir doğruyla hem uzunlukta hem de karede, ya da yalnızca uzunlukta eşölçekli olan, ya da eşölçeksiz olan doğruların miktarının sonsuz olduğu kanıtlanır. Verilen bu doğruya **rasyonel** densin, ve onunla uzunlukta ya da karede, ya da yalnızca karede eşölçekli olan doğrulara **rasyonel**, onunla ne uzunlukta ne de karede eşölçekli olan doğrulara da **irrasyonel** densin.

[Öklid'in doğrular için verdiği bu rasyonellik tanımı bugünkü kullanımdan farklıdır. Her şeyden önce bir doğrunun rasyonel olup olmaması başta seçilip rasyonel kabul edilen doğruya göre değişen bir özelliktir.

Öklid en başta rastgele bir B *doğrusu seçip onu rasyonel ilan ediyor. Sonra verilen bir* A *doğrusu* B *ile uzunlukta veya karede eşölçekliyse, o zaman Öklid* A *doğrusuna rasyonel diyor.*

Buna göre eğer başta seçilen B *doğrusu birim uzunluktaysa, rasyonel doğruların uzunlukları,* m, n *tamsayılar olmak üzere,* $\frac{m}{n}$ *veya* $\sqrt{\frac{m}{n}}$ *olur.]*

4 Verilen o doğru üzerindeki karenin alanına rasyonel densin ve o alanla eşölçekli olan alanlara **rasyonel**, ama onunla eşölçeksiz olan alanlara **irrasyonel** densin. İrrasyonel alan eğer bir kareyse, onun kenarı olan doğruya, değilse de aynı alanlı karenin kenarına **irrasyonel** densin.

[Öklid'in doğrular için verdiği rasyonellik tanımı bugünkünden farklı olmasına rağmen alanlar için verdiği rasyonellik tanımı bugünkü beklentilerimizle uyumludur.

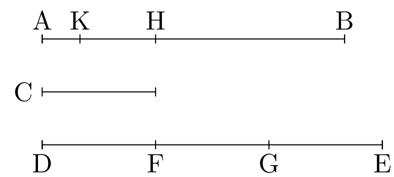
Başta verilip rasyonel olarak ilan edilen doğru B, *uzunluğu* β *olsun, ve* γ *değerinde bir alan alınsın. Eğer* γ *ve* β^2 *eşölçekliyse, bu alınan alan rasyoneldir, eşölçekli değilse irrasyoneldir. Eğer* $\gamma = \alpha^2$ *ise, Öklid* α *uzunluğundaki bir doğruya da irrasyonel der. Bu irrasyonel tanımı az önce doğrular için verilen irrasyonel tanımıyla uyumludur; Öklid'in tanımlarıyla konuşursak, alanı rasyonel olan bir karenin kenarı rasyoneldir, ve alanı irrasyonel olan bir karenin kenarı irrasyoneldir.]*

[Tanımların devamı 399. ve 459. sayfalarda yer almaktadır. Ayrıca önermelerin içinde de zaman zaman yeni tanımlar verilmektedir.]

2. Önermeler

1. Önerme:

Farklı iki nicelikle başlandığında, büyük olandan kendi yarısından büyük bir nicelik çıkarılıp, kalan nicelikten de yine yarısından büyük bir nicelik çıkarılarak devam edildiğinde en baştaki küçük nicelikten daha küçük bir niceliğe ulaşılır.



Büyüğü AB olan iki farklı nicelik AB, C olsun.

Diyorum ki, eğer AB'den kendi yarısından büyük bir nicelik çıkarılırsa, ve kalandan da yine kendi yarısından büyük bir nicelik çıkarılır, ve bu süreç sürekli olarak tekrarlanırsa, sonunda C'den daha küçük bir nicelik kalacaktır.

Çünkü, eğer C çarpılırsa bir ara AB'den daha büyük olacaktır. **[Tan. V.4]**

C'nin AB'den büyük bir katı DE olsun; DE, C'ye eşit DF, FG, GE parçalarına ayrılsın,

AB'den, yarısından büyük BH çıkarılsın, ve AH'den, yarısından büyük HK çıkarılsın, ve bu süreç AB'deki parçalar DE'deki parçaların sayısına eşit olana dek tekrarlansın.

O zaman, DF, FG, GE ile aynı miktarda olan parçalar AK, KH, HB parçaları olsun.

Şimdi, DE, AB'den büyük olduğundan, ve DE'den, yarısından küçük olan EG, ve AB'den de kendi yarısından büyük olan BH çıkarıldığından,

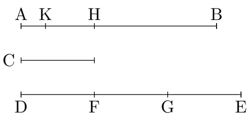
kalan GD, kalan HA'dan büyüktür.

Ve, GD, HA'dan büyük olduğundan, ve GD'den yarısı olan GF, ve HA'dan da yarısından büyük olan HK çıkarıldığından,

kalan DF, kalan AK'den büyüktür.

Ama DF eşittir C; öyleyse C de AK'den büyüktür.

Bu durumda AK, C'den küçük olur.

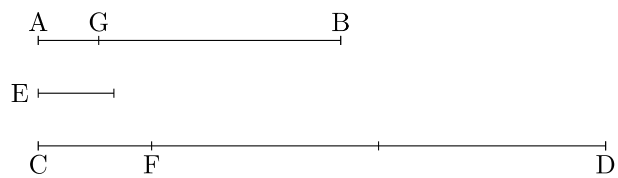


Öyleyse AB'den, baştaki C niceliğinden küçük olan, AK niceliği kalmıştır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

Ve eğer çıkarılan parçalar yarıya eşit olsaydı da, önerme yine aynı şekilde kanıtlanabilirdi.

2. Önerme:
Eşit olmayan iki nicelikten başlayarak daima küçük olanı büyüğünden çıkararak ilerlendiğinde kalan küçük parça büyüğü hiç bir zaman tam olarak ölçmezse, başlangıçtaki iki nicelik eşölçeksizdir.



AB, CD farklı iki nicelik olsun ve AB küçük olan olsun. Hep küçük olan büyük olandan çıkarılarak ilerlendiğinde, hiçbir zaman küçük olan büyük olanı ölçmesin.

Diyorum ki, AB, CD nicelikleri eşölçeksizdir.

Çünkü, eğer eşölçekli olsalar bir nicelik onları ölçecek.

Onları bir nicelik ölçsün, ve mümkünse bu nicelik E olsun;

AB, FD'yi ölçsün ve kalan CF ondan küçük olsun,

CF, BG'yi ölçsün ve kalan AG de ondan küçük olsun,

ve bu süreç E'den küçük bir nicelik kalana dek tekrarlansın.

Bu yapıldı varsayalım, ve kalan AG, E'den küçük olsun.

O zaman, E, AB'yi ölçtüğünden, bu arada AB de DF'yi ölçtüğünden, E, FD'yi ölçer.

Ama CD'nin tamamını da ölçer; öyleyse kalan CF'yi de ölçecektir.

Ama CF, BG'yi ölçer; öyleyse E de BG'yi ölçer.

Ama AB'nin tamamını da ölçer;

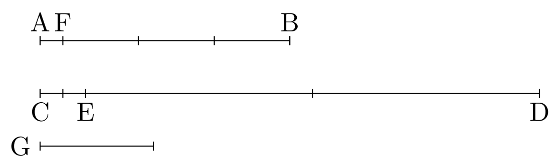
öyleyse kalan AG'yi de ölçer, yani büyük olan küçük olanı: bu olamaz.

Öyleyse AB, BC niceliklerini hiçbir nicelik ölçmeyecektir;

bu durumda AB, CD eşölçeksiz olur. **[Tan. X.1]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

3. Önerme:
Eşölçekli iki nicelik verildiğinde bunların en büyük ortak ölçüsünü bulmanın yolu.



Verilen eşölçekli iki nicelik AB, CD olsun, ve AB bunların küçük olanı olsun; böylece AB, CD'nin en büyük ortak ölçüsünün bulunması isteniyor.

Şimdi AB niceliği, CD'yi ya ölçer ya da ölçmez.

Eğer ölçerse, kendisini de ölçtüğünden, AB, CD'nin en büyük ortak ölçüsü AB'dir.

Ve açıktır ki en büyüğü de odur; çünkü AB'den daha büyük bir nicelik AB'yi ölçmeyecektir.

Şimdi de AB, CD'yi ölçmesin.

O zaman, AB, CD eşölçeksiz olmadıklarından, eğer sürekli olarak küçük olan büyük olandan çıkarılırsa, bir süre sonra artan nicelik bir öncekini ölçecektir. **[X.2]**

AB, ED'yi ölçsün ve kalan EC ondan küçük olsun,

EC, FB'yi ölçsün ve kalan AF ondan küçük olsun,

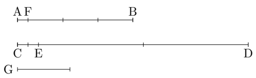
ve AF, CE'yi ölçsün.

AF, CE'yi ölçtüğünden, ve bu arada CE, FB'yi ölçtüğünden, AF, FB'yi de ölçecektir.

Ama kendisini de ölçer; öyleyse AF, AB'nin tamamını da ölçecektir.

Ama AB, DE'yi ölçer; öyleyse AF de ED'yi ölçecektir.

Ama CE'yi de ölçer; öyleyse CD'nin tamamını da ölçer.



Öyleyse AF niceliği AB, CD'nin bir ortak ölçüsüdür.

Şimdi de diyorum ki aynı zamanda en büyüğüdür.

Çünkü değilse, AB, CD'yi ölçen, AF'den büyük bir nicelik olacaktır.

Bu nicelik G olsun.

O zaman, G, AB'yi ölçtüğünden, ve bu arada AB, ED'yi ölçtüğünden, G de ED'yi ölçer.

Ama CD'nin tamamını da ölçer; öyleyse G, kalan CE'yi de ölçecektir.

Ama CE, FB'yi ölçer; öyleyse G, FB'yi de ölçecektir.

Ama AB'nin tamamını da ölçer, ve dolayısıyla kalan AF'yi de ölçecektir, yani büyük olan küçük olanı: bu olamaz.

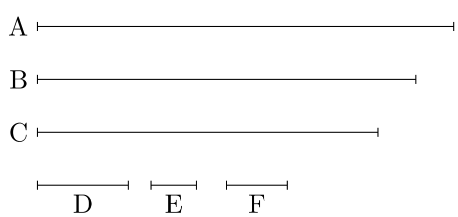
Bu durumda AF'den büyük hiçbir nicelik AB, CD'yi ölçmeyecektir.

Öyleyse, verilen eşölçekli iki nicelik AB, CD'nin en büyük ortak ölçüsü bulunmuştur.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

Doğal Sonuç: Bunun sonucu olarak açıktır ki bir nicelik eğer iki niceliği ölçerse onların en büyük ortak ölçüsünü de ölçer.

4. Önerme:
Eşölçekli üç nicelik verildiğinde bunların en büyük ortak ölçüsünü bulmanın yolu.



Verilen eşölçekli üç nicelik A, B, C olsun; böylece A, B, C'nin en büyük ortak ölçüsünün bulunması isteniyor.

A, B'nin en büyük ortak ölçüsü alınsın ve bu D olsun; **[X.3]**

O zaman D, C'yi ya ölçer ya da ölçmez.

Önce ölçsün.

D, C′yi ölçtüğünden, ve aynı zamanda A, B′yi de ölçtüğünden, D niceliği A, B, C′nin ortak ölçüsüdür.

Ve en büyük olduğu da açıktır, çünkü D′den daha büyük bir nicelik A, B′yi ölçmez.

Şimdi de D, C′yi ölçmesin.

Önce diyorum ki, C, D eşölçeklidir.

Çünkü, A, B, C eşölçekli olduğundan, bir nicelik onları ölçecektir, ve bu elbette A, B′yi de ölçecektir; bu yüzden A, B′nin en büyük ortak ölçüsünü, yani D′yi de ölçecektir. **[DS. X.3]**

Ama C′yi de ölçer; yani sözü edilen nicelik C, D′yi ölçecektir; bu durumda C, D eşölçekli olur.

Şimdi onların en büyük ortak ölçüsü alınsın ve bu E olsun. **[X.3]**

O zaman, E, D′yi ölçtüğünden, ve bu arada D niceliği de A, B′yi ölçtüğünden, E niceliği A, B′yi de ölçecektir.

Ama C′yi de ölçer; bu durumda E niceliği A, B, C′yi ölçer; öyleyse E niceliği A, B, C′nin bir ortak ölçüsüdür.

Şimdi de diyorum ki, aynı zamanda en büyüğüdür de.

Çünkü, eğer mümkünse, E′den daha büyük bir nicelik F olsun, ve A, B, C′yi ölçsün.

Şimdi, F niceliği A, B, C′yi ölçtüğünden, A, B′yi ölçecektir, ve onların en büyük ortak ölçüsünü de ölçecektir. **[DS. X.3]**

Ama A, B′nin en büyük ortak ölçüsü D′dir; öyleyse F, D′yi ölçer.

Ama C′yi de ölçer; öyleyse F niceliği C, D′yi ölçer; bu durumda F niceliği C, D′nin en büyük ortak ölçüsünü de ölçer. **[DS. X.3]**

Ama bu E′dir; bu durumda F, E′yi ölçer, yani büyük olan küçük olanı: bu olamaz.

Öyleyse E′den büyük hiçbir nicelik A, B, C′yi ölçemez; bu durumda, eğer D, C′yi ölçmezse A, B, C′nin en büyük ortak ölçüsü E olur.

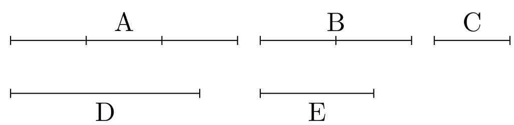
Öyleyse eşölçekli üç niceliğin en büyük ortak ölçüsü bulunmuştur.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

Doğal Sonuç: Buradan açıkça görülür ki, bir nicelik üç niceliği ölçerse, onların en büyük ortak ölçüsünü de ölçer.

Benzer şekilde, daha çok miktardaki niceliklerin de en büyük ortak ölçüsü bulunabilir ve doğal sonuç bu durum için genellenebilir.

5. Önerme:
Eşölçekli iki niceliğin birbirine oranı iki sayının birbirine oranıyla aynıdır.



A, B eşölçekli nicelikler olsun;

diyorum ki, A'nın B'ye oranı, bir sayının bir sayıya oranına eşittir.

Çünkü, A, B eşölçekli olduğundan, bir nicelik onları ölçecektir.

Ölçsün ve bu C olsun.

Ve C, A'yı kaç kez ölçüyorsa, D'nin içinde de o kadar birim olsun; ve C, B'yi kaç kez ölçüyorsa, E'nin içinde o kadar birim olsun.

C, A'yı D'deki birimler kadar ölçtüğünden, ve bu arada birim de D'yi içindeki birimler kadar ölçtüğünden, birim, D sayısını C niceliğinin A'yı ölçtüğü kadar ölçer; bu durumda C'nin A'ya oranı, birimin D'ye oranına eşit olur; **[Tan. VII.20]**

öyleyse ters oran olarak A'nın C'ye oranı, D'nin birime oranına eşittir. **[DS. V.7]**

Yine, C, B'yi E'deki birimler kadar ölçtüğünden, ve bu arada birim de E'yi içindeki birimler kadar ölçtüğünden, birim E'yi, C'nin B'yi ölçtüğü sayıda ölçer;

öyleyse C'nin B'ye oranı, birimin E'ye oranına eşittir.

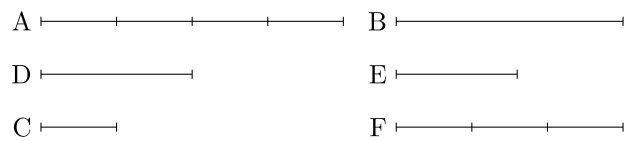
Ama A'nın C'ye oranının, D'nin birime oranına eşit olduğu kanıtlanmıştı;

bu durumda eşit dış oranlar olarak, A'nın B'ye oranı, D sayısının E'ye oranına eşit olur. **[V.22]**

Öyleyse eşölçekli A, B niceliklerinin birbirine oranı, D sayısının E sayısına oranına eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

6. Önerme:
İki niceliğin birbirine oranı iki tamsayının birbirine oranıyla aynıysa bu nicelikler eşölçeklidir.



A, B niceliklerinin birbirine oranı, D sayısının E sayısına oranına eşit olsun;

diyorum ki A, B nicelikleri eşölçeklidir.

Çünkü, A niceliği D'de ne kadar birim varsa o kadar eşit parçaya bölünsün, ve C bunlardan birine eşit olsun;

ve F de, E'de ne kadar birim varsa aynı miktarda ve C'ye eşit nicelikten oluşsun.

O zaman, A'da D'nin içindeki birimler kadar C'ye eşit nicelik olduğundan, birim D'nin hangi parçasıysa, C de A'nın aynı parçasıdır; bu durumda C'nin A'ya oranı, birimin D'ye oranına eşit olur. **[Tan. VII.20]**

Ama birim D sayısını ölçer; öyleyse C de A'yı ölçer.

Ve C'nin A'ya oranı, birimin D'ye oranına eşit olduğundan, ters oran olarak A'nın C'ye oranı, D sayısının birime oranına eşittir. **[DS. V.7]**

Yine, F'nin içinde, E'de ne kadar birim varsa aynı miktarda ve C'ye eşit nicelik olduğundan, C'nin F'ye oranı, birimin E'ye oranına eşittir. **[Tan. VII.20]**

Ama A'nın C'ye oranının, D'nin birime oranına eşit olduğu da kanıtlanmıştı; bu durumda eşit dış oranlar olarak, A'nın F'ye oranı, D'nin E'ye oranına eşittir; **[V.22]**

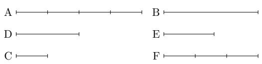
Ama D'nin E'ye oranı, A'nın B'ye oranına eşittir;

Öyleyse A'nın B'ye oranı, onun F'ye oranına da eşittir. **[V.11]**

Bu durumda A'nın B, F niceliklerine oranı aynı olur; öyleyse B eşittir F. **[V.9]**

Ama C, F'yi ölçer; öyleyse B'yi de ölçer.

Ayrıca A'yı da ölçer; bu durumda C niceliği A, B'yi ölçer.



Öyleyse A, B ile eşölçeklidir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

Doğal Sonuç: Buradan açıkça görülür ki eğer D, E gibi iki sayı varsa ve A gibi bir doğru varsa, öyle bir F doğrusu çizilebilir ki verilen doğrunun ona oranı, D sayısının E sayısına oranına eşit olur.

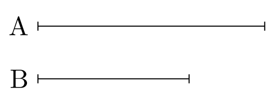
Ve eğer A, F'nin orta orantısı B alınırsa,

A'nın F'ye oranı, A üzerindeki karenin B üzerindeki kareye oranına eşit olacaktır, yani birincinin üçüncüye oranı, birinci üzerindeki şeklin üçüncü üzerindeki benzer ve aynı şekilde çizilmiş şekle oranına eşit olacaktır. **[DS. VI.19]**

[A, B, F sürekli orantılıdır, yani $\frac{A}{B} = \frac{B}{F}$. Bu durumda $\frac{A}{F} = \frac{A^2}{B^2}$ olur.]

Ama A'nın F'ye oranı, D sayısının E sayısına oranına eşittir; öyleyse D sayısının E sayısına oranının, A doğrusu üzerindeki şeklin B üzerindeki şekle oranına eşit olması sağlanmıştır. Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

7. Önerme:
Eşölçeksiz niceliklerin birbirine oranı iki tamsayının birbirine oranıyla aynı olmaz.



A, B eşölçeksiz iki nicelik olsun;

diyorum ki A'nın B'ye oranı, bir sayının bir sayıya oranına eşit olamaz.

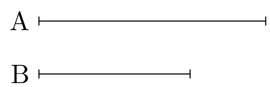
Çünkü, eğer A'nın B'ye oranı, bir sayının bir sayıya oranına eşit olsaydı, A, B ile eşölçekli olacaktı. **[X.6]**

Ama değil; öyleyse A'nın B'ye oranı, bir sayının bir sayıya oranına eşit olamaz.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

8. Önerme:

İki niceliğin birbirine oranı iki tamsayının birbirine oranıyla aynı olmazsa o iki nicelik eşölçeksizdir.



İki A, B niceliğinin birbirine oranı, bir sayının bir sayıya oranına eşit olmasın;

diyorum ki, A, B nicelikleri eşölçeksizdir.

Çünkü eğer eşölçekli olsalardı, A'nın B'ye oranı, bir sayının bir sayıya oranına eşit olacaktı. **[X.5]**

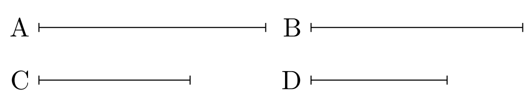
Ama değil;

öyleyse A, B nicelikleri eşölçeksizdir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

9. Önerme:

Eşölçekli doğrular üzerindeki karelerin birbirine oranı kare sayıların birbirine oranına eşittir; ve birbirine oranı kare sayıların birbirine oranına eşit olan karelerin kenarları da uzunlukta eşölçeklidir. Ama eşölçeksiz kenarlar üzerine kurulu karelerin birbirlerine oranı kare sayıların birbirine oranına eşit olmaz; ve birbirlerine oranı kare sayıların oranına eşit olmayan karelerin kenarları uzunlukta eşölçekli olmaz.



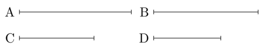
A, B uzunlukta eşölçekli olsun;

diyorum ki, A'nın üzerindeki karenin B'nin üzerindeki kareye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşittir.

Çünkü, A ile B uzunlukta eşölçekli olduklarından, A'nın B'ye oranı, bir sayının bir sayıya oranına eşittir. **[X.5]**

Bu oran C'nin D'ye oranı olsun.

O zaman, A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşit olduğundan, ve bu arada benzer şekillerin birbirine oranı karşılıklı kenarların birbirlerine oranının çift kat oranı olması nedeniyle **[DS. VI.20]**



A üzerindeki karenin B üzerindeki kareye oranı A′nın B′ye oranının çift kat oranı olduğundan,

ve iki kare sayı arasında bir orta orantılı sayı bulunduğundan, ve kare sayının kare sayıya oranı, kenarın kenara oranının çift kat oranı olduğundan, **[VIII.11]**

A′nın üzerindeki karenin B′nin üzerindeki kareye oranı, C′nin üzerindeki karenin D′nin üzerindeki kareye oranına eşittir.

Şimdi de A üzerindeki karenin B üzerindeki kareye oranı, C üzerindeki karenin D üzerindeki kareye oranına eşit olsun;

diyorum ki, A uzunlukta B ile eşölçeklidir.

Çünkü, A üzerindeki karenin B üzerindeki kareye oranı, C üzerindeki karenin D üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan,

ve bu arada A üzerindeki karenin B üzerindeki kareye oranı, A′nın B′ye oranının çift kat oranı olduğundan,

ve C üzerindeki karenin D üzerindeki kareye oranı, C′nin D′ye oranının çift kat oranı olduğundan,

A′nın B′ye oranı, C′nin D′ye oranına eşittir.

Öyleyse A′nın B′ye oranı, C sayısının D sayısına oranına eşittir

öyleyse A, uzunlukta B ile eşölçeklidir. **[X.6]**

Şimdi de, A uzunlukta B ile eşölçeksiz olsun;

diyorum ki, A üzerindeki karenin B üzerindeki kareye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmaz.

Çünkü, eğer A üzerindeki karenin B üzerindeki kareye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olsaydı, A uzunlukta B ile eşölçekli olacaktı.

Ama değil;

öyleyse A üzerindeki karenin B üzerindeki kareye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmaz.

Yine, A üzerindeki karenin B üzerindeki kareye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmasın;

diyorum ki, A uzunlukta B ile eşölçeksizdir.

Çünkü, eğer A uzunlukta B ile eşölçekli olsaydı, A'nın üzerindeki karenin B'nin üzerindeki kareye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olurdu.

Ama değil;

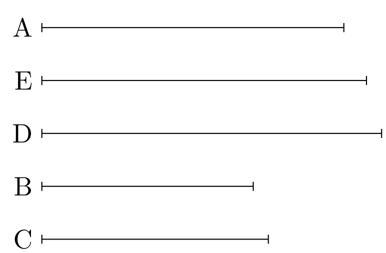
öyleyse A uzunlukta B ile eşölçekli değildir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

Doğal Sonuç: Bu kanıttan da açıkça görüleceği gibi uzunlukta eşölçekli olan doğrular karede de eşölçeklidir, ama karede eşölçekli olanlar her zaman uzunlukta eşölçekli değildir.

10. Önerme:
Verilen bir doğruyla, biri yalnızca uzunlukta eşölçeksiz olan bir doğruyla, diğeri onunla hem uzunlukta hem karede eşölçeksiz olan iki doğru bulmanın yolu.

[Bu önermenin Öklid'e ait olmadığı, sonradan eklendiği düşünülmektedir.]



Verilen doğru A olsun; böylece biri A ile yalnız uzunlukta eşölçeksiz, diğeri karede de eşölçeksiz iki doğru bulunması isteniyor.

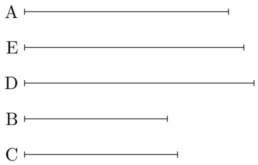
B, C gibi birbirine oranı bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmayan, yani benzer düzlem sayıları olmayan, iki sayı alınsın;

Ve bunu nasıl yapacağımızı öğrendiğimize göre, **[DS. X.6]**

B'nin C'ye oranının, A üzerindeki karenin D üzerindeki kareye oranına eşit olması sağlansın.

bu durumda A üzerindeki kare B üzerindeki kareyle eşölçekli olur. **[X.6]**

Ve B nin C'ye oranı bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmadığından, A üzerindeki karenin D üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmaz;



öyleyse A uzunlukta D ile eşölçeksizdir. **[X.9]**

A, D arasında orta orantılı E alınsın; bu durumda A'nın D'ye oranı, A üzerindeki karenin E üzerindeki kareye oranına eşit olur. **[Tan. V.9]**

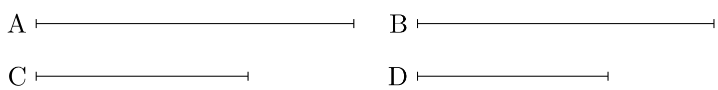
Ama A uzunlukta D ile eşölçeksizdir; öyleyse A üzerindeki kare E üzerindeki kareyle eşölçeksizdir; **[X.11]**

bu durumda A karede E ile eşölçeksiz olur.

Öyleyse verilen A doğrusuyla yalnız uzunlukta eşölçeksiz D doğrusu, ve hem uzunlukta hem de karede eşölçeksiz E doğrusu bulunmuş oldu.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

11. Önerme:
Eğer dört nicelik orantılıysa ve birinciyle ikinci eşölçekliyse, üçüncüyle dördüncü de eşölçeklidir; ve eğer birinciyle ikinci eşölçeksizse, üçüncüyle dördüncü de eşölçeksizdir.



A, B, C, D orantılı dört nicelik olsun, yani A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşit olsun, ve A, B eşölçekli olsun;

diyorum ki, C, D de eşölçekli olacaktır.

Çünkü, A, B eşölçekli olduğundan, A'nın B'ye oranı, bir sayının bir sayıya oranına eşit olur. **[X.5]**

Ve A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşittir; bu durumda C'nin D'ye oranı da bir sayının bir sayıya oranına eşit olur;

öyleyse C, D eşçölçeklidir. **[X.6]**

Şimdi de A, B eşölçeksiz olsun;

diyorum ki, C de D ile eşölçeksiz olacaktır.

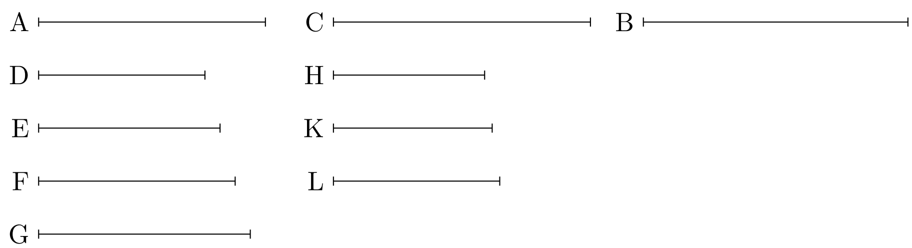
Çünkü, A, B eşölçeksiz olduğundan, A'nın B'ye oranı, bir sayının bir sayıya oranına eşit değildir. **[X.7]**

Ve A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşittir; bu durumda C'nin D'ye oranı da bir sayının bir sayıya oranına eşit olmaz;

öyleyse C, D eşölçeksizdir. **[X.8]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

12. Önerme:
Aynı nicelikle eşölçekli olan nicelikler birbirleriyle de eşölçeklidir.



A, B niceliklerinin her biri C ile eşölçekli olsun;

diyorum ki, A, B eşölçeklidir.

Çünkü, A, C ile eşölçekli olduğundan, A'nın C'ye oranı, bir sayının bir sayıya oranına eşittir. **[X.5]**

Bu oran D'nin E'ye oranı olsun.

Yine, C, B ile eşölçekli olduğundan, C'nin B'ye oranı, bir sayının bir sayıya oranına eşittir. **[X.5]**

Bu oran F'nin G'ye oranına eşit olsun.

Bir miktar oran verildiğinde, yani D'nin E'ye, ve F'nin G'ye oranları, bu oranlarda sürekli orantılı H, K, L sayıları alınsın; **[VIII.4]**

yani, D'nin E'ye oranı, H'nin K'ye oranına, ve F'nin G'ye oranı, K'nin L'ye oranına eşit olsun.

O zaman, A'nın C'ye oranı, D'nin E'ye oranına eşit olduğundan, ve bu arada D'nin E'ye oranı, H'nin K'ye oranına eşit olduğundan,

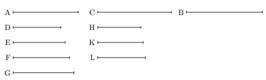
A'nın C'ye oranı, H'nin K'ye oranına eşittir. **[V.11]**

Yine, C'nin B'ye oranı, F'nin G'ye oranına eşit olduğundan, ve bu arada F'nin G'ye oranı, K'nin L'ye oranına eşit olduğundan,

C'nin B'ye oranı, K'nin L'ye oranına eşittir. **[VI.11]**

Ama bu arada A'nın C'ye oranı, H'nin K'ye oranına eşittir;

bu durumda eşit dış oranlar olarak, A'nın B'ye oranı, H'nin L'ye oranına eşit olur. **[V.22]**

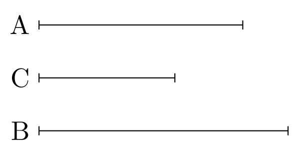


Böylece A'nın B'ye oranı, bir sayının bir sayıya oranına eşittir;

öyleyse A, B ile eşölçeklidir. **[X.6]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

13. Önerme:
Eşölçekli iki nicelikten biri bir başka nicelikle eşölçeksizse, diğeri de o nicelikle eşölçeksizdir.



A, B eşölçekli iki nicelik olsun, ve içlerinden biri, A, bir başka nicelikle, C ile, eşölçeksiz olsun;

diyorum ki, kalan nicelik B de C ile eşölçeksizdir.

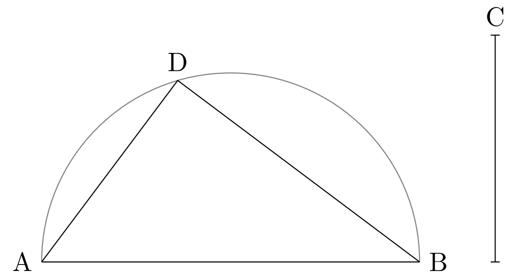
Çünkü, eğer B, C ile eşölçekli olsa, bu arada A, B ile eşölçekli olduğundan, A da C ile eşölçekli olacaktı. **[X.12]**

Ama aynı zamanda onunla eşölçeksizdir: bu olamaz.

Öyleyse B, C ile eşölçekli değildir; yani onunla eşölçeksizdir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

Yardımcı Önerme: Uzunlukları farklı iki doğru verildiğinde bunların üzerindeki karelerin farkının hangi doğru üzerindeki kareye eşit olduğunu bulmanın yolu.



AB, C iki faklı doğru olsun ve AB bunların daha büyük olanı olsun; böylece AB üzerindeki karenin, C üzerindeki kareden hangi kare kadar büyük olduğunun bulunması isteniyor.

AB üzerine ADB yarı çemberi çizilsin, ve AD, C'ye eşit çizilsin; **[IV.1]**

DB birleştirilsin.

ADB açısının dik olduğu, **[III.31]**

ve AB üzerindeki karenin AD üzerindeki, yani C üzerindeki kareden DB üzerindeki kare kadar büyük olduğu açıktır. **[I.47]**

Benzer şekilde, eğer iki doğru verilirse, onların üzerindeki karelerin toplamına eşit karenin hangi doğru üzerinde olacağı da bu yolla bulunur.

Verilen doğrular AD, DB olsun, ve bunların üzerindeki karelerin toplamına eşit bir karenin üzerine çizileceği doğrunun bulunması istensin.

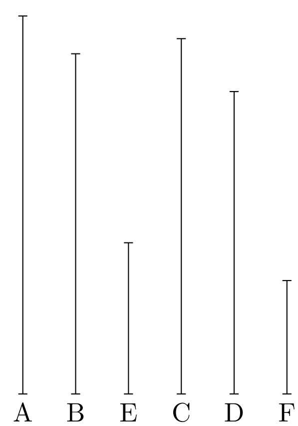
AD, DB bir dik açı oluşturacak şekilde yerleştirilsin; ve AB birleştirilsin.

Yine açıktır ki AB, DB üzerindeki karelerin toplamına eşit karenin üzerine çizileceği doğru AB'dir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

14. Önerme:

Orantılı dört doğru verildiğinde, birincinin üzerindeki kare ikincinin üzerindeki kareden birinciyle eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyükse, üçüncünün üzerindeki kare de dördüncünün üzerindeki kareden üçüncüyle eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.
Ve eğer birincinin üzerindeki kare ikincinin üzerindeki kareden birinciyle eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyükse, üçüncünün üzerindeki kare de dördüncünün üzerindeki kareden üçüncüyle eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.



A, B, C, D, orantılı dört doğru olsun, yani A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşit olsun;

ve A üzerindeki kare, B üzerindeki kareden, E üzerindeki kare kadar büyük olsun, ve C üzerindeki kare, D üzerindeki kareden F üzerindeki kare kadar büyük olsun;

diyorum ki, eğer A, E ile eşölçekliyse, C de F ile eşölçeklidir, ve eğer A, E ile eşölçeksizse, C de F ile eşölçeksizdir.

Çünkü, A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşit olduğundan, A üzerindeki karenin B üzerindeki kareye oranı da, C üzerindeki karenin D üzerindeki kareye oranına eşit olur. **[VI.22]**

Ama E, B üzerindeki kareler, A üzerindeki kareye, ve D, F üzerindeki kareler, C üzerindeki kareye eşittir.

Öyleyse, E, B üzerindeki karelerin B üzerindeki kareye oranı, D, F üzerindeki karenin D üzerindeki kareye oranına eşittir;

bu durumda, ayrışık oranlar olarak, E üzerindeki karenin B üzerindeki kareye oranı, F üzerindeki karenin D üzerindeki kareye oranına eşittir; **[V.17]**

öyleyse E'nin B'ye oranı, F'nin D'ye oranına eşittir. **[VI.22]**

bu durumda, ters oranlar olarak, B'nin E'ye oranı, D'nin F'ye oranına eşittir.

Ama, A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşittir;

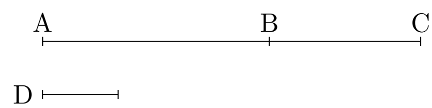
bu durumda eşit dış oranlar olarak, A'nın E'ye oranı, C'nin F'ye oranına eşit olur. **[V.22]**

Öyleyse, eğer A, E ile eşölçekliyse, C de F ile eşölçeklidir,

ve eğer A, E ile eşölçeksizse, C de F ile eşölçeksizdir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

15. Önerme:
Eşölçekli iki nicelik toplanırsa toplam her biriyle eşölçeklidir; ve herhangi iki niceliğin toplamı içlerinden biriyle eşölçekliyse, o iki nicelik de aralarında eşölçeklidir.



Eşölçekli iki nicelik AB, BC birbirine eklensin;

diyorum ki AC'nin tamamı da AB, BC'nin her biriyle eşölçeklidir.

Çünkü, AB, BC eşölçekli olduğundan, bir nicelik onları ölçecektir.

Ölçsün, ve bu nicelik D olsun.

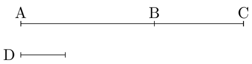
D niceliği AB, BC niceliklerini ölçtüğünden, AC'nin tamamını da ölçecektir.

Ama AB ve BC'yi de ölçmektedir; öyleyse, D niceliği AB, BC, AC niceliklerinin her birini ölçer;

demek ki AC niceliği AB, BC niceliklerinin her biriyle eşölçeklidir. **[Tan. X.1]**

Şimdi de AC niceliği AB ile eşölçekli olsun;

diyorum ki, AB, BC eşölçeklidir.



Çünkü, AC, AB eşölçekli olduğundan, bir nicelik onları ölçecektir;

ölçsün ve bu nicelik D olsun.

O zaman, D niceliği CA, AB niceliklerini ölçtüğünden, kalan BC'yi de ölçecektir.

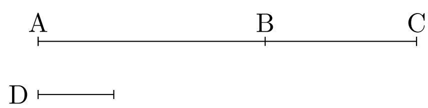
Ama AB'yi de ölçer; öyleyse D niceliği AB, BC'yi ölçer.

Öyleyse AB, BC eşölçeklidir. **[Tan. X.1]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

16. Önerme:

Eşölçeksiz iki nicelik toplanırsa toplam her biriyle eşölçeksizdir; ve herhangi iki niceliğin toplamı içlerinden biriyle eşölçeksizse, o iki nicelik de aralarında eşölçeksizdir.



Eşölçeksiz iki nicelik AB, BC birbirine eklensin;

diyorum ki AC'nin tamamı da AB, BC'nin her biriyle eşölçeksizdir.

Çünkü, eğer CA, AB eşölçeksiz olmasaydılar, bir nicelik onları ölçecekti;

mümkünse ölçsün, ve bu nicelik D olsun.

O zaman, D niceliği CA, AB'yi ölçtüğünden, kalan BC'yi de ölçecektir.

Ama AB'yi de ölçer; öyleyse D niceliği AB, BC'yi ölçer.

Bu durumda AB, BC eşölçekli olur; ama varsayım gereği bunlar eşölçeksizdi: bu olamaz.

Öyleyse hiçbir nicelik CA, AB'yi ölçmez: öyleyse CA, AB eşölçeksizdir. **[Tan. X.1]**

Benzer şekilde AC, CB'nin de eşölçeksiz olduğunu kanıtlayabiliriz.

Öyleyse AC niceliği AB, BC'nin her biriyle eşölçeksizdir.

Şimdi de, AC niceliği AB, BC niceliklerinden biriyle eşölçeksiz olsun.

Önce AB ile eşölçeksiz olsun;

diyorum ki, AB, BC de birbiriyle eşölçeksizdir.

Çünkü, eğer eşölçekli olsalardı, bir nicelik onları ölçecekti.

Ölçsün ve bu nicelik D olsun.

O zaman, D niceliği AB, BC'yi ölçtüğünden, AC'nin tamamını da ölçecektir.

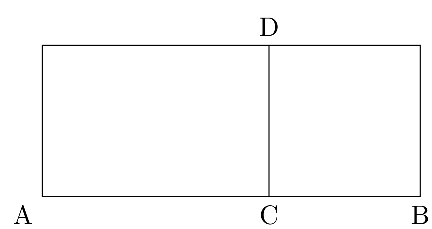
Ama AB'yi de ölçer; öyleyse D niceliği CA, AB'yi ölçer.

Bu durumda CA, AB eşölçekli olur; ama varsayım gereği bunlar eşölçeksizdi: bu olamaz.

Öyleyse hiçbir nicelik AB, BC'yi ölçmez; öyleyse AB, BC eşölçeksizdir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

Yardımcı Önerme: Bir doğrunun bir parçası üzerine çizilen bir paralelkenar, o doğrunun tamamı üzerine çizilen dikdörtgenden bir kare kadar eksikse, çizilen bu bu paralelkenar çizimin sonunda ortaya çıkan iki parçanın içerdiği dikdörtgene eşittir.



AB doğrusu üzerine AD paralelkenarı, fark DB karesi olacak şekilde çizilsin;

diyorum ki, AD paralelkenarı, AC, CB tarafından içerilen dikdörtgene eşittir.

Bu derhal görülür; çünkü DB bir kare olduğundan DC eşittir CB;

ve AD de AC, CD, yani AC, CB tarafından içerilen dikdörtgene eşittir.

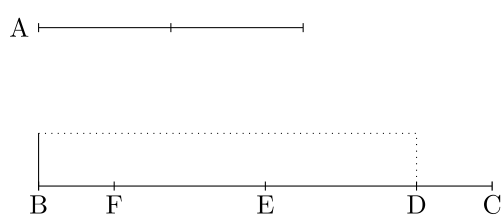
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

17. Önerme:

Uzunlukları farklı iki doğru alındığında, uzun olanın bir parçası üzerine hem kısa olanın üzerine çizilen karenin dörtte birine eşit hem de uzun olanın tamamı üzerine çizilen bir dikdörtgenden bir kare kadar eksik olan bir paralelkenar çizilir, ve bu çizim doğruyu uzunlukta eşölçekli iki parçaya ayırırsa, uzun doğru üzerindeki karenin kısa doğru üzerindeki kareden farkı uzun doğruyla eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadardır.

Ve eğer uzun olanın üzerine çizilen karenin kısa olanın üzerine çizilen kareden farkı, uzun doğruyla eşölçekli bir doğru üzerine çizilen kare kadarsa, uzun olanın bir parçası üzerine hem kısa olanın üzerine çizilen karenin dörtte birine eşit, hem de uzun olanın tamamı üzerine çizilen dikdörtgenden bir kare kadar eksik olan bir paralelkenar çizildiğinde, bu çizim uzun doğruyu uzunlukta eşölçekli iki parçaya ayırır.

[$a + b = c > d$ ve $4ab = d^2$ olsun. O zaman $c^2 - d^2 = (a-b)^2$ olduğu açıkça görülür. Önermeye göre bu durumda a ile b nin eşölçekli olması için gerek ve yeter şart $a-b$ ile c nin eşölçekli olmasıdır.]



A, BC iki farklı doğru olsun, ve BC daha uzun olanı olsun, ve BC üzerine hem A üzerindeki karenin dörtte birine eşit hem de bir kare kadar eksik bir paralelkenar çizilsin. Bu paralelkenar BD, DC dikdörtgeni olsun, **[bkz yukardaki Yardımcı Önerme]**

ve BD, DC eşölçekli olsun;

diyorum ki, BC üzerindeki karenin A üzerindeki kareden farkı, BC ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kareye eşittir.

Çünkü, BC doğrusu E'de ikiye bölünsün, ve EF, DE'ye eşit çizilsin.

Bu durumda kalan DC, BF'ye eşit olur.

Ve, BC doğrusu E'de iki eşit parçaya, ve D'de eşit olmayan parçalara bölündüğünden, BD, DC tarafından içerilen dikdörtgen ile ED üzerindeki kare birlikte, EC üzerindeki kareye eşittir; **[II.5]**

$$[\ (EC + ED)(EC - ED) + ED^2 = EC^2\ ]$$

Ve aynı durum bunların dört katları için de doğrudur;

Öyleyse, BD, DC tarafından içerilen dikdörtgenin dört katı, DE üzerindeki karenin dört katıyla birlikte, EC üzerindeki karenin dört katına eşittir.

Ama A üzerindeki kare, BD, DC tarafından içerilen dikdörtgenin dört katına eşittir;

ve DF uzunluğu DE'nin iki katı olduğundan, DF üzerindeki kare, DE üzerindeki karenin dört katına eşittir.

Ve yine BC uzunluğu CE'nin iki katı olduğundan, BC üzerindeki kare, EC üzerindeki karenin dört katına eşittir.

Bu durumda, A, DF üzerindeki kareler, BC üzerindeki kareye eşit olur,

yani, BC üzerindeki karenin A üzerindeki kareden farkı, DF üzerindeki kareye eşittir.

Kanıtlanması gereken, BC'nin DF ile eşölçekli olduğudur.

BD, DC ile uzunlukta eşölçekli olduğundan, BC de CD ile uzunlukta eşölçeklidir. **[X.15]**

Ama CD, BF'ye eşit olduğundan, CD uzunlukta CD, BF ile eşölçeklidir. **[X.6]**

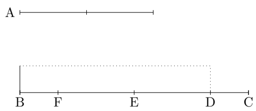
Öyleyse, BC de BF, CD ile uzunlukta eşölçeklidir, **[X.12]**

bu yüzden BC, kalan FD ile de uzunlukta eşölçeklidir; **[X.15]**

öyleyse BC üzerindeki karenin, A üzerindeki kareden farkı, BC ile eşölçekli olan bir doğru üzerindeki kareye eşittir.

Şimdi de, BC üzerindeki karenin, A üzerindeki kareden farkı, BC ile eşölçekli olan bir doğru üzerindeki kareye eşit olsun, BC üzerine hem A üzerindeki karenin dörtte birine eşit hem de bir kare kadar eksik bir paralelkenar çizilsin, ve bu paralelkenar BD, DC dikdörtgeni olsun.

Kanıtlanması gereken BD'nin DC ile uzunlukta eşölçekli olduğudur.



Aynı çizimle, ve benzer şekilde BC üzerindeki karenin, A üzerindeki kareden farkının, FD üzerindeki kareye eşit olduğunu kanıtlayabiliriz.

Ama BC üzerindeki karenin, A üzerindeki kareden farkı, BC ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kareye eşittir.

Öyleyse BC, FD ile uzunlukta eşölçeklidir, bu yüzden BC, kalan kısım yani BF, DC toplamıyla da eşölçeklidir. **[X.15]**

Ama BF, DC toplamı DC ile eşölçeklidir, **[X.6]**

böylece BC de uzunlukta CD ile eşölçeklidir; **[X.12]**

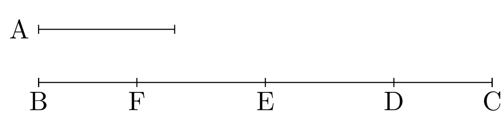
bu durumda ayrışık oranlar olarak, BD, DC ile uzunlukta eşölçeklidir. **[X.15]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

18. Önerme:

Uzunlukları farklı iki doğru alındığında, uzun olanın bir parçası üzerine hem kısa olanın üzerine çizilen karenin dörtte birine eşit hem de uzun olanın tamamı üzerine çizilen bir dikdörtgenden bir kare kadar eksik olan bir paralelkenar çizilir, ve bu çizim doğruyu eşölçeksiz iki parçaya ayırırsa, uzun doğru üzerindeki karenin kısa doğru üzerindeki kareden farkı uzun doğruyla eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadardır.

Ve eğer uzun olanın üzerine çizilen karenin kısa olanın üzerine çizilen kareden farkı, uzun doğruyla eşölçeksiz bir doğru üzerine çizilen kare kadarsa, uzun olanın bir parçası üzerine hem kısa olanın üzerine çizilen karenin dörtte birine eşit, hem de uzun olanın tamamı üzerine çizilen dikdörtgenden bir kare kadar eksik olan bir paralelkenar çizildiğinde, bu çizim uzun doğruyu eşölçeksiz iki parçaya ayırır.



A, BC iki farklı doğru olsun, ve BC daha uzun olanı olsun, ve BC üzerine hem A üzerindeki karenin dörtte birine eşit hem de bir kare kadar eksik bir paralelkenar çizilsin. Bu paralelkenar BD, DC dikdörtgeni olsun, **[bkz X17'den önceki Yardımcı Önerme]**

ve BD, DC ile eşölçeksiz olsun;

diyorum ki, BC üzerindeki karenin A üzerindeki kareden farkı, BC ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kareye eşittir.

Çünkü, önceki çizimi kullanarak ve benzer şekilde, BC üzerindeki karenin A üzerindeki kareden farkının FD üzerindeki kare olduğunu kanıtlayabiliriz.

Kanıtlanması gereken, BC'nin DF ile uzunlukta eşölçeksiz olduğudur.

BD, DC ile uzunlukta eşölçeksiz olduğundan, BC de DC ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.16]**

Ama DC doğrusu BF, DC toplamıyla eşölçeklidir; **[X.6]**

o yüzden BC doğrusu BF, DC toplamıyla da eşölçeksizdir; **[X.13]**

böylece BC doğrusu kalan FD ile de eşölçeksizdir. **[X.16]**

Ve BC üzerindeki karenin, A üzerindeki kareden farkı, FD üzerindeki kare kadardır;

öyleyse BC üzerindeki karenin, A üzerindeki kareden farkı, BC ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadardır.

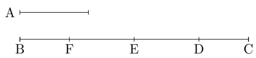
Şimdi de, BC üzerindeki karenin, A üzerindeki kareden farkı, BC ile eşölçeksiz olan bir doğru üzerindeki kareye eşit olsun, ve BC üzerine hem A üzerindeki karenin dörtte birine eşit hem de bir kare kadar eksik bir paralelkenar çizilsin, ve bu paralelkenar BD, DC dikdörtgeni olsun.

Kanıtlanması gereken BD'nin DC ile uzunlukta eşölçeksiz olduğudur.

Çünkü, aynı çizimle, ve benzer şekilde BC üzerindeki karenin, A üzerindeki kareden farkının, FD üzerindeki kareye eşit olduğunu kanıtlayabiliriz.

Ama BC üzerindeki karenin, A üzerindeki kareden farkı, BC ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kareye eşittir.

Öyleyse BC, FD ile uzunlukta eşölçeksizdir, bu yüzden BC, kalan kısım yani BF, DC toplamıyla da eşölçeksizdir. **[X.16]**



Ama BF, DC toplamı DC ile eşölçeklidir, **[X.6]**

böylece BC de uzunlukta CD ile eşölçeksizdir; **[X.13]**

bu durumda ayrışık oranlar olarak, BD, DC ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.16]**

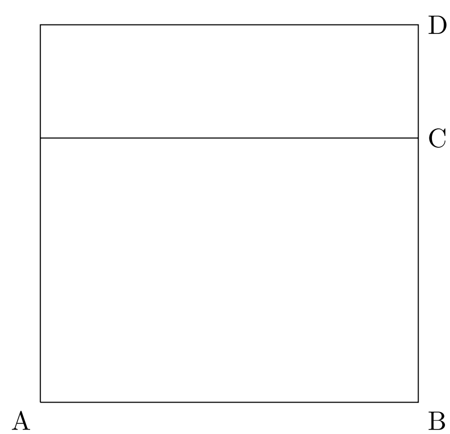
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

Yardımcı Önerme: Bilindiği gibi uzunlukta eşölçekli olan doğrular aynı zamanda karede de eşölçeklidir ama karede eşölçekli olan doğrular her zaman uzunlukta eşölçekli olmaz. Öte yandan rasyonel bir doğruyla eşölçekli olan bir doğruya da rasyonel denir ve diğer doğruyla hem uzunlukta hem de karede eşölçeklidir.

Verilen bir rasyonel doğruyla karede eşölçekli olan bir doğru onunla aynı zamanda uzunlukta da eşölçekliyse o doğruya rasyonel denir ve verilen rasyonel doğruyla hem uzunlukta hem de karede eşölçekli denir. Ama verilen rasyonel doğruyla karede eşölçekli olmasına rağmen uzunlukta eşölçekli değilse bu durumda ona yine rasyonel denir ve verilen doğruyla yalnızca karede eşölçeklidir denir.

[Bu metnin Öklid'e ait olmadığı ama daha sonraki önermelerin ifadelerine açıklık getirmek üzere eklendiği düşünülmektedir.]

19. Önerme:
Eşölçekli rasyonel doğrular tarafından içerilen dikdörtgen rasyoneldir.



AC dikdörtgeni, uzunlukta eşölçekli olan AB, BC rasyonel doğruları tarafından içerilsin;

diyorum ki, AC rasyoneldir.

Çünkü, AB üzerine AD karesi çizilsin; bu durumda AD rasyonel olur. **[Tan. X.4]**

Ve, AB uzunlukta BC ile eşölçekli olduğundan, ve ayrıca AB eşittir BD olduğundan, BD uzunlukta BC ile eşölçeklidir.

Ve, BD'nin BC'ye oranı, DA'nın AC'ye oranına eşittir. **[VI.1]**

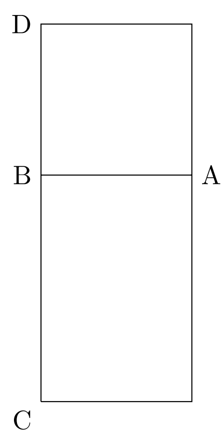
Bu durumda DA, AC ile eşölçeklidir. **[X.11]**

Ama DA rasyoneldir;

öyleyse AC de rasyoneldir. **[Tan. X.4]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

20. Önerme:
Eğer bir rasyonel doğrunun üzerine rasyonel olan bir alan çizilirse, oluşan genişlik de rasyoneldir ve alanın üzerine çizildiği doğruyla uzunlukta eşölçeklidir.

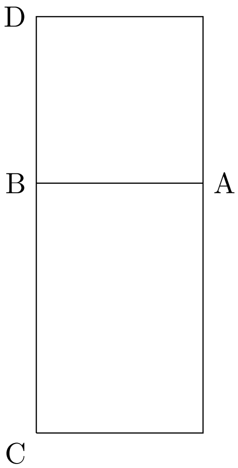


Daha önce belirtildiği şekilde rasyonel olan bir AB doğrusu üzerine rasyonel AC alanı çizilsin, ve BC genişliği oluşsun;

diyorum ki, BC rasyoneldir ve BA ile uzunlukta eşölçeklidir.

Çünkü, AB üzerine AD karesi çizilsin; bu durumda AD rasyonel olur. **[Tan. X.4]**

Ama AC de rasyoneldir; bu durumda DA, AC ile eşölçekli olur.



Ve, DA'nın AC'ye oranı, DB'nin BC'ye oranına eşittir. **[VI.1]**

Öyleyse, DB de BC ile eşölçeklidir; **[X.11]**

ve DB, BA'ya eşittir; bu durumda AB de BC ile eşölçeklidir.

Ama AB rasyoneldir; öyleyse BC de rasyoneldir ve AB ile uzunlukta eşölçeklidir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

21. Önerme:
Kenarları yalnızca karede eşölçekli iki doğru tarafından içerilen dikdörtgen irrasyoneldir, ve bu dikdörtgene eşit olan karenin kenarı da irrasyoneldir. Bu karenin kenarı gibi olan niceliklere *orta değer* denir.

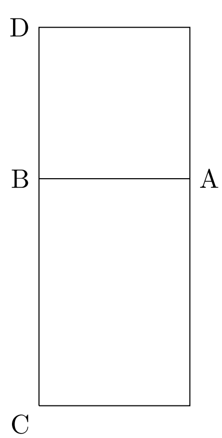
[Eğer α, β yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel uzunluksa,

$$\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \frac{m}{n}$$

olacak şekilde iki tamsayı bulunur ama α'nın β'ya oranı iki tamsayının oranı değildir. Bu önermenin içinde tanımı yapılan orta değer uzunluklar

$$\beta \sqrt[4]{\frac{m}{n}}$$

şeklinde yazılan uzunluklardır. Bir başka deyişle, yalnızca karede eşölçekli rasyonel α ve β uzunluklarının orta orantısı olan, yani $\sqrt{\alpha\beta}$ şeklinde yazılabilen uzunluklara orta değer denir.]



Yalnız karede eşölçekli olan AB, BC doğrularının içerdiği dikdörtgen AC olsun;

diyorum ki, AC irrasyoneldir, ve ona eşit karenin kenarı da irrasyoneldir; ve bu kenara orta değer densin.

Çünkü, AB üzerine AD karesi çizilsin; bu durumda AD rasyonel olur. **[Tan. X.4]**

Ve, varsayım gereği yalnızca karede eşölçekli olan AB, BC uzunlukta eşölçeksiz olduklarından, ve bu arada AB, BD'ye eşit olduğundan,

DB de BC ile uzunlukta eşölçeksizdir.

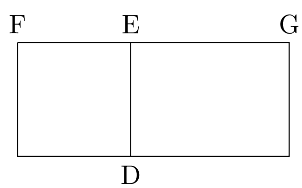
Ve, DB'nin BC'ye oranı, AD'nin AC'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

bu durumda DA, AC ile eşölçeksiz olur. **[X.11]**

Ama DA rasyoneldir; öyleyse AC irrasyoneldir, böylece AC'ye eşit karenin kenarı da irrasyoneldir. **[Tan. X.4]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

Yardımcı Önerme: İki doğru verildiğinde, birincinin ikinciye oranı, birincinin üzerine çizilen karenin, ikisi tarafından içerilen dikdörtgene olan oranına eşittir.



Verilen iki doğru FE, EG olsun;

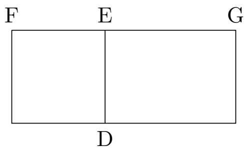
diyorum ki, FE'nin EG'ye oranı, FE üzerindeki karenin FE, EG dikdötgenine oranına eşittir.

Çünkü, FE üzerine DF karesi çizilsin, ve GD tamamlansın.

O zaman, FE'nin EG'ye oranı, FD'nin DG'ye oranına eşit olduğundan, **[VI.1]**

ve FD, FE üzerindeki kare, DG de DE, EG dikdörtgeni, yani FE, EG dikdörtgeni olduğundan,

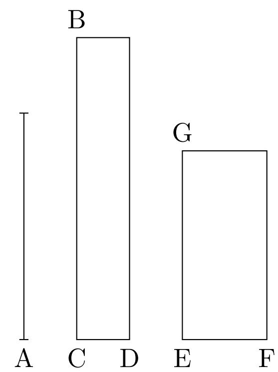
FE'nin EG'ye oranı, FE üzerindeki karenin FE, EG dikdörtgenine oranına eşittir.



Benzer şekilde, GE, EF dikdörtgeninin EF üzerindeki kareye oranı, yani GD'nin FD'ye oranı, GE'nin EF'ye oranına eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

22. Önerme:
Orta değer uzunluktaki bir doğru üzerindeki kare eğer rasyonel bir doğru üzerine çizilirse, oluşan genişlik rasyoneldir ve çizildiği doğruyla uzunlukta eşölçeksizdir.



A orta değer, CB rasyonel olsun, ve BD dikdörtgeni, A üzerindeki karenin BC'ye uygulanmasıyla elde edilmiş olsun, ve genişlik olarak CD oluşmuş olsun;

diyorum ki, CD rasyoneldir ve CB ile uzunlukta eşölçeksizdir.

Çünkü, A orta değer olduğundan, üzerindeki kare, yalnızca karede eşölçekli olan iki rasyonel doğru tarafından içerilen bir dikdörtgen alana eşittir. **[X.21]**

Üzerindeki kare GF'ye eşit olsun.

Ama üzerindeki kare BD'ye de eşittir; öyleyse BD, GF'ye eşittir.

Ama onunla eşaçılıdır da;

ve eşit ve eşaçılı paralelkenarlarda eşit açıları çevreleyen kenarlar karşılıklı ters orantılıdır; **[VI.14]**

bu durumda BC'nin EG'ye oranı, EF'nin CD'ye oranına eşit olur.

Öyleyse, BC üzerindeki karenin EG üzerindeki kareye oranı, EF üzerindeki karenin CD üzerindeki kareye oranına eşittir. **[VI.22]**

Ama CB üzerindeki kare EG üzerindeki kareyle eşölçeklidir, çünkü bu doğruların her biri rasyoneldir;

bu durumda EF üzerindeki kare de CD üzerindeki kareyle eşölçeklidir. **[X.11]**

Ama EF üzerindeki kare rasyoneldir; bu durumda CD üzerindeki kare de rasyonel olur; **[Tan. X.4]**

öyleyse CD rasyoneldir.

Ve, EF uzunlukta EG ile eşölçeksiz olduğundan, çünkü yalnızca karede eşölçekliler, ve EF'nin EG'ye oranı, EF üzerindeki karenin FE, EG dikdörtgenine oranına eşit olduğundan, **[Önceki Yardımcı Önerme]**

EF üzerindeki kare, FE, EG dikdörtgeniyle eşölçeksizdir. **[X.11]**

Ama CD üzerindeki kare, EF üzerindeki kareyle eşölçeklidir, çünkü bu doğrular karede rasyoneldir;

ve DC, CB dikdörtgeni, FE, EG dikdörtgeniyle eşölçeklidir, çünkü bunlar A üzerindeki kareye eşittir;

bu durumda CD üzerindeki kare, DC, CB dikdörtgeniyle eşölçeksiz olur. **[X.13]**

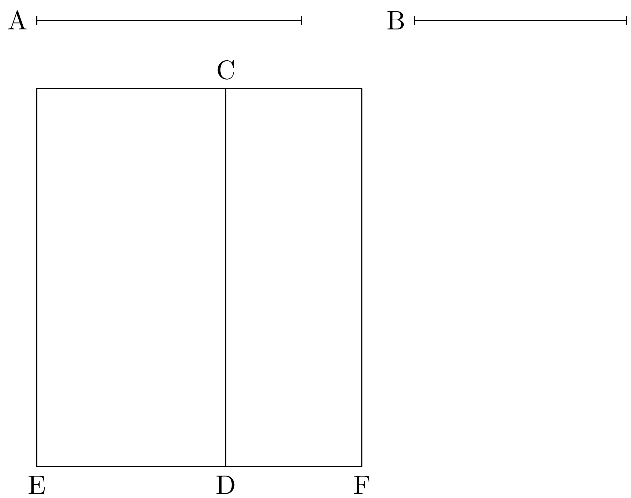
Ama, CD üzerindeki karenin DC, CB dikdörtgenine oranı, DC'nin CB'ye oranına eşittir; **[Önceki Yardımcı Önerme]**

öyleyse DC rasyoneldir ve CB ile uzunlukta eşölçeksizdir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

23. Önerme:

Orta değer bir doğruyla eşölçekli olan her doğru orta değerdir.



A orta değer olsun, ve B de A ile eşölçekli olsun;

diyorum ki, B de orta değerdir.

Çünkü, bir rasyonel CD doğrusu alınsın, ve CD üzerine, A üzerindeki kareye eşit CE dikdörgen alanı çizilsin, ve ED genişliği oluşmuş olsun;

bu durumda ED rasyoneldir, ve CD ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Ve CD üzerine, B üzerindeki kareye eşit CF dikdörtgen alanı çizilsin, ve DF genişliği oluşmuş olsun.

O zaman, A, B ile eşölçekli olduğundan, A üzerindeki kare de B üzerindeki kareyle eşölçekli olur.

Ama EC, A üzerindeki kareye eşittir, ve CF de B üzerindeki kareye eşittir;

öyleyse EC, CF ile eşölçeklidir.

Ve, EC'nin CF'ye oranı, ED'nin DF'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse ED, DF ile uzunlukta eşölçeklidir. **[X.11]**

Ama ED rasyoneldir, ve DC ile uzunlukta eşölçeksizdir; bu durumda DF de rasyoneldir, **[Tan. X.3]**

ve DC ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.13]**

Öyleyse CD, DF rasyoneldir ve yalnızca karede eşölçeklidir.

Ama üzerindeki kare yalnızca karede eşölçekli doğrular tarafından içerilen dikdörtgene eşit olan doğru orta değerdir; **[X.21]**

öyleyse CD, DF dikdörtgenine eşit olan karenin kenarı orta değerdir.

Ve CD, DF dikdörtgenine eşit olan karenin kenarı B'dir;

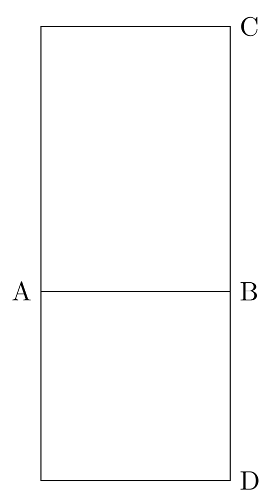
öyleyse B orta değerdir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

Doğal Sonuç: Buradan açıkça görülür ki bir **orta değer alan**la eşölçekli olan bir alan orta değerdir.

> *[Burada sözü edilen orta değer alan, bir orta değer doğru üzerindeki karenin alanıdır. Orta değer bir uzunluğu 360. sayfada $\beta\sqrt[4]{\frac{m}{n}}$ olarak göstermiştik. Burada β rasyonel bir uzunluk, m ve n de tamsayıydı. Bu durumda orta değer alanlar $\beta^2\sqrt{\frac{m}{n}}$ şeklindeki alanlardır.]*

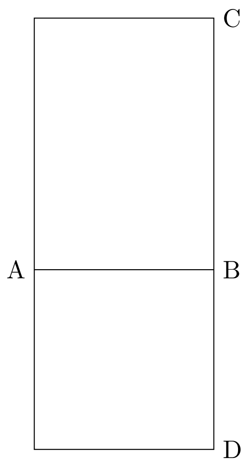
24. Önerme:
Uzunlukta eşölçekli orta değer kenarlar tarafından içerilen dikdörtgen orta değerdir.



AC dikdörtgeni, uzunlukta eşölçekli orta değer AB, BC doğruları tarafından içerilsin;

diyorum ki AC orta değerdir.

Çünkü, AB üzerine AD karesi çizilsin; bu durumda AD orta değer olur.



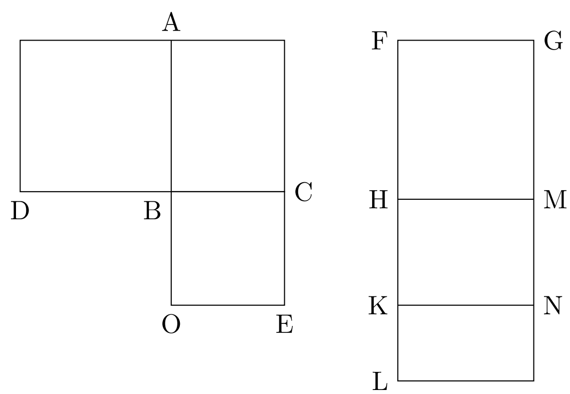
Ve, AB, BC ile uzunlukta eşölçekli olduğundan, ve bu arada AB, BD'ye eşit olduğundan,

DB de BC ile uzunlukta eşölçeklidir; böylece DA da AC ile eşölçekli olur. **[VI.1, X.11]**

Ama DA orta değerdir; öyleyse AC de orta değerdir. **[DS. X.23]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

25. Önerme:
Yalnızca karede eşölçekli orta değer kenarlar tarafından içerilen dikdörtgen ya rasyoneldir ya da orta değer.



AC dikdörtgeni yalnızca karede eşölçekli orta değer AB, BC tarafından içeriliyor olsun;

diyorum ki, AC ya rasyoneldir, ya da orta değer.

Çünkü, AB, BC üzerine AD, BE kareleri çizilsin; bu durumda bu karelerin her biri orta değerdir.

Bir FG rasyonel doğrusu alınsın,

FG üzerine AD'ye eşit GH dikdörtgeni çizilsin, ve FH genişliği oluşturulmuş olsun,

HM üzerine AC'ye eşit MK dikdörtgeni çizilsin, ve HK genişliği oluşturulmuş olsun,

ve ayrıca KN üzerine benzer şekilde, BE'ye eşit NL çizilsin, ve KL genişliği oluşturulmuş olsun;

bu durumda FH, HK, KL aynı doğru üzerinde olur.

O zaman, AD, BE karelerinin her biri orta değer olduğundan, ve AD, GH'ye, ve BE, NL'ye eşit olduğundan, GH, NL dikdörtgenlerinin her biri de orta değerdir.

Ve bunlar FG rasyonel doğrusu üzerine çizilmiştir; bu durumda FH, KL doğrularının her biri rasyoneldir, ve FG ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Ve, AD, BE ile eşölçekli olduğundan, GH de NL ile eşölçeklidir.

Ve, GH'nin NL'ye oranı, FH'nin KL'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

bu durumda FH, KL ile uzunlukta eşölçekli olur. **[X.11]**

Öyleyse FH, KL doğruları uzunlukta eşölçekli rasyonel doğrulardır;

bu durumda FH, KL dikdörtgeni rasyonel olur. **[X.19]**

Ve, DB, BA'ya, ve OB, BC'ye eşit olduğundan, DB'nin BC'ye oranı, AB'nin BO'ya oranına eşit olur.

Ama, DB'nin BC'ye oranı, DA'nın AC'ye oranına eşittir, **[VI.1]**

ve AB'nin BO'ya oranı, AC'nin CO'ya oarnına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse DA'nın AC'ye oranı, AC'nin CO'ya oranına eşittir.

Ama, AD, GH'ye, AC, MK'ye, ve CO da NL'ye eşittir; öyleyse GH'nin MK'ye oranı, MK'nin NL'ye oranına eşittir;

bu durumda ayrıca FH'nin HK'ye oranı, HK'nin KL'ye oranına eşit olur; **[VI.1, V.11]**

öyleyse FH, KL dikdörtgeni HK üzerindeki kareye eşittir. **[VI.17]**

Ama FH, KL dikdörtgeni rasyoneldir; bu durumda HK üzerindeki kare de rasyonel olur.

Öyleyse HK rasyoneldir.

Ve, eğer FG ile eşölçekliyse, HN rasyonel olur;

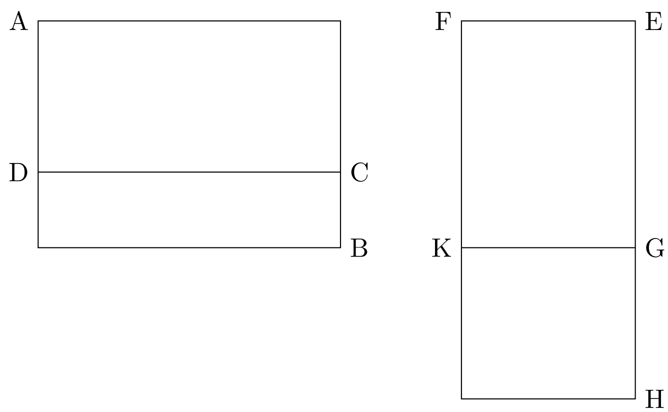
ama eğer FG ile uzunlukta eşölçeksizse, KH, HM yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır, o yüzden HN orta değer olur. **[X.21]**

Öyleyse HN ya rasyoneldir, ya da orta değerdir.

Ama HN, AC'ye eşittir; öyleyse AC ya rasyoneldir, ya da orta değerdir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

26. Önerme:
Orta değer iki alanın farkı rasyonel olamaz.



Çünkü, eğer mümkünse orta değer AB alanı, orta değer AC alanından rasyonel alan DB kadar fazla olsun,

ve rasyonel bir EF doğrusu alınsın;

EF üzerine AB'ye eşit FH dikdörtgeni çizilsin, ve EH genişliği oluşturulmuş olsun,

ve AC'ye eşit FG dikdörtgeni çıkartılsın; bu durumda BD kalanı, KH kalanına eşit olur.

Ama DB rasyoneldir; öyleyse KH de rasyoneldir.

O zaman, AB, AC dikdörtgenlerinin her biri orta değer olduğundan, ve AB, FH'ye, ve AC, FG'ye eşit olduğundan, FH, FG dikdörtgenlerinin her biri de orta değerdir.

Ve bunlar rasyonel EF doğrusu üzerine üzerine çizilmiştir; öyleyse HE, EG doğrularının her biri rasyoneldir ve EF ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Ve, DB rasyonel ve KH'ye eşit olduğundan, KH de rasyoneldir; ve rasyonel EF doğrusu üzerine çizilmiştir;

öyleyse GH rasyoneldir, ve EF ile uzunlukta eşölçeklidir. **[X.20]**

Ama EG de rasyoneldir, ve EF ile uzunlukta eşölçeksizdir;

öyleyse EG, GH ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.13]**

Ve, EG'nin GH'ye oranı, EG üzerindeki karenin EG, GH dikdörtgenine oranına eşit olduğundan, EG üzerindeki kare, EG, GH dikdörtgeniyle eşölçeksizdir. **[X.11]**

Ama EG, GH üzerindeki karelerin toplamı, EG üzerindeki kareyle eşölçeklidir çünkü ikisi de rasyoneldir;

ve, iki katı olduğundan, EG, GH dikdörtgeninin iki katı, EG, GH dikdörtgeniyle eşölçeklidir; **[X.6]**

bu durumda EG,GH üzerindeki karelerin toplamı, EG, GH dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksizdir; **[X.13]**

öyleyse, EG, GH üzerindeki karelerle EG, GH dikdörtgeninin iki katının toplamı, yani EH üzerindeki kare, **[II.4]**

EG, GH üzerindeki karelerle eşölçeksizdir. **[X.16]**

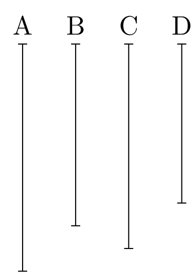
Ama EG, GH üzerindeki kareler rasyoneldir; bu durumda EH üzerindeki kare irrasyonel olur. **[Tan. X.4]**

Öyleyse EH irrasyoneldir.

Ama aynı zamanda rasyoneldir de: bu olamaz.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

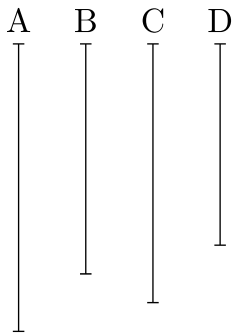
27. Önerme:
Yalnızca karede eşölçekli olan ve rasyonel bir dikdörtgen içeren iki orta değer doğru bulmanın yolu.



Yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel A, B doğrusu alınsın; A, B'ye orta orantılı C alınsın, **[VI.13]**

ve A'nın B'ye oranının, C'nin D'ye oranına eşit olması sağlansın. **[VI.12]**

O zaman, A, B rasyonel ve yalnızca karede eşölçekli olduğundan, A, B dikdörtgeni, yani C üzerindeki kare, **[VI.17]**



orta değerdir. **[X.21]**

Öyleyse C orta değerdir. **[X.21]**

Ve, A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşit olduğundan, ve A, B yalnızca karede eşölçekli olduklarından, C, D de yalnızca karede eşölçeklidir. **[X.11]**

Ve C orta değerdir; öyleyse D de orta değerdir.

> *[* C *orta değer olduğundan,* C *üzerindeki kare orta değer alandır.* C *üzerindeki kareyle* D *üzerindeki kare eşölçeklidir. Öyleyse* D *üzerindeki kare orta değer alandır.* **[DS. X.23]**
>
> *O zaman tanım gereği* D *de orta değer olur.]*

Öyleyse, C, D orta değerdir, ve yalnızca karede eşölçeklidir.

Diyorum ki, bunlar aynı zamanda rasyonel bir dikdörtgen içerirler.

Çünkü, A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşit olduğundan, değiştirilmiş oranlar olarak, A'nın C'ye oranı, B'nin D'ye oranına eşit olur. **[V.16]**

Ama A'nın C'ye oranı, C'nin B'ye oranına eşittir;

bu durumda C'nin B'ye oranı, B'nin D'ye oranına eşit olur;

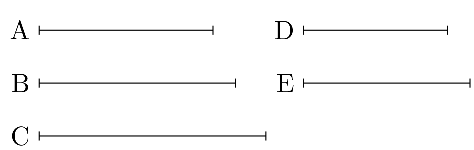
öyleyse C, D dikdörtgeni, B üzerindeki kareye eşittir.

Ama B üzerindeki kare rasyoneldir; bu durumda C, D dikdörtgeni de rasyonel olur.

Öyleyse rasyonel bir dikdörtgen içeren, yalnızca karede eşölçekli iki orta değer doğru bulunmuştur.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

28. Önerme:
Yalnızca karede eşölçekli olan ve orta değer bir dikdörtgen içeren iki orta değer doğru bulmanın yolu.



Yalnızca karede eşölçekli A, B, C rasyonel doğruları alınsın; A, B'ye orta orantılı D alınsın, **[VI.13]**

ve B'nin C'ye oranının, D'nin E'ye oranına eşit olması sağlansın. **[VI.12]**

A, B, yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğru olduğundan, A, B dikdörtgeni, yani D üzerindeki kare, **[VI.17]**

orta değerdir. **[X.21]**

Öyleyse D orta değerdir. **[X.21]**

Ve B, C yalnızca karede eşölçekli olduklarından, ve B'nin C'ye oranı, D'nin E'ye oranına eşit olduğundan,

D, E de yalnızca karede eşölçeklidir. **[X.11]**

Ama D orta değerdir; öyleyse E de orta değerdir. **[X.23]**

Öyleyse D, E yalnızca karede eşölçekli iki orta değer doğrudur.

Şimdi de diyorum ki, orta değer bir dikdörtgen içerirler.

Çünkü, B'nin C'ye oranı, D'nin E'ye oranına eşit olduğundan, değiştirilmiş oranlar olarak, B'nin D'ye oranı, C'nin E'ye oranına eşit olur. **[V.16]**

Ama, B'nin D'ye oranı, D'nin A'ya oranına eşittir; bu durumda D'nin A'ya oranı, C'nin E'ye oranına eşit olur;

öyleyse A, C dikdörtgeni, D, E dikdörtgenine eşittir. **[VI.16]**

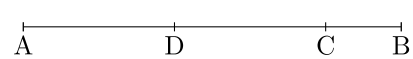
Ama A, C dikdörtgeni orta değerdir; **[X.21]**

öyleyse D, E dikdörtgeni de orta değerdir.

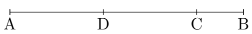
Öyleyse yalnızca karede eşölçekli olan ve orta değer bir dikdörtgen içeren iki orta değer doğru bulunmuştur.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

Yardımcı Önerme 1: Toplamları da tam kare olan iki kare sayı bulmanın yolu.



AB, BC gibi iki sayı alınsın, ve bunların ya ikisi de çift olsun ya da ikisi de tek olsun.



Bir çift sayıdan bir çift sayı çıkarıldığında, ya da bir tek sayıdan bir tek sayı çıkarıldığında kalan çift olduğundan, **[IX.24, IX.26]**

AC kalanı çifttir.

AC doğrusu D'de ikiye bölünsün.

AB, BC sayıları ya benzer düzlem sayıları olsun ya da kare sayılar olsun ki kare sayılar da benzer düzlem sayılarıdır.

Şimdi, AB, BC çarpımı, CD üzerindeki kareyle birlikte, BD üzerindeki kareye eşittir. **[II.6]**

Eğer iki benzer düzlem sayısı birbiriyle çarpılıp bir sayı oluşturursa, çarpımın kare olduğu kanıtlanmış olduğundan, **[IX.1]**

AB, BC çarpımı karedir.

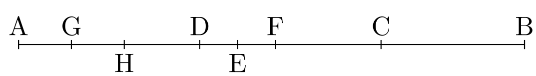
Böylece iki kare sayı, AB, BC çarpımı ve CD üzerindeki kare bulunmuş oldu öyle ki toplamları BD üzerindeki kareye eşittir.

Ve yine açıkça görülür ki iki kare sayı bulunmuş oldu, BD üzerindeki kare ve CD üzerindeki kare, öyle ki farkları olan AB, BC çarpımı, eğer AB, BC benzer düzlem sayılarıysa, bir kare olur.

Ama benzer düzlem sayıları olmadıkları zaman, iki kare sayı, BD ve DC üzerindeki kareler bulunmuş oldu öyle ki farkları, AB, BC çarpımı kare değildir.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

Yardımcı Önerme 2: Toplamları tam kare olmayan iki tam kare sayı bulmanın yolu.



Dediğimiz gibi AB, BC çarpımı kare olsun, ve CA çift olsun, ve CA doğrusu D'de ikiye bölünsün.

Açıkça görüldüğü gibi AB, BC çarpımı, CD üzerindeki kareyle birlikte BD üzerindeki kareye eşittir. **[YÖ. 1]**

DE birimi çıkarılsın; bu durumda AB, BC çarpımı, CE üzerindeki kareyle birlikte BD üzerindeki kareden küçüktür.

O zaman diyorum ki, kare olan AB, BC çarpımı, CE üzerindeki kareyle birlikte bir kare olmayacaktır.

Çünkü, eğer kare olsaydı, ya BE üzerindeki kareye eşit olur, ya da BE üzerindeki kareden küçük olur, ama birim bölünmeyeceğine göre büyük olamaz.

> *[Söz konusu karenin kenarının* BD*'den küçük olduğu söylendi. Eğer* BE*'den büyük olsaydı,* BE *ile* BD *arasında bir sayı olacaktı ama o aralık birim uzunluğunda ve birim bölünmez.]*

Önce, eğer mümkünse, AB, BC çarpımı, CE üzerindeki kareyle birlikte BE üzerindeki kareye eşit olsun, ve GA da DE biriminin iki katı olsun.

O zaman, AC'nin tamamı, CD'nin tamamının iki katı olduğundan, ve içlerinde GA, DE'nin iki katı olduğundan, GC kalanı da EC kalanının iki katı olur;

öyleyse GC doğrusu E'de ikiye bölünmüştür.

Bu durumda GB, BC çarpımı, CE üzerindeki kareyle birlikte BE üzerindeki kareye eşit olur. **[II.6]**

Ama varsayım gereği, AB, BC çarpımı da, CE üzerindeki kareyle birlikte, BE üzerindeki kareye eşittir;

öyleyse, GB, BC çarpımı, CE üzerindeki kareyle birlikte, AB, BC çarpımıyla beraber CE üzerindeki kareye eşittir.

Ve CE üzerindeki ortak kare çıkarılınca, AB eşittir GB bulunur: bu olamaz.

Öyleyse AB, BC çarpımı, CE üzerindeki kareyle birlikte BE üzerindeki kareye eşit değildir.

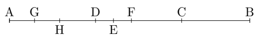
Şimdi de diyorum ki, BE üzerindeki kareden küçük de olamaz.

Çünkü, eğer mümkünse, BF üzerindeki kareye eşit olsun, ve HA, DF'nin iki katı olsun.

Şimdi yine HC'nin CF'nin iki katı olduğu sonucu çıkar; böylece CH, F'de ikiye bölünmüştür,

ve bu nedenle HB, BC çarpımı, FC üzerindeki kareyle birlikte BF üzerindeki kareye eşittir. **[II.6]**

Ama varsayım gereği AB, BC çarpımı da, CE üzerindeki kareyle birlikte BF üzerindeki kareye eşittir.



Öyleyse, HB, BC çarpımı, FC üzerindeki kareyle birlikte, AB, BC çarpımıyla CE üzerindeki kareye eşittir: bu olamaz.

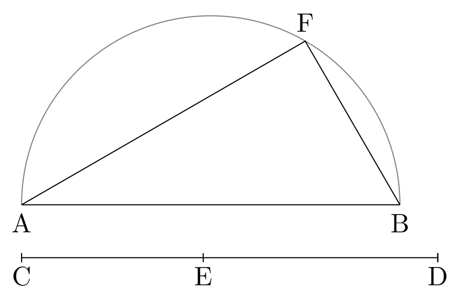
Öyleyse, AB, BC çarpımı, CE üzerindeki kareyle birlikte BE üzerindeki kareden küçük değildir.

Ama eşit olmadığı da kanıtlanmıştı.

Öyleyse, AB, BC çarpımı, CE üzerindeki kareyle birlikte bir kare değildir.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

29. Önerme:
Uzun olanı üzerine çizilen karenin kısa olanı üzerine çizilen kareden, uzun olanıyla uzunlukta eşölçekli olan bir doğru üzerine çizilen bir kare kadar büyük olduğu, ve aralarında yalnızca karede eşölçekli olan iki rasyonel doğru çizmenin yolu.



Herhangi bir rasyonel AB doğrusu alınsın, ve iki kare sayı CD, DE alınsın öyle ki farkları CE kare olmasın; **[YÖ. 1]**

AB üzerine AFB yarıçemberi çizilsin, ve DC'nin CE'ye oranı, BA üzerindeki karenin AF üzerindeki kareye oranına eşit olması sağlansın. **[DS. X.6]**

FB birleştirilsin.

BA üzerindeki karenin AF üzerindeki kareye oranı, DC'nin CE'ye oranına eşit olduğundan, BA üzerindeki karenin AF üzerindeki kareye oranı, DC sayısının CE sayısına oranına eşittir;

bu durumda BA üzerindeki kare AF üzerindeki kareyle eşölçeklidir. **[X.6]**

Ama AB üzerindeki kare rasyoneldir; **[Tan. X.4]**

dolayısıyla AF üzerindeki kare de rasyoneldir; **[Tan. X.4]**

öyleyse AF rasyoneldir.

Ve, DC'nin CE'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmadığından, BA üzerindeki karenin AF üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

bu durumda AB, AF ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

Öyleyse, BA, AF doğruları yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır.

Ve, DC'nin CEye oranı, BA üzerindeki karenin AF üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan,

çevrilmiş oranlar olarak, CD'nin DE'ye oranı, AB üzerindeki karenin BF üzerindeki kareye oranına eşittir. **[DS. V.19, III.31, I.47]**

Ama CD'nin DE'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşittir;

öyleyse AB üzerindeki karenin BF üzerindeki kareye oranı da, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşittir;

bu durumda AB, BF ile uzunlukta eşölçeklidir. **[X.9]**

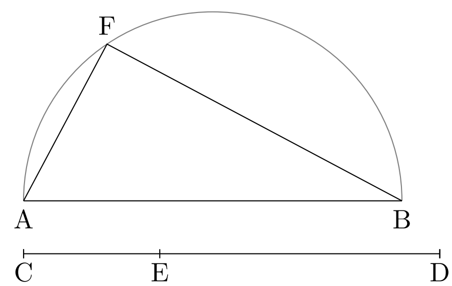
Ve AB üzerindeki kare, AF, FB üzerindeki karelere eşittir; öyleyse AB üzerindeki kare, AF üzerindeki kareden, AB ile eşölçekli olan BF üzerindeki kare kadar büyüktür.

Öyleyse yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel BA, AF doğruları bulduk öyle ki büyük olan AB üzerindeki kare, küçük olan AF üzerindeki kareden, AB ile uzunlukta eşölçekli BF üzerindeki kare kadar büyük.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

30. Önerme:

Uzun olanı üzerine çizilen karenin kısa olanı üzerine çizilen kareden, uzun olanıyla uzunlukta eşölçeksiz olan bir doğru üzerine çizilen bir kare kadar büyük olduğu, ve aralarında yalnızca karede eşölçekli olan iki rasyonel doğru çizmenin yolu.



Herhangi bir rasyonel AB doğrusu alınsın, ve iki kare sayı CE, ED alınsın öyle ki toplamları CD kare olmasın; **[YÖ. 2]**

AB üzerine AFB yarıçemberi çizilsin, ve DC'nin CE'ye oranı, BA üzerindeki karenin AF üzerindeki kareye oranına eşit olması sağlansın. **[DS. X.6]**

FB birleştirilsin.

O zaman, öncekindekine benzer bir yolla, BA, AF'nin yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğru olduğunu kanıtlayabiliriz.

Ve, DC'nin CE'ye oranı, BA üzerindeki karenin AF üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan,

çevrilmiş oranlar olarak, CD'nin DE'ye oranı, AB üzerindeki karenin BF üzerindeki kareye oranına eşittir. **[DS. V.19, III.31, I.47]**

Ama CD'nin DE'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

öyleyse AB üzerindeki karenin BF üzerindeki kareye oranı da, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

bu durumda AB, BF ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

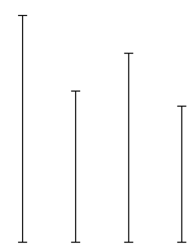
Ve, AB üzerindeki kare, AF üzerindeki kareden, AB ile eşölçeksiz olan FB üzerindeki kare kadar büyüktür.

Öyleyse yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel AB, AF doğruları bulduk, ve AB üzerindeki kare, AF üzerindeki kareden, AB ile eşölçeksiz olan FB üzerindeki kare kadar büyüktür.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

31. Önerme:

Aralarında yalnızca karede eşölçekli olan, rasyonel bir dikdörtgen içeren, ve uzunu üzerine çizilen karenin kısası üzerine çizilen kareden farkının, uzunuyla uzunlukta eşölçekli bir doğru üzerine çizilen bir kare kadar olduğu, iki orta değer doğru çizmenin yolu.



Yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel A, B doğrusu alınsın, öyle ki büyük olan A üzerindeki kare, B üzerindeki kareden, A ile uzunlukta eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olsun. **[X.29]**

Ve C üzerindeki kare A, B dikdörtgenine eşit olsun.

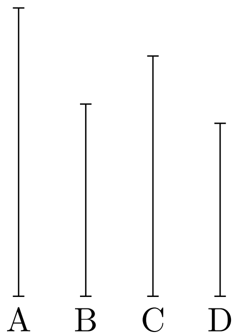
Şimdi, A, B dikdörtgeni orta değerdir. **[X.21]**

C, D dikdörtgeni, B üzerindeki kareye eşit olsun.

Şimdi, B üzerindeki kare rasyoneldir; bu durumda C, D dikdörtgeni de rasyoneldir.

Ve, A'nın B'ye oranı, A, B dikdörtgeninin B üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan, ve bu arada C üzerindeki kare, A, B dikdörtgenine eşit olduğundan, ve C, D dikdörtgeni, B üzerindeki kareye eşit olduğundan,

A'nın B'ye oranı, C üzerindeki karenin, C, D dikdörtgenine oranına eşittir.



Ama, C üzerindeki karenin C, D dikdörtgenine oranı, C'nin D'ye oranına eşittir; bu durumda A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşit olur.

Ama A, B ile yalnızca karede eşölçeklidir; öyleyse C de D ile yalnızca karede eşölçeklidir. **[X.11]**

Ve C orta değerdir; öyleyse D de orta değerdir. **[DS. X.23]**

Ve A'nın B'ye oranı, C'nin D'ye oranına eşit olduğundan, ve büyük olan A'nın üzerindeki kare, B'nin üzerindeki kareden, A ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olduğundan,

C'nin üzerindeki kare de D'nin üzerindeki kareden, C ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[X.14]**

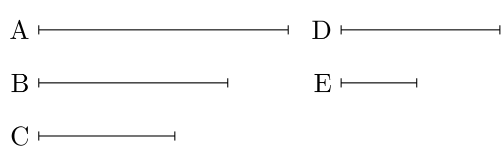
Öyleyse yalnızca karede eşölçekli, ve rasyonel bir dikdörtgen içeren iki orta değer C, D doğruları bulunmuş oldu, ve büyük olan C üzerindeki kare, D üzerindeki kareden, C ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyük.

A üzerindeki kare, B üzerindeki kareden, A ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olduğu zaman, benzer şekilde C üzerindeki karenin, D üzerindeki kareden, C ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olduğu da kanıtlanabilir. **[X.30]**

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

32. Önerme:

Aralarında yalnızca karede eşölçekli olan, içerdikleri dikdörtgen orta değer olan ve uzunu üzerine çizilen karenin kısası üzerine çizilen kareden farkı uzunuyla eşölçekli bir doğru üzerine çizilen bir kare kadar olan, orta değer iki doğru çizmenin yolu.



Yalnızca karede eşölçekli üç rasyonel doğru A, B, C alınsın öyle ki A üzerindeki kare, C üzerindeki kareden, A ile eşölçekli bir kare kadar büyük olsun, **[X.29]**

ve D üzerindeki kare A, B dikdörtgenine eşit olsun.

Bu durumda D üzerindeki kare orta değerdir, ve D de orta değer olur. **[X.21]**

D, E dikdörtgeni B, C dikdörtgenine eşit olsun.

O zaman, A, B dikdörtgeninin B, C dikdörtgenine oranı, A'nın C'ye oranına eşit olduğundan, ve bu arada D üzerindeki kare A, B dikdörtgenine, ve D, E dikdörtgeni de B, C dikdörtgenine eşit olduğundan,

A'nın C'ye oranı, D üzerindeki karenin D, E dikdörtgenine oranına eşit olur.

Ama, D üzerindeki karenin D, E dikdörtgenine oranı, D'nin E'ye oranına eşittir; öyleyse A'nın C'ye oranı, D'nin E'ye oranına eşittir.

Ama, A, C ile yalnızca karede eşölçeklidir; bu durumda D de E ile yalnızca karede eşölçekli olur. **[X.11]**

Ama D orta değerdir; öyleyse E de orta değerdir. **[DS. X.23]**

Ve, A'nın C'ye oranı, D'nin E'ye oranına eşit olduğundan, ve bu arada A üzerindeki kare, C üzerindeki kareden, A ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olduğundan,

D üzerindeki kare de E üzerindeki kareden, D ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[X.14]**

Şimdi diyorum ki D, E dikdörtgeni orta değerdir.

Çünkü, B, C dikdörtgeni D, E dikdörtgenine eşit olduğundan, ve bu arada B, C dikdörtgeni orta değer olduğundan, **[X.21]**

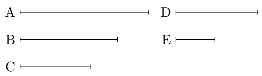
D, E dikdörtgeni de orta değerdir.

Öyleyse, yalnızca karede eşölçekli olan, orta değer bir dikdörtgen içeren, ve büyüğü üzerindeki kare küçüğü üzerindeki kareden, büyüğü ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olan, iki orta değer doğru bulunmuş oldu.

Benzer şekilde, A üzerindeki kare C üzerindeki kareden, A ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olduğu zaman D üzerindeki karenin de E üzerindeki kareden, D ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olduğu kanıtlanabilir. **[X.30]**

Yardımcı Önerme: A köşesi dik olmak üzere ABC diküçgeni ve AD dikmesi çizilmiş olsun.

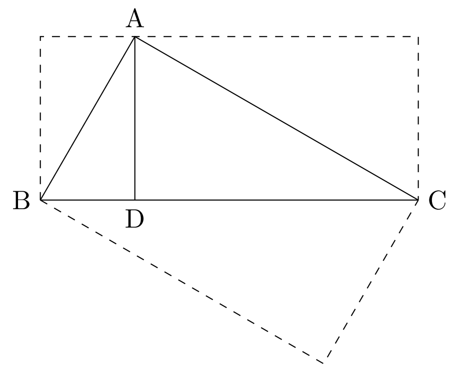
Diyorum ki, CB, BD dikdörtgeni, BA üzerindeki kareye eşittir,



BC, CD dikdörtgeni, CA üzerindeki kareye eşittir,

BD, DC dikdörtgeni, AD üzerindeki kareye eşittir,

ve ayrıca, BC, AD dikdörtgeni, BA, AC dikdörtgenine eşittir.



Önce, CB, BD dikdörtgeninin BA üzerindeki kareye eşit olduğu:

Bir dik üçgende AD doğrusu dik açıdan tabana dik çizilmiştir, bu yüzden ABD, ADC üçgenlerinin ikisi de ABC üçgenine ve birbirine benzerdir. **[VI.8]**

Ve ABC üçgeni, ABD üçgenine benzer olduğundan, CB'nin BA'ya oranı, BA'nın BD'ye oranına eşittir; **[VI.4]**

bu durumda CB, BD dikdörtgeninin AB üzerindeki kareye eşit olur. **[VI.17]**

Aynı nedenden dolayı, BC, CD dikdörtgeni, AC üzerindeki kareye eşit olur.

Ve, eğer bir dik üçgende dik açının olduğu köşeden tabana bir dik çizilirse, bu şekilde çizilen dikme tabanın parçalarının orta orantısı olduğundan, **[DS.VI.8]**

BD'nin DA'ya oranı, AD'nin DC'ye oranına eşit olur;

öyleyse BD, DC dikdörtgeni, AD üzerindeki kareye eşittir. **[VI.17]**

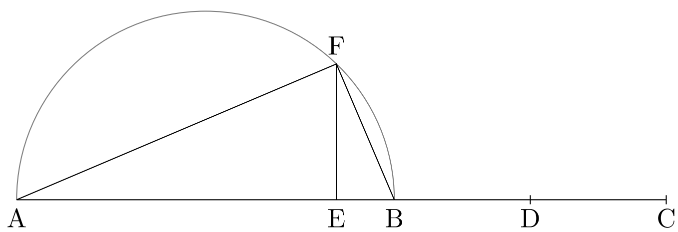
Diyorum ki, BC, AD dikdörtgeni de BA, AC dikdörtgenine eşittir.

Çünkü, dediğimiz gibi, ABC ile ABD benzerdir, o yüzden BC'nin CA'ya oranı, BA'nın AD'ye oranına eşittir. **[VI.4]**

Öyleyse BC, AD dikdörtgeni, BA, AC dikdörtgenine eşittir. **[VI.16]**

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

33. Önerme:
Üzerlerindeki karelerin toplamı rasyonel ama içerdikleri dikdörtgen orta değer olan, karede eşölçeksiz iki doğru bulmanın yolu.



Yalnız karede eşölçekli iki rasyonel doğru AB, BC alınsın öyle ki büyük olan AB üzerindeki kare, küçük olan BC üzerindeki kareden, AB ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olsun, **[X.30]**

BC doğrusu D'de ikiye bölünsün,

AB üzerine, BD, DC doğrularından herhangi biri üzerindeki kareye eşit ama bir kare şekil kadar eksik bir paralelkenar çizilsin, ve bu AE, EB dikdörtgeni olsun; **[VI.28]**

AB üzerine AFB yarıçemberi çizilsin,

AB'ye EF dikmesi çizilsin, ve AF, FB birleştirilsin.

AB, BC doğruları eşit olmadığından, ve AB üzerindeki kare, BC üzerindeki kareden, AB ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olduğundan, ve bu arada AB üzerine, BC üzerindeki karenin dörte biri büyüklüğünde, yani yarısı üzerindeki karenin büyüklüğünde ve bir kare şekil kadar eksik bir şekil çizilerek AE, EB dikdörtgeni oluşturulmuş olduğundan,

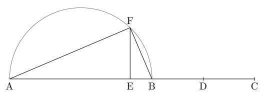
AE ile EB eşölçeksizdir. **[X.18]**

Ve, AE'nin EB'ye oranı, BA, AE dikdörtgeninin AB, BE dikdörtgenine oranına eşittir,

ve bu arada BA, AE dikdörtgeni, AF üzerindeki kareye eşittir,

ve AB, BE dikdörtgeni, BF üzerindeki kareye eşittir;

bu durumda AF üzerindeki kare, FB üzerindeki kareyle eşölçeksizdir;



öyleyse AF, FB karede eşölçeksizdir.

Ve, AB rasyonel olduğundan, AB üzerindeki kare de rasyoneldir; böylece AF, FB üzerindeki karelerin toplamı da rasyonel olur. **[I.47]**

Ve yine, AE, EB dikdörtgeni, EF üzerindeki kareye eşit olduğundan, ve varsayım gereği AE, EB dikdörtgeni, BD üzerindeki kareye de eşit olduğundan,

FE eşittir BD;

öyleyse BC, FE'nin iki katıdır,

böylece AB, BC dikdörtgeni, AB, EF dikdörtgeniyle eşölçekli olur.

Ama AB, BC dikdörtgeni orta değerdir; **[X.21]**

öyleyse AB, EF dikdörtgeni de orta değerdir. **[DS. X.23]**

Ama AB, EF dikdörtgeni, AF, FB dikdörtgenine eşittir; **[YÖ.]**

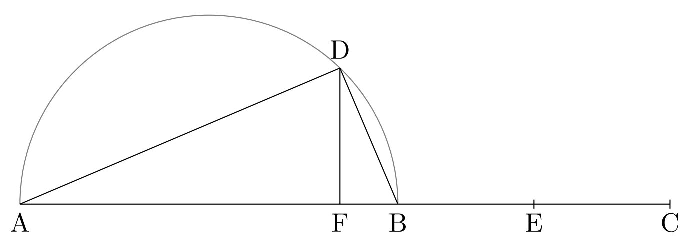
bu durumda AF, FB dikdörtgeni de orta değer olur.

Ama bu doğrular üzerindeki karelerin toplamının rasyonel olduğu da kanıtlanmıştı.

Öyleyse, üzerlerindeki karelerin toplamı rasyonel ama içerdikleri dikdörtgen orta değer olan, karede eşölçeksiz iki doğru bulunmuş oldu.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. ☐

34. Önerme:
Üzerlerindeki karelerin toplamı orta değer ama içerdikleri dikdörtgen rasyonel olan, karede eşölçeksiz iki doğru bulmanın yolu.



Yalnızca karede eşölçekli orta değer iki doğru AB, BC alınsın öyle ki içerdikleri dikdörtgen rasyonel olsun ve AB üzerindeki kare, BC üzerindeki kareden, AB ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olsun; **[X.31]**

AB üzerine ADB yarıçemberi çizilsin, BC doğrusu E'de ikiye bölünsün,

AB üzerine, BE üzerindeki kareye eşit ve bir kare şekil kadar eksik bir paralelkenar çizilsin, bu paralelkenar AF, FB dikdörtgeni olsun; **[VI.28]**

bu durumda AF, uzunlukta FB ile eşölçeksiz olur. **[X.18]**

F'den AB'ye dik açıyla FD çizilsin, AD, DB birleştirilsin.

AF, uzunlukta FB ile eşölçeksiz olduğundan, BA, AF dikdörtgeni de AB, BF dikdörtgeniyle eşölçeksiz olur. **[X.11]**

Ama BA, AF dikdörtgeni, AD üzerindeki kareye eşittir, ve AB, BF dikdörtgeni, DB üzerindeki kareye eşittir;

öyleyse AD üzerindeki kare de DB üzerindeki kareyle eşölçeksizdir.

Ve, AB üzerindeki kare orta değer olduğundan, AD, DB üzerindeki karelerin toplamı da orta değerdir. **[III.31, I.47]**

Ve, BC, DF'nin iki katı olduğundan, AB, BC dikdörtgeni de AB,FD dikdörtgeninin iki katı olur.

Ama AB, BC dikdörtgeni rasyoneldir; bu durumda AB, FD dikdörtgeni de rasyoneldir. **[X.6]**

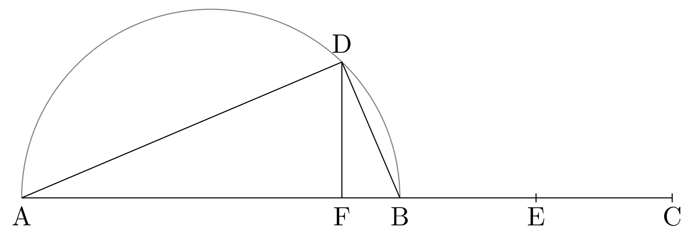
Ama AB, FD dikdörtgeni, AD, DB dikdörtgenine eşittir; **[YÖ.]**

böylece AD, DB dikdörtgeni de rasyoneldir.

Öyleyse, üzerlerindeki karelerin toplamı orta değer ama içerdikleri dikdörtgen rasyonel olan, karede eşölçeksiz iki doğru bulunmuş oldu.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

35. Önerme:
Üzerlerindeki karelerin toplamı ve içerdikleri dikdörtgen orta değer olan, üzerlerindeki karelerin toplamıyla eşölçeksiz, ve aralarında karede eşölçeksiz iki doğru bulmanın yolu.



Yalnızca karede eşölçekli iki orta değer doğru AB, BC alınsın öyle ki içerdikleri dikdörtgen orta değer olsun ve büyük olan AB üzerindeki kare, küçük olan BC üzerindeki kareden, AB ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olsun; **[X.32]**

AB üzerine ADB yarıçemberi çizilsin, ve çizimin devamı yukardaki gibi olsun.

O zaman, AF, FB ile uzunlukta eşölçeksiz olduğundan, **[X.18]**

AD de DB ile karede eşölçeksizdir. **[X.11]**

Ve AB üzerindeki kare orta değer olduğundan, AD, DB üzerindeki karelerin toplamı da orta değerdir. **[III.31, I.47]**

Ve, AF, FB dikdörtgeni, BE, DF doğrularının her biri üzerindeki kareye eşit olduğundan, BE eşittir DF;

bu durumda BC, FD'nin iki katı olur, böylece AB, BC dikdörtgeni de AB, FD dikdörtgeninin iki katı olur.

Ama AB, BC dikdörtgeni orta değerdir; öyleyse AB, FD dikdörtgeni de orta değerdir. **[DS. X.32]**

Ve AD, DB dikdörtgenine eşittir; **[YÖ. X.32]**

öyleyse AD, DB dikdörtgeni de orta değerdir.

Ve AB, BC ile uzunlukta eşölçeksiz olduğundan, ve bu arada CB, BE ile eşölçekli olduğundan, AB, BE ile de uzunlukta eşölçeksizdir, **[X.13]**

böylece AB üzerindeki kare de AB, BE dikdörtgeniyle eşölçeksiz olur. **[X.11]**

Ama AD, DB üzerindeki kareler, AB üzerindeki kareye eşittir, **[I.47]** ve AB, FD dikdörtgeni, yani AD, DB dikdörtgeni, AB, BE dikdörtgenine eşittir;

öyleyse AD, DB üzerindeki karelerin toplamı, AD, DB dikdörtgeniyle eşölçeksizdir.

Öyleyse, üzerlerindeki karelerin toplamı ve içerdikleri dikdörtgen orta değer olan, üzerlerindeki karelerin toplamıyla eşölçeksiz, ve aralarında karede eşölçeksiz iki doğru bulunmuş oldu.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

36. Önerme:
Yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğru toplanırsa, toplam irrasyoneldir. Bu çeşit doğrulara *iki parçalı* densin.

Yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğru AB, BC birbirine eklensin;

diyorum ki AC toplamı irrasyoneldir.

Çünkü, AB, BC ile uzunlukta eşölçeksiz olduğundan, çünkü yalnızca karede eşölçeklidirler, ve AB'nin BC'ye oranı, AB, BC dikdörtgeninin BC üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan,

AB, BC dikdörtgeni, BC üzerindeki kareyle eşölçeksizdir. **[X.11]**

Ama AB, BC dikdörtgeninin iki katı AB, BC dikdörtgeniyle eşölçeklidir, **[X.6]**

ve AB, BC üzerindeki kareler, BC üzerindeki kareyle eşölçeklidir, çünkü AB, BC doğruları yalnızca karede eşölçekli olan rasyonel doğrulardır, **[X.15]**

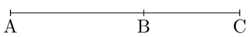
öyleyse AB, BC dikdörtgeninin iki katı, AB, BC üzerindeki karelerle eşölçeksizdir. **[X.13]**

Ve birleşik oranlar olarak, AB, BC dikdörtgeninin iki katı, AB, BC üzerindeki karelerle birlikte, yani AC üzerindeki kare, **[II.4]**

AB, BC üzerindeki karelerin toplamıyla eşölçeksizdir. **[X.16]**

Ama AB, BC üzerindeki karelerin toplamı rasyoneldir; öyleyse AC üzerindeki kare irrasyoneldir,

böylece AC de irrasyoneldir. **[Tan. X.4]**

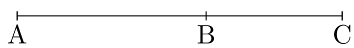


Ve ona *iki parçalı* densin.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

37. Önerme:

Yalnızca karede eşölçekli, ve rasyonel bir dikdörtgen içeren iki orta değer doğru toplanırsa, toplam irrasyonel olur; ve ona *birinci türden iki ortalı* densin.



Yalnızca karede eşölçekli, ve rasyonel bir dikdörtgen içeren iki orta değer doğru AB, BC toplansın;

diyorum ki, AC toplamı irrasyoneldir.

Çünkü, AB, BC ile uzunlukta eşölçeksiz olduğundan, AB, BC üzerindeki kareler de AB, BC dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksizdir; **[X.36]**

ve birleşik oranlar olarak, AB, BC üzerindeki kareler, AB, BC dikdörtgeninin iki katıyla beraber, yani AC üzerindeki kare, **[II.4]**

AB, BC dikdörtgeniyle eşölçeksizdir. **[X.16]**

Ama AB, BC dikdörtgeni rasyoneldir, çünkü varsayım gereği AB, BC doğruları rasyonel bir dikdörtgen içeren doğrulardır;

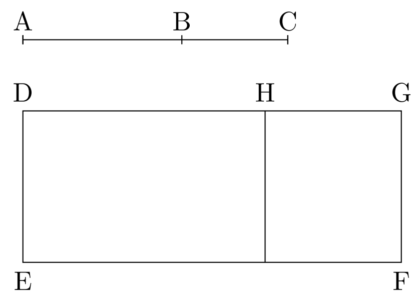
bu durumda AC üzerindeki kare irrasyonel olur;

öyleyse AC irrasyoneldir. **[Tan. X.4]**

Ve ona *birinci türden iki ortalı* densin.

38. Önerme:

Yalnızca karede eşölçekli, ve orta değer bir dikdörtgen içeren iki orta değer doğru toplanırsa, toplam irrasyonel olur; ve ona *ikinci türden iki ortalı* densin.



Yalnızca karede eşölçekli, ve orta değer bir dikdörgen içeren iki orta değer doğru AB, BC birbirine eklensin;

diyorum ki, AC irrasyoneldir.

Çünkü, bir rasyonel DE doğrusu alınsın, ve DE üzerine, AC üzerindeki kareye eşit DF paralelkenarı çizilsin, ve DG genişliği oluşturulmuş olsun. **[I.44]**

O zaman, AC üzerindeki kare, AB, BC üzerindeki karelere ve AB, BC dikdörtgeninin iki katına eşit olduğundan, **[II.4]**

DE üzerine, AB, BC üzerindeki karelere eşit EH çizilsin;

bu durumda HF kalanı, AB, BC dikdörtgeninin iki katına eşit olur.

Ve AB, BC doğrularının her biri orta değer olduğundan, AB, BC üzerindeki kareler de orta değerdir.

Ama varsayım gereği AB, BC dikdörtgeninin iki katı da orta değerdir.

Ve EH dikdörtgeni AB, BC üzerindeki karelere eşittir, ve bu arada FH de AB, BC dikdörtgeninin iki katına eşittir;

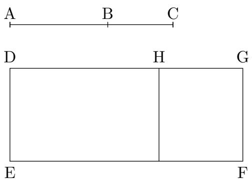
bu durumda EH, HF dikdörtgenlerinin her biri orta değer olur.

Ve bunlar DE rasyonel doğrusu üzerine çizilmiştir; öyleyse DH, HG doğrularının her biri rasyoneldir ve DE doğrusuyla eşölçeksizdir. **[X.22]**

O zaman, AB, BC ile uzunlukta eşölçeksiz olduğundan, ve AB'nin BC'ye oranı, AB üzerindeki karenin AB, BC dikdörtgenine oranına eşit olduğundan,

AB üzerindeki kare, AB, BC dikdörtgeniyle eşölçeksizdir. **[X.11]**

Ama AB, BC üzerindeki karelerin toplamı AB üzerindeki kareyle eşölçeklidir, **[X.15]**



ve AB, BC dikdörtgeninin iki katı, AB, BC dikdörtgeniyle eşölçeklidir. **[X.6]**

Öyleyse AB, BC üzerindeki karelerin toplamı, AB, BC dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksizdir. **[X.13]**

Ama EH dikdörtgeni AB, BC üzerindeki karelere eşittir, ve HF dikdörtgeni AB, BC dikdörtgeninin iki katına eşittir.

Öyleyse EH, HF ile eşölçeksizdir, böylece DH de HG ile uzunlukta eşölçeksiz olur. **[VI.1, X.11]**

Bu durumda DH, HG doğruları yalnızca karede eşölçekli olur; böylece DG irrasyonel olur. **[X.36]**

Ama DE rasyoneldir;

bir rasyonel ve bir de irrasyonel doğru tarafından içerilen dikdörtgen irrasyoneldir; **[X.20]**

öyleyse DF alanı irrasyoneldir, ve ona eşit karenin kenarı da irrasyoneldir. **[Tan. X.4]**

Ama DF'ye eşit karenin kenarı AC'dir;

öyleyse AC irrasyoneldir.

Ve ona *ikinci türden iki ortalı* densin.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

39. Önerme:
Üzerlerine çizilen karelerin toplamı rasyonel ama içerdikleri dikdörtgen orta değer olan, karede eşölçeksiz iki doğru toplanırsa, toplam irrasyonel olur; ve ona *üstün* densin.

Verilen şartları sağlayan, karede eşölçeksiz AB, BC doğruları alınsın, **[X.33]**

ve toplansın;

diyorum ki AC irrasyoneldir.

Çünkü, AB, BC dikdörtgeni orta değer olduğundan, AB, BC dikdörtgeninin iki katı da orta değerdir. **[X.6, DS. X.23]**

Ama AB, BC üzerindeki karelerin toplamı rasyoneldir; o yüzden, AB, BC dikdörtgeninin iki katı, AB, BC üzerindeki karelerin toplamıyla eşölçeksizdir,

böylece AB, BC üzerindeki kareler, AB, BC dikdörtgeninin iki katıyla birlikte, yani AC üzerindeki kare, AB, BC üzerindeki karelerin toplamıyla da eşölçeksizdir; **[X.16]**

bu durumda AC üzerindeki kare irrasyonel olur,

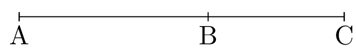
öyleyse AC irrasyoneldir. **[Tan. X.4]**

Ve ona *üstün* densin.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

40. Önerme:

Üzerlerine çizilen karelerin toplamı orta değer ama içerdikleri dikdörtgenin rasyonel olan, karede eşölçeksiz iki doğru toplanırsa, toplam irrasyonel olur; ve ona *rasyonel artı orta alan kenarı* densin.



Verilen şartları sağlayan, karede eşölçeksiz AB, BC doğruları alınsın, **[X.34]**

ve toplansın;

diyorum ki AC irrasyoneldir.

Çünkü, AB, BC üzerindeki karelerin toplamı orta değer olduğundan, ve bu arada AB, BC dikdörtgeninin iki katı rasyonel olduğundan,

AB, BC üzerindeki karelerin toplamı, AB, BC dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksizdir;

böylece AC üzerindeki kare de AB, BC dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksiz olur. **[X.16]**

Ama AB, BC dikdörtgeninin iki katı rasyoneldir;

bu durumda AC üzerindeki kare irrasyonel olur.

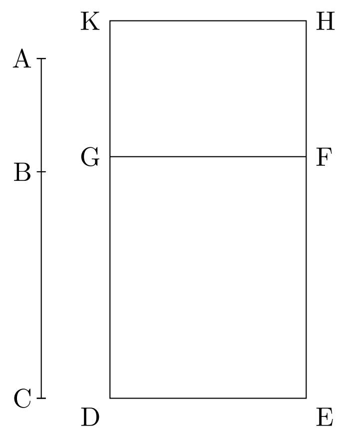
Öyleyse AC irrasyoneldir. **[Tan. X.4]**

Ve ona *rasyonel artı orta alan kenarı* densin.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

41. Önerme:

Üzerlerine çizilen karelerin toplamı orta değer olan ve içerdikleri dikdörtgen hem orta değer hem de üzerlerine çizilmiş karelerin toplamıyla eşölçeksiz olan, karede eşölçeksiz iki doğru toplanırsa, toplam irrasyonel olur; ve ona *iki orta alan toplamı kenarı* densin.



Verilen şartları sağlayan, karede eşölçeksiz AB, BC doğruları alınsın, **[X.35]**

ve toplansın;

diyorum ki AC irrasyoneldir.

Bir rasyonel DE doğrusu alınsın, ve DE üzerine, AB, BC karelerine eşit DF dikdörtgeni, ve AB, BC dildörtgeninin iki katına eşit GH dikdörtgeni çizilsin;

bu durumda DH'nin tamamı AC üzerindeki kareye eşit olur. **[II.4]**

Şimdi, AB, BC üzerindeki karelerin toplamı orta değer olduğundan, ve DF'ye eşit olduğundan, DF de orta değerdir.

Ve rasyonel DE doğrusu üzerine çizilmiştir; öyleyse DG rasyoneldir ve DE ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Aynı nedenden dolayı GK de rasyoneldir ve GF ile, yani DE ile, uzunlukta eşölçeksizdir.

Ve AB, BC üzerindeki kareler, AB, BC dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksiz olduğundan, DF de GH ile eşölçeksizdir;

böylece DG, GK ile eşölçeksiz olur. **[VI.1, X.11]**

Ve bunlar rasyoneldir; öyleyse DG, GK yalnızca karede eşölçekli olan rasyonel doğrulardır;

öyleyse DK, iki parçalı denen irrasyonel bir doğrudur. **[X.36]**

Ama DE rasyoneldir; öyleyse DH irrasyoneldir, ona eşit karenin kenarı da irrasyoneldir. **[Tan. X.4]**

Ama HD'ye eşit karenin kenarı AC'dir;

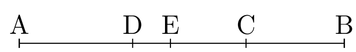
öyleyse AC irrasyoneldir.

Ve ona *iki orta alan toplamı kenarı* densin.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

Yukarda sözü edilegelen irrasyonel doğruların, tanımlarındaki koşulları sağlayacak şekilde iki doğru parçaya ancak tek bir noktada bölünebileceğini aşağıdaki yardımcı önermeden sonra kanıtlayacağız.

Yardımcı Önerme: Verilen bir AB doğrusu D ve C noktalarının her birinde eşit olmayan iki parçaya bölünmüş olsun öyle ki AC, DB'den büyük olsun. Bu durumda AC ve CB üzerine çizilen karelerin toplamı AD ve DB üzerine çizilen karelerin toplamından büyüktür.



Çünkü, AB doğrusu E'de ikiye bölünsün;

Sonra, AC, DB'den büyük olduğundan, her birinden DC çıkarılsın;

o zaman AD kalanı, CB kalanından büyük olur.

Ama AE eşittir EB; öyleyse DE, EC'den küçüktür;

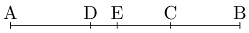
bu durumda C, D noktaları orta noktadan eşit uzaklıkta değildir.

Ve AC, CB dikdörtgeni, EC üzerindeki kareyle birlikte, EB üzerindeki kareye eşit olduğundan, **[II.5]**

ve ayrıca AD, DB dikdörtgeni, DE üzerindeki kareyle birlikte, EB üzerindeki kareye eşit olduğundan, **[II.5]**

AC, CB dikdörtgeni, EC üzerindeki kareyle birlikte, AD, DB dikdörtgeniyle DE üzerindeki karenin toplamına eşittir.

Ve bunlardan DE üzerindeki kare, EC üzerindeki kareden küçüktür;



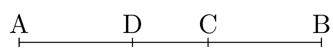
öyleyse kalan AC, CB dikdörtgeni, kalan AD, DB dikdörtgeninden küçüktür,

böylece AC, CB dikdörtgeninin iki katı da AD, DB dikdörtgeninin iki katından küçük olur.

Öyleyse kalanlar, AC, CB üzerindeki karelerin toplamı, AD, DB üzerindeki karelerin toplamından büyüktür.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

42. Önerme:
İki parçalı bir doğru onu oluşturan parçalara ancak tek bir noktada bölünebilir.



İki parçalı doğru AB, onu oluşturan parçalara C noktasında bölünmüş olsun;

bu durumda AC, CB doğruları yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur. **[X.36]**

Diyorum ki, AB doğrusu, yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğruya başka bir noktada bölünmez.

Çünkü, eğer mümkünse, D noktasında da bölünsün, böylece AD, DB yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğru olur.

Açıktır ki AC, DB'ye eşit olmaz.

Çünkü, eğer mümkünse, olsun.

O zaman AD de CB'ye eşit olacaktır, ve AC'nin CB'ye oranı, BD'nin DA'ya oranına eşit olacaktır;

böylece AB doğrusu D noktasında da C noktasındaki gibi bölünmüş olacaktır: bu varsayıma aykırıdır.

> *[Baştaki varsayım* D *noktasının* AB *doğrusunu farklı bir oranda böleceği yönündeydi.]*

Öyleyse AC, DB'ye eşit değildir.

Bu nedenle de C, D noktaları orta noktadan eşit uzaklıkta değildir.

Öyleyse, AC, CB üzerindeki karelerin, AD, DB üzerindeki karelerden farkı, AD, DB dikdörtgeninin iki katının, AC, CB dikdörtgeninin iki katından farkına eşittir,

çünkü hem AC, CB üzerindeki karelerle AC, CB dikdörtgeninin iki katı, hem de AD, DB üzerindeki karelerle AD, DB dikdörtgeninin iki katı AB üzerindeki kareye eşittir. **[II.4]**

Ama AC, CB üzerindeki karelerin AD, DB üzerindeki karelerden farkı rasyonel bir alandır, çünkü her ikisi de rasyoneldir;

öyleyse AD, DB dikdörtgeninin iki katının AC, CB dikdörtgeninin iki katından farkı da,

kendileri orta değer olmasına rağmen, **[X.21]**

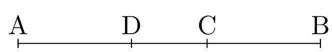
rasyonel bir alandır ki bu olamaz.

Demek ki iki parçalı doğru farklı noktalarda bölünemez;

öyleyse yalnızca tek bir noktada bölünebilir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

43. Önerme:
Birinci türden iki ortalı bir doğru onu oluşturan parçalara ancak tek bir noktada bölünebilir.



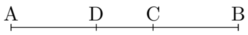
Birinci türden iki ortalı AB doğrusu C noktasında bölünsün öyle ki AC, CB yalnızca karede eşölçekli ve rasyonel bir dikdörtgen içeren iki orta değer doğru olsun;

diyorum ki, AB başka noktada bölünemez.

Çünkü, eğer mümkünse, D noktasında da bölünsün, öyle ki AD, DB yalnızca karede eşölçekli ve rasyonel bir dikdörtgen içeren iki orta değer doğru olsun.

O zaman, AD, DB dikdörtgeninin iki katının AC, CB dikdörtgeninin iki katından farkı, AC, CB üzerindeki karelerin, AD, DB üzerindeki karelerden farkına eşittir,

ve bu arada AD, DB dikdörtgeninin iki katı, AC, CB dikdörtgeninin iki katından farkı rasyonel bir alandır, çünkü ikisi de rasyoneldir,



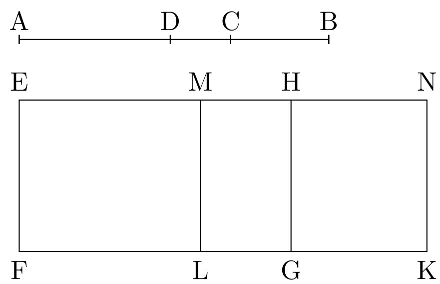
öyleyse AC, CB üzerindeki karelerin, AD, DB üzerindeki karelerden farkı da, onlar orta değer olmalarına rağmen, rasyoneldir ki bu olamaz. **[X.26]**

Demek ki birinci türden iki ortalı doğru, parçalarına iki farklı noktada bölünemez;

öyleyse yalnızca tek bir noktada bölünebilir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

44. Önerme:
İkinci türden iki ortalı bir doğru onu oluşturan parçalara ancak tek bir noktada bölünebilir.



İkinci türden iki ortalı AB doğrusu C noktasında bölünsün, öyle ki AC, CB yalnızca karede eşölçekli olan ve orta değer bir dikdörtgen içeren iki orta değer doğru olsun; **[X.38]**

Açıktır ki C noktası orta nokta değildir, çünkü parçalar uzunlukta eşölçekli değiller.

Diyorum ki, AB başka noktada bölünemez.

Çünkü, eğer mümkünse, D noktasında bölünsün, öyle ki AC, DB'ye eşit olmasın, ve AC daha büyük olsun;

o zaman açıkça görülür ki, AD, DB üzerindeki kareler, daha önce kanıtladığımız gibi, **[YÖ.]**

AC, CB üzerindeki karelerden küçüktür;

ve varsayalım ki AD, DB yalnızca karede eşölçekli, ve orta değer bir dikdörtgen içeren iki orta değer doğru olsun.

Şimdi bir EF rasyonel doğrusu alınsın,

EF üzerine AB üzerindeki kareye eşit EK dikdörtgeni çizilsin, ve bundan AC, CB üzerindeki karelere eşit EG çıkarılsın;

bu durumda HK kalanı, AC, CB dikdörtgeninin iki katına eşit olur. **[II.4]**

Yine bu sefer, AC, CB üzerindeki karelerden küçük olduğu kanıtlanan AD, DB üzerindeki karelere eşit EL çıkarılsın; **[YÖ.]**

bu durumda MK kalanı, AD, DB dikdörtgeninin iki katına eşit olur.

Şimdi, AC, CB üzerindeki kareler orta değer olduğundan, EG orta değerdir.

Ve EF rasyonel doğrusu üzerine çizilmiştir;

öyleyse EH rasyoneldir, ve EF ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Aynı nedenden dolayı, HN de rasyoneldir, ve EF ile uzunlukta eşölçeksizdir.

Ve AC, CB yalnızca karede eşölçekli orta değer doğrular olduğundan, AC, CB ile uzunlukta eşölçeksizdir.

Ama, AC'nin CB'ye oranı, AC üzerindeki karenin AC, CB dikdörtgenine oranına eşittir;

bu durumda AC üzerindeki kare, AC, CB dikdörtgeniyle eşölçeksiz olur. **[X.11]**

Ama AC, CB üzerindeki kareler, AC üzerindeki kareyle eşölçeklidir, çünkü AC, CB karede eşölçeklidir. **[X.15]**

Ve AC, CB dikdörtgeninin iki katı, AC, CB dikdörtgeniyle eşölçeklidir. **[X.6]**

bu durumda AC, CB üzerindeki kareler de AC, CB dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksiz olur. **[X.13]**

Ama EG dikdörtgeni, AC, CB üzerindeki karelere eşittir,

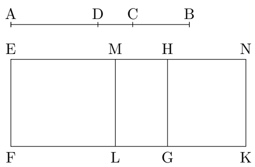
ve HK dikdörtgeni, AC, CB dikdörtgeninin iki katına eşittir;

bu durumda EG, HK ile eşölçeksiz olur, böylece EH de HN ile uzunlukta eşölçeksiz olur. **[VI.1, X.11]**

Ve bunlar rasyoneldir;

öyleyse EH, HN yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur.

Ama, eğer yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğru toplanırsa, toplam iki parçalı denen irrasyonel doğrudur. **[X.36]**



Öyleyse EN doğrusu H'de bölümüş olan iki parçalı bir doğrudur.

Aynı yolla, EM, MN'nin de yalnızca karede eşölçekli olan iki rasyonel doğru olduğu kanıtlanabilir;

ve EN, iki farklı H ve M noktalarında bölünmüş iki parçalı doğru olur.

Ve EH, MN'ye eşit değildir. Çünkü,

AC, CB üzerindeki kareler, AD, DB üzerindeki karelerden büyüktür.

Ama AD, DB üzerindeki kareler, AD, DB dikdörtgeninin iki katından büyüktür;

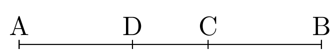
öyleyse AC, CB üzerindeki kareler, yani EG alanı, AD, DB dikdörtgeninin iki katından, yani MK'den, daha da büyüktür,

böylece EH de MN'den büyük olur.

Öyleyse EH, MN'ye eşit değildir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

45. Önerme:
Üstün bir doğru onu oluşturan parçalara ancak tek bir noktada bölünebilir.



AB üstün doğrusu C'de bölünmüş olsun, öyle ki AC, CB karede eşölçeksiz olsun, ve AC, CB üzerindeki karelerin toplamı rasyonel ama AC, CB dikdörtgeni orta değer olsun; **[X.39]**

diyorum ki, AB başka noktada bu şekilde bölünmez.

Çünkü, eğer mümkünse, D noktasında da bölünsün, yani AD, DB karede eşölçeksiz, AD, DB üzerindeki karelerin toplamı rasyonel ama içerdikleri dikdörtgen orta değer olsun.

O zaman, AC, CB üzerindeki karelerin, AD, DB üzerindeki karelerden farkı, AD, DB dikdörtgeninin iki katının, AC, CB dikdörtgeninin iki katından farkına eşit olduğundan,

ve bu arada AC, CB üzerindeki karelerin AD, DB üzerindeki karelerden farkı, her ikisi de rasyonel olduğu için, rasyonel olduğundan,

AD, DB dikdörtgeninin iki katının, AC, CB dikdörtgeninin iki katından farkı da, her ikisi de orta değer olmasına rağmen, rasyonel olur: bu olamaz. **[X.26]**

Öyleyse üstün bir doğru farklı noktalarda bölünemez;

öyleyse tek bir noktada bölünür.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

46. Önerme:
Rasyonel artı orta alan kenarı bir doğru onu oluşturan parçalara ancak tek bir noktada bölünebilir.

AB doğrusu rasyonel artı orta alan kenarı olan bir doğru olsun ve C noktasında bölünsün, öyle ki AC, CB karede eşölçeksiz olsun ve AC, CB üzerindeki karelerin toplamı orta değer, ama AC, CB dikdörtgeninin iki katı rasyonel olsun; **[X.40]**

diyorum ki, AB başka bir noktada bölünemez.

Çünkü, eğer mümkünse, D noktasında da böünsün, öyle ki AD, DB de karede eşölçeksiz olsun, AD, DB üzerindeki karelerin toplamı orta değer, ama AD, DB dikdörtgeninin iki katı rasyonel olsun.

O zaman, AC, CB dikdörtgeninin iki katının, AD, DB dikdörtgeninin iki katından farkı, AD, DB üzerindeki karelerin, AC, CB üzerindeki karelerden farkına eşit olduğundan,

ve bu arada AC, CB dikdörtgeninin iki katının AD, DB dikdörtgeninin iki katından farkı rasyonel bir alan olduğundan,

AD, DB üzerindeki karelerin, AC, CB üzerindeki karelerden farkı da, kendileri orta değer olmalarına rağmen, rasyonel olur: bu olamaz. **[X.26]**

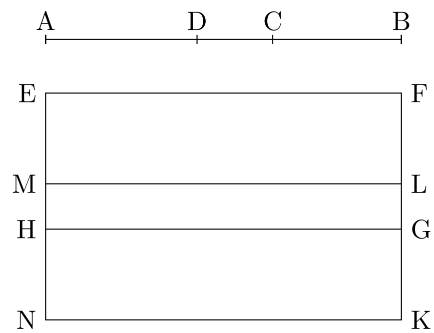
Öyleyse rasyonel artı orta alan kenarı bir doğru farklı noktalarda bölünemez;

öyleyse tek bir noktada bölünebilir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

47. Önerme:

İki orta alan toplamı kenarı bir doğru onu oluşturan parçalara ancak tek bir noktada bölünebilir.



AB doğrusu C noktasında bölünsün öyle ki AC, CB karede eşölçeksiz olsun, AC, CB üzerindeki karelerin toplamı orta değer olsun, ve AC, CB dikdörtgeni hem orta değer olsun hem de AC, CB üzerindeki karelerin toplamıyla eşölçeksiz olsun;

diyorum ki, AB doğrusu verilen koşulları sağlayacak şekilde başka bir noktada bölünemez.

Çünkü, eğer mümkünse, D noktasında bölünsün öyle ki AC, BD ile elbette aynı olmasın, ama AC daha büyük olsun;

Bir EF rasyonel doğrusu alınsın,

ve EF üzerine, AC, CB üzerindeki karelere eşit EG dikdörtgeni,

ve AC, CB dikdörtgeninin iki katına eşit HK dikdörtgeni çizilsin;

böylece EK'nin tamamı, AB üzerindeki kareye eşit olur. **[II.4]**

Yine, AD, DB üzerindeki karelere eşit EL dikdörtgeni EF üzerine çizilsin;

bu durumda kalan, yani AD, DB dikdörtgeninin iki katı, MK'ye eşit olur.

Ve, varsayım gereği, AC, CB üzerindeki karelerin toplamı orta değer olduğundan, EG orta değerdir.

Ve rasyonel EF doğrusu üzerine çizilmiştir;

öyleyse HE rasyoneldir ve EF ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Aynı nedenden dolayı, HN de rasyonel ve EF ile eşölçeksizdir.

Ve AC, CB üzerindeki karelerin toplamı, AC, CB dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksiz olduğundan,

EG de GN ile eşölçeksizdir,

bu durumda EH de HN ile eşölçeksiz olur. **[VI.1, X.11]**

Ve bunlar rasyoneldir;

öyleyse EH, HN, yalnızca karede eşölçekli rasyonel iki doğrudur;

bu durumda EN doğrusu H'de bölünmüş iki parçalı doğrudur. **[X.36]**

Benzer şekilde M'de de bölündüğünü kanıtlayabiliriz.

Ama EH, MN'ye eşit değildir;

bu durumda iki parçalı doğru iki farklı noktada bölünmüş olur; bu olamaz. **[X.42]**

Öyleyse iki orta alan toplamı kenarı olan bir doğru iki farklı noktada bölünemez;

öyleyse tek bir noktada bölünebilir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

3. Tanımlar II

5 Rasyonel bir doğru ve parçalarına bölünmüş iki parçalı bir doğru verildiğinde, uzun parçanın üzerindeki karenin küçük parçanın üzerindeki kareden farkı, uzun parçayla uzunlukta eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadarken, eğer uzun parça baştaki rasyonel doğruyla uzunlukta eşölçekliyse, bu iki parçalı doğruya **birinci türden iki parçalı** doğru densin;

6 ama eğer kısa parça baştaki verilen rasyonel doğruyla uzunlukta eşölçekliyse, bu iki parçalı doğruya **ikinci türden iki parçalı** doğru densin;

7 ve eğer hiç biri baştaki rasyonel doğruyla uzunlukta eşölçekli değilse, bu iki parçalı doğruya **üçüncü türden iki parçalı** doğru densin.

8 Ve yine, uzun parçanın üzerindeki karenin küçük parçanın üzerindeki kareden farkı, uzun parçayla uzunlukta eşölçeksiz bir doğru

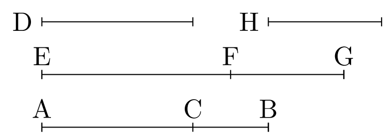
üzerindeki kare kadarken, eğer uzun parça baştaki rasyonel doğruyla uzunlukta eşölçekliyse, bu iki parçalı doğruya **dördüncü türden iki parçalı** doğru densin;

9 eğer kısa olansa **beşinci türden iki parçalı**;

10 ve hiç biriyse **altıncı türden iki parçalı**.

4. Önermeler

48. Önerme:
Birinci türden iki parçalı doğru çizmenin yolu.



AC, CB gibi iki sayı alınsın öyle ki toplam AB'nin BC'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olsun, ama CA'ya oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmasın; **[YÖ. 1, X.28]**

herhangi bir rasyonel doğru D alınsın, ve EF, D ile uzunlukta eşölçekli olsun.

Bu durumda EF de rasyonel olur.

BA sayısının AC'ye oranının, EF üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye eşit olması sağlansın. **[DS. X.6]**

Ama AB'nin AC'ye oranı, bir sayının bir sayıya oranıdır; öyleyse EF üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranı, bir sayının bir sayıya oranıdır,

böylece EF üzerindeki kare FG üzerindeki kareyle eşölçeklidir. **[X.6]**

Ve EF rasyoneldir; öyleyse FG de rasyoneldir.

Ve, BA'nın AC'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmadığından, EF üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmaz;

bu durumda EF, FG ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

Öyleyse EF, FG yalnızca karede eşölçekli rasyonel sayılardır; bu durumda EG iki parçalıdır. **[X.36]**

Diyorum ki aynı zamanda birinci türden iki parçalıdır.

Çünkü, BA sayısının AC'ye oranı, EF üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan, ve bu arada BA, AC'den büyük olsuğundan,

EF üzerindeki kare de FG üzerindeki kareden büyüktür.

O zaman, FG, H üzerindeki kareler EF üzerindeki kareye eşit olsun.

Şimdi, BA'nın AC'ye oranı, EF üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan,

çevrilmiş oranlar olarak, AB'nin BC'ye oranı, EF üzerindeki karenin H üzerindeki kareye oranına eşittir. **[DS. V.19]**

Ama AB'nin BC'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşittir;

öyleyse EF üzerindeki karenin H üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşittir.

Öyleyse EF, H ile uzunlukta eşölçeklidir; **[X.9]**

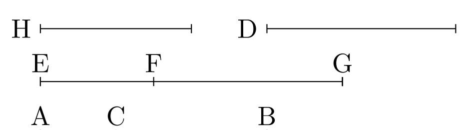
bu durumda EF üzerindeki kare, FG üzerindeki kareden, EF ile uzunlukta eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

Ve EF, FG rasyoneldir, ve EF, D ile uzunlukta eşölçeklidir.

Öyleyse EG birinci türden iki parçalı bir doğrudur.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

49. Önerme:
İkinci türden iki parçalı doğru çizmenin yolu.

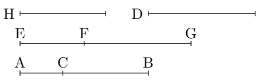


AC, CB gibi iki sayı alınsın öyle ki toplam AB'nin BC'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olsun, ama CA'ya oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmasın; **[YÖ. 1, X.28]**

herhangi bir rasyonel doğru D alınsın, ve EF, D ile uzunlukta eşölçekli olsun.

Bu durumda EF rasyonel olur.

CA sayısının AB'ye oranının, EF üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye eşit olması sağlansın. **[DS. X.6]**



böylece EF üzerindeki kare FG üzerindeki kareyle eşölçeklidir. **[X.6]**

öyleyse FG de rasyoneldir.

Şimdi, CA sayısının AB'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmadığından, EF üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmaz;

bu durumda EF, FG ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

Öyleyse EF, FG yalnızca karede eşölçekli rasyonel sayılardır; bu durumda EG iki parçalıdır. **[X.36]**

Sırada bunun aynı zamanda ikinci türden iki parçalı bir doğru olduğunu kanıtlamak var.

Çünkü, ters oran olarak, BA sayısının AC'ye oranı, GF üzerindeki karenin FE üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan, ve bu arada BA, AC'den büyük olduğundan,

GF üzerindeki kare de FE üzerindeki kareden büyüktür.

EF, H üzerindeki kareler GF üzerindeki kareye eşit olsun;

bu durumda, çevrilmiş oranlar olarak, AB'nin BC'ye oranı, FG üzerindeki karenin H üzerindeki kareye oranına eşit olur. **[DS. V.19]**

Ama AB'nin BC'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşittir;

öyleyse FG üzerindeki karenin H üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşittir.

Öyleyse FG, H ile uzunlukta eşölçeklidir; **[X.9]**

böylece FG üzerindeki kare, FE üzerindeki kareden, FG ile uzunlukta eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

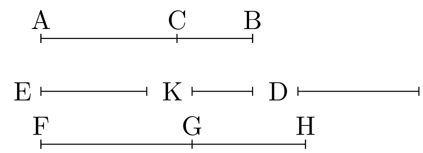
Ve FG, FE, yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır, ve küçük olan EF, başta berilen D doğrusuyla uzunlukta eşölçeklidir.

Öyleyse EG ikinci türden iki parçalı bir doğrudur.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

50. Önerme:

Üçüncü türden iki parçalı doğru çizmenin yolu.



AC, CB gibi iki sayı alınsın öyle ki toplam AB'nin BC'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olsun, ama CA'ya oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmasın.

Kare olmayan herhangi bir D sayısı alınsın, ve ne BA'ya ne de AC'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olsun.

Herhangi bir rasyonel E doğrusu alınsın, ve D'nin AB'ye oranının, E üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranına eşit olması sağlansın; **[DS. X.6]**

bu durumda E üzerindeki kare, FG üzerindeki kareyle eşölçekli olur. **[X.6]**

Ve E rasyoneldir; öyleyse FG de rasyoneldir.

Ve, D'nin AB'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmadığından, E üzerindeki karenin, FG üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

öyleyse E, FG ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

Sonra, BA'nın AC'ye oranının, FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranının eşit olması sağlansın; **[DS. X.6]**

bu durumda FG üzerindeki kare, GH üzerindeki kareyle eşölçekli olur. **[X.6]**

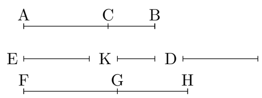
Ama FG rasyoneldir; öyleyse GH de rasyoneldir.

Ve, BA'nın AC'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmadığından, FG üzerindeki karenin, HG üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

öyleyse FG, HG ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

Öyleyse FG, GH doğruları, yalnızca karede eşölçekli olan rasyonel doğrulardır; bu durumda FH iki parçalıdır. **[X.36]**

Şimdi de diyorum ki üçüncü türden iki parçalı bir doğrudur.



Çünkü, D'nin AB'ye oranı, E üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan, ve BA'nın AC'ye oranı, FG üzerindeki karenin, GH üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan,

eşit dış oranlar olarak, D'nin AC'ye oranı, E üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranına eşittir. **[V.22]**

Ama D'nin AC'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir; öyleyse E üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

bu durumda E, GH ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

Ve, BA'nın AC'ye oranı, FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan, FG üzerindeki kare, GH üzerindeki kareden büyüktür.

O zaman, GH, K üzerindeki kareler FG üzerindeki kareye eşit olsun;

bu durumda çevrilmiş oranlar olarak, AB'nin BC'ye oranı, FG üzerindeki karenin K üzerindeki kareye oranına eşit olur. **[DS. V.19]**

Ama AB'nin BC'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşittir; öyleyse FG üzerindeki karenin K üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşittir;

bu durumda FG, K ile uzunlukta eşölçekli olur. **[X.9]**

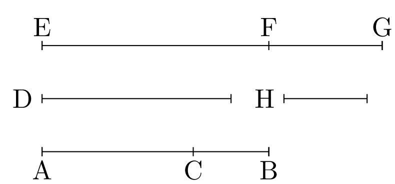
Öyleyse, FG üzerindeki kare, GH üzerindeki kareden, FG ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

Ve FG, GH, hiçbiri uzunlukta E ile eşölçekli olmayan, yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır.

Öyleyse FH üçüncü türden iki parçalı doğrudur.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

51. Önerme:
Dördüncü türden iki parçalı doğru çizmenin yolu.



AC, CB gibi iki sayı alınsın öyle ki AB'nin ne BC'ye oranı ne de AC'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olsun.

Rasyonel bir D doğrusu alınsın, ve EF, D ile uzunlukta eşölçekli olsun; bu durumda EF de rasyonel olur.

BA'nın AC'ye oranının, EF üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye eşit olması sağlansın. **[DS. X6]**

öyleyse EF üzerindeki kare, FG üzerindeki kareyle eşölçeklidir; **[X.6]**

bu durumda FG de rasyonel olur.

Şimdi, BA'nın AC'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmadığından, EF üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

öyleyse EF, FG ile eşölçeksizdir. **[X.9]**

Öyleyse, EF, FG yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır; böylece EG iki parçalıdır.

Şimdi de diyorum ki dördüncü türden iki parçalı bir doğrudur.

Çünkü, BA'nın AC'ye oranı, EF üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan, EF üzerindeki kare FG zerindeki kareden büyüktür.

O zaman, FG, H üzerindeki kareler, EF üzerindeki kareye eşit olsun;

bu durumda çevrilmiş oranlar olarak, AB'nin BC'ye oranı, EF üzerindeki karenin H üzerindeki kareye oranına eşit olur. **[DS. V.19]**

Ama AB'nin BC'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

öyleyse EF üzerindeki karenin H üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir.

Bu durumda EF, H ile eşölçeksiz olur. **[X.9]**

öyleyse EF üzerindeki kare, GF üzerindeki kareden, EF ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

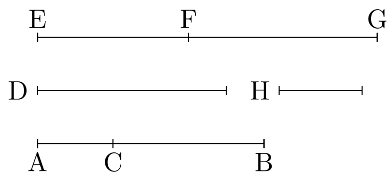
Ve EF, FG, yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır, ve EF, D ile uzunlukta eşölçeklidir.

Öyleyse EG dördüncü türden iki parçalı bir doğrudur.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

52. Önerme:

Beşinci türden iki parçalı doğru çizmenin yolu.



AC, CB gibi iki sayı alınsın öyle ki AB'nin hiçbirine oranı bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmasın;

Rasyonel bir D doğrusu alınsın, ve EF, D ile eşölçekli olsun; bu durumda EF rasyonel olur.

CA'nın AB'ye oranının, EF üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranına eşit olması sağlansın. **[DS. X.6]**

Ama CA'nın AB'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir; öyleyse EF üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir.

Öyleyse EF, FG doğruları, yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur; **[X.9]**

Bu durumda EG iki parçalı olur. **[X.36]**

Şimdi de diyorum ki, beşinci türden iki parçalı doğrudur.

Çünkü, CA'nın AB'ye oranı, EF üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan, ters oranlar olarak, BA'nın AC'ye oranı, FG üzerindeki karenin FE üzerindeki kareye oranına eşit olur;

bu durumda GF üzerindeki kare FE üzerindeki kareden büyük olur.

O zaman, EF, H üzerindeki kareler GF üzerindeki kareye eşit olsun;

bu durumda çevrilmiş oranlar olarak, AB sayısının BC'ye oranı, GF üzerindeki karenin H üzerindeki kareye oranına eşit olur. **[DS. V.19]**

Ama AB'nin BC'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

öyleyse FG üzerindeki karenin H üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir.

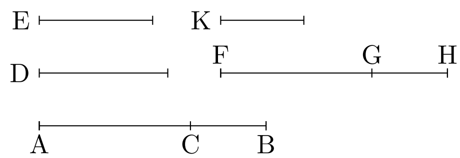
Demek ki FG, H ile eşölçeksizdir; **[X.9]** böylece FG üzerindeki kare FE üzerindeki kareden, FG ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

Ve GF, FE doğruları, yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır, ve küçük parça EF, başta alınan rasyonel doğru D ile uzunlukta eşölçeklidir.

Öyleyse EG beşinci türden iki parçalı doğrudur.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

53. Önerme:
Altıncı türden iki parçalı doğru çizmenin yolu.



AC, CB gibi iki sayı alınsın öyle ki AB'nin hiçbirine oranı bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmasın;

ve kare olmayan bir başka sayı D olsun öyle ki onun da BA, AC'ye oranları bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmasın.

Herhangi bir rasyonel E doğrusu alınsın, ve D'nin AB'ye oranının, E üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye eşit olması sağlansın; **[DS. X.6]**

bu durumda E üzerindeki kare FG üzerindeki kareyle eşölçeklidir. **[X.6]**

Ve E rasyoneldir; öyleyse FG de rasyoneldir.

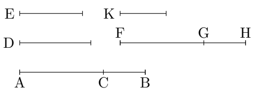
Şimdi, D'nin AB'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmadığından, E üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmaz;

bu durumda E, FG ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

Şimdi de, BA'nın AC'ye oranının, FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranına eşit olması sağlansın. **[DS. X.6]**

Öyleyse FG üzerindeki kare, HG üzerindeki kareyle eşölçeklidir. **[X.6]**

Bu durumda HG üzerindeki kare rasyonel olur; demek ki HG rasyoneldir.



Ve, BA’nın AC’ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmadığından, FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmaz;

bu durumda FG, GH ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

Öyleyse FG, GH, yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır; bu durumda FH iki parçalı olur. **[X.36]**

Sırada bunun altıncı türden iki parçalı bir doğru olduğunun kanıtlanması var.

Çünkü, D’nin AB’ye oranı, E üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan, ve aynı zamanda BA’nın AC’ye oranı, FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan,

eşit dış oranlar olarak, D’nin AC’ye oranı, E üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranına eşittir. **[V.22]**

Ama D’nin AC’ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

bu durumda E üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

öyleyse E, GH ile eşölçeksizdir. **[X.9]**

Ama FG ile eşölçeksiz olduğu da kanıtlanmıştı; öyleyse FG, GH doğrularının her biri E ile uzunlukta eşölçeksizdir.

Ve BA’nın AC’ye oranı, FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan, FG üzerindeki kare GH üzerindeki kareden büyüktür.

O zaman, GH, K üzerindeki kareler FG üzerindeki kareye eşit olsun;

bu durumda, çevrilmiş oranlar olarak, AB’nin BC’ye oranı, FG üzerindeki karenin K üzerindeki kareye oranına eşit olur. **[DS. V.19]**

Ama AB’nin BC’ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir; bu yüzden FG üzerindeki karenin K üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmaz.

Öyleyse FG, K ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]** bu durumda FG üzerindeki kare, GH üzerindeki kareden, FG ile uzunlukta eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olur.

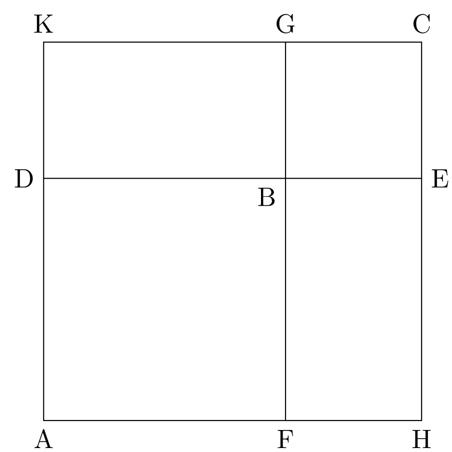
Ve FG, GH doğruları, yalnızca karede eşölçekli olan, ve hiçbiri başta alınan rasyonel E doğrusuyla eşölçekli olmayan iki rasyonel doğrudur.

Öyleyse FH altıncı türden iki parçalı bir doğrudur.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

Yardımcı Önerme: AB ve BC kareleri DB ve BE kenarları aynı doğru üzerinde olacak şekilde yerleştirilmiş olsunlar; dolayısıyla FB ve BG kenarları da aynı doğru üzerinde olurlar. AC paralelkenarını tamamlansın;

diyorum ki, AC bir karedir, DG dikdörtgeni AB, BC arasında orta orantılıdır, ayrıca DC de AC, CB arasında orta orantılıdır.



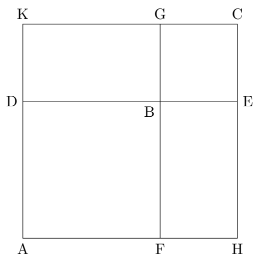
Çünkü, DB, BF'ye eşit olduğundan, ve BE de BG'ye, DE'nin tamamı, FG'nin tamamına eşit olur.

Ama DE doğrusu, AH, KC doğrularının her birine eşittir, ve FG de AK, HC doğrularının her birine eşittir; **[I.34]**

öyleyse AH, KC doğrularının her biri AK, HC doğrularının her birine eşittir.

Bu durumda AC paralelkenarı eşkenardır.

Ama aynı zamanda dikdörtgendir de; öyleyse karedir.



Ve FB'nin BG'ye oranı, DB'nin BE'ye oranına eşit olduğundan, ve bu arada FB'nin BG'ye oranı, AB'nin DG'ye oranına eşit olduğundan, ve DB'nin BE'ye oranı, DG'nin BC'ye oranına eşit olduğundan, **[VI.1]**

AB'nin DG'ye oranı, DG'nin BC'ye oranına eşittir. **[V.11]**

Öyleyse DG dikdörtgeni AB, BC arasında orta orantılıdır.

Şimdi de diyorum ki, DC de AC, CB arasında orta orantılıdır.

Çünkü, AD'nin DK'ye oranı, KG'nin GC'ye oranına, bunlar karşılıklı eşit olduklarından, eşittir,

ve birleşik oranlar olarak AK'nin KD'ye oranı, KC'nin GC'ye oranına eşittir, **[V.18]**

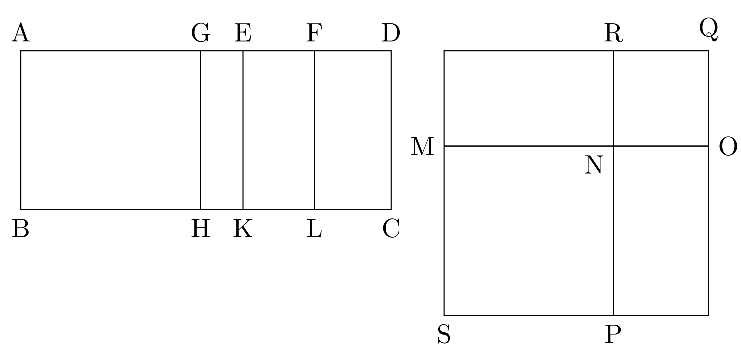
bu arada AK'nin KD'ye oranı, AC'nin CD'ye oranına, ve KC'nin CG'ye oranı, DC'nin CB'ye oranına eşittir, **[VI.1]**

bu durumda AC'nin DC'ye oranı, DC'nin BC'ye oranına eşit olur. **[V.11]**

Öyleyse DC dikdörtgeni, AC, CB arasında orta orantılıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu.

54. Önerme:
Rasyonel bir doğruyla birinci türden iki parçalı bir doğrunun oluşturduğu dikdörtgenin alanına eşit bir karenin kenarı iki parçalı denen irrasyonel bir doğrudur.



AC alanı AB rasyonel doğrusuyla birinci türden iki parçalı AD tarafından içerilsin;

diyorum ki, AC alanına eşit karenin kenarı iki parçalı denen irrasyonel doğrudur.

Çünkü, AD birinci türden iki parçalı doğru olduğundan, E'de parçalarına bölünmüş olsun, ve AE daha büyük parça olsun.

Açıktır ki, AE, ED doğruları yalnızca karede eşölçekli rasyonel iki doğrudur,

AE üzerindeki kare, ED üzerindeki kareden, AE ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür

ve AE, başta alınan AB doğrusuyla eşölçeklidir. **[Tan. X.5]**

ED doğrusu F'de ikiye bölünsün.

O zaman, AE üzerindeki kare, ED üzerindeki kareden, AE ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olduğundan,

daha büyük olan AE üzerine, daha küçük olanın üzerindeki karenin dörtte birine eşit, yani EF üzerindeki kareye eşit, ve AE'nin tamamı üzerine çizilen dikdörtgenden bir kare kadar eksik, bir paralelkenar çizilirse, AE eşölçekli parçalara ayrılır. **[X.17]**

O zaman, AE üzerine, EF üzerindeki kareye eşit, AG, GE dikdörtgeni çizilmiş olsun; bu durumda AG, EG ile uzunlukta eşölçeklidir.

G, E, F noktalarından, AB, CD doğrularından herhangi birine paralel GH, EK, FL çizilsin;

AH paralelkenarına eşit SN karesi, ve GK'ye eşit NQ karesi çizilsin, **[II.14]**

ve MN ile NO aynı doğru üzerinde olacak şekilde yerleştirilsinler;

bu durumda RN ile NP de aynı doğru üzerinde olur.

Ve SQ paralelkenarı tamamlansın; bu durumda SQ bir karedir. **[YÖ.]**

Şimdi, AG, GE dikdörtgeni EF üzerindeki kareye eşit olduğundan, AG'nin EF'ye oranı, FE'nin EG'ye oranına eşittir; **[VI.17]**

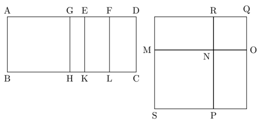
öyleyse AH'nin EL'ye oranı da EL'nin KG'ye oranına eşit olur; **[VI.1]**

bu durumda EL niceliği AH, GK arasında orta orantılı olur.

Ama AH eşittir SN, ve GK eşittir NQ;

öyleyse EL niceliği SN, NQ arasında orta orantılıdır.

Ama MR de aynı SN, NQ arasında orta orantılıdır; **[YÖ.]**



öyleyse EL, MR'ye eşittir, bu yüzden PO'ya da eşittir.

Ama AH, GK de SN, NQ'ya eşittir; öyleyse AC'nin tamamı SQ'nun tamamına eşittir, yani MO üzerindeki kareye;

bu durumda MO, AC'e eşit bir karenin kenarı olur.

Şimdi diyorum ki MO iki parçalıdır.

Çünkü, AG, GE ile eşölçekli olduğundan, AE doğrusu AG, GE doğrularının her biriyle eşölçeklidir. **[X.15]**

Ama varsayıma göre AE, AB ile de eşölçeklidir; öyleyse AG, GE de AB ile eşölçeklidir. **[X.12]**

Ve AB rasyoneldir; öyleyse AG, GE doğrularının her biri de rasyoneldir; bu durumda AH, GK dikdörtgenlerin her biri de rasyonel olur, **[X.19]**

ve AH, GK ile eşölçeklidir.

Ama AH eşittir SN, ve GK eşittir NQ;

öyleyse SN,NQ, yani MN, NO üzerindeki kareler, rasyonel ve eşölçeklidir.

Ve AE, ED ile uzunlukta eşölçeksiz olduğundan, ve bu arada AE, AG ile, ve DE de EF ile eşölçekli olduğundan,

AG, EF ile eşölçeksizdir, **[X.13]**

böylece AH de EL ile eşölçeksiz olur. **[VI.1, X.11]**

Ama AH eşittir SN, ve EL eşittir MR; öyleyse SN de MR ile eşölçeksizdir.

Ama, SN'nin MR'ye oranı, PN'nin NR'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse PN, NR ile eşölçeksizdir. **[X.11]**

Ama PN eşittir MN, ve NR eşittir NO; öyleyse MN, NO ile eşölçeksizdir.

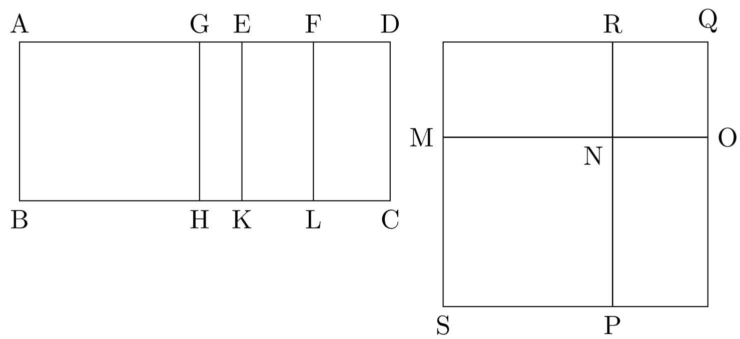
Ve MN üzerindeki kare NO üzerindeki kareyle eşölçeklidir, ve her ikisi de rasyoneldir; öyleyse MN, NO doğruları, yalnızca karede eşölçekli olan rasyonel doğrulardır.

Öyleyse MO iki parçalıdır, **[X.36]**

ve AC'ye eşit bir karenin kenarıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

55. Önerme:
Rasyonel bir doğruyla ikinci türden iki parçalı bir doğrunun oluşturduğu dikdörtgenin alanına eşit bir karenin kenarı birinci türden iki ortalı denen irrasyonel bir doğrudur.



$ABCD$ alanı, rasyonel doğru AB ve ikinci türden iki parçalı AD tarafından içerilsin;

diyorum ki, AC'ye eşit karenin kenarı birinci türden iki ortalı bir doğrudur.

Çünkü, AD ikinci türden iki ortalı bir doğru olduğundan, E'de parçalarına bölünsün, ve AE daha büyük parça olsun;

bu durumda AE, ED yalnızca karede eşölçekli olan rasyonel doğrulardır,

ve AE üzerindeki kare, ED üzerindeki kareden, AE ile eşölçekli olan bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür,

ve daha küçük olan parça ED, AB ile uzunlukta eşölçeklidir. **[Tan. X.6]**

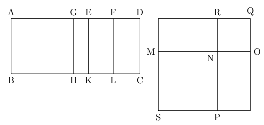
ED, F'de ikiye bölünsün,

AE üzerindeki dikdörtgenden bir kare kadar eksik ve EF üzerindeki kareye eşit AG, GE dikdörtgeni çizilsin;

bu durumda AG, GE ile uzunlukta eşölçekli olur. **[X.17]**

G, E, F'den, AB, CD'ye paralel GH, EK, FL çizilsin,

ve AH paralelkenarına eşit SN karesi, ve GK'ye eşit NQ karesi çizilsin,



ve MN ile NO aynı doğru üzerinde olacak şekilde yerleştirilsin; bu durumda RN de NP ile aynı doğru üzerinde olur.

SQ karesi tamamlansın.

Daha önce kanıtlananlardan açıktır ki MR niceliği SN, NQ arasında orta orantılıdır ve EL'ye eşittir, ve MO da AC'ye eşit karenin kenarıdır.

Şimdi MO'nun birinci türden iki ortalı bir doğru olduğu kanıtlanmalıdır.

AE, ED ile eşölçeksiz olduğundan, ve bu arada ED, AB ile eşölçekli olduğundan, AE, AB ile eşölçeksizdir. **[X.13]**

Ve AG, EG ile eşölçekli olduğundan, AE doğrusu AG, GE doğrularının her biriyle eşölçeklidir. **[X.15]**

Ama AE, AB ile eşölçeksizdir; öyleyse AG, GE de AB ile eşölçeksizdir. **[X.13]**

Öyleyse BA, AG ve BA, GE çiftleri yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğru çiftleridir;

bu yüzden AH, GK dikdörtgenlerinin her biri orta değerdir. **[X.21]**

Bundan dolayı SN, NQ karelerinin her biri orta değerdir.

Öyleyse MN, NO orta değerdir.

Ve AG, GE ile uzunlukta eşölçekli olduğundan, AH de GK ile eşölçeklidir, **[VI.1, X.11]**

yani SN, NQ ile eşölçeklidir, yani MN üzerindeki kare ile NO üzerindeki.

Ve, AE, ED ile uzunlukta eşölçeksiz olduğundan, ve bu arada AE, AG ile eşölçekli olduğundan, ve ED, EF ile eşölçekli olduğundan,

AG, EF ile eşölçeksizdir; **[X.13]**

böylece AH ile EL eşölçeksiz olur, yani SN ile MR eşölçeksizdir, yani PN ile NR, **[VI.1, X.11]**

yani MN, NO ile eşölçeksizdir.

Ama MN, NO'nun ikisinin de hem orta değer ve hem de karede eşölçekli oldukları kanıtlanmıştı;

öyleyse MN, NO doğruları yalnızca karede eşölçekli orta değer doğrulardır.

Şimdi de diyorum ki rasyonel bir dikdörtgen içerirler.

Çünkü, varsayım gereği DE doğrusu AB, EF doğrularının her biriyle eşölçekli olduğundan, EF de EK ile eşölçeklidir. **[X.12]**

Ve ikisi de rasyoneldir; bu durumda EL, yani MR rasyonel olur, **[X.19]**

ve MR de MN, NO dikdörtgenidir.

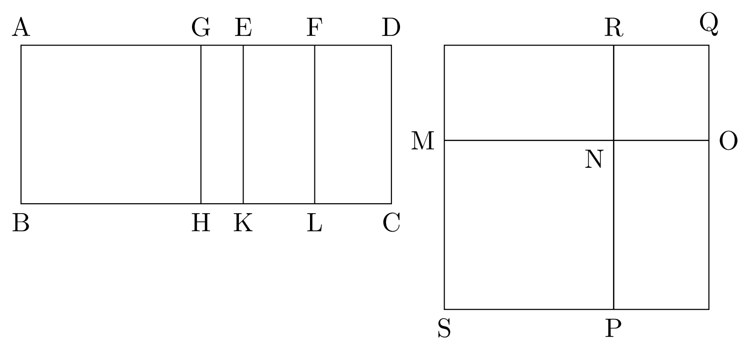
Ama, eğer yalnızca karede eşölçekli ve rasyonel bir dikdörtgen içeren iki orta değer doğru toplanırsa, toplam irrasyonel olur ve birinci türden iki ortalı doğru olur. **[X.37]**

Öyleyse MO birinci türden iki ortalı bir doğrudur.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

56. Önerme:

Rasyonel bir doğruyla üçüncü türden iki parçalı bir doğrunun oluşturduğu dikdörtgenin alanına eşit bir karenin kenarı ikinci türden iki ortalı denen irrasyonel bir doğrudur.

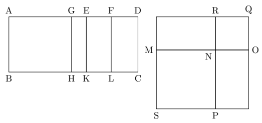


$ABCD$ alanı, AB rasyonel doğrusuyla, büyük parçası AE olacak şekilde E noktasında parçalarına ayrılmış üçüncü türden iki parçalı AD doğrusu tarafından içerilsin;

diyorum ki, AC'ye eşit karenin kenarı ikinci türden iki ortalı denen irrasyonel bir doğrudur.

Çünkü, daha önceki çizim yapılsın.

Şimdi, AD üçüncü türden iki parçalı bir doğru olduğundan, AE, ED doğruları yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır,



AE üzerindeki kare, ED üzerindeki kareden, AE ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür,

ve AE, ED parçalarının hiç biri AB ile eşölçekli değildir. **[Tan. X.7]**

O zaman, öncekine benzer şekilde MO'nun AC alanına eşit karenin kenarı olduğunu,

ve MN, NO'nun yalnızca karede eşölçekli orta değer doğrular olduğunu kanıtlayacağız;

böylece MO iki ortalı olur.

Sonra da ikinci türden iki ortalı doğru olduğu kanıtlanmalı.

DE, AB ile, yani EK ile, uzunlukta eşölçeksiz olduğundan,

ve DE, EF ile eşölçekli olduğundan,

EF, EK ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.13]**

Ve bunlar rasyoneldir;

bu durumda FE, EK yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrular olur.

Öyleyse EL, yani MR, orta değerdir, **[X.21]**

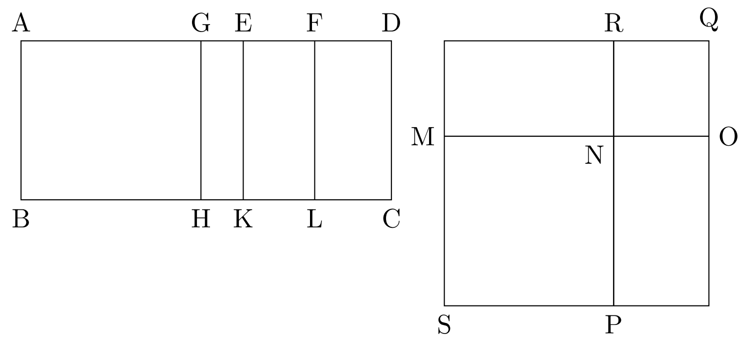
ve MN, NO doğruları tarafından içerilir; bu durumda MN, NO dikdörtgeni orta değerdir.

Öyleyse MO ikinci türden iki ortalı bir doğrudur. **[X.38]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

57. Önerme:

Rasyonel bir doğruyla dördüncü türden iki parçalı bir doğrunun oluşturduğu dikdörtgenin alanına eşit bir karenin kenarı üstün denen irrasyonel bir doğrudur.



AC alanı, AB rasyonel doğrusuyla, büyük parçası AE olacak şekilde E noktasında parçalarına ayrılmış dördüncü türden iki parçalı AD doğrusu tarafından içerilsin;

diyorum ki, AC'ye eşit karenin kenarı üstün denen irrasyonel bir doğrudur.

Çünkü, AD dördüncü türden iki parçalı doğru olduğundan, AE, ED yalnızca karede eşölçekli olan rasyonel doğrulardır,

AE üzerindeki kare, ED üzerindeki kareden, AE ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[Tan. X.8]**

DE doğrusu F'de ikiye bölünsün, ve AE üzerine, EF üzerindeki kareye eşit bir paralelkenar, AG, GE dikdörtgeni çizilsin;

bu durumda AG, GE ile uzunlukta eşölçeksiz olur. **[X.18]**

AB'ye paralel GH, EK, FL çizilsin, ve çizimin kalan kısmı önceden olduğu gibi olsun;

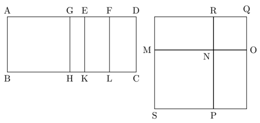
o zaman açıktır ki, MO doğrusu AC'ye eşit karenin kenarı olur.

Sırada MO'nun üstün denen irrasyonel bir doğru olduğunu kanıtlamak var.

AG, EG ile eşölçeksiz olduğundan, AH de GK ile eşölçeksizdir, yani SN, NQ ile; **[VI.1, X.11]**

öyleyse MN, NO karede eşölçeksizdir.

Ve AE, AB ile eşölçekli olduğundan, AK rasyoneldir; **[X.19]**



ve MN, NO üzerindeki karelere eşittir; öyleyse MN, NO üzerindeki karelerin toplamı da rasyoneldir.

Ve, DE uzunlukta AB ile eşölçeksiz olduğundan, yani EK ile, ve bu arada DE, EF ile eşölçekli olduğundan,

EF, EK ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.13]**

Öyleyse EK, EF doğruları yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır; bu durumda LE, yani MR, orta değerdir. **[X.21]**

Ve MN, NO doğruları tarafından içerilir; öyleyse MN, NO dikdörtgeni orta değerdir.

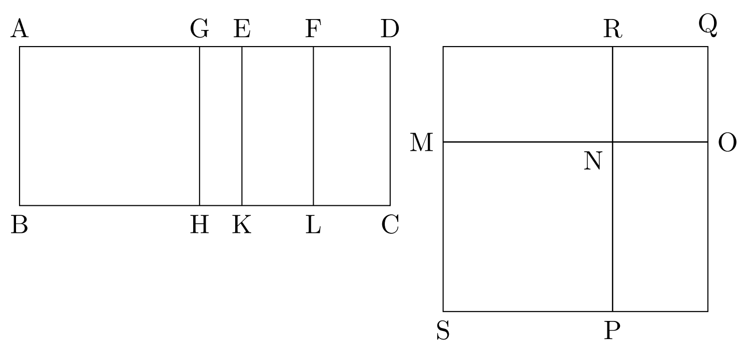
Ve MN, NO üzerindeki karelerin toplamı rasyoneldir, ve MN, NO karede eşölçeksizdir.

Ama, üzerlerindeki karelerin toplamı rasyonel ama içerdikleri dikdörtgen orta değer olan karede eşölçeksiz iki doğru birbirine eklenirse, toplam üstün denen irrasyonel doğrudur. **[X.39]**

Öyleyse MO doğrusu, AC'ye eşit karenin kenarı olan, ve üstün denen bir irrrasyonel doğrudur.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

58. Önerme:
Rasyonel bir doğruyla beşinci türden iki parçalı bir doğrunun oluşturduğu dikdörtgenin alanına eşit bir karenin kenarı rasyonel artı orta alan kenarı denen irrasyonel bir doğrudur.



AC alanı, AB rasyonel doğrusuyla, büyük parçası AE olacak şekilde E noktasında parçalarına ayrılmış beşinci türden iki parçalı AD doğrusu tarafından içerilsin;

diyorum ki, AC'ye eşit karenin kenarı rasyonel artı orta alan kenarı denen irrasyonel bir doğrudur.

Çünkü, önceki çizim yapılsın; o zaman açıktır ki, MO doğrusu ACye eşit karenin kenarıdır.

O zaman, MO'nun rasyonel artı orta alan kenarı olduğu kanıtlanacaktır.

AG, GE ile eşölçeksiz olduğundan, **[X.18]**

AH de HE ile eşölçeksizdir, **[VI.1, X.11]**

yani, MN üzerindeki kare NO üzerindeki kareyle;

bu durumda MN, NO karede eşölçeksiz olur.

Ve AD beşinci türden iki parçalı bir doğru olduğundan, ve ED de küçük parça olduğundan, ED, AB ile uzunlukta eşölçeklidir. **[Tan. X.9]**

Ama AE, ED ile eşölçeksizdir; bu durumda AB de AE ile eşölçeksiz olur. **[X.13]**

Öyleyse AK, yani MN, NO üzerindeki karelerin toplamı, orta değerdir. **[X.21]**

Ve DE, AB ile uzunlukta eşölçekli olduğundan, yani EK ile, ve bu arada DE, EF ile eşölçekli olduğundan, EF de EK ile eşölçeklidir. **[X.12]**

Ve EK rasyoneldir; öyleyse EL, yani MR, yani MN, NO dikdörtgeni de rasyoneldir. **[X.19]**

Bu durumda MN, NO doğruları üzerlerindeki karelerin toplamı orta değer, ama içerdikleri dikdörtgen rasyonel olan karede eşölçeksiz iki doğru olur.

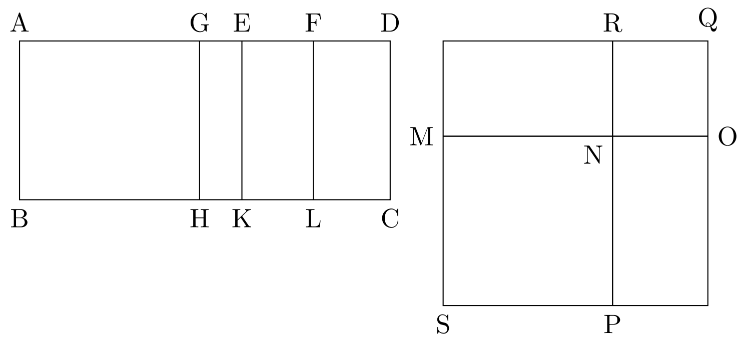
Öyleyse MO, rasyonel artı orta alan kenarıdır, **[X.40]**

ve AC'ye eşit karenin kenarıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

59. Önerme:

Rasyonel bir doğruyla altıncı türden iki parçalı bir doğrunun oluşturduğu dikdörtgenin alanına eşit bir karenin kenarı iki orta alan toplamı kenarı denen irrasyonel bir doğrudur.



$ABCD$ alanı, AB rasyonel doğrusuyla, büyük parçası AE olacak şekilde E noktasında parçalarına ayrılmış altıncı türden iki parçalı AD doğrusu tarafından içerilsin;

diyorum ki, AC'ye eşit karenin kenarı iki orta alan toplamı kenarı denen irrasyonel bir doğrudur.

Çünkü, daha önceki çizim yapılsın.

O zaman açıktır ki, MO doğrusu AC'ye eşit karenin kenarıdır, ve MN, NO ile karede eşölçeksizdir.

Şimdi, EA, AB ile eşölçeksiz olduğundan, EA, AB yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır;

öyleyse AK, yani MN, NO üzerindeki karelerin toplamı, orta değerdir. **[X.21]**

Yine, ED, AB ile uzunlukta eşölçeksiz olduğundan, FE de EK ile eşölçeksizdir; **[X.13]**

öyleyse FE, EK yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır;

bu durumda EL, yani MR, yani MN, NO dikdörtgeni, orta değerdir. **[X.21]**

Ve AE, EF ile eşölçeksiz olduğundan, AK de EL ile eşölçeksizdir. **[VI.1, X.11]**

Ama AK alanı, MN, NO üzerindeki karelerin toplamıdır, ve EL de MN, NO dikdörtgenidir;

öyleyse MN , NO üzerindeki karelerin toplamı, MN, NO dikdörtgeniyle eşölçeksizdir.

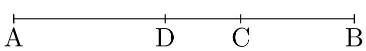
Ve her ikisi de orta değerdir, ve MN, NO karede eşölçeksizdir.

Öyleyse MO iki orta alan toplamı kenarıdır, **[X.41]**

ve ACye eşit karenin kenarıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

Yardımcı Önerme: Bir doğru eşit olmayan iki parçaya bölünürse, bu parçalar üzerindeki karelerin toplamı bu iki parçanın içerdiği dikdörtgenin iki katından büyüktür.



AB bir doğru olsun ve C'de eşit olmayan iki parçaya bölünsün, ve AC daha büyük parça olsun;

diyorum ki, AC, CB üzerindeki kareler AC, CB dikdörtgeninin iki katından büyüktür.

Çünkü, AB doğrusu D'de ikiye bölünsün.

O zaman, bir doğru D'de eşit parçalara, ve C'de eşit olmayan parçalara bölündüğünden, AC, CB dikdörtgeni, CD üzerindeki kareyle birlikte, AD üzerindeki kareye eşit olur, **[II.5]**

böylece AC, CB dikdörtgeni AD üzerindeki kareden küçük olur;

öyleyse AC, CB dikdörtgeninin iki katı, AD üzerindeki karenin iki katından küçüktür.

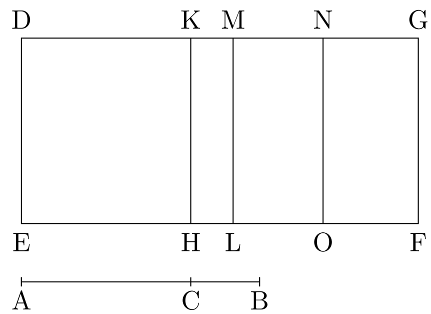
Ama AC, CB üzerindeki kareler, AD, DC üzerindeki karelerin iki katıdır; **[II.9]**

öyleyse AC, CB üzerindeki kareler, AC, CB dikdörtgeninin iki katından büyüktür.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

60. Önerme:

İki parçalı bir doğru üzerindeki kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizilirse, oluşan genişlik birinci türden iki parçalı bir doğrudur.



AB doğrusu, uzun parçası AC olacak şekilde C'de parçalarına bölünmüş iki parçalı bir doğru olsun;

Bir DE rasyonel doğrusu alınsın, ve AB üzerindeki kareye eşit $DEFG$ dikdörtgeni DE üzerine çizilsin, ve genişlik olarak DG oluşmuş olsun;

diyorum ki, DG birinci türden iki parçalı bir doğrudur.

Çünkü, DE üzerine AC üzerindeki kareye eşit DH dikdörtgeni, ve BC üzerindeki kareye eşit KL çizilsin;

bu durumda kalan, AC, CB dikdörtgeninin iki katı, MF'ye eşit olur.

MF doğrusu N'de ikiye bölünsün, ve NO doğrusu ML'ye veya GF'ye paralel çizilsin.

Bu durumda MO, NF dikdörtgenlerinin her biri AC, CB dikdörtgenine eşit olur.

Şimdi, AB doğrusu C'de parçalarına bölünmüş iki parçalı olduğundan, AC, CB yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur; **[X.36]**

öyleyse AC, CB üzerindeki kareler rasyoneldir ve birbirleriyle eşölçeklidir, böylece AC, CB üzerindeki karelerin toplamı da rasyonel olur. **[X.15]**

Ve bu, DL'ye eşittir; öyleyse DL rasyoneldir.

Ve DE rasyonel doğrusu üzerine çizilmiştir; öyleyse DM rasyoneldir ve DE ile uzunlukta eşölçeklidir. **[X.20]**

Yine, AC, CB yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğru olduğundan, AC, CB dikdörtgeninin iki katı, yani MF, orta değerdir. **[X.21]**

Ve ML rasyonel doğrusu üzerine çizilmiştir; öyleyse MG de rasyoneldir ve ML ile, yani DE ile, uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Ama MD de rasyoneldir ve DE ile uzunlukta eşölçeklidir; öyleyse DM, MG ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.13]**

Ve bunlar rasyoneldir;

öyleyse DM, MG rasyonel ve yalnızca karede eşölçeklidir; bu durumda DG iki parçalı olur. **[X.36]**

O zaman, bir de birinci türden iki parçalı olduğu kanıtlanmalıdır.

AC, CB dikdörtgeni, AC, CB üzerindeki kareler arasında orta orantılı olduğundan, **[YÖ. X.53]**

MO da DH, KL arasında orta orantılıdır.

Öyleyse, DH'nin MO'ya oranı, MO'nun KL'ye oranına eşittir,

yani DK'nin MN'ye oranı, MN'nin MK'ye oranına eşit olur; **[VI.1]**

bu durumda DK, KM dikdörtgeni MN üzerindeki kareye eşittir. **[VI.17]**

Ve AC üzerindeki kare, CB üzerindeki kareyle eşölçekli olduğundan, DH de KL ile eşölçeklidir,

böylece DK de KM ile eşölçekli olur. **[VI.1, X.11]**

Ve AC, CB üzerindeki kareler, AC, CB dikdörtgeninin iki katından büyük olduğundan, **[YÖ.]**

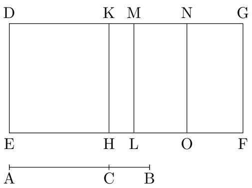
DL de MF'den büyüktür, böylece DM de MG'den büyük olur. **[VI.1]**

Ve DK, KM dikdörtgeni, MN üzerindeki kareye eşittir, yani MG üzerindeki karenin dörtte birine,

ve DK de KM ile eşölçeklidir.

Ama, eğer eşit olmayan iki doğru varsa, ve büyük olanı üzerine küçük olanı üzerindeki karenin dörtte birine eşit bir paralelkenar, bir kare şekil kadar eksik olarak, çizilirse, ve bu onu eşölçekli parçalara bölerse, büyüğü üzerindeki kare, küçüğü üzerindeki kareden, büyüğüyle eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olur; **[X.17]**

öyleyse DM üzerindeki kare, MG üzerindeki kareden, DM ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.



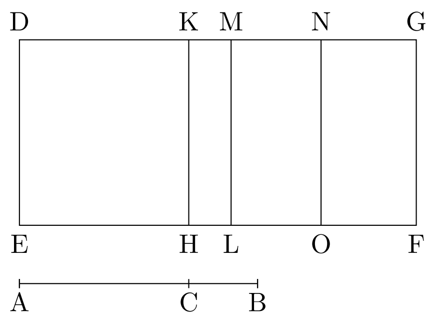
Ve DM, MG rasyoneldir,

ve büyük olan parça DM, verilen rasyonel doğru DE ile uzunlukta eşölçeklidir.

Öyleyse DG birinci türden iki parçalı bir doğrudur. **[Tan. X.5]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

61. Önerme:
Birinci türden iki ortalı bir doğru üzerindeki kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizilirse, oluşan genişlik ikinci türden iki parçalı bir doğrudur.



AB doğrusu, uzun parçası AC olacak şekilde C'de parçalarına bölünmüş birinci türden iki ortalı bir doğru olsun;

Bir DE rasyonel doğrusu alınsın, ve AB üzerindeki kareye eşit DF paralelkenarı DE üzerine çizilsin, ve genişlik olarak DG oluşmuş olsun;

diyorum ki, DG ikinci türden iki parçalı bir doğrudur.

Çünkü, önceki çizim yapılsın.

Sonra, AB doğrusu C'de bölünmüş birinci türden iki ortalı olduğundan, AC, CB yalnızca karede eşölçekli orta değer doğrulardır, ve rasyonel bir dikdörtgen içerirler, **[X.37]**

böylece AC, CB üzerindeki kareler de orta değer olur. **[X.21]**

Öyleyse DL orta değerdir. **[X.15, DS. X.23]**

Ve rasyonel doğru DE üzerine çizilmiştir; öyleyse MD rasyoneldir ve DE ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Yine, AC, CB dikdörtgeninin iki katı rasyonel olduğundan, MF de rasyoneldir.

Ve rasyonel ML dodğrusu üzerine çizilmiştir; öyleyse MG de rasyoneldir ve ML ile, yani DE ile, uzunlukta eşölçeklidir; **[X.20]**

öyleyse DM, MG ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.13]**

Ve bunlar rasyoneldir;

öyleyse DM, MG yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır;

bu durumda DG iki parçalı olur. **[X.36]**

O zaman, bir de ikinci türden iki parçalı olduğu kanıtlanmalıdır.

Çünkü, AC, CB üzerindeki kareler AC, CB dikdörtgeninin iki katından büyük olduğundan, DL de MF'den büyüktür,

böylece DM de MG'den büyük olur. **[VI.1]**

Ve AC üzerindeki kare, CB üzerindeki kareyle eşölçekli olduğundan, DH de KL ile eşölçeklidir,

bu yüzden DK de KM ile eşölçekli olur. **[VI.1, X.11]**

Ve DK, KM dikdörtgeni, MN üzerindeki kareye eşittir; öyleyse DM üzerindeki kare, MG üzerindeki kareden, DM ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[X.17]**

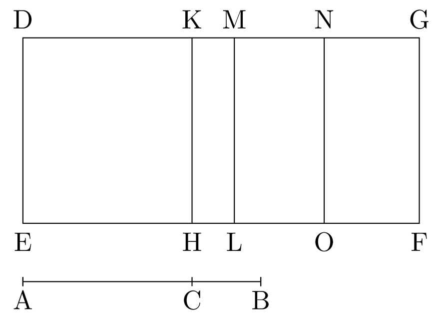
Ve MG, DE ile uzunlukta eşölçeklidir.

Öyleyse DG ikinci türden iki parçalı doğrudur. **[Tan. X.6]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

62. Önerme:

İkinci türden iki ortalı bir doğru üzerindeki kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizilirse, oluşan genişlik üçüncü türden iki parçalı bir doğrudur.



AB doğrusu, uzun parçası AC olacak şekilde C'de parçalarına bölünmüş ikinci türden iki ortalı bir doğru olsun;

Bir DE rasyonel doğrusu alınsın, ve AB üzerindeki kareye eşit DF paralelkenarı DE üzerine çizilsin, ve genişlik olarak DG oluşmuş olsun;

diyorum ki, DG üçüncü türden iki parçalı bir doğrudur.

Çünkü, önceki çizim yapılsın.

Sonra, AB doğrusu C'de bölünmüş ikinci türden iki ortalı olduğundan, AC, CB yalnızca karede eşölçekli orta değer doğrulardır, **[X.38]**

ve bu yüzden AC, CB üzerindeki karelerin toplamı orta değerdir. **[X.15, DS. X.23]**

Ve DL'ye eşittir; öyleyse DL orta değerdir.

Ve DE rasyonel doğrusu üzerine çizilmiştir; bu durumda MD de rasyoneldir ve DE ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Aynı nedenden dolayı, MG de rasyoneldir ve ML ile, yani DE ile, uzunlukta eşölçeksizdir,

öyleyse DM, MG doğrularının her biri rasyoneldir ve DE ile uzunlukta eşölçeksizdir.

Ve AC, CB ile uzunlukta eşölçeksiz olduğundan, ve AC'nin CB'ye oranı, AC üzerindeki karenin AC, CB dikdörtgenine oranına eşit olduğundan,

AC üzerindeki kare de AC, CB dikdörtgeniyle eşölçeksizdir. **[X.11]**

Bu nedenle AC, CB üzerindeki karelerin toplamı, AC, CB dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksizdir, **[X.12, X.13]**

yani DL, MF ile eşölçeksizdir,

böylece DM de MG ile eşölçeksiz olur. **[VI.1, X.11]**

Ve bunlar rasyoneldir;

öyleyse DG iki parçalıdır. **[X.36]**

Şimdi de üçüncü türden iki parçalı olduğu kanıtlanmalıdır.

Az öncekine benzer yolla DM'nin MG'den büyük olduğu, ve DK'nin KM ile eşölçekli olduğu sonucuna varabiliriz.

Ve DK, KM dikdörtgeni, MN üzerindeki kareye eşittir;

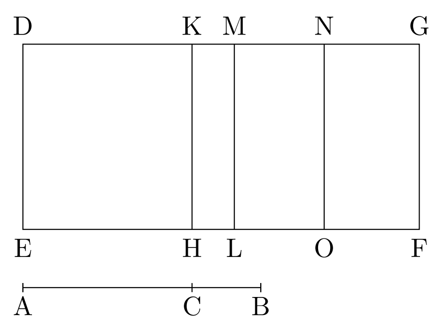
öyleyse DM üzerindeki kare, MG üzerindeki kareden, DM ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

Ve DM, MG doğrularının hiç biri DE ile eşölçekli değildir.

Öyleyse DG üçüncü türden iki parçalı bir doğrudur. **[Tan. X.7]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

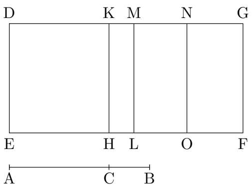
63. Önerme:
Üstün bir doğru üzerindeki kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizilirse, oluşan genişlik dördüncü türden iki parçalı bir doğrudur.



AB üstün bir doğru olsun ve büyük parçası AC olacak şekilde C'de bölünmüş olsun;

bir DE rasyonel doğrusu alınsın, ve DE üzerine AB üzerindeki kareye eşit DF paralelkenarı çizilsin ve DG genişliği oluşmuş olsun;

diyorum ki, DG dördüncü türden iki parçalı bir doğrudur.



Önceki çizim yapılsın.

O zaman, AB üstün bir doğru olduğundan ve C'de bölündüğünden, AC, CB doğruları karede eşölçeksizdir, üzerlerindeki karelerin toplamı rasyonel ama içerdikleri dikdörtgen orta değerdir. **[X.39]**

Öyleyse, AC, CB üzerindeki karelerin toplamı rasyonel olduğundan, DL rasyoneldir;

bu durumda DM de rasyonel olur ve DE ile uzunlukta eşölçeklidir. **[X.20]**

Yine, AC, CB dikdörtgeninin iki katı, yani MF, orta değer olduğundan, ve ML üzerine çizildiğinden, MG de rasyoneldir ve DE ile uzunlukta eşölçeksizdir; **[X.22]**

öyleyse DM de MG ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.13]**

Bu nedenle DM, MG yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır;

bu durumda DG iki parçalı olur. **[X.36]**

Dördüncü türden iki parçalı olduğu da kanıtlanmalı.

Öncekine benzer yolla DM'nin MG'den büyük olduğunu,

ve DK, KM dikdörtgeninin MN üzerindeki kareye eşit olduğunu kanıtlayabiliriz.

AC üzerindeki kare, CB üzerindeki kareyle eşölçeksiz olduğundan, DH de KL ile eşölçeksizdir,

bu yüzden DK de KM ile eşölçeksiz olur. **[VI.1, X.11]**

Ama eğer eşit olmayan iki doğru varsa, ve büyük olanı üzerine, küçük olanı üzerindeki karenin dörtte birine eşit ama bir kare şekil kadar eksik bir paralelkenar çizilirse, ve bu onu eşölçeksiz iki parçaya ayırırsa, büyük olanın üzerindeki kare, küçük olanın üzerindeki kareden, büyük olanla uzunlukta eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür; **[X.18]**

öyleyse DM üzerindeki kare, MG üzerindeki kareden, DM ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

Ve DM, MG yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır,

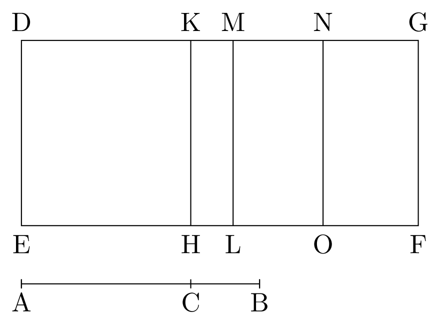
ve DM, DE rasyonel doğrusuyla eşölçeklidir.

Öyleyse DG dördüncü türden iki parçalı bir doğrudur. **[Tan. X.8]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

64. Önerme:

Rasyonel artı orta alan kenarı bir doğru üzerindeki kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizilirse, oluşan genişlik beşinci türden iki parçalı bir doğrudur.



AB, rasyonel artı orta alan kenarı bir doğru olsun, AC daha büyük olacak şekilde C'de parçalarına bölünmüş olsun;

Bir DE rasyonel doğrusu alınsın, ve DE üzerine, AB üzerindeki kareye eşit DF paralelkenarı çizilsin, ve DG genişliği oluşmuş olsun;

diyorum ki, DG beşinci türden iki parçalı bir doğrudur.

Önceki çizimin aynısı yapılsın.

AB doğrusu, C'de parçalarına bölünen rasyonel artı orta alan kenarı bir doğru olduğundan,

AC, CB karede eşölçeksiz, üzerlerindeki karelerin toplamı orta değer, ama içerdikleri dikdörtgen rasyonel olan iki doğrudur. **[X.40]**

AC, CB üzerindeki karelerin toplamı orta değer olduğundan, DL orta değerdir,

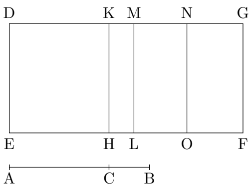
bu yüzden DM rasyoneldir ve DE ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Yine, AC, CB dikdörtgeninin iki katı, yani MF, rasyonel olduğundan, MG rasyoneldir ve DE ile eşölçeklidir. **[X.20]**

Bu durumda DM, MG ile eşölçeksiz olur; **[X.13]**

öyleyse DM, MG yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır;

bu yüzden DG iki parçalıdır. **[X.36]**



Şimdi de diyorum ki beşinci türden iki parçalı bir doğrudur.

Çünkü, benzer şekilde, DK, KM dikdörtgeninin MN üzerindeki kareye eşit olduğu, ve böylece DK'nın KM ile uzunlukta eşölçeksiz olduğu kanıtlanabilir.

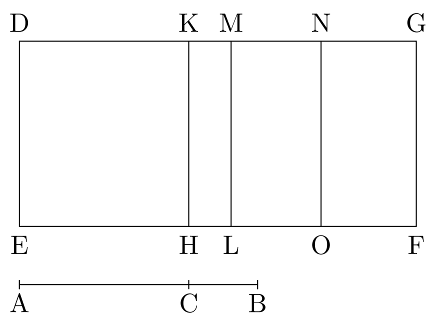
öyleyse DM üzerindeki kare, MG üzerindeki kareden, DM ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[X.18]**

Ve DM, MG yalnızca karede eşölçeklidir, ve küçük olan MG de DE ile uzunlukta eşölçeklidir.

Öyleyse DG beşinci türden iki parçalıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

65. Önerme:
İki orta alan toplamı kenarı bir doğru üzerindeki kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizilirse, oluşan genişlik altıncı türden iki parçalı bir doğrudur.



AB, iki orta alan toplamı kenarı olsun, C'de bölünmüş olsun,

ve DE, rasyonel bir doğru olsun,

ve DE üzerine, AB üzerindeki kareye eşit DF paralelkenarı çizilsin, ve DG genişliği oluşmuş olsun;

diyorum ki, DG altıncı türden iki parçalı bir doğrudur.

Önceki çizimin aynısı yapılsın.

AB, iki orta alan toplamı kenarı olduğundan, ve C'de bölündüğünden, AC, CB doğruları karede eşölçeksizdir, üzerlerindeki karelerin toplamı orta değerdir, içerdikleri dikdörtgen orta değerdir, ve üzerlerindeki karelerin toplamıyla içerdikleri dikdörtgen eşölçeksizdir, **[X.41]**

böylece, daha önce kanıtlananlar doğrultusunda, DL, MF dikdörtgenlerinin her biri orta değerdir.

Ve bunlar rasyonel DE doğrusu üzerine çizilmiştir;

öyleyse DM, MG doğrularının her biri rasyoneldir ve DE ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Ve AC, CB üzerindeki karelerin toplamı AC, CB dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksiz olduğundan, DL de MF ile eşölçeksizdir.

Öyleyse DM de MG ile eşölçeksizdir; **[VI.1, X.11]**

öyleyse DM, MG yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır;

bu durumda DG iki parçalı olur. **[X.36]**

Şimdi de diyorum ki, altıncı türden iki parçalı bir doğrudur.

Yine benzer şekilde, DK, KM dikdörtgeninin MN üzerindeki kareye eşit olduğunu, ve DK'nin KM ile uzunlukta eşölçeksiz olduğunu kanıtlayabiliriz;

ve aynı nedenden dolayı, DM üzerindeki kare, MG üzerindeki kareden, DM ile uzunlukta eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

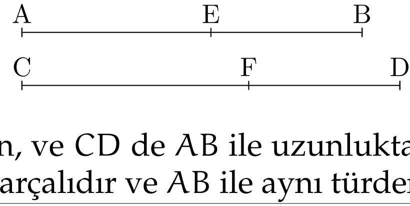
Ve DM, MG doğrularının hiçbiri başta alınan DE rasyonel doğrusuyla eşölçekli değildir.

Öyleyse DG altıncı türden iki parçalı bir doğrudur.

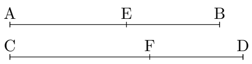
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

66. Önerme:

İki parçalı bir doğruyla uzunlukta eşölçekli olan bir doğru kendisi de iki parçalıdır ve aynı türdendir.



AB iki parçalı olsun, ve CD de AB ile uzunlukta eşölçekli olsun; diyorum ki, CD iki parçalıdır ve AB ile aynı türdendir.



Çünkü, AB iki parçalı olduğundan, parçalarına E'de bölünsün, ve AE daha büyük parça olsun;

bu durumda AE, EB yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur. **[X.36]**

AB'nin CD'ye oranının, AE'nin CF'ye oranına eşit olması sağlansın; **[VI.12]**

bu durumda, kalan EB'nin kalan FD'ye oranı da, AB'nin CD'ye oranına eşit olur. **[V.19]**

Ama AB, CD ile uzunlukta eşölçeklidir;

öyleyse AE, CF ile, ve EB, FD ile eşölçeklidir. **[X.11]**

Ve AE, EB rasyoneldir; öyleyse CF, FD de rasyoneldir.

Ve AE'nin CFye oranı, EB'nin FD'ye oranına eşittir. **[V.11]**

Öyleyse, değiştirilmiş oranlar olarak, AE'nin EB'ye oranı, CF'nin FD'ye oranına eşit olur. **[V.16]**

Ama AE, EB yalnızca karede eşölçeklidir; öyleyse CF, FD de yalnızca karede eşölçeklidir. **[X.11]**

Ve rasyoneldirler; öyleyse CD iki parçalıdır. **[X.36]**

Şimdi de diyorum ki, AB ile aynı türdendir.

Çünkü, AE üzerindeki kare, EB üzerindeki kareden, AE ile ya eşölçekli ya da eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

O zaman, eğer AE üzerindeki kare, EB üzerindeki kareden, AE ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyükse, CF üzerindeki kare de, FD üzerindeki kareden, CF ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olacaktır. **[X.14]**

Ve eğer AE, başta verilen rasyonel doğruyla eşölçekliyse, CF de onunla eşölçekli olacaktır, **[X.12]**

ve bu nedenle AB, CD doğrularının her biri birinci türden iki parçalıdır, yani aynı türdendir. **[Tan. X.5]**

Ama eğer EB, baştaki rasyonel doğruyla eşölçekliyse, FD de baştaki doğruyla eşölçekli olur, **[X.12]** ve bu nedenle yine CD, AB ile aynı türden olur, çünkü her biri ikinci türden iki parçalı olacaktır. **[Tan. X.6]**

Ama eğer AE, EB doğrularının hiçbiri başta alınan rasyonel doğruyla eşölçekli değilse, CF, FD doğrularının da hiçbiri onunla eşölçekli olmayacaktır, **[X.13]**

ve bu durumda AB, CD doğrularının her biri üçüncü türden iki parçalıdır. **[X.7]**

Ama eğer AE üzerindeki kare, EB zerindeki kareden, AE ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyükse, CF üzerindeki kare de, FD üzerindeki kareden, CF ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olacaktır. **[X.14]**

Ve eğer AE, başta alınan rasyonel doğruyla eşölçekliyse, CF de onunla eşölçekli olacaktır,

ve bu durumda AB, CD doğrularının her biri dördüncü türden iki parçalı olur. **[Tan. X.8]**

Ama eğer EB bu şekilde eşölçekliyse, FD de olacaktır,

ve bu durumda da AB, CD doğrularının her biri beşinci türden iki parçalı olur. **[Tan. X.9]**

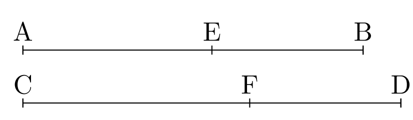
Ama eğer AE, EB doğrularının hiçbiri bu şekilde eşölçekli değilse, CF, FD doğrularının da hiçbiri başta alınan rasyonel doğruyla eşölçekli olmayacaktır,

ve bu durumda AB, CD doğrularının her biri altıncı türden iki parçalı olacaktır. **[Tan. X.10]**

Bu yüzden iki parçalı bir doğruyla eşölçekli olan bir doğru da eşölçeklidir ve aynı türdendir.

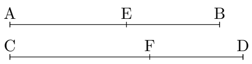
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

67. Önerme:
İki ortalı bir doğruyla uzunlukta eşölçekli olan bir doğru kendisi de iki ortalıdır ve aynı türdendir.



AB iki ortalı olsun, ve CD doğrusu AB ile uzunlukta eşölçekli olsun;

diyorum ki, CD de iki ortalıdır, ve AB ile aynı türdendir.



Çünkü, AB iki ortalı olduğundan, orta değerlerine E'de bölünsün; o zaman AE, EB yalnızca karede eşölçekli orta değer doğrulardır. **[X.37, X.38]**

Ve, AB'nin CD'ye oranının, AE'nin CF'ye oranına eşit olması sağlansın; bu durumda kalan EB'nin kalan FD'ye oranı da AB'nin CD'ye oranına eşi olur. **[V.19]**

Ama AB, CD ile uzunlukta eşölçeklidir; öyleyse AE, EB, sırasıyla CF, FD ile eşölçeklidir. **[X.11]**

Ama AE, EB orta değerdir; öyleyse CF, FD de orta değerdir. **[X.23]**

Ve, AE'nin EB'ye oranı, CF'nin FD'ye oranına eşit olduğundan, ve AE, EB yalnızca karede eşölçekli olduklarından,

CF, FD de yalnızca karede eşölçeklidir. **[X.11]**

Ama orta değer oldukları da kanıtlanmıştı; bu durumda CD iki ortalı olur.

Şimdi de diyorum ki, AB ile aynı türdendir.

Çünkü, AE'nin EB'ye oranı, CF'nin FD'ye oranına eşit olduğundan,

AE üzerindeki karenin AE, EB dikdörtgenine oranı da, CF üzerindeki karenin CF, FD dikdörtgenine oranına eşit olur;

bu durumda, değiştirilmiş oranlar olarak, AE üzerindeki karenin CF üzerindeki kareye oranı, AE, EB dikdörtgeninin CF, FD dikdörtgenine oranına eşit olur. **[V.16]**

Ama AE üzerindeki kare CF üzerindeki kareyle eşölçeklidir; öyleyse AE, EB dikdörtgeni de CF, FD dikdörtgeniyle eşölçeklidir.

Öyleyse, eğer AE, EB dikdörtgeni rasyonelse, CF, FD dikdörtgeni de rasyoneldir, ve bu durumda AB, CD birinci türden iki ortalıdır, **[X.37]**

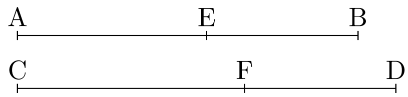
ama eğer orta değerse, orta değer olur, **[DS. X.23]**

ve bu durumda AB, CD'nin her biri ikinci türden iki ortalı doğrudur. **[X.38]**

Bu nedenle CD, AB ile aynı türden olacaktır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

68. Önerme:
Üstün bir doğruyla eşölçekli olan bir doğru kendisi de üstündür.



AB üstün olsun, ve CD doğrusu AB ile eşölçekli olsun;

diyorum ki, CD üstündür.

AB doğrusu E'de bölünsün;

bu durumda AE, EB, karede eşölçeksiz, üzerlerindeki karelerin toplamı rasyonel, ama içerdikleri dikdörtgen orta değer olan iki doğru olur. **[X.39]**

Önceki çizim yapılsın.

O zaman, AB'nin CD'ye oranı, AE'nin CF'ye oranına, ve EB'nin FD'ye oranına eşit olduğundan,

AE'nin CF'ye oranı, EB'nin FD'ye oranına eşittir. **[V.11]**

Ama AB, CD ile eşölçeklidir; öyleyse AE, EB, sırasıyla CF, FD ile eşölçeklidir. **[X.11]**

Ve AE'nin CF'ye oranı, EB'nin FD'ye oranına eşit olduğundan,

değiştirilmiş oranlar olarak, AE'nin EB'ye oranı, CF'nin FD'ye oranına eşittir; **[V.16]**

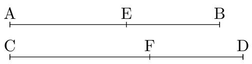
öyleyse birleşik oranlar olarak, AB'nin BE'ye oranı, CD'nin DF'ye oranına eşittir; **[V.18]**

öyleyse, AB üzerindeki karenin BE üzerindeki kareye oranı, CD üzerindeki karenin DF üzerindeki kareye oranına eşittir. **[VI.20]**

Aynı şekilde, AB üzerindeki karenin AE üzerindeki kareye oranının, CD üzerindeki karenin CF üzerindeki kareye oranına eşit olduğunu kanıtlayabiliriz.

Öyleyse AB üzerindeki karenin AE, EB üzerindeki karelere oranı, CD üzerindeki karenin CF, FD üzerindeki karelere oranına eşittir;

öyleyse değiştirilmiş oranlar olarak, AB üzerindeki karenin CD üzerindeki kareye oranı, AE, EB üzerindeki karelerin CF, FD üzerindeki karelere oranına eşittir. **[V.16]**



Ama AB üzerindeki kare, CD üzerindeki kareyle eşölçeklidir;

öyleyse AE, EB üzerindeki kareler de, CF, FD üzerindeki karelerle eşölçeklidir.

Ve AE, EB üzerindeki kareler birlikte rasyoneldir;

öyleyse CF, FD üzerindeki kareler de birlikte rasyoneldir.

Benzer şekilde, AE, EB dikdörtgeninin iki katı, CF, FD dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeklidir.

Ve AE, EB dikdörtgeninin iki katı orta değerdir;

öyleyse CF, FD dikdörtgeninin iki katı da orta değerdir. **[DS. X.23]**

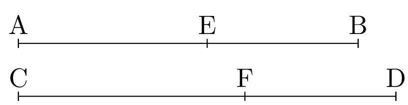
Demek ki, CF, FD doğruları karede eşölçeksizdir, üzerlerindeki karelerin toplamı rasyonel, ama içerdikleri dikdörtgen orta değerdir;

bu durumda CD'nin tamamı üstün denen irrasyonel bir doğru olur.

Öyleyse üstün bir doğruyla eşölçekli olan bir doğru üstündür.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

69. Önerme:
Rasyonel artı orta alan kenarı bir doğruyla eşölçekli olan bir doğru kendisi de rasyonel artı orta alan kenarıdır.



AB, rasyonel artı orta alan kenarı olsun, ve CD doğrusu AB ile eşölçekli olsun;

CD'nin de rasyonel artı orta alan kenarı olduğu kanıtlanacaktır.

AB doğrusu doğrularına E'de bölünsün;

bu durumda AE, EB doğruları karede eşölçeksizdir, üzerlerindeki karelerin toplamı orta değer, ama içerdikleri dikdörtgen rasyoneldir. **[X.40]**

Önceki çizim yapılsın.

Benzer şekilde, CF, FD'nin karede eşölçeksiz olduğunu, AE, EB üzerindeki karelerin toplamının, CF, FD üzerindeki karelerin toplamıyla,

ve AE, EB dikdörtgeninin de CF, FD dikdörtgeniyle eşölçekli olduğunu kanıtlayabiliriz;

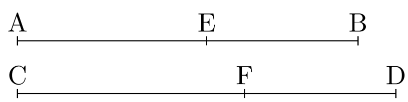
böylece CF, FD üzerindeki karelerin toplamı orta değer,

ve CF, FD dikdörtgeni de rasyonel olur.

Öyleyse CD rasyonel artı orta alan kenarıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

70. Önerme:
İki orta alan toplamı kenarı bir doğruyla eşölçekli olan bir doğru kendisi de iki orta alan toplamı kenarıdır.



AB, iki orta alan toplamı kenarı olsun, ve CD doğrusu AB ile eşölçekli olsun;

CD'nin de iki orta alan toplamı kenarı olduğu kanıtlanacaktır.

Çünkü, AB, iki orta alan toplamı kenarı olduğundan, E'de doğrularına bölünsün;

bu durumda AE, EB doğruları karede eşölçeksizdir, üzerlerindeki karelerin toplamı, ve içerdikleri dikdörtgen orta değerdir, ayrıca AE, EB üzerindeki karelerin toplamı AE, EB dikdörtgeniyle eşölçeksizdir. **[X.41]**

Önceki çizim yapılsın.

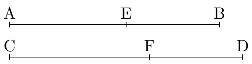
Benzer şekilde,

CF, FD'nin karede eşölçeksiz olduğunu,

AE, EB üzerindeki karelerin toplamının CF, FD üzerindeki karelerin toplamıyla,

ve AE, EB dikdörtgeninin CF, FD dikdörtgeniyle eşölçekli olduğunu kanıtlayabiliriz;

bu yüzden, CF, FD üzerindeki karelerin toplamı, ve CF, FD dikdörtgeni orta değer olur,

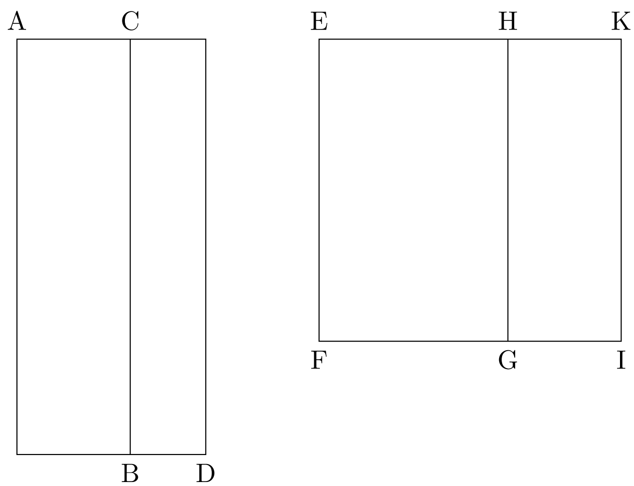


ve dahası CF, FD üzerindeki karelerin toplamı, CF, FD dikdörtgeniyle eşölçeksiz olur.

Öyleyse CD iki orta alan toplamı kenarıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

71. Önerme:
Eğer rasyonel bir alanla orta değer bir alan toplanırsa, bu toplama eşit bir karenin kenarı olarak dört çeşit doğru ortaya çıkar. Bunlar iki parçalı, birinci türden iki ortalı, üstün, ya da rasyonel artı orta alan kenarıdır.



AB rasyonel, CD orta değer olsun;

diyorum ki, AD alanına eşit karenin kenarı ya iki parçalıdır, ya birinci türden iki ortalıdır, ya üstündür, ya da rasyonel artı orta alan kenarıdır.

Çünkü, AB, CD'den ya büyüktür ya da küçüktür.

Önce büyük olsun;

rasyonel bir EF doğrusu alınsın, ve EF üzerine, AB'ye eşit EG dikdörtgeni çizilsin, ve EH genişliği oluşsun,

ve EF üzerine, DC'ye eşit HI çizilsin, ve HK genişliği oluşsun.

O zaman, AB rasyonel olduğundan ve EG'ye eşit olduğundan, EG de rasyoneldir.

Ve EF üzerine çizilip EH genişliğini oluşturmuştur; bu durumda EH rasyoneldir ve EF ile uzunlukta eşölçeklidir. **[X.20]**

Yine, CD orta değer olduğundan ve HI'ya eşit olduğundan, HI da orta değerdir.

Ve EF rasyonel doğrusu üzerine çizilip HK genişliğini oluşturmuştur; bu durumda HK rasyoneldir ve EF ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Ve CD orta değer olduğundan, ve aynı zamanda AB rasyonel olduğundan, AB, CD ile eşölçeksizdir,

böylece EG de HI ile eşölçeksiz olur.

Ama, EG'nin HI'ya oranı, EH'nin HK'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse EH de HK ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.11]**

Ve ikisi de rasyoneldir; öyleyse EH, HK yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur;

bu durumda EK doğrusu H'de bölünmüş iki parçalı bir doğru olur. **[X.36]**

Ve, AB, CD'den büyük olduğundan, ve ayrıca AB, EG'ye, ve CD, HI'ya eşit olduğundan,

EG, HI'dan büyüktür;

öyleyse EH de HK'den büyüktür.

O zaman, EH üzerindeki kare, HK üzerindeki kareden, ya EH ile uzunlukta eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür, ya da onunla eşölçekisz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

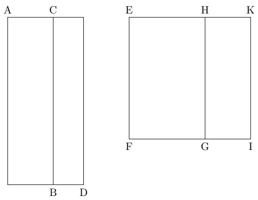
Önce, üzerindeki kare, kendisiyle eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olsun.

Şimdi, daha büyük olan HE doğrusu, başta alınan EF rasyonel doğrusuyla eşölçeklidir;

bu durumda EK birinci türden iki parçalıdır. **[Tan. X.5]**

Ama EF rasyoneldir; ve eğer bir alan bir rasyonel doğruyla birinci türden iki parçlı bir doğru tarafından içerilirse, ona eşit karenin kenarı iki parçalı olur. **[X.54]**

Öyleyse EI'ya eşit karenin kenarı iki parçalıdır; böylece AD'ye eşit karenin kenarı da iki parçalı olur.



Şimdi de EH üzerindeki kare, HK üzerindeki kareden, EH ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olsun.

Şimdi büyük doğru EH, başta alınan rasyonel doğru EF ile uzunlukta eşölçeklidir; öyleyse EK dördüncü türden iki parçalıdır. **[Tan. X.8]**

Ama EF rasyoneldir; ve eğer bir alan bir rasyonel doğruyla dördüncü türden iki parçalı bir doğru tarafından içerilirse, ona eşit karenin kenarı üstün denen irrasyonel bir doğrudur. **[X.57]**

Öyleyse EI'ye eşit karenin keanrı üstündür;

böylece AD'ye eşit karenin kenarı da üstün olur.

Şimdi ise AB, CD'den küçük olsun;

bu durumda EG de HI'dan küçük olur, böylece EH de HK'den küçük olur.

Şimdi, HK üzerindeki kare, EH üzerindeki kareden, ya HK ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür, yada onunla eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

Önce, üzerindeki kare kendisiyle eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olsun.

Şimdi, daha küçük olan doğru EH, başta alınan EF rasyonel doğrusuyla eşölçeklidir;

bu durumda EK ikinci türden iki parçalı olur. **[Tan. X.6]**

Ama EF rasyoneldir; ve eğer bir alan bir rasyonel doğru ve ikinci türden iki parçalı bir doğru tarafından içerilirse, ona eşit karenin kenarı birinci türden iki ortalıdır; **[X.55]**

öyleyse EI'ya eşit karenin kenarı birinci türden iki ortalıdır,

böylece AD'ye eşit karenin kenarı da birinci türden iki ortalı olur.

Şimdi de, HK üzerindeki kare, HE üzerindeki kareden, HK ile eşölçeksiz olan bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olsun.

Şimdi, daha küçük olan EH doğrusu başta alınan EF rasyonel doğrusuyla eşölçeklidir;

bu durumda EK beşinci türden iki parçalı olur. **[Tan. X.9]**

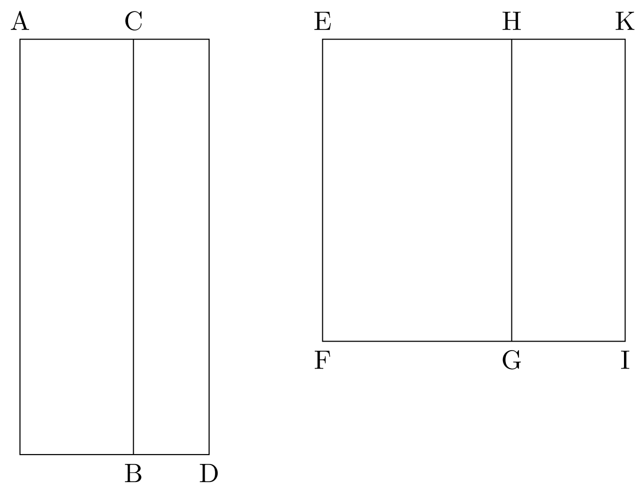
Ama EF rasyoneldir; ve eğer bir alan bir rasyonel doğru ve beşinci türden iki parçalı bir doğru tarafından içerilirse, ona eşit karenin kenarı rasyonel artı orta alan kenarı olur. **[X.58]**

Öyleyse EI'ya eşit karenin kenarı rasyonel artı orta alan kenarıdır,

böylece AD'ye eşit karenin kenarı da rasyonel artı orta alan kenarı olur.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

72. Önerme:
Eğer aralarında eşölçeksiz iki orta değer alan toplanırsa, bu toplama eşit karenin kenarı kalan diğer iki irrasyonel doğrulardır, yani ya ikinci türden iki ortalı, ya da iki orta alan toplamı kenarı.



Birbiriyle eşölçeksiz iki orta değer alan AB, CD toplansın;

diyorum ki, AD'ye eşit karenin kenarı ya ikinci türden iki ortalıdır, ya da iki orta alan toplamı kenarıdır.

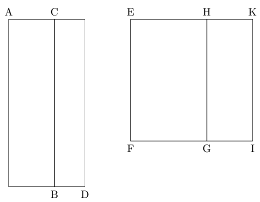
Çünkü, AB, CD'den ya büyüktür, ya da küçüktür.

Önce, rastgele AB, CD'den büyük olsun.

EF rasyonel doğrusu alınsın,

ve EF üzerine, AB'ye eşit EG dikdörtgeni, EH genişliğini oluşturarak, ve CD'ye eşit HI dikdörtgeni, HK genişliğini oluşturarak çizilsin.

Şimdi, AB, CD alanlarının her biri orta değer olduğundan, EG, HI alanlarının her biri de orta değerdir.



Ve rasyonel FE doğrusu üzerine, EH, HK genişliklerini oluşturarak çizilmişlerdir;

bu durumda EH, HK doğrularının her biri rasyoneldir ve EF ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Ve, AB, CD ile eşölçeksiz olduğundan, ve AB, EG'ye, ve CD de HI'ya eşit olduğundan,

EG de HI ile eşölçeksizdir.

Ama EG'nin HI'ya oranı, EH'nin HK'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

bu durumda EH, HK ile uzunlukta eşölçeksiz olur. **[X.11]**

Öyleyse EH, HK doğruları yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur;

bu durumda EK iki parçalı olur. **[X.36]**

Ama EH üzerindeki kare, HK üzerindeki kareden, ya EH ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür, ya da onunla eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

Önce, üzerindeki kare kendisiyle uzunlukta eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olsun.

Şimdi, EH, HK doğrularının hiçbiri başta alınan EF rasyonel doğrusuyla eşölçekli değildir;

bu durumda EK üçüncü türden iki parçalı olur. **[Tan. X.7]**

Ama EF rasyoneldir; ve eğer bir alan bir rasyonel doğru ve üçüncü türden iki parçalı bir doğru tarafından içerilirse, ona eşit karenin kenarı ikinci türden iki ortalı olur **[X.56]**

Öyleyse EI'ya, yani AD'ye eşit karenin kenarı ikinci türden iki ortalıdır.

Şimdi de, EH üzerindeki kare, HK üzerindeki kareden, EH ile eşölçeksiz olan bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olsun.

Şimdi, EH, HK doğrularının her biri EF ile eşölçeksizdir;

bu durumda EK altıncı türden iki parçalı olur. **[Tan. X.10]**

Ama eğer bir alan bir rasyonel doğru ve altıncı türden iki parçalı bir doğru tarafından içerilirse, ona eşit karenin kenarı iki orta alan toplamı kenarı olur; **[X.59]**

böylece AD'ye eşit karenin kenarı da iki orta alan toplamı kenarı olur.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

Şu ana kadar sözü edilen doğrular, iki parçalı doğru ve ondan sonra gelen irrasyonel doğrular, ne orta değer doğrularla ne de birbirleriyle aynıdır.

Orta değer bir doğru üzerine çizilen kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizilirse diğer kenar bu rasyonel doğruyla uzunlukta eşölçeksiz olan bir rasyonel doğru olur. **[X.22]**

Ama iki parçalı türden bir doğru üzerine çizilen kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizilirse diğer kenar birinci türden iki parçalı olur. **[X.60]**

Birinci türden iki ortalı bir doğru üzerine çizilen kareye eşit bir dikdötgen rasyonel bir doğru üzerine çizilirse diğer kenar ikinci türden iki parçalı olur. **[X.61]**

İkinci türden iki ortalı bir doğru üzerine çizilen kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizilirse diğer kenar üçüncü türden iki parçalı olur. **[X.62]**

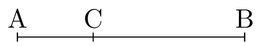
Üstün türden bir doğru üzerine çizilen kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizilirse diğer kenar dördüncü türden iki parçalı olur. **[X.63]**

Rasyonel artı orta alan kenarı türden bir doğru üzerine çizilen kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizilirse diğer kenar beşinci türden iki iki parçalı olur. **[X.64]**

İki orta alan toplamı kenarı türden bir doğru üzerine çizilen kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizilirse diğer kenar altıncı türden iki parçalı olur. **[X.65]**

Sözü edilen bu kenarlar hem birinci kenardan hem de birbirlerinden farklıdır; birincisinden farklıdırlar çünkü birinci kenar rasyoneldir, birbirlerinden farklıdırlar çünkü aynı türden değiller. Böylece bu irrasyonel doğrular birbirinden de farklıdır.

73. Önerme:
Rasyonel bir doğrudan, bütünle yalnızca karede eşölçekli bir parça çıkarılırsa, kalan parça irrasyoneldir; ve bu tür doğrulara *ayrık* densin.



AB rasyonel doğrusundan, bütünle yalnızca karede eşölçekli olan BC doğrusu çıkarılsın;

diyorum ki, kalan AC doğrusu *ayrık* denen irrasyonel bir doğrudur.

Çünkü, AB, BC ile uzunlukta eşölçeksiz olduğundan, ve AB'nin BC'ye oranı, AB üzerindeki karenin AB, BC dikdörtgenine oranına eşit olduğundan, **[YÖ.X.21]**

AB üzerindeki kare, AB, BC dikdörtgeniyle eşölçeksizdir. **[X.11]**

Ama AB, BC üzerindeki kareler AB üzerindeki kareyle eşölçeklidir, **[X.15]**

ve AB, BC dikdörtgeninin iki katı AB, BC dikdörtgeniyle eşölçeklidir. **[X.9]**

Ve AB, BC üzerindeki karelerin toplamının, CA üzerindeki kareyle birlikte AB, BC dikdörtgeninin iki katına eşit olmasından dolayı, **[II.7]**

AB, BC üzerindeki kareler de kalanla, yani AC üzerindeki kareyle, eşölçeksizdir. **[X.13, X.16]**

Ama AB, BC üzerindeki kareler rasyoneldir;

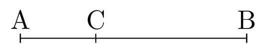
öyleyse AC irrasyoneldir.

Ve buna ayrık densin.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

74. Önerme:

Eğer orta değer bir doğrudan, bütünle yalnızca karede eşölçekli olan, ve onunla rasyonel bir dikdörtgen içeren bir orta değer doğru çıkarılırsa, kalan irrasyoneldir. Ve bu tür doğrulara *orta değer doğrunun birinci ayrığı* densin.



Orta değer AB doğrusundan, AB ile yalnızca karede eşölçekli olan ve AB ile AB, BC dikdörtgenini rasyonel yapan, orta değer BC doğrusu çıkarılsın;

diyorum ki, kalan AC doğrusu irrasyoneldir; ona *orta değer doğrunun birinci ayrığı* densin.

Çünkü, AB, BC orta değer olduğundan, AB, BC üzerindeki kareler de orta değerdir.

Ama AB, BC dikdörtgeninin iki katı rasyoneldir;

öyleyse AB, BC üzerindeki kareler, AB, BC dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksizdir;

bu durumda AB, BC dikdörtgeninin iki katı da kalanla, AC üzerindeki kareyle, eşölçeksizdir, **[II.7]**

çünkü, eğer bütün içindeki niceliklerden biriyle eşölçeksizse, içindeki nicelikler de eşölçeksizdir. **[X.16]**

Ama AB, BC dikdörtgeninin iki katı rasyoneldir;

bu durumda AC üzerindeki kare irrasyonel olur.

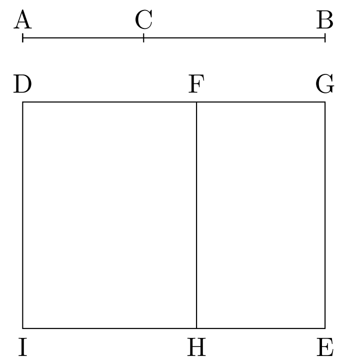
öyleyse AC irrasyoneldir. **[Tan. X.4]**

Ve buna *orta değer doğrunun birinci ayrığı* densin.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

75. Önerme:

Eğer orta değer bir doğrudan, bütünle yalnızca karede eşölçekli olan, ve onunla orta değer bir dikdörtgen içeren bir orta değer doğru çıkarılırsa, kalan irrasyoneldir; ve bu tür doğrulara *orta değer doğrunun ikinci ayrığı* densin.



Orta değer AB doğrusundan, AB ile yalnızca karede eşölçekli olan ve AB ile içerdiği AB, BC dikdörtgeni orta değer olan, orta değer CB doğrusu çıkarılsın; **[X.28]**

diyorum ki, kalan AC doğrusu irrasyoneldir; ona *orta değer doğrunun ikinci ayrığı* densin.

Çünkü, rasyonel bir DI doğrusu alınsın,

DI üzerine, AB, BC üzerindeki karelere eşit DE çizilsin,

DG genişliği oluşmuş olsun,

ve yine DI üzerine, AB, BC dikdörtgeninin iki katına eşit DH çizilsin,

DF genişliği oluşmuş olsun;

bu durumda FE kalanı, AC üzerindeki kareye eşittir. **[II.7]**

Şimdi, AB, BC üzerindeki kareler orta değerdir ve eşölçeklidir, öyleyse DE de orta değerdir. **[X.15, DS. X.23]**

öyleyse DG rasyoneldir ve DI ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Yine, AB, BC dikdörtgeni orta değer olduğundan, AB, BC dikdörtgeninin iki katı da orta değerdir. **[DS. X.23]**

Ve DH'ye eşittir; öyleyse DH de orta değerdir.

Ve rasyonel DI doğrusu üzerine çizilip DF genişliğini oluşturmuştur;

öyleyse DF rasyoneldir ve DI ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Ve, AB, BC yalnızca karede eşölçekli olduğundan, AB, BC ile uzunlukta eşölçeksizdir;

öyleyse AB üzerindeki kare de AB, BC dikdörtgeniyle eşölçeksizdir. **[X.11]**

Ama AB, BC üzerindeki kareler AB üzerindeki kareyle eşölçeklidir, **[X.15]**

ve AB, BC dikdörtgeninin iki katı, AB, BC dikdörtgeniyle eşölçeklidir; **[X.6]**

öyleyse AB, BC dikdörtgeninin iki katı, AB, BC üzerindeki karelerle eşölçeksizdir. **[X.13]**

Ama DE alanı AB, BC üzerindeki karelere eşittir, ve DH de AB, BC dikdörtgeninin iki katına eşittir;

öyleyse DE, DH ile eşölçeksizdir.

Ama DE'nin DH'ye oranı, GD'nin DF'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

bu durumda GD, DF ile eşölçeksiz olur. **[X.11]**

Ama ikisi de rasyoneldir;

öyleyse GD, DF yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur;

bu durumda FG ayrık olur. **[X.73]**

Ama DI rasyoneldir,

ve bir rasyonel doğruyla bir irrasyonel doğru tarafından içerilen dikdörtgen irrasyoneldir, **[X.20]**

ve ona eşit karenin kenarı irrasyoneldir.

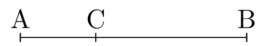
Ve FE'ye eşit karenin kenarı AC'dir; bu durumda AC irrasyonel olur.

Ve ona *orta değer doğrunun ikinci ayrığı* densin.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

76. Önerme:

Bir doğru parçasından onunla karede eşölçeksiz olan bir doğru çıkarıldığında, çıkarılan parçayla bütünün üzerlerine çizilen karelerin toplamı rasyonelse ama çıkarılan parçayla bütünün oluşturduğu dikdörtgen orta değer ise, kalan parça irrasyoneldir; ve bu tür doğrulara *ufak* densin.



AB doğrusundan onunla karede eşölçeksiz ve verilen koşulları sağlayan BC doğrusu çıkarılsın. **[X.33]**

Diyorum ki, kalan AC ufak denen irrasyonel doğrudur.

Çünkü, AB, BC üzerindeki karelerin toplamı rasyonel olduğundan, ve bu arada AB, BC dikdörtgeninin iki katı orta değer olduğundan,

AB, BC üzerindeki kareler, AB, BC dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksizdir;

ve çevrilmiş oranlar olarak, AB, BC üzerindeki kareler, kalan ile, AC üzerindeki kareyle, eşölçeksizdir. **[II.7, X.16]**

Ama AB, BC üzerindeki kareler rasyoneldir;

öyleyse AC üzerindeki kare irrasyoneldir;

bu durumda AC irrasyonel olur.

Ve buna *ufak* densin.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

77. Önerme:

Bir doğru parçasından onunla karede eşölçeksiz olan bir doğru çıkarıldığında, çıkarılan parçayla bütünün üzerlerine çizilen karelerin toplamı orta değer, ama çıkarılan parçayla bütünün oluşturduğu dikdörtgenin iki katı rasyonelse, kalan parça irrasyoneldir; ve bu tür doğrulara *rasyonel alanla orta değer bütün üreten* densin.

AB doğrusundan onunla karede eşölçeksiz ve verilen koşulları sağlayan BC doğrusu çıkarılsın. **[X.34]**

Diyorum ki, kalan AC sözü edilen irrasyonel doğrudur.

Çünkü, AB, BC üzerindeki kareler orta değer olduğundan, ve ayrıca AB, BC dikdörtgeninin iki katı rasyonel olduğundan,

AB, BC üzerindeki kareler, AB, BC dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksizdir;

öyleyse kalan da, AC üzerindeki kare, AB, BC dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksizdir. **[II.7, X.16]**

Ve AB, BC dikdörtgeninin iki katı rasyoneldir;

öyleyse AC üzerindeki kare irrasyoneldir;

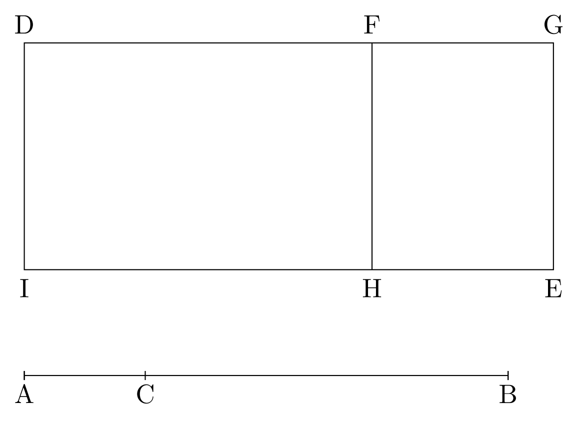
bu durumda AC irrasyonel olur.

Ve buna *rasyonel alanla orta değer bütün üreten* densin.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

78. Önerme:

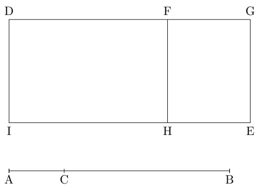
Bir doğru parçasından onunla karede eşölçeksiz olan bir doğru çıkarıldığında, hem çıkarılan parçayla bütünün üzerlerine çizilen karelerin toplamı, hem de çıkarılan parçayla bütünün oluşturduğu dikdörtgenin iki katı orta değerse, ve dahası üzerlerindeki karelerin toplamı içerdikleri dikdörtgenin iki katıyla eşölçeksizse, kalan parça irrasyoneldir; bu tür doğrulara *orta değer alanla orta değer bütün üreten* densin.



AB doğrusundan onunla karede eşölçeksiz olan ve verilen koşulları sağlayan BC doğrusu çıkarılsın; **[X.35]**

diyorum ki, kalan AC *orta değer alanla orta değer bütün üreten* denen irrasyonel doğrudur.

Çünkü, bir rasyonel DI doğrusu alınsın,



DI üzerine, AB, BC üzerindeki karelere eşit DE çizilsin, ve DG genişliği oluşturulmuş olsun,

ve AB, BC dikdörtgeninin iki katına eşit DH çıkarılsın.

Bu durumda FE kalanı, AC üzerindeki kareye eşit olur, **[II.7]**

bu yüzden AC doğrusu FE'ye eşit karenin kenarıdır.

Şimdi, AB, BC üzerindeki karelerin toplamı orta değer olduğundan ve DE'ye eşit olduğundan, DE orta değerdir.

Ve rasyonel DI doğrusu üzerine çizilip DG genişliğini oluşturmuştur;

öyleyse DG rasyoneldir ve DI ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Yine, AB, BC dikdörtgeninin iki katı orta değer olduğundan ve DH'ye eşit olduğundan, DH orta değerdir.

Ve rasyonel DI doğrusu üzerine çizilip DF genişliğini oluşturmuştur;

öyleyse DF de rasyoneldir ve DI ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Ve AB, BC üzerindeki kareler, AB, BC dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksiz olduğundan,

DE de DH ile eşölçeksizdir.

Ama, DE'nin DH'ye oranı, DG'nin DF'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

bu durumda DG, DF ile eşölçeksiz olur. **[X.11]**

Ve ikisi de rasyoneldir;

öyleyse GD, DF doğruları, yalnızca karede eşölçekli olan rasyonel doğrulardır;

Bu durumda FG ayrık olur. **[X.73]**

Ve FH rasyoneldir;

ama rasyonel bir doğruyla ayrık bir doğru tarafından içerilen dikdörtgen irrasyoneldir; **[X.20]**

ve ona eşit olan karenin kenarı da irrasyonel olur.

Ve FE'nin kenarı AC'dir;

öyleyse AC irrasyoneldir.

Ve buna *orta değer alanla orta değer bütün üreten* densin.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

79. Önerme:
Ayrık bir doğruya bütünle yalnızca karede eşölçekli olacak şekilde yalnızca tek bir rasyonel doğru eklenebilir.

AB ayrık olsun, ve BC ona eklensin;

> *[Bu ekleme öyle yapılsın ki* AC *doğrusu üzerinde* AB *ayrık olsun. Yani* BC *öyle seçilsin ki* AC *ve* BC *yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrular olsun. Bu durumda tanım gereği* AB *ayrık olur.*
>
> *Bu önermede tek olduğu kanıtlanan* BC*'ye* AB *ayrığının* ***eklentisi*** *denir.]*

bu durumda AC, CB yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır. **[X.73]**

Diyorum ki, başka hiçbir doğru bütünle yalnızca karede eşölçekli olacak şekilde AB'ye eklenemez.

Çünkü, eğer mümkünse, BD bu şekilde eklensin;

bu durumda AD, DB yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır. **[X.73]**

Şimdi, AD, DB üzerindeki karelerin, AD, DB dikdörtgeninin iki katından farkı, AC, CB üzerindeki karelerin AC, CB dikdörtgeninin iki katından farkına eşit olduğundan,

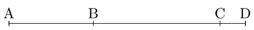
çünkü ikisinin farkı da aynıdır, yani AB üzerindeki kare, **[II.7]**

yer değiştirerek, AD, DB üzerindeki karelerin AC, CB üzerindeki karelerden farkı, AD, DB dikdörtgeninin iki katının AC, CB dikdörtgeninin iki katından farkına eşittir.

Ama, her ikisi de rasyonel olduğundan, AD, DB üzerindeki karelerin AC, CB üzerindeki karelerden farkı rasyoneldir;

öyleyse AD, DB dikdörtgeninin iki katının AC, CB dikdörtgeninin iki katından farkı da rasyoneldir;

ama bu olamaz,



çünkü ikisi de orta değerdir, **[X.21]**

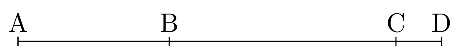
ve bir orta değer alanın bir orta değer alandan farkı rasyonel olmaz. **[X.26]**

Bu durumda, bütünle yalnızca karede eşölçekli olacak şekilde hiçbir rasyonel doğru AB'ye eklenemez.

Öyleyse bir ayrığa, bütünle yalnızca karede eşölçekli olacak şekilde, yalnızca bir tek rasyonel doğru eklenebilir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

80. Önerme:
Orta değer doğrunun birinci ayrığına bütünle yalnızca karede eşölçekli olacak ve bütünle içerdiği dikdörtgen rasyonel olacak şekilde yalnızca tek bir orta değer doğru eklenebilir.



AB, orta değer doğrunun birinci ayrığı olsun, ve BC ona eklensin;

bu durumda AC, CB yalnızca karede eşölçekli orta değer doğrulardır, ve içerdikleri AC, CB dikdörtgeni rasyoneldir; **[X.74]**

diyorum ki, bütünle yalnızca karede eşölçekli olacak ve bütünle rasyonel bir alan içerecek şekilde AB'ye yalnızca tek bir orta değer doğru eklenebilir.

Çünkü, eğer mümkünse, aynı şekilde DB de eklenmiş olsun;

bu durumda AD, DB yalnızca karede eşölçekli orta değer doğrulardır, ve içerdikleri AD, DB dikdörtgeni rasyoneldir. **[X.74]**

Şimdi, AD, DB üzerindeki karelerin AD, DB dikdörtgeninin iki katından farkı, AC, CB üzerindeki karelerin AC, CB dikdörtgeninin iki katından farkına eşit olduğundan,

çünkü ikisinin de farkı aynıdır, yani AB üzerindeki kare, **[II.7]**

yer değiştirerek, AD, DB üzerindeki karelerin AC, CB üzerindeki karelerden farkı, AD, DB dikdörtgeninin iki katının AC, CB dikdörtgeninin iki katından farkına eşittir.

Ama, AD, DB dikdörtgeinin iki katının AC, CB dikdörtgeninin iki katından farkı rasyonel bir alandır, çünkü ikisi de rasyoneldir.

Öyleyse AD, DB üzerindeki karelerin AC, CB üzerindeki karelerden farkı rasyoneldir:

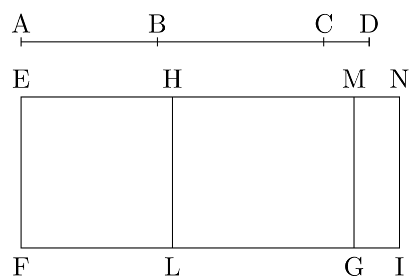
ama bu olamaz,

çünkü ikisi de orta değerdir, **[X.15, DS. X.23]**

ve orta değer bir alanın orta değer bir alandan farkı rasyonel olmaz. **[X.26]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

81. Önerme:
Orta değer doğrunun ikinci ayrığına bütünle yalnızca karede eşölçekli olacak ve bütünle içerdiği dikdörtgen orta değer olacak şekilde yalnızca tek bir orta değer doğru eklenebilir.



AB, orta değer doğrunun birinci ayrığı olsun, ve BC ona eklensin;

bu durumda AC, CB yalnızca karede eşölçekli olan orta değer doğrulardır, ve içerdikleri AC, CB dikdörtgeni orta değerdir. **[X.75]**

Diyorum ki, bütünle yalnızca karede eşölçekli olacak ve bütünle orta değer bir dikdörtgen içerecek şekilde başka hiçbir orta değer doğru AB'ye eklenemez.

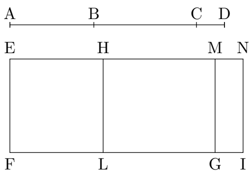
Çünkü, eğer mümkünse, BD de bu şekilde eklensin;

öyleyse AD, DB yalnızca karede eşölçekli olan ve içerdikleri AD, DB dikdörgeni orta değer olan, orta değer iki doğrudur. **[X.75]**

Bir EF rasyonel doğrusu alınsın,

ve EF üzerine AC, CB üzerindeki karelere eşit EG çizilsin, ve EM genişliği oluşmuş olsun,

ve AC, CB dikdörtgeninin iki katına eşit HG çıkarılsın, ve HM genişliği oluşmuş olsun;



bu durumda EL kalanı AB üzerindeki kareye eşittir, **[II.7]**

böylece AB doğrusu EL'ye eşit karenin kenarıdır.

Yine, EF üzerine AD, DB üzerindeki karelere eşit EI çizilsin, ve EN genişliği oluşmuş olsun.

Ama EL de AB üzerindeki kareye eşittir; öyleyse HI kalanı AD, DB dikdörtgeninin iki katına eşittir. **[II.7]**

Şimdi, AC, CB orta değer doğrular olduğundan, AC, CB üzerindeki kareler de orta değerdir.

Ve EG'ye eşittir; öyleyse EG de orta değerdir. **[X.15, DS. X.23]**

Ve rasyonel EF doğrusu üzerine çizilmiş ve EM genişliğini oluşturmuştur;

bu durumda EM rasyoneldir ve EF ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Yine, AC, CB dikdörtgeni orta değer olduğundan, AC, CB dikdörtgeninin iki katı da orta değerdir. **[DS. X.23]**

Ve HG'ye eşittir; öyleyse HG de orta değerdir.

Ve EF üzerine çizilmiş ve HM genişliğini oluşturmuştur;

öyleyse HM de rasyoneldir ve EF ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Ve AC, CB yalnızca karede eşölçekli olduğundan, AC, CB ile uzunlukta eşölçeksizdir.

Ama, AC'nin CB'ye oranı, AC üzerindeki karenin AC, CB dikdörtgenine oranına eşittir;

bu durumda AC üzerindeki kare AC, CB dikdörtgeniyle eşölçeksizdir. **[X.11]**

Ama, AC, CB üzerindeki kareler AC üzerindeki kareyle eşölçeklidir, ve ayrıca AC, CB dikdörtgeninin iki katı AC, CB dikdörtgeniyle eşölçeklidir; **[X.6]**

bu durumda AC, CB üzerindeki kareler AC, CB dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksizdir. **[X.13]**

Ve EG alanı AC, CB üzerindeki karelere eşittir,

ve bu arada GH alanı da AC, CB dikdörtgeninin iki katına eşittir;

bu durumda EG, HG ile eşölçeksiz olur.

Ama EG'nin HG'ye oranı, EM'nin HM'ye oranına eşittir. **[X.11]**

Ve ikisi de rasyoneldir;

öyleyse EM, MH yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur;

bu durumda EH bir ayrıktır ve HM ona eklenmiştir. **[X.73]**

Benzer şekilde HN'nin de ona eklenmiş olduğunu kanıtlayabiliriz;

öyleyse bir ayrığa, bütünle yalnızca karede eşölçekli olan farklı doğrular eklenmiş olur: bu olamaz. **[X.79]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

82. Önerme:
Ufak bir doğruya bütünle karede eşölçeksiz olan, ve bütünle üzerine çizilen karelerin toplamı rasyonel olan ama bütünle içerdiği dikdörtgen orta değer olan yalnızca tek bir doğru eklenebilir.

AB ufak bir doğru olsun ve BC ona eklensin;

bu durumda AC, CB üzerlerindeki karelerin toplamı rasyonel olan ama içerdikleri dikdörtgenin iki katı orta değer olan karede eşölçeksiz iki doğrudur. **[X.76]**

Diyorum ki, başka hiçbir doğru aynı koşulları sağlayacak şekilde AB'ye eklenemez.

Çünkü, eğer mümkünse, BD bu şekilde eklensin;

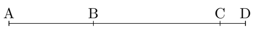
bu durumda AD, DB de yukardaki koşulları sağlayan karede eşölçeksiz iki doğrudur. **[X.76]**

Şimdi, AD, DB üzerindeki karelerin AC, CB üzerindeki karelerden farkı, AD, DB dikdörtgeninin iki katının AC, CB dikdörtgeninin iki katından farkına eşit olduğundan,

ve bu arada, ikisi de rasyonel olduğundan, AD, DB üzerindeki karelerin AC, CB üzerindeki karelerden farkı rasyonel olduğundan,

AD, DB dikdörtgeninin iki katının AC, CB dikdörtgeninin iki katından farkı da rasyoneldir:

ama bu olamaz, çünkü ikisi de orta değerdir. **[X.26]**

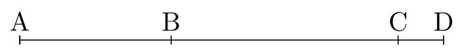


Öyleyse ufak bir doğruya, bütünle üzerindeki karelerin toplamı rasyonel olan ama içerdikleri dikdörtgenin iki katı orta değer olan, bütünle karede eşölçeksiz tek bir doğru eklenebilir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

83. Önerme:

Rasyonel alanla orta değer bütün üreten türden bir doğruya bütünle karede eşölçeksiz olacak şekilde, bütünle üzerine çizilen karelerin toplamı orta değer olan ama bütünle oluşturduğu dikdörtgenin iki katı rasyonel olan yalnızca tek bir doğru eklenebilir.



AB, rasyonel alanla orta değer bütün oluşturan türde bir doğru olsun, ve AB'ye AC eklensin;

bu durumda AC, CB yukardaki koşulları sağlayan karede eşölçeksiz iki doğrudur. **[X.77]**

Diyorum ki, AB'ye aynı koşulları sağlayacak şekilde başka hiçbir doğru eklenemez.

Çünkü, eğer mümkünse, bu şekilde BD eklensin;

bu durumda AD, DB de yukardaki koşulları sağlayan, karede eşölçeksiz iki doğrudur. **[X.77]**

O zaman, önceki durumlarda olduğu gibi, AD, DB üzerindeki karelerin AC, CB üzerindeki karelerden farkı, AD, DB dikdörtgeninin iki katının AC, CB dikdörtgeninin iki katından farkına eşit olduğundan,

ve bu arada AD, DB dikdörtgeninin iki katının AC, CB dikdörtgeninin iki katından farkı, her ikisi de rasyonel olduğu için, rasyonel olduğundan,

AD, DB üzerindeki karelerin de AC, CB üzerindeki karelerden farkı rasyoneldir:

ama bu olamaz, çünkü ikisi de orta değerdir. **[X.26]**

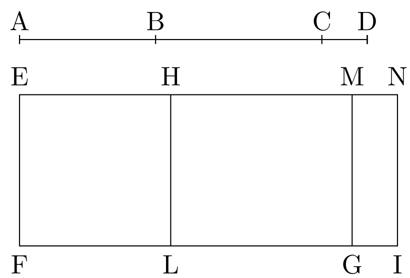
Öyleyse AB'ye yukardaki koşulları sağlayan ve bütünle karede eşölçeksiz başka bir doğru eklenemez;

öyleyse tek bir doğru eklenebilir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

84. Önerme:

Orta değer alanla orta değer bütün üreten türden bir doğruya bütünle karede eşölçeksiz olacak şekilde, bütünle üzerine çizilen karelerin toplamı orta değer olan ama bütünle oluşturduğu dikdörtgenin alanının iki katı hem orta değer hem de bütünle üzerine çizilen karelerin toplamıyla eşölçeksiz olan yalnızca tek bir doğru eklenebilir.



AB, orta değer alanla orta değer bütün üreten türden bir doğru olsun, ve ona BC eklensin;

bu durumda AC, CB yukardaki koşulları sağlayan karede eşölçeksiz iki doğrudur. **[X.78]**

Diyorum ki, başka hiçbir doğru yukardaki koşulları sağlayacak şekilde AB'ye eklenemez.

Çünkü, eğer mümkünse, BD bu şekilde eklensin,

bu durumda AD, DB doğruları karede eşölçeksizdir, AD, DB üzerindeki karelerin toplamı orta değerdir, AD, DB dikdörtgeninin iki katı orta değerdir, ve AD, DB üzerindeki kareler AD, DB dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksizdir. **[X.78]**

Bir EF rasyonel doğrusu alınsın,

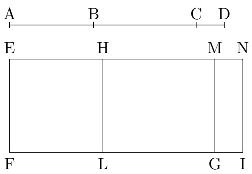
EF üzerine, AC, CB üzerindeki karelere eşit EG çizilsin, ve EM genişliği oluşsun,

ve EF üzerine, AC, CB dikdörtgeninin iki katına eşit HG çizilsin, ve HM genişliği oluşsun;

öyleyse kalan, AB üzerindeki kare, **[II.7]**

EL'ye eşittir;

bu durumda EL'ye eşit karenin kenarı AB olur.



Yine, EF üzerine, AD, DB üzerindeki karelere eşit EI çizilsin, ve EN genişliği oluşsun.

Ama AB üzerindeki kare EL'ye eşittir;

öyleyse kalan, AD, DB dikdörtgeninin iki katı, **[II.7]**

HI'ya eşittir.

Şimdi, AC, CB üzerindeki karelerin toplamı orta değer olduğundan ve EG'ye eşit olduğundan, EG de orta değerdir.

Ve EF rasyonel doğrusu üzerine çizilmiş ve EM genişliğini oluşturmuştur;

öyleyse EM rasyoneldir ve EF ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Yine, AC, CD dikdörtgeninin iki katı orta değer olduğundan ve HG'ye eşit olduğundan, HG de orta değerdir.

Ve EF rasyonel doğrusu üzerine çizilmiş ve HM genişliğini oluşturmuştur;

öyleyse HM rasyoneldir ve EF ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Ve AC, CB üzerindeki kareler AC, CB dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksiz olduğundan,

EG de HG ile eşölçeksizdir;

öyleyse EM de MH ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[VI.1, X.11]**

Ve ikisi de rasyoneldir;

öyleyse EM, MH yalnızca karede eşölçekli rasyonel iki doğrudur;

bu durumda EH ayrık olur ve HM ona eklenmiştir. **[X.73]**

Benzer şekilde yine EH'nin ayrık olduğunu ve HN'nin ona eklendiğini kanıtlayabiliriz.

Böylece bir ayrığa bütünle yalnızca karede eşölçekli olan farklı doğrular eklenmiş olur:

ama bunun olamayacağı kanıtlanmıştı. **[X.79]**

Öyleyse AB'ye başka doğrular eklenemez.

Öyleyse AB'ye bütünle karede eşölçeksiz olan, bütünle üzerindeki karelerin toplamı orta değer olan, bütünle içerdiği dikdörtgenin iki katı orta değer olan, ve bütünle üzerindeki karelerin bütünle içerdiği dikdörtgenle eşölçeksiz olduğu tek bir doğru eklenebilir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

5. Tanımlar III

11 Bir rasyonel doğru ve bir de ayrık doğru verilmiş olsun. Bu ayrık doğruya öyle bir doğru eklenmiş olsun ki bütün üzerindeki kare eklenen parça üzerindeki kareden bütünle uzunlukta eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olsun ve bütün de başta seçilmiş olan rasyonel doğruyla uzunlukta eşölçekli olsun. Bu durumda bu ayrık doğruya **birinci türden ayrık** denir.

12 Ama eklenen doğru baştaki rasyonel doğruyla eşölçekliyse, ve bütün üzerindeki kare eklenen parça üzerindeki kareden bütünle eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyükse, bu durumda bu ayrık doğruya **ikinci türden ayrık** denir.

13 Ame ne bütün ne de eklenen parça baştaki rasyonel doğruyla eşölçekliyse; ve bütün üzerindeki kare eklenen parça üzerindeki kareden bütünle uzunlukta eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyükse, bu durumda bu ayrık doğruya **üçüncü türden ayrık** denir.

14 Ve yine, bütün üzerindeki kare eklenen parça üzerindeki kareden bütünle eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyükse, ve eğer bütün baştaki rasyonel doğruyla eşölçekliyse, bu durumda bu ayrık doğruya **dördüncü türden ayrık** denir.

15 ve eğer eklenen parça eşölçekliyse **beşinci**;

16 ikisi de değilse **altıncı**.

[A bir ayrık doğru olsun ve R de seçilen rasyonel doğru. A ayrığının tek olduğu 79. önermede gösterilen eklentisi de E olsun. L doğrusu da $(\mathsf{A}+\mathsf{E})^2 - \mathsf{E}^2 = \mathsf{L}^2$ olacak şekilde seçilmiş olsun.

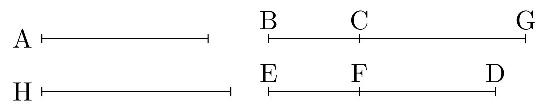
Önce $\mathsf{A}+\mathsf{E}$ ile L eşölçekli olsun.
Eğer $\mathsf{A}+\mathsf{E}$ ile R eşölçekliyse, A birinci türdendir.
Eğer E ile R eşölçekliyse, A ikinci türdendir.
Eğer ne $\mathsf{A}+\mathsf{E}$ ne de E, R ile eşölçekliyse, A üçüncü türdendir.

Şimdi de $\mathsf{A}+\mathsf{E}$ ile L eşölçeksiz olsun.
Eğer $\mathsf{A}+\mathsf{E}$ ile R eşölçekliyse, A dördüncü türdendir.
Eğer E ile R eşölçekliyse, A beşinci türdendir.
Eğer ne $\mathsf{A}+\mathsf{E}$ ne de E, R ile eşölçekliyse, A altıncı türdendir.]

6. Önermeler

85. Önerme:

Birinci türden ayrık bir doğru bulmanın yolu.



Rasyonel bir A doğrusu alınsın, ve BG doğrusu A ile uzunlukta eşölçekli olsun; böylece BG de rasyonel olur.

DE, EF gibi iki kare sayı alınsın ve aralarındaki fark, FD, bir kare sayıya eşit olmasın;

bu durumda ED'nin DF'ye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmaz.

ED'nin DF'ye oranının BG üzerindeki karenin GC üzerindeki kareye eşit olması sağlansın; **[DS. X.6]**

öyleyse BG üzerindeki kare GC üzerindeki kareyle eşölçeklidir. **[X.6]**

Ama BG üzerindeki kare rasyoneldir; öyleyse GC üzerindeki kare de rayoneldir;

bu durumda GC de rasyonel olur.

Ve, ED'nin FD'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmadığından, BG üzerindeki karenin GC üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

öyleyse BG, GC ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

Ve ikisi de rasyoneldir; öyleyse BG, GC yalnızca karede eşölçekli olan iki rasyonel doğrudur;

bu durumda BC ayrık olur. **[X.73]**

Şimdi de diyorum ki, aynı zamanda birinci türden ayrıktır.

Çünkü, H üzerindeki kare, BG üzerindeki karenin GC üzerindeki kareye farkına eşit olsun.

Şimdi, ED'nin FD'ye oranı, BG üzerindeki karenin GC üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan,

çevrilmiş oranlar olarak, DE'nin EF'ye oranı, GB üzerindeki karenin H üzerindeki kareye oranına eşittir. **[DS. V.19]**

Ama DE'nin EFye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşittir, çünkü ikisi de karedir;

öyleyse GB üzerindeki karenin H üzerindeki kareye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşittir;

bu durumda BG, H ile eşölçekli olur. **[X.9]**

Ve BG üzerindeki kare GC üzerindeki kareden H üzerindeki kare kadar büyüktür;

öyleyse BG üzerindeki kare GC üzerindeki kareden, BG ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

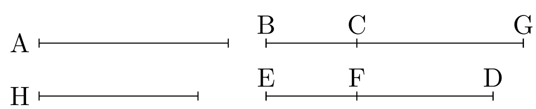
Ve BG'nin tamamı başta alınan A rasyonel doğrusuyla eşölçeklidir:

Öyleyse BC birinci türden ayrıktır. **[Tan. X.11]**

Böylece birinci türden ayrık BC bulunmuştur.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

86. Önerme:
İkinci türden ayrık bir doğru bulmanın yolu.



Rasyonel bir A doğrusu alınsın, ve GC doğrusu A ile uzunlukta eşölçekli olsun; böylece GC rasyonel olur.

İki kare sayı DE, EF alınsın, ve farkları DF kare olmasın.

Şimdi, FD'nin DE'ye oranının, CG üzerindeki karenin GB üzerindeki kareye eşit olması sağlansın. **[DS. X.6]**

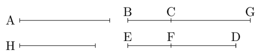
Bu durumda CG üzerindeki kare GB üzerindeki kareyle eşölçekli olur. **[X.6]**

Ama CG üzerindeki kare rasyoneldir; öyleyse GB üzerindeki kare de rasyoneldir;

bu durumda BG rasyonel olur.

Ve, GC üzerindeki karenin GB üzerindeki kareye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmadığından,

CG, GB ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**



Ve ikisi de rasyoneldir; öyleyse CG, GB yalnızca karede eşölçekli olan iki rasyonel doğrudur;

bu durumda BC ayrık olur. **[X.73]**

Şimdi de diyorum ki, aynı zamanda ikinci türden ayrıktır.

Çünkü, H üzerindeki kare, BG üzerindeki karenin GC üzerindeki kareden farkına eşit olsun.

O zaman, BG üzerindeki karenin GC üzerindeki kareye oranı, ED sayısının DF sayısına oranına eşit olduğundan,

çevrilmiş oranlar olarak, BG üzerindeki karenin H üzerindeki kareye oranı, DE'nin EF'ye oranına eşittir. **[DS. V.19]**

Ve DE, EF sayılarının her biri karedir;

öyleyse BG üzerindeki karenin H üzerindeki kareye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşittir;

bu durumda BG, H ile uzunlukta eşölçekli olur. **[X.9]**

Ve BG üzerindeki kare GC üzerindeki kareden H üzerindeki kare kadar büyüktür;

öyleyse BG üzerindeki kare GC üzerindeki kareden, BG ile uzunlukta eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

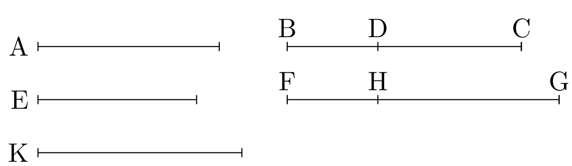
Ve, eklenen CG, başta alınan A rasyonel doğrusuyla eşölçeklidir.

Öyleyse BC ikinci türden ayrıktır. **[Tan. X.12]**

Böylece ikinci türden ayrık BC bulunmuştur.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

87. Önerme:
Üçüncü türden ayrık bir doğru bulmanın yolu.



Rasyonel bir A doğrusu alınsın, birbirine oranı bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmayan E, BC, CD gibi üç sayı alınsın, ama

CB'nin BD'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olsun.

Ve E'nin BC'ye oranının, A üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranına eşit olması,

ve BC'nin CD'ye oranının, FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranına eşit olması sağlansın. **[DS. X.6]**

O zaman, E'nin BC'ye oranı, A üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan, A üzerindeki kare FG üzerindeki kareyle eşölçeklidir. **[X.6]**

Ama A üzerindeki kare rasyoneldir; öyleyse FG üzerindeki kare de rasyoneldir;

bu durumda FG rasyonel olur.

Ve, E'nin BC'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmadığından, A üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

öyleyse A, FG ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

Yine, BC'nin CD'ye oranı, FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan, FG üzerindeki kare GH üzerindeki kareyle eşölçeklidir. **[X.6]**

Ama FG üzerindeki kare rasyoneldir; öyleyse GH üzerindeki kare de rasyoneldir;

bu durumda GH rasyonel olur.

Ve, BC'nin CD'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmadığından, FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

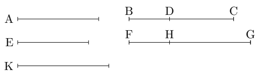
öyleyse FG, GH ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

Ve ikisi de rasyoneldir; öyleyse FG, GH yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur;

bu durumda FH ayrıktır. **[X.73]**

Şimdi de diyorum ki, aynı zamanda üçüncü türden ayrıktır.

Çünkü, E'nin BC'ye oranı, A üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan,



ve BC'nin CD'ye oranı, FG üzerindeki karenin HG üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan,

eşit dış oranlar olarak, E'nin CD'ye oranı, A üzerindeki karenin HG üzerindeki kareye oranına eşit olur. **[V.22]**

Ama E'nin CD'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

bu nedenle A üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kar sayıya oranına eşit değildir;

öyleyse A, GH ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

Öyleyse, FG, GH doğrularının hiçbiri başta alınan A rasyonel doğrusuyla eşölçekli değildir.

Şimdi, K üzerindeki kare FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye farkına eşit olsun.

O zaman, BC'nin CD'ye oranı, FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan,

çevrilmiş oranlar olarak, BC'nin BD'ye oranı, FG üzerindeki karenin K üzerindeki kareye oranına eşit olur. **[DS. V.19]**

Ama BC'nin BD'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşittir;

öyleyse FG üzerindeki karenin K üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşittir.

Bu durumda FG, K ile uzunlukta eşölçeklidir, **[X.9]**

ve FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareden farkı, FG ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kareye eşittir.

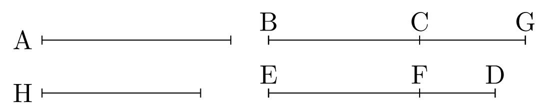
Ve FG, GH doğrularının hiçbiri başta alınan rasyonal A doğrusuyla eşölçekli değildir;

Öyleyse FH üçüncü türden ayrıktır. **[Tan. X.13]**

Böylece üçüncü türden ayrık FH bulunmuştur.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

88. Önerme:
Dördüncü türden ayrık bir doğru bulmanın yolu.



Rasyonel bir A doğrusu ve onunla uzunlukta eşölçekli bir BG doğrusu alınsın; bu durumda BG rasyoneldir.

DF, FE gibi iki sayı alınsın öyle ki DE toplamının DF, EF sayılarının hiçbirine oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmasın.

DE'nin EF'ye oranının, BG üzerindeki karenin GC üzerindeki kareye oranına eşit olması sağlansın; **[DS. X.6]**

bu durumda BG üzerindeki kare GC üzerindeki kareyle eşölçekli olur. **[X.6]**

Ama BG üzerindeki kare rasyoneldir; öyleyse GC üzerindeki kare de rasyoneldir;

bu durumda GC rasyonel olur.

Şimdi, DE'nin EF'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmadığından, BG üzerindeki karenin GC üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

öyleyse BG, GC ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

Ve ikisi de rasyoneldir;

öyleyse BG, GC yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur;

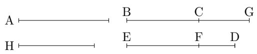
bu durumda BC ayrık olur. **[X.73]**

Şimdi, H üzerindeki kare BG üzerindeki karenin GC üzerindeki kareye farkına eşit olsun.

O zaman, DE'nin EF'ye oranı, BG üzerindeki karenin GC üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan,

çevrilmiş oranlar olarak, ED'nin DF'ye oranı, GB üzerindeki karenin H üzerindeki kareye oranına eşit olur. **[DS. V.19]**

Ama ED'nin DF'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;



öyleyse GB'nin üzerindeki karenin H üzerindeki kareye ornaı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

bu durumda BG, H ile eşölçeksizdir. **[X.9]**

Ve BG üzerindeki karenin GC üzerindeki kareye farkı H üzerindeki kareye eşittir;

öyleyse BG üzerindeki karenin GC üzerindeki kareye farkı BG ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kareye eşittir.

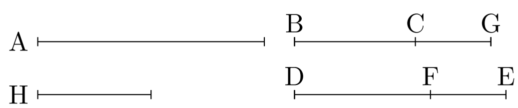
Ve BG'nin tamamı başta alınan A rasyonel doğrusuyla uzunlukta eşölçeklidir.

Öyleyse BC dördüncü türden ayrıktır. **[Tan. X.14]**

Böylece dördüncü türden ayrık bulunmuştur.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

89. Önerme:
Beşinci türden ayrık bir doğru bulmanın yolu.



Rasyonel bir A doğrusu alınsın ve CG, A ile uzunlukta eşölçekli olsun; bu durumda CG rasyonel olur.

Yine DF, FE gibi iki sayı alınsın öyle ki DE toplamının DF, EF sayılarının hiçbirine oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmasın;

ve FE'nin ED'ye oranının, CG üzerindeki karenin GB üzerindeki kareye oranına eşit olması sağlansın.

Öyleyse GB üzerindeki kare de rasyoneldir; **[X.6]**

bu durumda BG de rasyonel olur.

Şimdi, DE'nin EF'ye oranı, BG üzerindeki karenin GC üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan,

ve bu arada DE'nin EF'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmadığından, BG üzerindeki karenin GC üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

bu durumda BG, GC ile uzunlukta eşölçeksiz olur. **[X.9]**

Ve ikisi de rasyoneldir;

öyleyse BG, GC yalnızca karede eşölçekli olan iki rasyonel doğrudur;

bu durumda BC ayrıktır. **[X.73]**

Şimdi de diyorum ki, aynı zamanda altıncı türden ayrıktır.

Çünkü, H üzerindeki kare BG üzerindeki karenin GC üzerindeki kareden farkına eşit olsun.

O zaman, BG üzerindeki karenin GC üzerindeki kareye oranı, DE'nin EF'ye oranına eşit olduğundan,

çevrilmiş oranlar olarak, ED'nin DF'ye oranı, BG üzerindeki karenin H üzerindeki kareye oranına eşittir. **[DS. V.19]**

Ama ED'nin DF'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

öyleyse BG üzerindeki karenin H üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

bu durumda BG, H ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

Ve BG üzerindeki karenin GC üzerindeki kareden farkı H üzerindeki kareye eşittir;

öyleyse GB üzerindeki karenin GC üzerindeki kareden farkı, GB ile uzunlukta eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kareye eşittir.

Ve eklenen CG, başta alınan A rasyonel doğrusuyla uzunlukta eşölçeklidir;

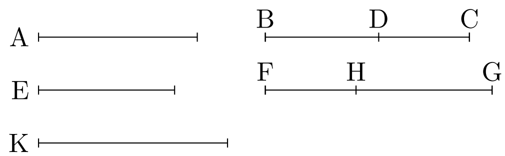
öyleyse BC beşinci türden ayrıktır. **[Tan. X.15]**

Böylece beşinci türden ayrık BC bulunmuştur.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

90. Önerme:

Altıncı türden ayrık bir doğru bulmanın yolu.



Rasyonel bir A doğrusu, ve birbirlerine oranı bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmayan üç tane E, BC, CD sayıları alınsın;

ve dahası CB'nin BD'ye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmasın.

E'nin BC'ye oranının A üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranına eşit olması,

ve BC'nin CD'ye oranının, FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranına eşit olması sağlansın. **[DS. X.6]**

Şimdi, E'nin BC'ye oranı, A üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan, A üzerindeki kare FG üzerindeki kareyle eşölçeklidir. **[X.6]**

Ama A üzerindeki kare rasyoneldir; öyleyse FG üzerindeki kare de rasyoneldir;

bu durumda FG de rasyonel olur.

Ve, E'nin BC'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmadığından, A üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

bu durumda A, FG ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

Yine, BC'nin CD'ye oranı, FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan, FG üzerindeki kare GH üzerindeki kareyle eşölçeklidir. **[X.6]**

Ama FG üzerindeki kare rasyoneldir; öyleyse GH üzerindeki kare de rasyoneldir;

bu durumda GH de rasyonel olur.

Ve, BC'nin CD'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit olmadığından, FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

bu durumda FG, GH ile eşölçeksizdir. **[X.9]**

Ve ikisi de rasyoneldir;

öyleyse FG, GH yalnızca karede eşölçekli olan iki rasyonel doğrudur;

bu durumda FH ayrıktır. **[X.73]**

Şimdi de diyorum ki, aynı zamanda altıncı türden ayrıktır.

Çünkü, E'nin BC'ye oranı, A üzerindeki karenin FG üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan,

ve BC'nin CD'ye oranı, FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan,

eşit dış oranlar olarak, E'nin CD'ye oranı, A üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranına eşittir. **[V.22]**

Ama E'nin CD'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

öyleyse A üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

bu durumda A, GH ile uzunlukta eşölçeksizdir; **[X.9]**

öyleyse FG, GH doğrularının hiçbir A rasyonel doğrusuyla eşölçekli değildir.

Şİmdi, K üzerindeki kare, FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareden farkına eşit olsun.

O zaman, BC'nin CD'ye oranı, FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan,

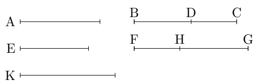
çevrilmiş oranlar olarak, CB'nin BD'ye oranı, FG üzerindeki karenin K üzerindeki kareye oranına eşittir. **[DS. V.19]**

Ama CB'nin BD'ye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

öyleyse FG üzerindeki karenin K üzerindeki kareye oranı da bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

bu durumda FG, K ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

Ve FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareden farkı K üzerindeki kareye eşittir;



öyleyse FG üzerindeki karenin GH üzerindeki kareden farkı FG ile uzunlukta eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kareye eşittir.

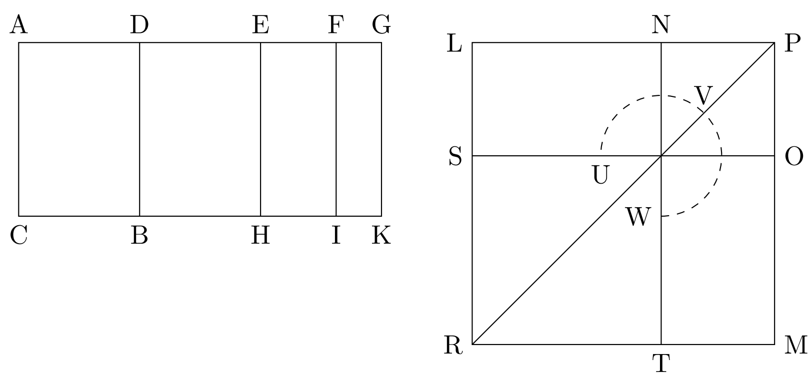
Ve FG, GH doğrularının hiçbiri başta alınan A rasyonel sayısıyal eşölçekli değildir.

Öyleyse FH altıncı türden ayrıktır. **[Tan. X.16]**

Böylece altıncı türden ayrık FH bulunmuştur.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

91. Önerme:
Rasyonel bir doğruyla birinci türden ayrık bir doğrunun içerdiği alana eşit olan karenin kenarı ayrıktır.



AB alanı, AC rasyonel doğrusuyla birinci türden ayrık AD doğrusunun içerdiği bir alan olsun;

diyorum ki, AB'ye eşit karenin kenarı ayrıktır.

Çünkü, AD birinci türden ayrık olduğundan, eklentisi DG olsun; öyleyse AG, GD yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur. **[X.73]**

Ve AG'nin tamamı, başta alınan rasyonel AC doğrusuyla eşölçeklidir,

ve AG üzerindeki kare GD üzerindeki kareden AG ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür; **[Tan. X.11]**

bu durumda, eğer AG üzerine DG üzerindeki karenin dörtte birine eşit ve bir kare kadar eksik bir paralelkenar çizilirse, bu çizim AG'yi eşölçekli parçalara böler. **[X.17]**

DG doğrusu E'de ikiye bölünsün,

ve AG üzerine EG üzerindeki kareye eşit ve bir kare kadar eksik bir paralelkenar çizilsin, ve bu AF, FG dikdörtgeni olsun;

bu durumda AF, FG ile eşölçeklidir.

Ve E, F, G noktalarından AC'ye paralel EH, FI, GK çizilsin.

Şimdi, AF, FG ile eşölçekli olduğundan, AG de AF, FG doğrularının her biriyle uzunlukta eşölçeklidir. **[X.15]**

Ama AG, AC ile eşölçeklidir; öyleyse AF, FG doğrularının her biri AC ile uzunlukta eşölçeklidir. **[X.12]**

Ve AC rasyoneldir; öyleyse AF, FG doğrularının her biri rasyoneldir, ve böylece AI, FK dikdörtgenlerinin her biri de rasyonel olur. **[X.19]**

Şimdi, DE, EG ile eşölçekli olduğundan, DG de DE, EG doğrularının her biriyle eşölçeklidir. **[X.15]**

Ama DG rasyoneldir ve AC ile uzunlukta eşölçeksizdir; öyleyse DE, EG doğrularının her biri de rasyoneldir ve AC ile eşölçeksizdir; **[X.13]**

bu durumda DH, EK dikdörtgenlerinin her biri orta değerdir. **[X.21]**

Şimdi, AI'ya eşit LM karesi çizilsin, ve onunla ortak bir açısı olan, LPM açısı, ve FKye eşit NO karesi çizilsin;

bu durumda LM, NO kareleri aynı köşegen etrafındadır. **[VI.26]**

Köşegenleri PR olsun ve şekil çizilsin.

O zaman, AF, FG tarafından içerilen dikdörtgen EG üzerindeki kareye eşit olduğundan, AF'nin EG'ye oranı, EG'nin FG'ye oranına eşittir. **[VI.17]**

Ama AF'nin EG'ye oranı, AI'nın EK'ye oranına eşittir, ve EG'nin FG'ye oranı, EK'nin KFye oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse EK alanı AI, KF arasında orta orantılıdır. **[V.11]**

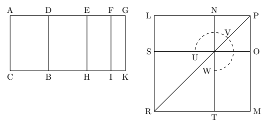
Ama daha önce kanıtlandığı gibi MN de LM, ve NO arasında orta orantılıdır, **[YÖ.X.53]**

ve AI alanı LM karesine, KF de NO'ya eşittir;

bu durumda MN, EK'ye eşit olur.

Ama EK, DH'ye, ve MN, LO'ya eşittir;

öyleyse DK alanı UVW kadranı ve NO'ya eşittir.



Ama AK de LM, NO karelerine eşittir;

öyleyse AB kalanı ST'ye eşittir.

Ama ST alanı LN üzerindeki karedir; öyleyse LN üzerindeki kare AB'ye eşittir;

bu durumda AB'ye eşit karenin kenarı LN olur.

Şimdi de diyorum ki, LN ayrıktır.

Çünkü, AI, FK dikdörtgenlerinin her biri rasyonel ve LM, NO'ya eşit olduğundan, LM, NO karelerinin her biri, yani sırasıyla LP, PN üzerindeki kareler, rasyoneldir;

bu durumda LP, PN doğrularının her biri de rasyonel olur.

Yine, DH orta değer olduğundan ve LO'ya eşit olduğundan, LO da orta değerdir.

O zaman, LO orta değerken NO rasyonel olduğundan, LO, NO ile eşölçeksizdir.

Ama, LO'nun NO'ya oranı, LP'nin PN'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

bu durumda LP, PN ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.11]**

Ve her ikisi de rasyoneldir; öyleyse LP, PN yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur;

bu durumda LN ayrık olur. **[X.73]**

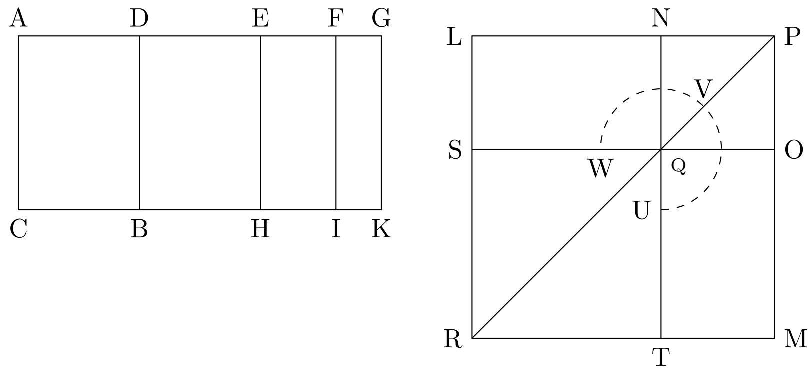
Ve AB alanına eşit karenin kenarıdır;

öyleyse AB alanına eşit karenin kenarı ayrıktır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

92. Önerme:

Rasyonel bir doğruyla ikinci türden ayrık bir doğrunun içerdiği alana eşit olan karenin kenarı orta değer doğrunun birinci ayrığı olan bir doğrudur.



AB alanı, AC rasyonel doğrusuyla ikinci türden ayrık AD doğrusunun içerdiği bir alan olsun;

diyorum ki, AB'ye eşit karenin kenarı orta değer doğrunun birinci ayrığıdır.

Çünkü, AD'nin eklentisi DG olsun; bu durumda AG, GD yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır, **[X.73]**

ve DG eklentisi başta alınan AC rasyonel doğrusuyla eşölçeklidir,

ayrıca AG'nin tamamı üzerindeki kare GD eklentisi üzerindeki kareden AG ile uzunlukta eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[Tan. X.12]**

O zaman, AG üzerindeki kare GD üzerindeki kareden AG ile uzunlukta eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olduğundan,

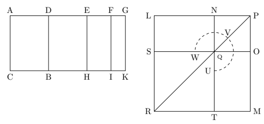
eğer AG üzerine GD üzerindeki karenin dörtte birine eşit ve bir kare şekil kadar eksik bir paralelkenar çizilirse, bu çizim AG'yi eşölçekli parçalara böler. **[X.17]**

O zaman DG, E'de ikiye bölünsün,

AG üzerine EG üzerindeki kareye eşit ve bir kare şekli kadar eksik bir paralelkenar çizilsin, ve bu AF, FG dikdörtgeni olsun;

bu durumda AF, FG ile uzunlukta eşölçeklidir.

Öyleyse AG de AF, FG doğrularının her biriyle eşölçeklidir. **[X.15]**



Ama AG rasyoneldir ve AC ile uzunlukta eşölçeksizdir;

bu nedenle AF, FG doğrularının her biri de rasyoneldir ve AC ile uzunlukta eşölçeksizdir; **[X.13]**

bu durumda AI, FK dikdörtgenlerinin her biri orta değer olur. **[X.21]**

Yine, DE, EG ile eşölçekli olduğundan, DG de DE, EG doğrularının her biriyle eşölçeklidir. **[X.15]**

Ama DG, AC ile uzunlukta eşölçeklidir.

Öyleyse DH, EK dikdörtgenlerinin her biri rasyoneldir. **[X.19]**

O zaman, AI'ya eşit LM karesi çizilsin, ve FK'ye eşit ve LM ile aynı açı, yani LPM açısı, etrafında olan NO çıkarılsın;

bu durumda LM, NO kareleri aynı köşegen etrafındadır. **[VI.26]**

Köşegenleri PR olsun ve şekil çizilsin.

O zaman, AI, FK orta değer oldukları ve LP, PN üzerindeki karelere eşit olduklarından, LP, PN üzerindeki kareler de orta değerdir;

bu durumda LP, PN de yalnızca karede eşölçekli orta değer doğrulardır.

> *[Dikkatli okuyucu bu aşamada* LP *ile* PN*'nin karede eşölçekli olduklarının kanıtlandığını ama "yalnızca karede" eşölçekli olduklarının henüz kanıtlanmadığını farkedecektir. Bu eksiklik kanıtın sonlarında kapatılır.]*

Ve AF, FG dikdörtgeni EG üzerindeki kareye eşit olduğundan,

AF'nin EG'ye oranı, EG'nin FG'ye oranına eşittir, **[VI.17]**

ayrıca AF'nin EG'ye oranı, AI'nın EK'ye oranına eşittir,

ve EG'nin FG'ye oranı, EK'nin FK'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse EK alanı AI, FK arasında orta orantılıdır. **[VI.11]**

Ama MN alanı da LM, NO kareleri arasında orta orantılıdır, ve AI, LM'ye, ve FK, NO'ya eşittir;

bu durumda MN, EK'ye eşit olur.

Ama DH, EK'ye, ve LO, MN'ye eşittir;

öyleyse DK'nin tamamı UVW kadranına ve NO'ya eşittir.

O zaman, AK'nin tamamı LM, NO'ya eşit olduğundan, ve bunların içinde DK alanı UVW kadranı ve NO'ya eşit olduğundan,

AB kalanı TS'ye eşittir.

Ama TS alanı LN üzerindeki karedir; öyleyse LN üzerindeki kare AB alanına eşittir;

bu durumda AB'ye eşit karenin kenarı LN'dir.

Şimdi de diyorum ki, LN doğrusu orta değer doğrunun ayrığıdır.

Çünkü, EK rasyonel ve LO'ya eşit olduğundan, LO, yani LP, PN dikdörtgeni rasyoneldir.

Ama NO'nun orta değer olduğu kanıtlanmıştı; öyleyse LO, NO ile eşölçeksizdir.

Ama, LO'nun NO'ya oranı, LP'nin PN'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse LP, PN doğruları rasyonel bir dikdörtgen içeren, yalnızca karede eşölçekli orta değer doğrulardır;

bu durumda LN orta değer doğrunun birinci ayrığı olur. **[X.74]**

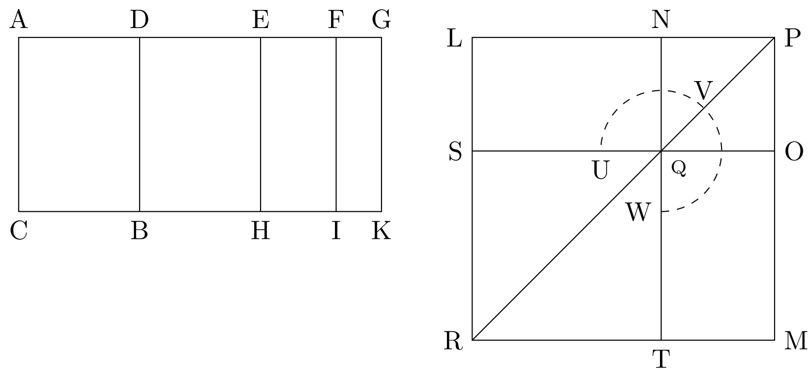
Ve AB alanına eşit karenin kenarıdır.

Öyleyse AB alanına eşit karenin kenarı orta değer doğrunun birinci ayrığıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

93. Önerme:

Rasyonel bir doğruyla üçüncü türden ayrık bir doğrunun içerdiği alana eşit karenin kenarı orta değer doğrunun ikinci ayrığıdır.



AB alanı, AC rasyonel doğrusuyla üçüncü türden ayrık AD doğrusunun içerdiği bir alan olsun;

diyorum ki, AB'ye eşit karenin kenarı orta değer doğrunun ikinci ayrığıdır.

Çünkü, AD'nin eklentisi DG olsun; bu durumda AG, GD yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır,

ve AG, GD doğrularının hiçbiri başta alınan AC rasyonel doğrusuyla uzunlukta eşölçekli değildir,

ayrıca AG bütünü üzerindeki kare DG eklentisi üzerindeki kareden, AG ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[Tan. X.13]**

O zaman, AG üzerindeki kare GD üzerindeki kareden AG ile uzunlukta eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olduğundan,

eğer AG üzerine GD üzerindeki karenin dörtte birine eşit ve bir kare şekil kadar eksik bir paralelkenar çizilirse, bu çizim AG'yi eşölçekli parçalara böler. **[X.17]**

O zaman DG, E'de ikiye bölünsün,

AG üzerine EG üzerindeki kareye eşit ve bir kare şekil kadar eksik bir paralelkenar çizilsin, ve bu AF, FG dikdörtgeni olsun;

E, F, G noktalarından AC'ye paralel EH, FI, GK çizilsin.

Öyleyse AF, FG eşölçeklidir; bu durumda AI'da FK ile eşölçekli olur. **[VI.1, X.11]**

Ve, AF, FG uzunlukta eşölçekli olduklarından, AG de AF, FG doğrularının her biriyle uzunlukta eşölçeklidir. **[X.15]**

Ama AG rasyoneldir ve AC ile uzunlukta eşölçeksizdir; öyleyse AF, FG de öyledir. **[X.13]**

Öyleyse AI, FK dikdörtgenlerinin her biri orta değerdir. **[X.21]**

Yine, DE, EG ile uzunlukta eşölçekli olduğundan, DG de DE, EG doğrularının her biriyle uzunlukta eşölçeklidir. **[X.15]**

Ama GD rasyoneldir ve AC ile uzunlukta eşölçeksizdir;

öyleyse DE, EG doğrularının her biri de rasyoneldir ve AC ile uzunlukta eşölçeksizdir; **[X.13]**

bu durumda DH, EK dikdörtgenlerinin her biri orta değer olur. **[X.21]**

Ve AG, GD yalnızca karede eşölçekli olduğundan, AG, GD ile uzunlukta eşölçeksizdir.

Ama AG, AF ile, ve DG de EG ile uzunlukta eşölçeklidir;

öyleyse AF, EG ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.13]**

Ama AF'nin EG'ye oranı, AI'nın EKye oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse AI, EK ile eşölçeksizdir. **[X.11]**

Şimdi, AI'ya eşit LM karesi çizilsin, ve LM ile aynı açı etrafında ve FK'ye eşit NO çıkarılsın;

bu durumda LM, NO aynı köşegen etrafındadır. **[VI.26]**

Köşegenleri PR olsun ve şekil çizilsin.

Şimdi, AF, FG dikdörtgeni EG üzerindeki kareye eşit olduğundan,

AF'nin EG'ye oranı, EG'nin FG'ye oranına eşit olur. **[VI.17]**

Ama, AF'nin EG'ye oranı, AI'nın EK'ye oranına eşittir,

ve EG'nin FG'ye oranı, EK'nin FK'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

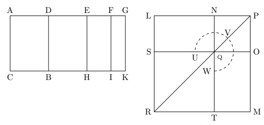
öyleyse AI'nın EK'ye oranı da EK'nin FK'ye oranına eşittir; **[V.11]**

bu durumda EK alanı AI, FK arasında orta orantılıdır.

Ama MN de LM, NO kareleri arasında orta orantılıdır,

ve AI, LM'ye, ve FK, NO'ya eşittir;

bu durumda EK de MN'ye eşit olur.



Ama MN, LO'ya, ve EK, DH'ye eşittir;

öyleyse DK'nin tamamı UVW kadranı ve NO'ya eşittir.

Ama AK de LM, NO'ya eşittir;

öyleyse AB kalanı ST'ye, yani LN üzerindeki kareye eşittir;

öyleyse LN doğrusu AB alanına eşit karenin kenarıdır.

Diyorum ki, LN orta değer doğrunun ikinci ayrığıdır.

Çünkü, AI, FK'nin orta değer olduğu ve LP, PN üzerindeki karelere eşit olduğu kanıtlandığından, LP, PN üzerindeki karelerin her biri de orta değerdir;

bu durumda LP, PN doğrularının her biri orta değer olur.

Ve AI, FK ile eşölçekli olduğundan, **[VI.1, X.11]**

LP üzerindeki kare de PN üzerindeki kareyle eşölçeklidir.

Yine, AI'nın EK ile eşölçeksiz olduğu kanıtlandığından, LM de MN ile eşölçeksizdir, yani LP üzerindeki kareyle LP, PN dikdörtgeni;

böylece LP, PN ile uzunlukta eşölçeksizdir; **[VII.1, X11]**

öyleyse LP, PN yalnızca karede eşölçekli orta değer doğrulardır.

Şimdi de diyorum ki, orta değer bir dikdörtgen içerirler.

Çünkü, EK'nin orta değer olduğu ve LP, PN dikdörtgenine eşit olduğu kanıtlandığından, LP, PN dikdörtgeni de orta değerdir, böylece LP, PN doğruları, orta değer bir dikdörtgen içeren, yalnızca karede eşölçekli orta değer doğrulardır.

Bu durumda LN orta değer doğrunun ikinci ayrığı olur; **[X.75]**

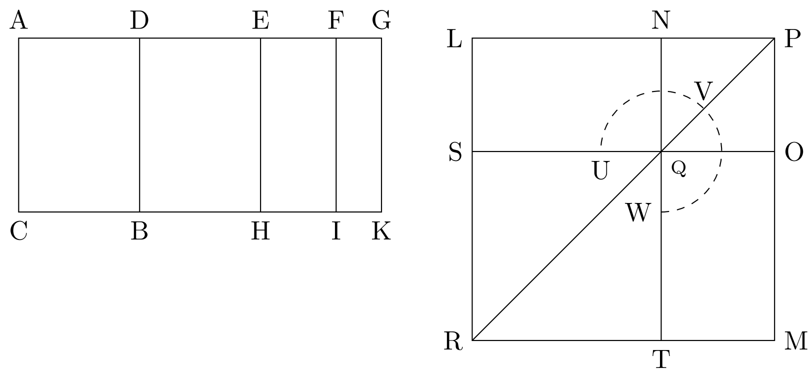
ve AB alanına eşit karenin kenarıdır.

Öyleyse AB alanına eşit karenin kenarı orta değer doğrunun ikinci ayrığıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

94. Önerme:

Rasyonel bir doğruyla dördüncü türden ayrık bir doğrunun içerdiği alana eşit karenin kenarı ufaktır.



AB alanı AC rasyonel doğrusuyla dördüncü türden ayrık AD doğrusu tarafından içerilsin;

diyorum ki, AB alanına eşit karenin kenarı ufaktır.

Çünkü, AD'nin eklentisi DG olsun; bu durumda AG, GD yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır,

AG başta alınan rasyonel AC doğrusuyla eşölçeklidir,

ve AG'nin tümü üzerindeki kare DG eklentisi üzerindeki kareden, AG ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[Tan. X.14]**

O zaman, AG üzerindeki kare GD üzerindeki kareden, AG ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olduğundan,

eğer AG üzerine DG üzerindeki karenin dörtte birine eşit ve bir kare şekil kadar eksik bir paralelkenar çizilirse, bu çizim AG'yi uzunlukta eşölçeksiz parçalara bölecektir. **[X.18]**

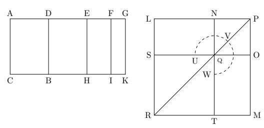
O zaman DG, E'de ikiye bölünsün, ve AG üzerine EG üzerindeki kareye eşit ve bir kare şekil kadar eksik bir paralelkenar çizilsin,

ve bu AF, FG dikdörtgeni olsun;

öyleyse AF, FG ile uzunlukta eşölçeksizdir.

E, F, G'den AC, BD'ye paralel EH, FI, GK çizilsin.

O zaman, AG rasyonel ve AC ile uzunlukta eşölçekli olduğundan, AK'nin tamamı rasyoneldir. **[X.19]**



Yine, DG, AC ile uzunlukta eşölçeksiz olduğundan, ve her ikisi de rasyonel olduklarından, DK orta değerdir. **[X.21]**

Yine, AF, FG ile uzunlukta eşölçeksiz olduğundan, AI da FK ile eşölçeksizdir. **[VI.1, X.11]**

Şimdi, AI'ya eşit LM karesi çizilsin, ve aynı açı etrafında, LPM açısı, ve FK'ye eşit NO çıkarılsın.

Bu durumda LM, NO kareleri aynı köşegen etrafında olur. **[VI.26]**

Köşegenleri PR olsun ve şekil çizilsin.

O zaman, AF, FG dikdörtgeni EG üzerindeki kareye eşit olduğundan,

orantılar olarak, AF'nin EG'ye oranı, EG'nin FG'ye oranına eşittir. **[VI.17]**

Ama, AF'nin EG'ye oranı, AI'nın EK'ye oranına,

ve EG'nin FG'ye oranı, EK'nin FK'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

bu durumda EK alanı AI, FK arasında orta orantılıdır. **[V.11]**

Ama MN de LM, NO kareleri arasında orta orantılıdır,

ve AI, LM'ye, ve FK, NO'ya eşittir;

bu durumda EK de MN'ye eşit olur.

Ama DH eşittir EK, ve LO eşittir MN; öyleyse DK'nin tamamı UVW kadranı ve NO'ya eşittir.

O zaman, AK'nin tamamı LM, NO karelerine eşit olduğundan,

ve bunların içinde DK alanı UVW kadranı ve NO karesine eşit olduğundan,

AB kalanı ST'ye, yani LN üzerindeki kareye eşittir;

bu durumda AB alanına eşit karenin kenarı LN olur.

Diyorum ki, LN ufak denen irrasyonel bir doğrudur.

Çünkü, AK rasyonel olduğundan ve LP, PN üzerindeki karelere eşit olduğundan, LP, PN üzerindeki karelerin toplamı rasyoneldir.

Yine, DK orta değer olduğundan, ve DK alanı LP, PN dikdörtgeninin iki katı olduğundan, LP, PN dikdörtgeninin iki katı orta değerdir.

Ve, AI'nın FK ile eşölçeksiz olduğu kanıtlandığından, LP üzerindeki kare de PN üzerindeki kareyle eşölçeksizdir.

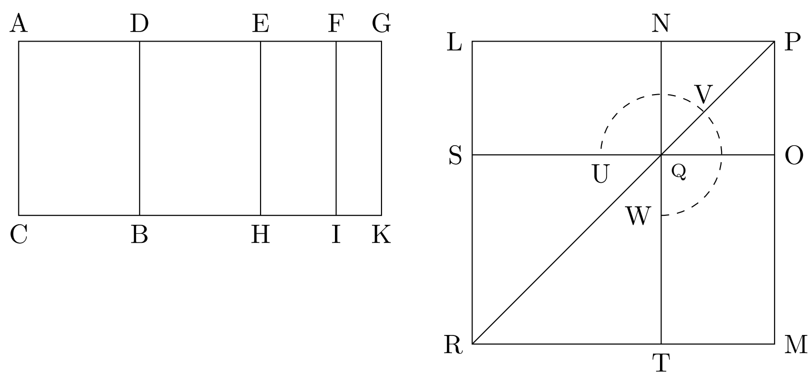
Öyleyse LP, PN doğruları üzerlerindeki karelerin toplamı rasyonel olan, karede eşölçeksiz iki doğrudur, ve içerdikleri dikdörtgenin iki katı orta değerdir.

Bu durumda LN doğrusu ufak denen irrasyonel bir doğrudur. **[X.76]**

Öyleyse AB alanına eşit karenin kenarı ufaktır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

95. Önerme:
Rasyonel bir doğruyla beşinci türden ayrık bir doğrunun içerdiği alana eşit karenin kenarı rasyonel alanla orta değer bütün üreten türden bir doğrudur.



AB alanı AC rasyonel doğrusuyla beşinci türden ayrık AD doğrusu tarafından içerilsin;

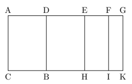
diyorum ki, AB alanına eşit karenin kenarı rasyonel alanla orta değer alan üreten doğrudur.

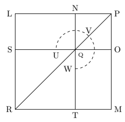
Çünkü, AD'nin eklentisi DG olsun; bu durumda AG, GD yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır,

GD eklentisi başta alınan AC rasyonel doğrusuyla uzunlukta eşölçeklidir,

ve AG'nin tümü üzerindeki kare DG eklentisi üzerindeki kareden AG ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[Tan. X.15]**

Öyleyse, AG üzerine DG üzerindeki karenin dörtte birine eşit ve bir kare şekil kadar eksik bir paralelkenar çizildiğinde, bu çizim AG'yi eşölçeksiz parçalara ayırır. **[X.18]**





O zaman, DG, E'de eşit iki parçaya bölünsün,

AG üzerine EG üzerindeki kareye eşit ve bir kare şekil kadar eksik bir paralelkenar çizilsin, ve bu AF, FG dikdörtgeni olsun;

bu durumda AF, FG ile uzunlukta eşölçeksiz olur.

Şimdi, AG, CA ile eşölçeksiz olduğundan, ve ikisi de rasyonel olduklarından, AK orta değerdir. **[X.21]**

Yine, DG rasyonel olduğundan ve AC ile eşölçekli olduğundan, DK rasyoneldir. **[X.19]**

Şimdi AI'ya eşit LM karesi çizilsin, ve aynı açı etrafında, LPM açısı, FK'ye eşit NO karesi çıkarılsın;

bu durumda LM, NO kareleri aynı köşegen etrafındadır. **[VI.26]**

Köşegenleri PR olsun, ve şekil çizilsin.

Benzer şekilde LN'nin AB alanına eşit karenin kenarı olduğunu kanıtlayabiliriz.

Diyorum ki, LN doğrusu rasyonel alanla orta değer üreten bir doğrudur.

Çünkü, AK'nin orta değer olduğu ve LP, PN üzerindeki karelere eşit olduğu kanıtlandığından, LP, PN üzerindeki karelerin toplamı da orta değerdir.

Yine, DK rasyonel olduğundan ve LP, PN dikdörtgeninin iki katına eşit olduğundan, dikdörtgen de rasyoneldir.

Ve, AI, FK ile eşölçeksiz olduğundan, LP üzerindeki kare PN üzerindeki kareyle eşölçeksizdir;

öyleyse LP, PN doğruları, üzerlerindeki karelerin toplamı orta değer ama içerdikleri dikdörtgen rasyonel olan, karede eşölçeksiz iki doğrudur.

Bu durumda LN kalanı rasyonel alalnla orta değer bütün üreten türde irrasyonel bir doğrudur; **[X.77]**

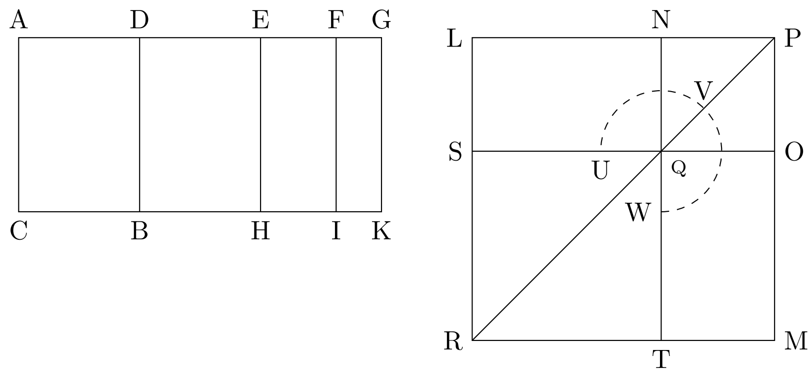
ve AB alanına eşit karenin de kenarıdır.

Öyleyse AB alanına eşit karenin kenarı rasyonel alanla orta değer üreten türden bir doğrudur.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

96. Önerme:

Rasyonel bir doğruyla altıncı türden ayrık bir doğrunun içerdiği alana eşit karenin kenarı orta değer alanla orta değer bütün üreten türden bir doğrudur.



AB alanı rasyonel AC doğrusuyla altıncı türden ayrık AD doğrusu tarafından içerilsin;

diyorum ki, AB alanına eşit karenin kenarı orta değer alanla orta değer bütün üreten türden bir doğrudur.

Çünkü, AD'nin eklentisi DG olsun; bu durumda AG, GD yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır,

hiçbiri başta alınan AC rasyonel doğrusuyla uzunlukta eşölçekli değildir,

ve AG'nin tümü üzerindeki kare DG eklentisi üzerindeki kareden AG ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[Tan. X.16]**

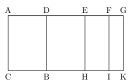
O zaman, AG üzerindeki kare GD üzerindeki kareden AG ile uzunlukta eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olduğundan,

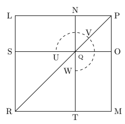
eğer AG üzerine DG üzerindeki karenin dörtte birine eşit ama bir kare şekil kadar eksik bir paralelkenar çizilirse, bu çizim AG'yi eşölçeksiz parçalara ayırır. **[X.18]**

O zaman, DG, E'de eşit iki parçaya bölünsün,

AG üzerine EG üzerindeki kareye eşit ve bir kare şekil kadar eksik bir paralelkenar çizilsin, ve bu AF, FG dikdörtgeni olsun;

bu durumda AF, FG ile uzunlukta eşölçeksiz olur.





Ama, AF'nin FG'ye oranı, AI'nın FK'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

bu durumda AI, FK ile eşölçeksiz olur. **[X.11]**

Ve, AG, GC yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrular olduğundan, AK orta değerdir. **[X.21]**

Yine, AC, DG uzunlukta eşölçeksiz rasyonel doğrular olduğundan, DK de orta değerdir. **[X.21]**

Şimdi, AG, GD yalnızca karede eşölçekli olduğundan, AG, GD uzunlukta eşölçeksizdir.

Ama, AG'nin GD'ye oranı, AK'nin KD'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

bu durumda AK, KD ile eşölçeksiz olur. **[X.11]**

Şimdi, AI'ya eşit LM karesi çizilsin, ve aynı açı etrafında, FKye eşit NO karesi çıkarılsın;

bu durumda LM, NO kareleri aynı köşegen etrafındadır. **[VI.26]**

Köşegenleri PR olsun ve şekil çizilsin.

Yukardakine benzer yoldan LN'nin AB alanına eşit karenin kenarı olduğunu kanıtlayabiliriz.

Diyorum ki, LN doğrusu orta değer alandan orta değer bütün üreten türden bir doğrudur.

Çünkü, AK'nin orta değer olduğu ve LP, PN üzerindeki karelere eşit olduğu kanıtlandığından, LP, PN üzerindeki karelerin toplamı orta değerdir.

Yine, DK'nin orta değer olduğu ve LP, PN dikdörtgeninin iki katına eşit olduğu kanıtlandığından, LP, PN dikdörtgeninin iki katı da orta değerdir.

Ve AK'nin DK ile eşölçeksiz olduğu kanıtlandığından, LP, PN üzerindeki karelerin toplamı LP, PN dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksizdir.

Ve, AI, FK ile eşölçeksiz olduğundan, LP üzerindeki kare de PN üzerindeki kareyle eşölçeksizdir;

öyleyse LP, PN doğruları üzerlerindeki karelerin toplamı ve içerdikleri dikdörtgenin iki katı orta değer olan, ve dahası üzerlerindeki karelerin toplamının içerdikleri dikdörtgenin iki katıyla eşölçeksiz olduğu, karede eşölçeksiz iki doğrudur.

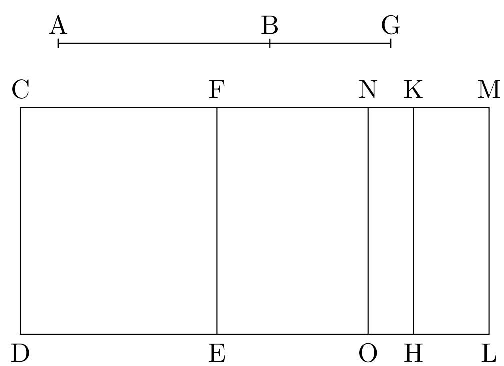
Bu durumda LN doğrusu orta değer alanla orta değer bütün üreten türden irrasyonel bir doğrudur; **[X.78]**

ve AB alanına eşit karenin de kenarıdır.

Öyleyse bu alana eşit karenin kenarı orta değer alanla orta değer bütün üreten türden bir doğrudur.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

97. Önerme:
Ayrık bir doğru üzerindeki kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizildiğinde birinci türden ayrık bir genişlik oluşturur.



AB ayrık, ve CD rasyonel olsun, ve CD üzerine AB üzerindeki kareye eşit CE çizilsin ve CF genişliği oluşsun;

diyorum ki, CF birinci türden ayrıktır.

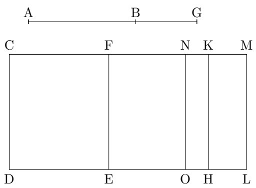
Çünkü BG, AB'nin eklentisi olsun; bu durumda AG, GB yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır. **[X.73]**

CD üzerine AG üzerindeki kareye eşit CH, ve BG üzerindeki kareye eşit KL çizilsin.

Öyleyse CL'nin tamamı AG, GB üzerindeki karelere eşittir, içlerinde CE alanı da AB üzerindeki kareye eşittir;

bu durumda FL kalanı AG, GB dikdörtgeninin iki katına eşit olur. **[II.7]**

FM, N'de ikiye bölünsün,



ve Nden CD'ye paralel NO çizilsin;

bu durumda FO, LN dikdörtgenlerinin her biri AG, GB dikdörtgenine eşit olur.

Şimdi, AG, GB üzerindeki kareler rasyonel olduğundan, ve DM alanı AG, GB üzerindeki karelere eşit olduğundan, DM rasyoneldir.

Ve rasyonel CD doğrusu üzerine çizilip CM genişliğini oluşturmuştur;

öyleyse CM rasyoneldir ve CD ile uzunlukta eşölçeklidir. **[X.20]**

Yine, AG, GB dikdörtgeninin iki katı orta değer olduğundan, ve FL alanı AG, GB dikdörtgeninin iki katına eşit olduğundan, FL orta değerdir.

Ve CD rasyonel doğrusu üzerine çizilip FM genişliğini oluşturmuştur;

öyleyse FM rasyoneldir ve CD ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Ve, AG, GB üzerindeki kareler rasyonel olduğundan, ve bu arada AG, GB dikdörtgeninin iki katı orta değer olduğundan, AG, GB üzerindeki kareler AG, GB dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksizdir.

Ve, CL alanı AG, GB üzerindeki karelere, ve FL alanı da AG, GB dikdörtgeninin iki katına eşittir;

bu durumda DM, FL ile eşölçeksizdir.

Ama, DM'nin FL'ye oranı, CM'nin FM'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse CM, FM ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.11]**

Ve ikisi de rasyoneldir; öyleyse CM, MF yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır;

bu durumda CF ayrık olur. **[X.73]**

Şimdi de diyorum ki, birinci türden ayrıktır.

Çünkü, AG, GB dikdörtgeni AG, GB üzerindeki kareler arasında orta orantılı olduğundan,

ve CH alanı AG üzerindeki kareye,

KL alanı da BG üzerindeki kareye eşit olduğundan, ve NL alanı AG, GB dikdörtgenine eşit olduğundan,

NL de CH, KL arasında orta orantılıdır;

bu durumda CH'nin NL'ye oranı, NL'nin KL'ye oranına eşit olur.

Ama, CH'nin NL'ye oranı, CK'nin NM'ye oranına,

ve NL'nin KL'ye oranı da NM'nin KM'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse CK, KM dikdörtgeni NM üzerindeki kareye eşittir, **[VI.17]**

yani FM üzerindeki karenin dörtte birine.

Ve AG üzerindeki kare GB üzerindeki kareyle eşölçekli olduğundan, CH de KL ile eşölçeklidir.

Ama, CH'nin KL'ye oranı, CK'nin KM'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

bu durumda CK, KM ile eşölçekli olur. **[X.11]**

O zaman, CM, MF iki farklı doğru olduğundan, ve CM üzerine FM üzerindeki karenin dörtte birine eşit ve bir kare şekil kadar eksik CK, KM dikdörtgeni çizildiğinden,

ve bu arada CK, KM ile eşölçekli olduğundan,

CM üzerindeki kare MF üzerindeki kareden CM ile uzunlukta eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[X.17]**

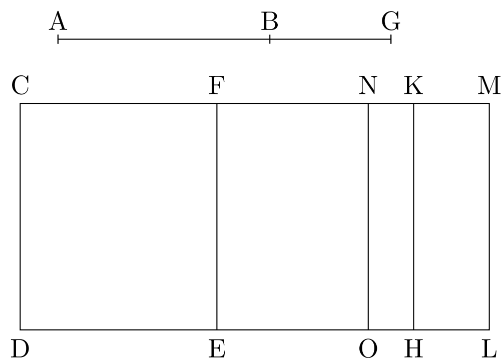
Ve CM, başta alınan rasyonel AC doğrusuyla uzunlukta eşölçeklidir;

öyleyse CF birinci türden ayrıktır. **[Tan. X.11]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

98. Önerme:

Orta değer doğrunun birinci ayrığı türünden bir doğru üzerindeki kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizildiğinde ikinci türden ayrık bir genişlik oluşturur.



AB orta değer doğrunun birinci ayrığı türünden bir doğru, ve CD de rasyonel bir doğru olsun,

ve CD üzerine AB üzerindeki kareye eşit CE çizilerek CF genişliği oluşsun;

diyorum ki, CF ikinci türden ayrıktır.

Çünkü BG, AB'nin eklentisi olsun; bu durumda AG, GB yalnızca karede eşölçekli ve rasyonel bir dikdörtgen içeren iki orta değer doğrudur. **[X.74]**

CD üzerine AG üzerindeki kareye eşit CH çizilip CK genişliği oluşsun, ve GB üzerindeki kareye eşit KL çizilip KM oluşsun;

öyleyse CL'nin tamamı AG, GB üzerindeki karelere eşittir; bu durumda CL de orta değer olur. **[X.15, DS. X.23]**

Ve CD rasyonel doğrusu üzerine çizilmiş ve CM genişliğini oluşturmuştur;

öyleyse CM rasyoneldir ve CD ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Şimdi, CL alanı AG, GB üzerindeki karelere eşit olduğundan, bunun içinde AB üzerindeki kare CE'ye eşit olduğundan, FL kalanı AG, GB dikdörtgeninin iki katına eşittir. **[II.7]**

Ama AG, GB dikdörtgeninin iki katı rasyoneldir; öyleyse FL de rasyoneldir.

Ve FE rasyonel doğrusu üzerine çizilmiş ve FM genişliğini oluşturmuştur;

bu durumda FM de rasyoneldir ve CD ile uzunlukta eşölçeklidir. **[X.20]**

Şimdi, AG, GB üzerindeki karelerin toplamı, yani CL, orta değer olduğundan,

ve bu arada AG, GB dikdörtgeninin iki katı, yani FL, rasyonel olduğundan,

CL, FL ile eşölçeksizdir.

Ama, CL'nin FL'ye oranı, CM'nin FM'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse CM, FM ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.11]**

Ve ikisi de rasyoneldir; öyleyse CM, MF yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır;

bu durumda CF ayrık olur. **[X.73]**

Şimdi de diyorum ki, ikinci türden ayrıktır.

Çünkü, FM, N'de ikiye bölünsün,

ve N'den CD'ye paralel NO çizilsin;

bu durumda FO, NL dikdörtgenlerinin her biri AG, GB dikdörtgenine eşit olur..

Şimdi, AG, GB dikdörtgeni AG, GB üzerindeki kareler arasında orta orantılı olduğundan,

ve AG üzerindeki kare CH'ye, AG, GB dikdörtgeni NL'ye, ve BG üzerindeki kare KL'ye eşit olduğundan,

NL alanı da CH, KL arasında orta orantılıdır;

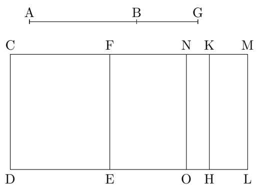
bu durumda CH'nin NL'ye oranı, NL'nin KL'ye oranına eşit olur.

Ama, CH'nin NL'ye oranı, CK'nin NM'ye oranına, ve NL'nin KL'ye oranı da NM'nin MK'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse CK'nin NM'ye oranı, NM'nin KM'ye oranına eşittir; **[V.11]**

bu durumda CK, KM dikdörtgeni, NM üzerindeki kareye eşit olur, **[VI.17]**

yani FM üzerindeki karenin dörtte birine.



O zaman, CM, MF iki farklı doğrudur, CK, KM dikdörtgeni ise MF üzerindeki karenin dörtte birine eşittir ve doğruların daha büyüğü olan CM üzerine bir kare şekil kadar eksik çizilmiştir ve onu eşölçekli iki parçaya bölmüştür,

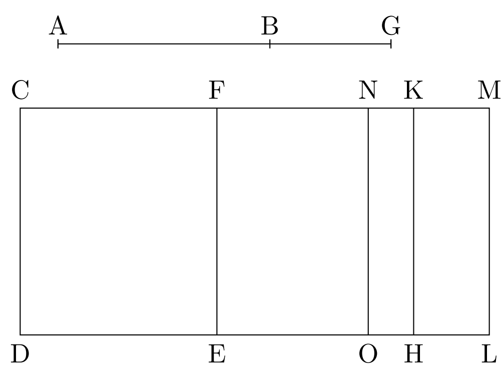
bu durumda CM üzerindeki kare MF üzerindeki kareden CM ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olur. **[X.17]**

Ve FM eklentisi başta alınan CD rasyonel doğrusuyla uzunlukta eşölçeklidir;

öyleyse CF ikinci türden ayrıktır. **[Tan. X.12]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

99. Önerme:
Orta değer doğrunun ikinci ayrığı türünden bir doğru üzerindeki kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizildiğinde üçüncü türden ayrık bir genişlik oluşturur.



AB orta değer bir doğrunun ikinci ayrığı olsun, ve CD de rasyonel bir doğru olsun,

ve CD üzerine AB üzerindeki kareye eşit CE çizilsin, ve CF genişliği oluşsun;

diyorum ki, CF üçüncü türden ayrıktır.

Çünkü BG, AB'nin eklentisi olsun; bu durumda AG, GB yalnızca karede eşölçekli olan ve orta dğer bir dikdörtgen içeren orta değer iki doğru olur. **[X.75]**

CD üzerine AG üzerindeki kareye eşit CH çizilsin, ve CK genişliği oluşsun, ve KH üzerine BG üzerindeki kareye eşit KL çizilsin, ve KM genişliği oluşsun;

öyleyse CL'nin tamamı AG, GB üzerindeki karelere eşittir;

bu durumda CL orta değer olur. **[X.15, DS. X.23]**

Ve CD rasyonel doğrusu üzerine çizilip CM genişliğini oluşturmuştur;

öyleyse CM rasyoneldir ve CD ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Şimdi, CL'nin tamamı AG, GB üzerindeki karelere eşit olduğundan, ve bunların içinde CE alanı AB üzerindeki kareye eşit olduğundan,

LF kalanı AG, GB dikdörtgeninin iki katına eşittir. **[II.7]**

FM, N'de iki eşit parçaya bölünsün, ve CD'ye paralel NO çizilsin;

bu durumda FO, NL dikdörtgenlerinin her biri AG, GB dikdörtgenine eşit olur.

Ama AG, GB dikdörtgeni orta değerdir; öyleyse FL de orta değerdir.

Ve EF rasyonel doğrusu üzerine çizilmiş ve FM genişliğini oluşturmuştur;

öyleyse FM de rasyoneldir ve CD ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Ve, AG, GB yalnızca karede eşölçekli olduklarından, AG, GB ile uzunlukta eşölçeksizdir;

öyleyse AG üzerindeki kare de AG, GB dikdörtgeniyle eşölçeksizdir. **[VI.1, X.11]**

Ama AG, GB üzerindeki kareler AG üzerindeki kareyle,

ve AG, GB dikdörtgeninin iki katı AG, GB dikdörtgeniyle eşölçeklidir;

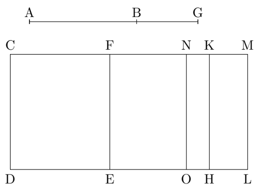
öyleyse AG, GB üzerindeki kareler AG, GB dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksizdir. **[X.13]**

Ama CL alanı AG, GB üzerindeki karelere, ve FL alanı da AG, GB dikdörtgeninin iki katına eşittir;

öyleyse CL de FL ile eşölçeksizdir.

Ama CL'nin FL'ye oranı, CM'nin FM'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

bu durumda CM, FM ile uzunlukta eşölçeksiz olur. **[X.11]**



Ve ikisi de rasyoneldir;

öyleyse CM, MF yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur;

bu durumda CF ayrık olur. **[X.73]**

Şimdi de diyorum ki, üçüncü türden bir ayrıktır.

Çünkü, AG üzerindeki kare GB üzerindeki kareyle eşölçekli olduğundan, CH de KL ile eşölçeklidir,

böylece CK de KM ile eşölçekli olur. **[VI.1, X.11]**

Ve AG, GB dikdörtgeni AG, GB üzerindeki kareler arasında orta orantılı olduğundan,

ve CH alanı AG üzerindeki kareye,

KL alanı GB üzerindeki kareye,

ve NL alanı da AG, GB dikdörtgenine eşit olduğundan,

NL de CH, KL arasında orta orantılıdır;

bu durumda CH'nin NL'ye oranı, NL'nin KL'ye oranına eşit olur.

Ama CH'nin NL'ye oranı, CK'nin NM'ye oranına,

ve NL'nin KL'ye oranı da NM'nin KM'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse CK'nin MN'ye oranı, MN'nin KM'ye oranına eşittir; **[V.11]**

bu durumda CK, KM dikdörtgeni MN üzerindeki kareye, yani FM üzerindeki karenin dörtte birine eşit olur.

O zaman, CM, MF iki farklı doğrudur, ve CM üzerine FM üzerindeki karenin dörtte birine eşit ve bir kare şekil kadar eksik bir paralelkenar çizilmiştir, ve bu çizim CM'yi eşölçekli parçalara bölmüştür,

öyleyse CM üzerindeki kare MF üzerindeki kareden CM ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[X.17]**

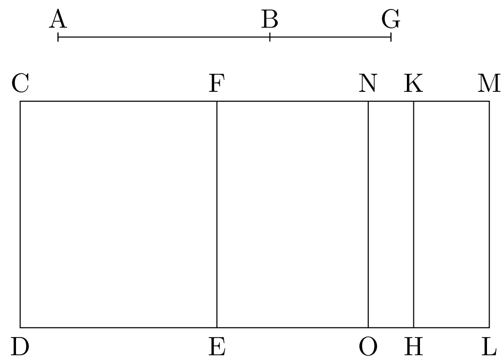
Ve CM, MF doğrularının hibiri başta alınan CD rasyonel doğrusuyla eşölçekli değildir;

öyleyse CF üçüncü türden ayrıktır. **[Tan. X.13]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

100. Önerme:

Ufak türünden bir doğru üzerindeki kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizildiğinde dördüncü türden ayrık bir genişlik oluşturur.



AB ufak türünden birdoğru ve CD de rasyonel bir doğru olsun, ve CD rasyonel doğrusu üzerine AB üzerindeki kareye eşit CE çizilsin ve CF genişliği oluşsun;

diyorum ki, CF dördüncü türden ayrıktır.

Çünkü BG, AB'nin eklentisi olsun; bu durumda AG, GB karede eşölçeksiz olan, AG, GB üzerindeki karelerin toplamını rasyonel, ama AG, GB dikdörtgeninin iki katını orta değer yapan iki doğrudur. **[X.76]**

CD üzerine AG üzerindeki kareye eşit CH çizilsin, ve CK genişliği oluşsun,

ve BG üzerindeki kareye eşit KL çizilsin, ve KM genişliği oluşsun;

öyleyse CL'nin tamamı AG, GB üzerindeki karelere eşittir.

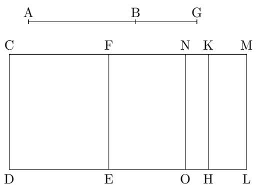
Ve AG, GB üzerindeki karelerin toplamı rasyoneldir; öyleyse CL de rasyoneldir.

Ve CD rasyonel doğrusu üzerine çizilip CM genişliğini oluşturmuştur;

öyleyse CM de rasyoneldir ve CD ile uzunlukta eşölçeklidir. **[X.20]**

Ve, CL'nin tamamı AG, GB üzerindeki karelere eşit olduğundan, ve bunların içinde CE alanı AB üzerindeki kareye eşit olduğundan,

LF kalanı AG, GB dikdörtgeninin iki katına eşittir. **[II.7]**



FM, N'de iki eşit parçaya bölünsün, ve N'den CD, ML doğrularından herhangi birine paralel NO çizilsin;

bu durumda FO, NL dikdörtgenlerinin her biri AG, GB dikdörtgenine eşit olur.

Ve AG, GB dikdörtgeninin iki katı orta değer olduğundan, ve de FL'ye eşit olduğundan,

FL de orta değerdir.

Ve FE rasyonel doğrusu üzerine çizilip FM genişliğini oluşturmuştur;

öyleyse FM rasyoneldir ve CD ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Ve, AG, GB üzerindeki karelerin toplamı rasyonel olduğundan, ve bu arada AG, GB dikdörtgeninin iki katı orta değer olduğundan,

AG, GB üzerindeki kareler AG, GB dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksizdir.

Ama, CL alanı AG, GB üzerindeki karelere eşittir, ve FL alanı da AG, GB dikdörtgeninin iki katına eşittir;

öyleyse CL, FL ile eşölçeksizdir.

Ama, CL'nin FL'ye oranı, CM'nin MF'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse CM, MF ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.11]**

Ve ikisi de rasyoneldir;

öyleyse CM, MF yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur;

bu durumda CF ayrık olur. **[X.73]**

Diyorum ki, aynı zamanda dördüncü türden ayrıktır.

Çünkü, AG, GB karede eşölçeksiz olduklarından, AG üzerindeki kare de GB üzerindeki kareyle eşölçeksizdir.

Ve, CH alanı AG üzerindeki kareye eşittir, ve KL alanı GB üzerindeki kareye eşittir;

bu durumda CH, KL ile eşölçeksiz olur.

Ama, CH'nin KL'ye oranı, CK'nin KM'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

bu durumda CK, KM ile uzunlukta eşölçeksiz olur. **[X.11]**

Ve, AG, GB dikdörtgeni AG, GB üzerindeki kareler arasında orta orantılı olduğundan,

ve AG üzerindeki kare CH'ye,

GB üzerindeki kare KL'ye,

ve AG, GB dikdörtgeni de NL'ye eşit olduğundan,

NL alanı CH, KL arasında orta orantılıdır;

öyleyse CH'nin NL'ye oranı, NL'nin KL'ye oranına eşittir.

Ama, CH'nin NL'ye oranı, CK'nin NM'ye oranına,

ve NL'nin KL'ye oranı, NM'nin KM'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse CK'nin MN'ye oranı, MN'nin KM'ye oranına eşittir; **[V.11]**

öyleyse CK, KM dikdörtgeni MN üzerindeki kareye eşittir, **[VI.7]**

yani FM üzerindeki karenin dörtte birine.

O zaman, CM, MF iki farklı doğru olduğundan, ve CM üzerine MF üzerindeki karenin dörtte birine eşit CK, KM dikdörtgeni bir kare şekil kadar eksik çizildiğinden, ve CM'yi eşölçeksiz parçalara ayırdığından,

CM üzerindeki kare MF üzerindeki kareden CM ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[X.18]**

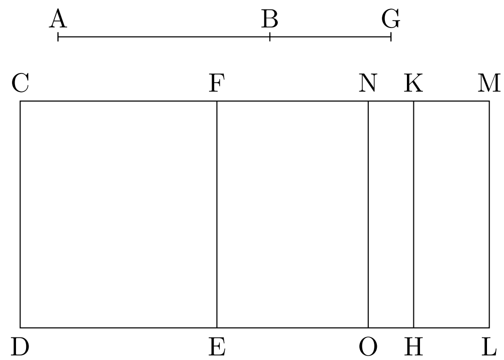
Ve CM'nin tamamı başta alınan CD rasyonel doğrusuyla eşölçeklidir;

öyleyse CF dördüncü türden ayrıktır. **[Tan. X.14]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

101. Önerme:

Rasyonel alanla orta değer bütün üreten türünden bir doğru üzerindeki kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizildiğinde beşinci türden ayrık bir genişlik oluşturur.



AB rasyonel alanla orta değer bütün üreten bir doğru olsun, ve CD de rasyonel bir doğru olsun, ve CD üzerine AB üzerindeki kareye eşit CE çizilsin, CF genişliği oluşsun;

diyorum ki, CF beşinci türden ayrıktır.

Çünkü BG, AB'nin eklentisi olsun; bu durumda AG, GB üzerlerindeki karelerin toplamı orta değer ama içerdikleri dikdörtgenin iki katı rasyonel olan karede eşölçeksiz iki doğrudur. **[X.77]**

CD üzerine AG üzerindeki kareye eşit CH,

ve GB üzerindeki kareye eşit KL çizilsin;

öyleyse CL'nin tamamı AG, GB üzerindeki karelere eşittir.

Ama AG, GB üzerindeki karelerin toplamı orta değerdir; öyleyse CL orta değerdir.

Ve CD rasyonel doğrusu üzerine çizilmiş ve CM genişliğini oluşturmuştur;

öyleyse CM rasyoneldir ve CD ile eşölçeksizdir. **[X.22]**

Ve, CL'nin tamamı AG, GB üzerindeki karelere eşit olduğundan, ve bunların içinde CE alanı AB üzerindeki kareye eşit olduğundan,

LF kalanı AG, GB dikdörtgeninin iki katına eşittir. **[II.7]**

FM, N'de iki eşit parçaya bölünsün, ve N'den CD, ML doğrularından herhangi birine paralel NO çizilsin;

bu durumda FO, NL dikdörtgenlerinin her biri AG, GB dikdörtgenine eşit olur.

Ve, AG, GB diködrtgeninin iki katı rasyonel olduğundan, ve FL'ye eşit olduğundan, FL rasyoneldir.

Ve EF rasyonel doğrusu üzerine çizilmiş ve FM genişliğini oluşturmuştur;

öyleyse FM rasyoneldir ve CD ile uzunlukta eşölçeklidir. **[X.20]**

Şimdi, CL orta değer ve FL rasyonel olduğundan, CL, FL ile eşölçeksizdir.

Ama, CL'nin FL'ye oranı, CM'nin MF'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse CM, MF ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.11]**

Ve ikisi de rasyoneldir;

öyleyse CM, MF yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur;

bu durumda CF ayrık olur. **[X.73]**

Şimdi de diyorum ki, aynı zamanda beşinci türden ayrıktır.

Çünkü, benzer yolla CK, KM dikdörtgeninin MN üzerindeki kareye, yani FM üzerindeki karenin dörtte birine, eşit olduğunu kanıtlayabiliriz.

Ve AG üzerindeki kare GB üzerindeki kareyle eşölçeksiz olduğundan,

ve bu arada AG üzerindeki kare CH'ye, ve GB üzerindeki kare de KL'ye eşit olduğundan,

CH, KL ile eşölçeksizdir.

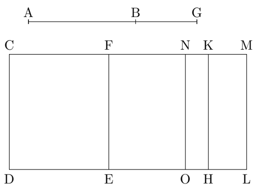
Ama CH'nin KL'ye oranı, CK'nin KM'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse CK, KM ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.11]**

O zaman, CM, MF iki farklı doğru olduğundan, ve CM üzerine FM üzerindeki karenin dörtte birine eşit bir paralelkenar bir kare şekil kadar eksik çizildiğinden, ve CM'yi eşölçeksiz parçalara ayırdığından,

CM üzerindeki kare MF üzerindeki kareden CM ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[X.18]**

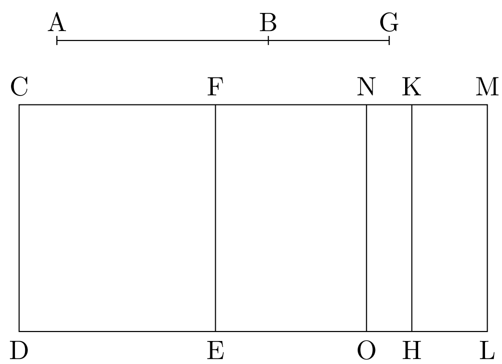
Ve FM eklentisi başta alınan CD rasyonel doğrusuyla eşölçeklidir;



öyleyse CF altıncı türden ayrıktır. **[Tan. X.15]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

102. Önerme:
Orta değer alanla orta değer bütün üreten türünden bir doğru üzerindeki kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizildiğinde altıncı türden ayrık bir genişlik oluşturur.



AB orta değer alanla orta değer bütün üreten türde bir doğru olsun, ve CD de rasyonel bir doğru olsun,

CD üzerine AB üzerindeki kareye eşit CE çizilsin ve CF genişliği oluşsun;

diyorum ki, CF altıncı türden ayrıktır.

Çünkü, BG, AB'nin eklentisi olsun; bu durumda AG, GB doğruları, üzerlerindeki karelerin toplamı ve AG, GB dikdörtgeni orta değer olan ve AG, GB üzerindeki karelerin AG, GB dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksiz olduğu iki eşölçeksiz doğrudur. **[X.78]**

Şimdi, CD üzerine AG üzerindeki kareye eşit CH çizilsin, CK genişliği oluşsun,

ve BG üzerindeki kareye eşit KL çizilsin;

öyleyse CL'nin tamamı AG, GB üzerindeki karelere eşittir;

bu durumda CL de orta değerdir.

Ve CD rasyonel doğrusu üzerine çizilmiş ve CM genişliğini oluşturmuştur;

bu durumda CM rasyoneldir ve CD ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Şimdi, CL alanı AG, GB üzerindeki karelere eşit olduğundan, ve bunların içinde CE alanı AB üzerindeki kareye eşit olduğundan,

LF kalanı AG, GB dikdörtgeninin iki katına eşittir. **[II.7]**

Ve AG, GB dikdörtgeninin iki katı orta değerdir; öyleyse FL de orta değerdir.

Ve FE rasyonel doğrusu üzerine çizilmiş ve FM genişliğini oluşturmuştur;

öyleyse FM de rasyoneldir ve CD ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.22]**

Ve AG, GB üzerindeki kareler AG, GB dikdörtgeninin iki katıyla eşölçeksiz olduğundan,

ve CL alanı AG, GB üzerindeki karelere,

ve FL alanı da AG, GB dikdörtgeninin iki katına eşit olduğundan,

CL, FL ile eşölçeksizdir.

Ama CL'nin FL'ye oranı, CM'nin MF'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse CM, MF ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.11]**

Ve ikisi de rasyoneldir.

Öyleyse CM, MF yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur;

bu durumda CF ayrık olur. **[X.73]**

Şimdi de diyorum ki aynı zamanda altıncı türden ayrıktır.

Çünkü, FL alanı AG, GB dikdörtgeninin iki katına eşit olduğundan,

FM, N'de iki eşit parçaya bölünsün,

ve N'den CD'ye paralel NO çizilsin;

bu durumda FO, NL dikdörtgenlerinin her biri AG, GB dikdörtgenine eşit olur.

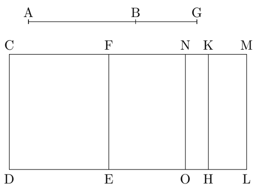
Ve AG, GB karede eşölçeksiz olduğundan, AG üzerindeki kare GB üzerindeki kareyle eşölçeksizdir.

Ama CH alanı AG üzerindeki kareye,

KL de GB üzerindeki kareye eşittir;

öyleyse CH, KL ile eşölçeksizdir.

Ama CH'nin KL'ye oranı, CK'nin KM'ye oranına eşittir; **[VI.1]**



bu durumda CK, KM ile eşölçeksiz olur. **[X.11]**

ve AG, GB dikdörtgeni AG, GB üzerindeki kareler arasında orta orantılı olduğundan,

ve CH alanı AG üzerindeki kareye,

KL alanı GB üzerindeki kareye,

ve NL alanı da AG, GB dikdörtgenine eşit olduğundan,

NL de CH, KL arasında orta orantılıdır;

öyleyse CH'nin NL'ye oranı, NL'nin KL'ye oranına eşittir.

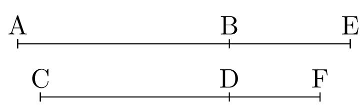
Ve daha öncekiyle aynı nedenden dolayı CM üzerindeki kare MF üzerindeki kareden CM ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[X.18]**

Ve hiçbiri başta alınan CD rasyonel doğrusuyla eşölçekli değildir;

öyleyse CF altıncı türden ayrıktır. **[Tan. X.16]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

103. Önerme:
Ayrık bir doğruyla uzunlukta eşölçekli olan bir doğru kendisi de ayrıktır, ve aynı türdendir.



AB ayrık olsun, ve CD de AB ile uzunlukta eşölçekli olsun;

diyorum ki, CD de ayrıktır ve AB ile aynı türdendir.

Çünkü, AB ayrık olduğundan, eklentisi BE olsun; bu durumda AE, EB yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur. **[X.73]**

BE'nin DF'ye oranının AB'nin CD'ye oranına eşit olması sağlansın; **[VI.12]**

karşılıklı terimlerin oranları toplamların oranına eşit olduğundan, **[V.12]**

AE'nin tamamının CF'nin tamamına oranı, AB'nin tamamının CD'ye oranına eşittir.

Ama AB, CD ile uzunlukta eşölçeklidir.

Öyleyse AE, CF ile, ve BE de DF ile eşölçeklidir. **[X.11]**

Ve AE, EB yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır;

öyleyse CF, FD de yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır. **[X.13]**

Şimdi, AE'nin CF'ye oranı, BE'nin DF'ye oranına eşit olduğundan,

değiştirilmiş oranlar olarak AE'nin EB'ye oranı, CF'nin FD'ye oranına eşittir. **[V.16]**

Ve AE üzerindeki kare EB üzerindeki kareden ya AE ile eşölçekli olan bir doğru üzerindeki kare kadar, ya da onunla eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

O zaman, eğer AE üzerindeki kare EB üzerindeki kareden AE ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyükse, CF üzerindeki kare de FD üzerindeki kareden CF ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olacaktır. **[X.14]**

Ve eğer AE başta alınan rasyonel doğruyla eşölçekliyse, CF de öyledir, **[X.12]**

eğer BE eşölçekliyse, DF de eşölçeklidir, **[X.12]**

ve eğer AE, EB doğrularının hiçbiri başta alınan rasyonel doğruyla eşölçekli değilse, CF, FD doğrularının da hiçbiri başta alınan rasyonel doğruyla eşölçekli değildir. **[X.13]**

Ve, eğer AE üzerindeki kare EB üzerindeki kareden AE ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyükse, CF üzerindeki kare de FD üzerindeki kareden CF ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olacaktır. **[X.14]**

Ve eğer AE başta alınan rasyonel doğruyla eşölçekliyse, CF de öyledir, eğer BE eşölçekliyse, DF de eşölçeklidir, **[X.12]**

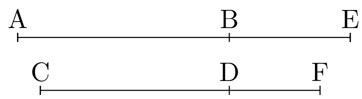
ve eğer AE, EB doğrularının hiçbiri başta alınan rasyonel doğruyla eşölçekli değilse, CF, FD doğrularının da hiçbiri başta alınan rasyonel doğruyla eşölçekli değildir. **[X.13]**

Öyleyse CD ayrıktır ve AB ile aynı türdendir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

104. Önerme:

Orta değer doğrunun ayrığı bir doğruyla uzunlukta eşölçekli olan bir doğru kendisi de orta değer doğrunun ayrığıdır, ve aynı türdendir.



AB orta değer doğrunun ayrığı olsun ve CD de AB ile uzunlukta eşölçekli olsun;

diyorum ki, CD de orta değer doğrunun ayrığıdır ve AB ile aynı türdendir.

Çünkü, AB orta değer doğrunun ayrığı olduğundan, eklentisi EB olsun.

Bu durumda AE, EB yalnızca karede eşölçekli olan orta değer doğrulardır. **[X.74, X.75]**

AB'nin CD'ye oranının BE'nin DF'ye oranına eşit olması sağlansın; **[VI.12]**

bu durumda AE, CF ile, ve BE de DF ile eşölçekli olur. **[V.12, X.11]**

Ama AE, EB yalnızca karede eşölçekli olan orta değer doğrulardır;

öyleyse CF, FD de yalnızca karede eşölçekli **[X.13]**

orta değer doğrulardır; **[X.23]**

bu durumda CF orta değer doğrunun ayrığı olur. **[X.74, X.75]**

Şimdi de diyorum ki AB ile aynı türdendir.

AE'nin EB'ye oranı, CF'nin FD'ye oranına eşit olduğundan, AE üzerindeki karenin AE, EB dikdörtgenine oranı, CF üzerindeki karenin CF, FD dikdörtgenine oranına eşittir.

Ama AE üzerindeki kare CF üzerindeki kareyle eşölçeklidir;

öyleyse AE, EB dikdörtgeni de CF, FD dikdörtgeniyle eşölçeklidir. **[V.16, X.11]**

Öyleyse, AE, EB dikdörtgeni rasyonelse, CF, FD diködrtgeni de rasyoneldir, **[Tan. X.4]**

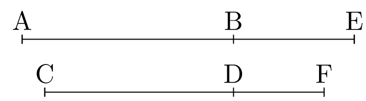
ve eğer AE, EB dikdörtgeni orta değerse, CF, FD dikdörtgeni de orta değerdir. **[DS. X.23]**

Öyleyse CD orta değer doğrunun ayrığıdır ve AB ile aynı türdendir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

105. Önerme:

Ufak bir doğruyla eşölçekli olan bir doğru kendisi de ufaktır.



AB ufak bir doğru olsun ve CD de AB ile eşölçekli olun;

diyorum ki, CD de ufaktır.

Önceki çizimin aynısı yapılsın;

o zaman, AE, EB karede eşölçeksiz olduğundan **[X.76]**

CF, FD de karede eşölçeksizdir. **[X.13]**

Şimdi, AE'nin EB'ye oranı, CF'nin FD'ye oranına eşit olduğundan, **[V.12, V.16]**

AE üzerindeki karenin EB üzerindeki kareye oranı da CF üzerindeki karenin FD üzerindeki kareye oranına eşittir. **[VI.22]**

Bu durumda birleşik oranlar olarak, AE, EB üzerindeki karelerin EB üzerindeki kareye oranı, CF, FD üzerindeki karelerin FD üzerindeki kareye oranına eşittir. **[V.18]**

Ama BE üzerindeki kare DF üzerindeki kareyle eşölçeklidir;

öyleyse AE, EB üzerindeki karelerin toplamı CF, FD üzerindeki karelerin toplamıyla eşölçeklidir. **[V.16, X.11]**

Ama AE, EB üzerindeki karelerin toplamı rasyoneldir; **[X.76]**

öyleyse CF, FD üzerindeki karelerin toplamı da rasyoneldir. **[Tan. X.4]**

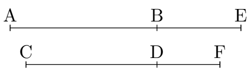
Yine, AE üzerindeki karenin AE, EB dikdörtgenine oranı, CF üzerindeki karenin CF, FD dikdörtgenine oranına eşit olduğundan,

ve bu arada AE üzerindeki kare CF üzerindeki kareyle eşölçekli olduğundan,

AE, EB dikdörtgeni de CF, FD dikdörtgeniyle eşölçeklidir.

Ama AE, EB dikdörtgeni orta değerdir; **[X.76]**

öyleyse CF, FD dikdörtgeni de orta değerdir; **[DS. X.23]**



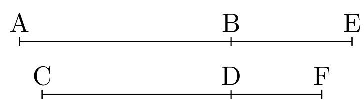
öyleyse CF, FD doğruları, üzerlerindeki karelerin toplamı rasyonel ama içerdikleri dikdörtgen orta değer olan karede eşölçeksiz doğrulardır.

Öyleyse CD ufaktır. **[X.76]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

106. Önerme:

Rasyonel alanla orta değer bütün üreten türden bir doğruyla eşölçekli olan bir doğru kendisi de rasyonel alanla orta değer bütün üreten türdendir.



AB rasyonel alanla orta değer bütün üreten doğru olsun, ve CD de AB ile eşölçekli olsun;

diyorum ki, CD de rasyonel alanla orta değer bütün üreten türden bir doğrudur.

Çünkü, BE, AB'nin eklentisi olsun; bu durumda AE, EB üzerlerindeki karelerin toplamı orta değer olan ama içerdikleri dikdörtgen rasyonel olan karede eşölçeksiz iki doğrudur. **[X.77]**

Aynı çizim yapılsın.

O zaman, daha öncekine benzer yollardan

CF, FD'nin AE, EB ile aynı oranda olduğunu,

AE, EB üzerindeki karelerin toplamının CF, FD üzerindeki karelerin toplamıyla,

ve AE, EB dikdörtgeninin CF, FD dikdörtgeniyle eşölçekli olduğunu kanıtlayabiliriz;

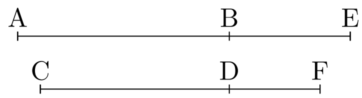
böylece CF, FD doğruları CF, FD üzerindeki karelerin toplamı orta değer ama içerdikleri dikdörtgen rasyonel olan karede eşölçeksiz iki doğrudur.

Öyleyse CD rasyonel alanla orta değer bütün üreten türden bir doğrudur. **[X.77]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

107. Önerme:

Orta değer alanla orta değer bütün üreten türden bir doğruyla eşölçekli olan bir doğru kendisi de orta değer alanla orta değer bütün üreten türdendir.



AB orta değer alanla orta değer bütün üreten bir doğru olsun, ve CD de AB ile eşölçekli olsun;

diyorum ki, CD de orta değer alanla orta değer bütün üreten türden bir doğrudur.

Çünkü, BE, AB'nin eklentisi olsun, ve aynı çizim yapılsın; bu durumda AE, EB doğruları üzerlerindeki karelerin toplamı ve içerdikleri dikdörtgen orta değer olan ve ayrıca üzerlerindeki karelerin toplamları içerdikleri dikdörtgenle eşölçeksiz olan karede eşölçeksiz iki doğrudur. **[X.78]**

Şimdi, daha önce kanıtlanmış olduğu gibi

AE, EB ile CF, FD sırasıyla eşölçeklidir,

AE, EB üzerindeki karelerin toplamıyla CF, FD üzerindeki karelerin toplamı,

ve AE, EB dikdörtgeniyle CF, FD dikdörtgeni eşölçeklidir;

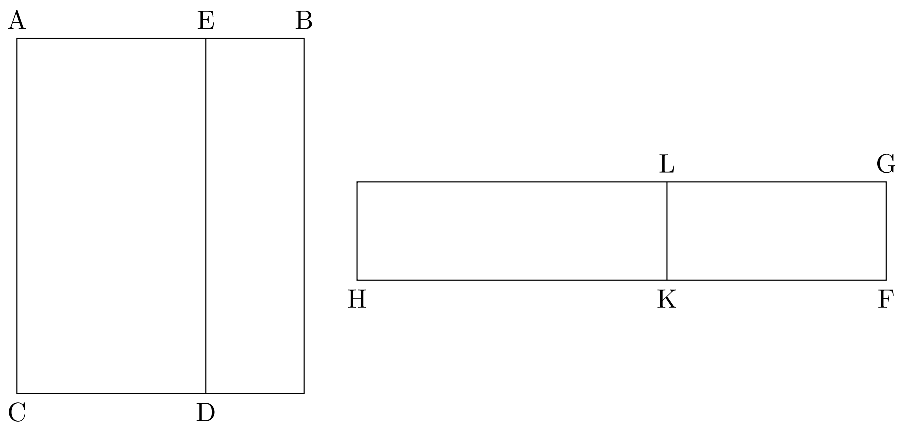
öyleyse CF, FD doğruları da üzerlerindeki karelerin toplamı ve içerdikleri dikdörtgen orta değer olan ve ayrıca üzerlerindeki karelerin toplamı içerdikleri dikdörtgenle eşölçeksiz olan karede eşölçeksiz iki doğrudur.

Öyleyse CD orta değer alanla orta değer bütün üreten türden bir doğrudur. **[X.78]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

108. Önerme:

Rasyonel bir alandan orta değer bir alan çıkartıldığında, kalan alana eşit olan karenin kenarı iki irrasyonel doğrudan biri olur, ya ayrıktır ya da ufaktır.



BC rasyonel alanından BD orta değer alanı çıkartılsın;

diyorum ki, EC kalanına eşit karenin kenarı iki irrasyonel doğrudan biridir, ya ayrıktır ya da ufaktır.

Çünkü, bir FG rasyonel doğrusu alınsın, ve FG üzerine BC'ye eşit GH dikdörtgeni çizilsin,

ve DB'ye eşit GK çıkartılsın; bu durumda EC kalanı LH'ye eşit olur.

O zaman, BC rasyonel, ve BD orta değer olduğundan,

ve bu arada BC, GH'ye, ve BD, GK'ye eşit olduğundan,

GH rasyoneldir, ve GK orta değerdir.

Ve bunlar FG rasyonel doğrusu üzerine çizilmiştir;

öyleyse FH rasyoneldir ve FG ile uzunlukta eşölçeklidir, **[X.20]**

ve bu arada FK rasyoneldir ve FG ile uzunlukta eşölçeksizdir; **[X.22]**

bu durumda FH, FK ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.13]**

Öyleyse FH, FK yalnızca karede eşölçekli iki rasyonel doğrudur;

bu durumda KH ayrık olur, **[X.73]**

ve KF de onun eklentisi olur.

Şimdi, HF üzerindeki kare FK üzerindeki kareden HF ile eşölçekli ya da eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

Önce üzerindeki kare onunla eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olsun.

Şimdi HF'nin tamamı başta alınan FG rasyonel doğrusuyla uzunlukta eşölçeklidir;

bu durumda KH birinci türden ayrık olur. **[Tan. X.11]**

Ama rasyonel bir doğruyla birinci türden ayrık bir doğrunun içerdiği dikdörtgenin alanına eşit karenin kenarı ayrıktır. **[X.91]**

Öyleyse LH'ye, yani EC'ye, eşit karenin kenarı ayrıktır.

Ama, eğer HF üzerindeki kare FK üzerindeki kareden HF ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyükse,

FH'nin tamamı başta alınan FG rasyonel doğrusuyla uzunlukta eşölçekli olduğundan,

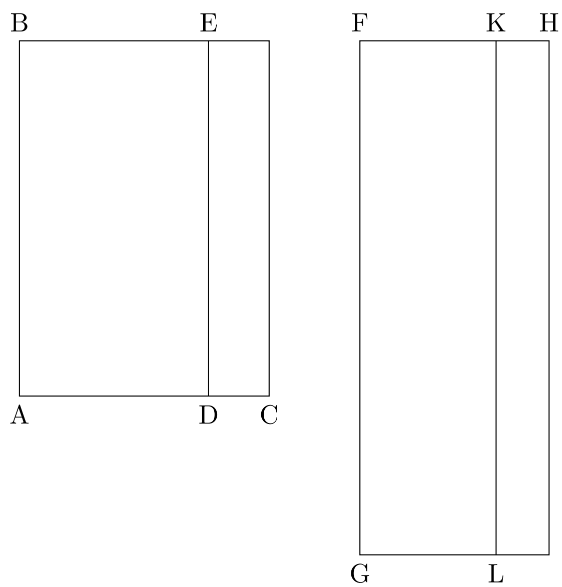
KH dördüncü türden ayrıktır. **[Tan. X.14]**

Ama rasyonel bir doğruyla dördüncü türden ayrık bir doğrunun içerdiği dikdörtgene eşit karenin kenarı ufaktır. **[X.94]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

109. Önerme:

Orta değer bir alandan rasyonel bir alan çıkartıldığında, kalan alana eşit olan karenin kenarı irrasyoneldir ve ya orta değer doğrunun birinci ayrığıdır ya da rasyonel alanla orta değer bütün üreten türdendir.



BC orta değer alanından BD rasyonel doğrusu çıkarılsın;

diyorum ki, EC kalanına eşit karenin kenarı iki irrasyonel doğrudan bir olur, ya orta değer doğrunun birinci ayrığı ya da rasyonel alanla orta değer bütün üreten.

Çünkü, bir FG rasyonel doğrusu alınsın, ve alanlar benzer şekilde çizilsin.

O zaman buradan FH'nin rasyonel olduğu ve FG ile uzunlukta eşölçeksiz olduğu,

ve bu arada KF'nin rasyonel olduğu ve FG ile uzunlukta eşölçekli olduğu çıkar.

öyleyse FH, FK yalnızca karede eşölçekli olan iki rasyonel doğrudur; **[X.13]**

bu durumda KH ayrık olur ve FK de onun eklentisi olur. **[X.73]**

Şimdi, HF üzerindeki kare FK üzerindeki kareden ya HF ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar ya da onunla eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

O zaman, eğer HF üzerindeki kare FK üzerindeki kareden HF ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyükse,

ve bu arada FK eklentisi başta alınan FG rasyonel doğrusuyla uzunlukta eşölçekli olduğundan,

KH ikinci türden ayrıktır. **[Tan. X.12]**

Ama FG rasyoneldir;

bu yüzden LH'ye, yani EC'ye eşit karenin kenarı orta değer doğrunun birinci ayrığı olur. **[X.92]**

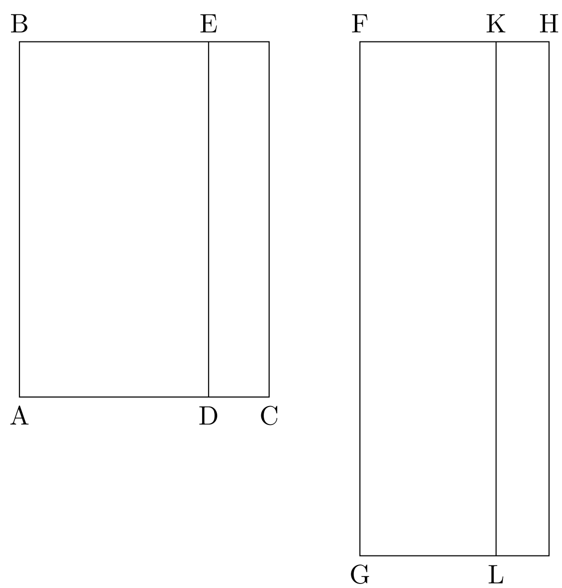
Ama eğer HF üzerindeki kare FK üzerindeki kareden HF ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyükse,

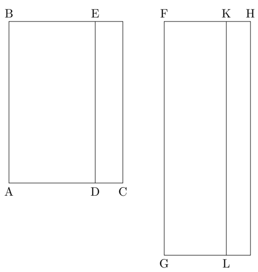
ve bu arada FK eklentisi başta alınan rasyonel doğru FG ile uzunlukta eşölçekli olduğundan,

EC alanına eşit karenin kenarı rasyonel alanla orta değer bütün üreten türden olur. **[X.95]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

110. Önerme:
Orta değer bir alandan bütünle eşölçeksiz orta değer bir alan çıkartıldığında, kalan alana eşit olan karenin kenarı irrasyoneldir ve ya orta değer doğrunun ikinci ayrığıdır ya da orta değer alanla orta değer bütün üreten türdendir.





Çünkü, daha önceki şekillerde olduğu gibi, BC orta değer alanından bütünle eşölçeksiz BD orta değer alanı çıkartılsın;

diyorum ki, EC kalanına eşit karenin kenarı iki tür irrasyonel doğrudan biridir, ya orta değer doğrunun ikinci ayrığı, ya da orta değer alanla orta değer bütün üreten türden bir doğru.

Çünkü, BC, BD dikdörtgenlerinin her biri orta değer olduğundan, ve BC, BD ile eşölçeksiz olduğundan, FH, FK doğrularının her birinin rasyonel olacağı ve FG ile uzunlukta eşölçeksiz olacağı görülür. **[X.22]**

Ve, BC, BD ile eşölçeksiz olduğundan, yani GH, GK ile,

HF de FK ile eşölçeksizdir; **[VI.1, X.11]**

öyleyse FH, FK yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır;

bu durumda KH ayrık olur. **[X.73]**

O zaman, eğer FH üzerindeki kare FK üzerindeki kareden FH ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyükse,

ve bu arada FH, FK doğrularının hiçbiri başta alınan FG rasyonel doğrusuyla eşölçekli olmadığından,

KH üçüncü türden ayrıktır. **[Tan. X.13]**

Ama KL rasyoneldir, ve rasyonel bir doğruyla üçüncü türden ayrık bir doğrunun içerdiği dikdörtgen irrasyoneldir,

ve ona eşit karenin kenarı da irrasyonel olur ve ona orta değer doğrunun ikinci ayrığı denir; **[X.93]**

bu yüzden LH'ye, yani EC'ye eşit karenin kenarı orta değer doğrunun ikinci ayrığıdır.

Ama eğer FH üzerindeki kare FK üzerindeki kareden FH ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyükse,

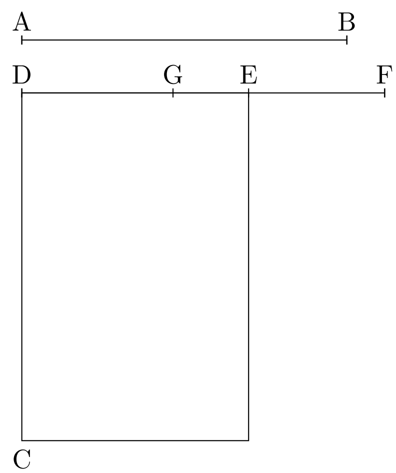
KH altıncı türden ayrık olur. **[Tan. X.16]**

Ama rasyonel bir doğruyla altıncı türden ayrık bir doğrunun içerdiği dikdörtgene eşit karenin kenarı orta değer alanla orta değer bütün üreten türden bir doğrudur. **[X.96]**

Öyleyse LH'ye, yani EC'ye eşit karenin kenarı orta değer alanla orta değer bütün üreten türden bir doğrudur.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

111. Önerme:
Ayrık bir doğru iki parçalı bir doğruya eşit olamaz.



AB ayrık olsun;

diyorum ki, AB iki parçalı bir doğruya eşit olamaz.

Çünkü, eğer mümkünse, öyle olsun;

bir DC rasyonel doğrusu alınsın, CD üzerine AB üzerindeki kareye eşit CE çizilsin, DE genişliği oluşsun.

O zaman, AB ayrık olduğundan, DE birinci türden ayrıktır. **[X.97]**

Eklentisi EF olsun; bu durumda DF, FE yalnızca karede eşölçekli olan rasyonel doğrulardır,

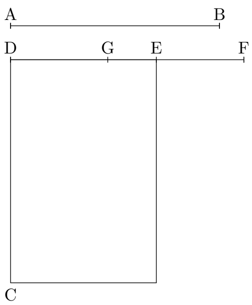
DF üzerindeki kare FE üzerindeki kareden DF ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür,

ve DF başta alınan DC rasyonel doğrusuyla uzunlukta eşölçeklidir. **[Tan. X.11]**

Yine, AB iki parçalı olduğundan, DE birinci türden iki parçalıdır. **[X.60]**

G'de parçalarına ayrılsın, ve DG büyük parça olsun; bu durumda DG, GE yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır,

DG üzerindeki kare GE üzerindeki kareden DG ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür,



ve daha büyük olan DG parçası başta alınan DC rasyonel doğrusuyla uzunlukta eşölçeklidir. **[Tan. X.5]**

Öyleyse DF, DG ile de uzunlukta eşölçeklidir; **[X.12]**

bu durumda GF kalanı da DF ile uzunlukta eşölçeklidir. **[X.15]**

Ama DF, EF ile uzunlukta eşölçeksizdir; öyleyse FG de EF ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.13]**

Öyleyse GF, FE yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır; bu durumda EG ayrık olur. **[X.73]**

Ama rasyoneldir de: bu olamaz.

Öyleyse ayrık bir doğru iki parçalı bir doğruya eşit olamaz.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

Sonuç: Ayrık ve ondan sonra gelen irrasyonel doğrular ne orta değer doğrularla ne de birbirleriyle aynıdır.

Çünkü orta değer bir doğru üzerindeki kare, eğer rasyonel bir doğru üzerine çizilirse, genişlik olarak çizildiği doğruyla eşölçeksiz bir rasyonel doğru oluşturur, **[X.22]**

ama bir ayrık üzerindeki kare, eğer rasyonel bir doğruya çizilirse, genişlik olarak birinci türden ayrık oluşturur, **[X.97]**

orta değer doğrunun birinci ayrığı üzerindeki kare, eğer bir rasyonel doğru üzerine çizilirse, genişlik olarak ikinci ayrık oluşturur, **[X.98]**

orta değer doğrunun ikinci ayrığı üzerindeki kare, eğer rasyonel bir doğru üzerine çizilirse, genişlik olarak üçüncü türden ayrık oluşturur, **[X.99]**

ufak doğrunun üzerindeki kare, eğer rasyonel bir doğru üzerine çizilirse, genişlik olarak dördüncü türden ayrık oluşturur, **[X.100]**

rasyonel alanla orta değer bütün üreten türden doğrunun üzerindeki kare, eğer rasyonel bir doğru üzerine çizilirse, genişlik olarak beşinci türden ayrık oluşturur, **[X.101]**

ve üstün doğrunun üzerindeki kare, eğer rasyonel bir doğru üzerine çizilirse, genişlik olarak altıncı türden ayrık oluşturur. **[X.102]**

O zaman, sözü edilen genişlikler birinciden ve birbirinden farklı olduğundan, birinciden çünkü o rasyoneldir, ve birbirlerinden çünkü aynı türden değiller,

açıktır ki irrasyonel doğruların kendileri de birbirinden farklıdır.

Ve ayrığın iki parçalı doğruyla aynı olmadığı kanıtlandığından, [X.111]

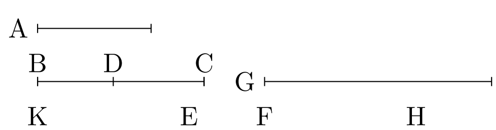
ama rasyonel doğru üzerine uygulandıklarında, ayrığı takip eden doğrular genişlik olarak kendi türüne göre ayrıkları, ve iki parçalı doğruyu takip eden doğrular da kendi türlerine göre iki parçalı doğruları genişlik olarak oluşturduklarından,

ayrığı takip edenler farklıdır, ve iki parçalı doğruyu takip edenler farklıdır, böylece toplam olarak sırayla on üç irrasyonel doğru vardır,

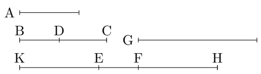
Orta değer,
İki parçalı,
Birinci türden iki ortalı,
İkinci türden iki ortalı,
Üstün,
Rasyonel artı orta alan kenarı,
İki orta alan toplamı kenarı,
Ayrık,
Orta değer doğrunun birinci ayrığı,
Orta değer doğrunun ikinci ayrığı,
Ufak,
Rasyonel alanla orta değer üreten,
Orta değer alanla orta değer bütün üreten.

112. Önerme:

Rasyonel bir doğru üzerindeki kareye eşit bir dikdörtgen iki parçalı doğru üzerine çizildiğinde genişlik olarak parçaları iki parçalı doğrunun parçalarıyla eşölçekli ve aynı oranda olan bir ayrık oluşturur; ve ayrıca bu şekilde oluşan ayrığın türü iki parçalı doğrunun türüyle aynıdır.



A rasyonel bir doğru olsun, BC iki parçalı olsun, ve DC onun büyük parçası olsun;



BC, EF dikdörtgeni A üzerindeki kareye eşit olsun;

diyorum ki EF doğrusu, parçaları CD, DB ile eşölçekli ve aynı oranda olan bir ayrıktır, ve ayrıca EF'nin türü BC'nin türüyle aynı olacaktır.

Çünkü yine BD, G dikdörtgeni A üzerindeki kareye eşit olsun.

O zaman BC, EF dikdörtgeni BD, G dikdörtgenine eşit olduğundan, CB'nin BD'ye oranı, G'nin EF'ye oranına eşit olur. **[VI.16]**

Ama CB, BD'den büyüktür; öyleyse G de EF'den büyüktür. **[V.16, V.14]**

EH, G'ye eşit olsun; o zaman CB'nin BDye oranı, HE'nin EF'ye oranına eşit olur;

bu durumda ayrışık oranlar olarak, CD'nin BD'ye oranı, HF'nin FEye oranına eşit olur. **[V.17]**

HF'nin FE'ye oranının FK'nin KE'ye oranına eşit olması sağlansın;

bu durumda HK'nin tamamının KF'nin tamamına oranı, FK'nin KE'ye oranına eşit olur;

çünkü, bir öncülün bir ardıla oranı, öncüllerin tamamının ardılların tamamına oranına eşittir. **[V.12]**

Ama, FK'nin KE'ye oranı, CD'nin DB'ye oranına eşittir; **[V.11]**

öyleyse HK'nin KF'ye oranı, CD'nin DB'ye oranına eşittir. **[V.11]**

Ama CD üzerindeki kare DB üzerindeki kareyle eşölçeklidir; **[X.36]**

öyleyse HK üzerindeki kare de KF üzerindeki kareyle eşölçeklidir. **[VI.22, X.11]**

Ve, HK üzerindeki karenin KF üzerindeki kareye oranı, HK'nin KE'ye oranına eşittir, çünkü üç doğru HK, KF, KE orantılıdır. **[Tan. V.9]**

Öyleyse HK, KE ile uzunlukta eşölçeklidir, böylece HE de EK ile uzunlukta eşölçekli olur. **[X.15]**

Şimdi, A üzerindeki kare EH, BD dikdörtgenine eşit olduğundan,

ve bu arada A üzerindeki kare rasyonel olduğundan,

EH, BD dikdörtgeni de rasyoneldir.

Ve BD rasyonel doğrusu üzerine çizilmiştir;

öyleyse EH rasyoneldir ve BD ile uzunlukta eşölçeklidir; **[X.20]** böylece EK de, onunla eşölçekli olduğundan, rasyoneldir ve BD ile uzunlukta eşölçeklidir.

O zaman, CD'nin DB'ye oranı, FK'nin KE'ye oranına eşit olduğundan,

ve bu arada CD, DB doğruları yalnızca karede eşölçekli olduğundan,

FK, KE de yalnızca karede eşölçeklidir. **[X.11]**

Ama KE rasyoneldir; öyleyse FK de rasyoneldir.

Öyleyse FK, KE yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır;

bu durumda EF ayrık olur. **[X.73]**

Şimdi, CD üzerindeki kare DB üzerindeki kareden ya CD ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar, ya da onunla eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

O zaman eğer CD üzerindeki kare DB üzerindeki kareden CD ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyükse,

FK üzerindeki kare de KE üzerindeki kareden FK ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[X.14]**

Ve eğer başta alınan rasyonel doğruyla CD eşölçekliyse, FK de öyledir; **[X.11, X.12]**

eğer BD eşölçekliyse, KE de öyledir; **[X.12]**

ama eğer CD, DB doğrularının hiçbiri bu şekilde eşölçekli değilse FK, KE'nin de hiçbiri değildir.

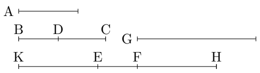
Ama eğer CD üzerindeki kare DB üzerindeki kareden CD ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyükse,

FK üzerindeki kare de KE üzerindeki kareden FK ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[X.14]**

Ve eğer başta alınan rasyonel doğruyla CD eşölçekliyse, FK de öyledir;

eğer BD bu şekilde eşölçekliyse, KE de öyledir;

ama CD, DB doğrularının hiçbiri bu şekilde eşölçekli değilse, FK, KE doğrularının da hiçbiri değildir;

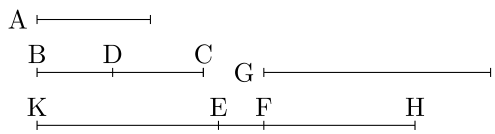


Böylece FE bir ayrıktır, parçaları olan FK, KE ise iki parçalı doğrunun parçaları olan CD, DB ile eşölçekli ve aynı orandadır, ve BC ile aynı türdendir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

113. Önerme:

Rasyonel bir doğru üzerindeki kareye eşit bir dikdörtgen ayrık üzerine çizildiğinde genişlik olarak parçaları ayrığın parçalarıyla eşölçekli ve aynı oranda olan iki parçalı doğru oluşturur; ve ayrıca bu şekilde oluşan iki parçalının türü ayrığın türüyle aynıdır.



A rasyonel bir doğru olsun, BD bir ayrık olsun, ve BD, KH dikdörtgeni A üzerindeki kareye eşit olsun, öyle ki A üzerindeki kare BD ayrığı üzerine çizilince KH genişliği oluşsun:

diyorum ki, KH, parçaları BD'nin parçalarıyla eşölçekli ve aynı oranda olan iki parçalı doğrudur, ve ayrıca KH'nin türü BD'ninkiyle aynıdır.

Çünkü, DC, BD'nin eklentisi olsun; bu durumda BC, CD yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır. **[X.73]**

BC, G dikdörtgeni A üzerindeki kareye eşit olsun.

Ama A üzerindeki kare rasyoneldir;

öyleyse BC, G dikdörtgeni de rasyoneldir.

Ve BC rasyonel doğrusu üzerine çizilmiştir;

öyleyse G rasyoneldir ve BC ile uzunlukta eşölçeklidir. **[X.20]**

Şimdi BC, G dikdörtgeni BD, KH dikdörtgenine eşit olduğundan,

orantı olarak, CB'nin BD'ye oranı, KH'nin G'ye oranına eşittir. **[VI.16]**

Ama BC, BD'den büyüktür; öyleyse KH de G'den büyüktür. **[V.16, V.14]**

KE, G'ye eşit çizilsin; bu durumda KE, BC ile uzunlukta eşölçeklidir.

Ve CB'nin BD'ye oranı, HK'nin KE'ye oranına eşit olduğundan, çevrilmiş oranlar olarak, BC'nin CD'ye oranı, KH'nin HE'ye oranına eşittir. **[DS. V.19]**

KH'nin HE'ye oranının HF'nin FEye oranına eşit olması sağlansın;

bu durumda kalanlar olarak KF'nin FH'ye oranı, KH'nin HE'ye oranına eşit olur, yani BC'nin CDye oranına. **[V.19]**

Ama BC, CD yalnızca karede eşölçeklidir; öyleyse KF, FH de yalnızca karede eşölçeklidir. **[X.11]**

Ve, KH'nin HE'ye oranı, KF'nin FH'ye oranına eşit olduğundan, ve bu arada KH'nin HE'ye oranı, HF'nin FE'ye oranına eşit olduğundan,

KF'nin FH'ye oranı, HF'nin FE'ye oranına eşittir, **[V.11]**

böylece birincinin üçüncüye oranı, birincinin üzerindeki karenin ikincinin üzerindeki kareye oranına eşit olur; **[Tan. V.9]**

bu durumda KF'nin FE'ye oranı, KF üzerindeki karenin FH üzerindeki kareye oranına eşit olur.

Ama KF üzerindeki kare FH üzerindeki kareyle eşölçeklidir, çünkü KF, FH karede eşölçeklidir;

öyleyse KF de FE ile uzunlukta eşölçeklidir, **[X.11]**

böylece KF, KE ile de uzunlukta eşölçekli olur. **[X.15]**

Ama KE rasyoneldir ve BC ile uzunlukta eşölçeklidir; öyleyse KF de rasyoneldir ve BC ile uzunlukta eşölçeklidir. **[X.12]**

Ve BC'nin CD'ye oranı, KF'nin FH'ye oranına eşit olduğundan,

değiştirilmiş oranlar olarak, BC'nin KF'ye oranı, DC'nin FH'ye oranına eşittir. **[V.16]**

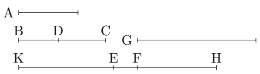
Ama BC, KF ile eşölçeklidir; öyleyse FH de CD ile uzunlukta eşölçeklidir. **[X.11]**

Ama BC, CD yalnızca karede eşölçekli rasyonel doğrulardır; öyleyse KF, H de rasyonel doğrulardır **[Tan. X.3]**

ve yalnızca karede eşölçeklidirler;

bu durumda KH iki parçalı olur. **[X.36]**

Şimdi eğer BC üzerindeki kare CD üzerindeki kareden BC ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyükse,



KF üzerindeki kare de FH üzerindeki kareden KF ile eşölçekli bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[X.14]**

Ve eğer BC, başta alınan rasyonel doğruyla uzunlukta eşölçekliyse, KF de öyledir;

eğer CD, başta alınan rasyonel doğruyla uzunlukta eşölçekliyse, FH de öyledir,

ama BC, CD doğrularının hiçbiri değilse, KF, FH doğrularının da hiçbiri değildir.

Ama eğer BC üzerindeki kare CD üzerindeki kareden BC ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyükse,

KF üzerindeki kare de FH üzerindeki kareden KF ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür. **[X.14]**

Ve eğer BC, başta alınan rasyonel doğruyla eşölçekliyse, KF de öyledir;

eğer CD eşölçekliyse, FH de öyledir;

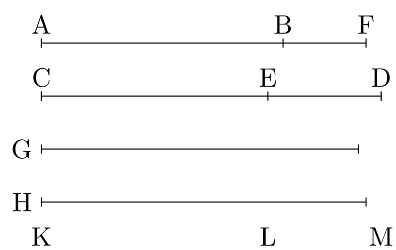
ama eğer BC, CD doğrularının hiçbiri değilse, KF, FH doğrularının da hiçbiri değildir.

Öyleyse KH doğrusu iki parçalıdır, parçaları olan KF, FH ise ayrığın parçaları olan BC, CD ile eşölçekli ve aynı orandadır, ve ayrıca KH'nin türü BD'nin türüyle aynıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

114. Önerme:

Karşılıklı olarak parçaları eşölçekli ve aynı oranda olan bir ayrık doğruyla iki parçalı bir doğrunun içerdiği dikdörtgene eşit olan karenin kenarı rasyoneldir.



AB, CD dikdörtgeni AB ayrığıyla CD iki parçalısı tarafından içerilsin,

ve iki parçalının daha büyük parçası CE olsun;

ve iki parçalının CE, ED parçaları ayrığın AF, FB parçalarıyla eşölçekli ve aynı oranda olsun;

ve AB, CD dikdörtgenine eşit kareninin kenarı G olsun;

diyorum ki, G rasyoneldir.

Çünkü, bir H rasyonel doğrusu alınsın,

ve CD üzerine H üzerindeki kareye eşit bir dikdörtgen çizilerek KL genişliği oluşturulsun.

Bu durumda KL ayrıktır.

Parçaları olan KM, ML, iki parçalı doğrunun parçaları olan CE, ED ile eşölçekli ve aynı oranda olsun. **[X.112]**

Ama CE, ED aynı zamanda AF, FB ile de eşölçekli ve aynı orandadır;

öyleyse AF'nin FB'ye oranı, KM'nin ML'ye oranına eşittir.

Öyleyse değiştirilmiş oranlar olarak, AF'nin KM'ye oranı, BF'nin LM'ye oranına eşittir;

bu durumda kalanlar olarak, AB'nin KL'ye oranı da AF'nin KM'ye oranına eşit olur. **[V.19]**

Ama AF, KM ile eşölçeklidir; **[X.12]**

öyleyse AB de KL ile eşölçeklidir. **[X.11]**

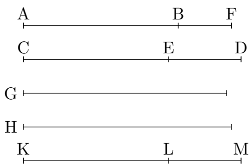
Ve AB'nin KL'ye oranı, CD, AB dikdörtgeninin CD, KL dikdörtgenine oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse CD, AB dikdörtgeni de CD, KL dikdörtgeniyle eşölçeklidir. **[XZ.11]**

Ama CD, KL dikdörtgeni H üzerindeki kareye eşittir; öyleyse CD, AB dikdörtgeni H üzerindeki kareyle eşölçeklidir.

Ama G üzerindeki kare CD, AB dikdörtgenine eşittir; öyleyse G üzerindeki kare H üzerindeki kareyle eşölçeklidir.

Ama H üzerindeki kare rasyoneldir; öyleyse G üzerindeki kare de rasyoneldir;



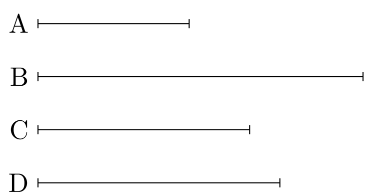
bu durumda G rasyonel olur.

Ve CD, AB dikdörtgenine eşit karenin kenarıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

Doğal Sonuç: Ve bu sayede açıkça görülür ki rasyonel bir alan irrasyonel kenarlar tarafından içerilebilir.

115. Önerme:
Orta değer bir doğruyla başlayarak, hiçbiri daha öncekilerden biriyle aynı olmayan sonsuz sayıda irrasyonel doğru türetilebilir.



A orta değer bir doğru olsun;

diyorum ki, A'dan başlayarak hiçbiri daha öncekilere eşit olmayan sonsuz sayıda irrasyonel doğru türetilebilir.

Bir B rasyonel doğrusu alınsın, ve C üzerindeki kare B, A dikdörtgenine eşit olsun;

bu durumda C irrasyonel olur; **[Tan. X.4]**

çünkü bir irrasyonel ve bir rasyonel doğru tarafından içerilen alan irrasyoneldir. **[X.20]**

Ve daha öncekilerin hiçbiriyle aynı değildir; çünkü daha öncekilerden hiçbirinin üzerindeki kare, eğer rasyonel bir doğru üzerine çizilirse genişlik olarak orta değer bir doğru vermez.

Yine, D üzerindeki kare B, C dikdörtgenine eşit olsun; öyleyse D üzerindeki kare irrasyoneldir. **[X.20]**

Bu durumda D irrasyonel olur; **[Tan. X.4]**

ve daha öncekilerden hiçbiriyle aynı değildir, çünkü daha öncekilerden hiçbirinin üzerindeki kare, eğer rasyonel bir doğru üzerine çizilirse genişlik olarak C'yi vermez.

Benzer şekilde, eğer bu düzen durmaksızın sürdürülürse, açıktır ki orta değer bir doğrudan başlayıp sonsuz sayıda irrasyonel doğru türetilir ve bunların hiçbiri daha öncekilerden biriyle aynı olmaz.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■