Kitap XI

1. Tanımlar

1 Uzunluğu, genişliği ve derinliği olana **cisim** denir.

2 Cismin sınırı yüzeydir.

3 Bir doğru, bir düzleme değdiği noktadan geçen ve düzlemde bulunan tüm doğrulara dikse, bu doğru o **düzleme diktir** denir.

4 Bir düzlemin içindeki doğrular arasında o düzlemin bir diğer düzlemle olan arakesitine dik olanların hepsi diğer düzleme dikse, o **düzlem diğer düzleme diktir** denir.

5 **Bir doğrunun bir düzlemle yaptığı açı**, o doğrunun, düzlemde olmayan ucundan düzleme çizilen dikmenin düzlemi kestiği noktadan o doğrunun düzlemde olan ucuna çizilen doğruyla yaptığı açıdır.

6 **Bir düzlemin bir başka düzlemle yaptığı açı**, bu iki düzlemin arakesiti üzerindeki bir noktada, bu ara kesite dik olacak şekilde çizilen ve biri bir düzlemde öbürü de diğer düzlemde olan iki doğrunun arasındaki dar açıdır.

7 Bir düzlemin bir diğer düzlemle yaptığı açı bir başka düzlemin daha başka bir düzlemle yaptığı açıya eşitse bu **düzlemler eşit açılıdır** denir.

8 Kesişmeyen düzlemlere **paralel düzlemler**
dizinparalel düzlemler denir.

> *[Bu tanım bize üç boyutlu uzayda çalışacağımızı gösteriyor. Yüksek boyutlu uzaylarda birbirinie kesmeyen aykırı düzlemler vardır, tıpkı üç boyutlu uzayda birbirini kesmeyen aykırı doğruların olduğu gibi.]*

9 Eşit sayıda ve aynı biçimde yerleştirilmiş benzer düzlem şekilleri tarafından içerilen cisimlere **benzer cisimler** denir.

10 Eşit sayıda ve aynı biçimde yerleştirilmiş aynı nicelikte benzer düzlem şekilleri tarafından içerilen cisimlere **eşit ve benzer cisimler** denir.

11 Aynı yüzeyde olmayan ve aynı noktada kesişen ikiden fazla çizginin diğer çizgilerle olan eğimine **çokyüzlü açı** denir.
Başka bir deyişle: **Çokyüzlü açı**, aynı noktada çizilmiş olan ve aynı düzlemde olmayan ikiden fazla düzlem açısı arasında kalandır.

> *[Buradaki iki tanım birbiriyle aynı değildir. Yine de Öklid'in önermelerde çokyüzlü açı dediği zaman duruma göre neyi kastettiği anlaşılacaktır.]*

12 Bir düzlemden bir noktaya çizilen düzlemler arasında kalan cisme **piramit** denir.

13 Karşılıklı olan iki tanesi eşit, benzer ve paralel olan, ve diğerleri paralelkenar olan düzlemler tarafından içerilen cisme **prizma** denir.

14 Bir yarım daire çapı etrafında döndürülüp yine başladığı konuma geri getirildiğinde oluşan cisme **küre** denir.

15 Küre elde edilirken sabit kalan ve yarı dairenin etrafında döndürüldüğü doğruya **kürenin ekseni** denir.

16 **Kürenin merkezi** yarım daireninkiyle aynıdır.

17 Kürenin merkezinden geçen ve her iki yönde de küre tarafından kesilen doğru parçasına **kürenin çapı** denir.

18 Dik açılı bir üçgen dik kenarlardan biri etrafında döndürülüp yine başladığı konuma geri getirildiğinde oluşan cisme **koni** denir.
Sabit kalan dik kenar, döndürülen diğer dik kenara eşitse bu koniye **dik açılı koni**, ondan küçükse **geniş açılı koni**, büyükse **dar açılı koni** denir.

19 Üçgen döndürülürken sabit kalan dik kenara **koninin ekseni** denir.

20 **Koninin tabanı** döndürülen dik kenarın oluşturduğu dairedir.

21 Bir dikdörtgen kenarlardan biri etrafında döndürülüp yine başladığı konuma geri getirildiğinde oluşan cisme **silindir** denir.

22 Dörtgen döndürülürken sabit kalan kenara **silindirin ekseni** denir.

23 **Silindirin tabanları** döndürülen karşılıklı iki kenarın oluşturduğu dairelerdir.

24 Eksenleri ve tabanlarının çapları orantılı olan koni ve silindirlere **benzer koniler ve silindirler** denir.

25 Altı eşit kare tarafından içerilen cisme **küp** denir.

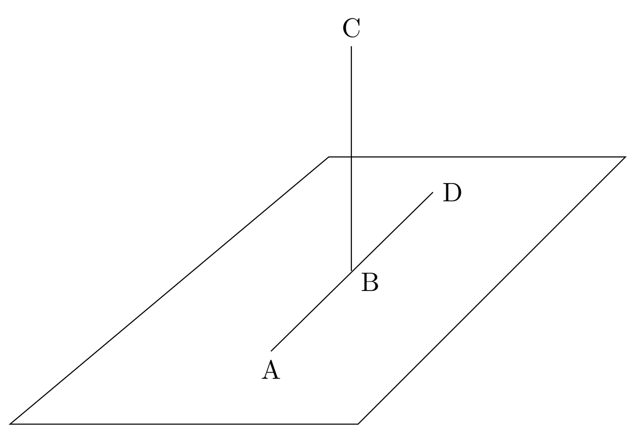
26 Sekiz eşit ve eşkenar üçgen tarafından içerilen cisme **sekizyüzlü** denir.

27 Yirmi eşit ve eşkenar üçgen tarafından içerilen cisme **yirmiyüzlü** denir.

28 On iki eşit, eşkenar ve eşaçılı beşgen tarafından içerilen cisme **onikiyüzlü** denir.

2. Önermeler

1. Önerme:
Bir doğrunun bir parçası bir referans düzleminde, bir diğer parçası da yükseltilmiş başka bir düzlemde olamaz.

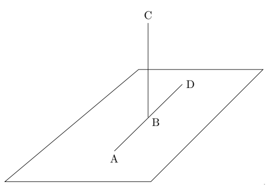


Çünkü, eğer mümkünse, ABC doğrusunun AB parçası referans düzleminde, ve BC parçası da yükseltilmiş bir düzlemde olsun.

O zaman referans düzleminde AB ile aynı doğrultuda olan bir doğru olacaktır.

> *[Yine dikkatli okuyucu hemen fak edecektir ki böyle bir doğrunun varlığı ile önermenin iddiası eşanlamlıdır.]*

Bu doğru BD olsun;



bu durumda AB doğrusu ABC, ABD doğrularının ortak parçası olur: bu olamaz çünkü B merkezli ve AB uzunluğuyla bir çember çizersek, çemberin çapları çemberde eşit olmayan çevreler kesecektir.

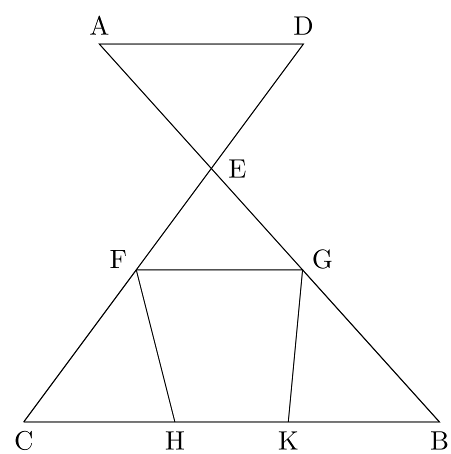
[Bu çaplar ABD *ve* ABC*'dir.]*

Öyleyse bir doğrunun bir parçası bir referans düzleminde, ve bir başka parçası da yükseltilmiş bir düzlemde olamaz.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

[Dikkatli okuyucu bu kanıtın yeterli olmadığını görecektir. Genel görüş ilk üç önermenin belit olarak kabul edilmesinin yerinde olacağı yönündedir.]

2. Önerme:
Kesişen iki doğru aynı düzlemdedir, ve her üçgen bir düzlemde yatar.



AB, CD doğruları E noktasında kesişsin;

diyorum ki, AB, BC aynı düzlemdedir, ve her üçgen bir düzlemde yatar.

Çünkü, EC, EB üzerinde rasgele F, G noktaları alınsın, CB, FG birleştirilsin, ve karşıya doğru FH, GK çizilsin;

önce diyorum ki, ECB üçgeni bir düzlemdedir.

Çünkü, eğer ECB üçgeninin bir parçası, ya FHC ya da GBK, başka bir referans düzleminde ve kalan kısım başka bir düzlemdeyse, EC, EB doğrularının da bir parçası referans düzleminde diğer parçası başka bir düzlemde olacaktır.

Ama, eğer ECB üçgeninin FCBG parçası referans düzleminde ve kalanı başka bir düzlemdeyse,

yine EC, EB doğrularının bir parçası referans düzleminde diğer parçası başka düzlemde olacaktır:

ki bunun olmayacağı kanıtlanmıştı. **[XI.1]**

Öyleyse ECB üçgeni bir düzlemde yatmaktadır.

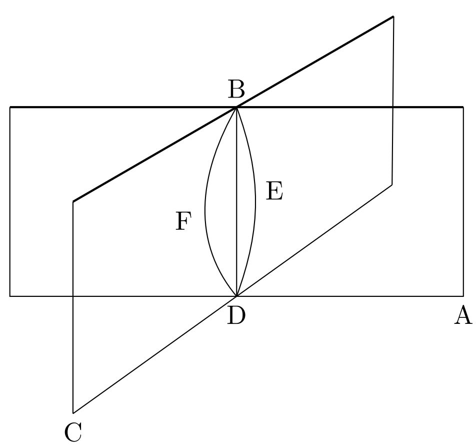
Ama ECB üçgeni hangi düzlemde yatıyorsa EC, EB doğruları da o düzlemdedir,

ve EC, EB doğruları hangi düzlemdeyseler AB, CD de o düzlemdedir.

Öyleyse AB, CD doğruları bir düzlemdedir, ve her üçgen bir düzlemde yatar.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

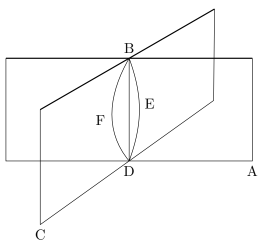
3. Önerme:
Kesişen iki düzlemin arakesiti bir doğrudur.



Çünkü, AB, BC düzlemleri kesişsin, ve DB çizgisi arakesitleri olsun;

diyorum ki, DB çizgisi bir doğrudur.

Çünkü, eğer değilse, AB düzlemi içinde D'den B'ye DEB doğrusu çizilsin, ve BC düzlemi içide de DFB çizilsin.



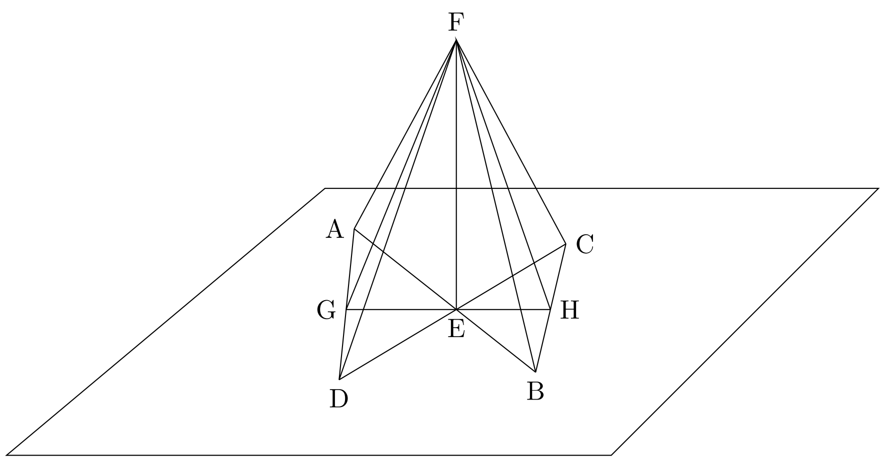
O zaman DEB, DFB doğruları aynı uçlara sahip olacaklar ve bir alan içereceklerdir: bu olamaz.

Öyleyse DEB, DFB doğru değildir.

Benzer şekilde D'yi B'ye birleştiren, AB, BC düzlemlerinin arakesiti DB'den başka doğru olmayacağını kanıtlayabiliriz.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

4. Önerme:
Kesişen iki doğruya kesiştikleri noktada dik olan bir doğru bu kesişen iki doğrunun bulunduğu düzleme de diktir.



E noktasında kesişen iki AB, CD doğrularına E noktasında EF doğrusu dik olsun;

diyorum ki, EF doğrusu AB, BD doğrularından geçen düzleme de diktir.

Çünkü, AE, EB, CE, ED birbirine eşit olarak kesilsin, E'den geçen rasgele GEH doğrusu çizilsin;

AD, CB birleştirilsin, ve ayrıca rasgele seçilen F noktasından FA, FG, FD, FC, FH, FB çizilsin.

[F *noktası* EF *doğrusu üzerinde düşünülecek.*]

Şimdi, AE, ED doğruları CE, EB doğrularına eşit olduğundan, ve eşit açılar içerdiklerinden, **[I.15]**

AD tabanı CB tabanına eşittir,

ve AED üçgeni CEB üçgenine eşittir; **[I.4]**

böylece DAE açısı da EBC açısına eşit olur.

Ama AEG açısı da BEH açısına eşittir; **[I.15]**

öyleyse AGE, BEH üçgenlerinde karşılıklı iki açı iki açıya eşittir, ve bir kenar bir kenara, yani eşit açılar arasındaki kenarlar, eşittir, yani AE, EB'ye;

bu durumda diğer kenarlar da diğer kenarlara eşit olacaktır. **[I.26]**

Öyleyse GE eşittir EH, ve AG eşittir BH.

Ve, AE, EB'ye eşit olduğundan, ve bu arada FE ortak ve dik olduğundan,

FA tabanı FB tabanına eşittir. **[I.4]**

Aynı nedenden dolayı FC eşittir FD.

Ve AD, CB'ye eşit olduğundan, FA da FB'ye eşit olduğundan,

iki kenar FA, AD sırasıyla iki kenar FB, BC'ye eşittir;

ve FD tabanının FC tabanına eşit olduğu kanıtlanmıştı;

öyleyse FAD açısı FBC açısına eşittir. **[I.8]**

Ve yine, AG'nin BH'ye eşit olduğu kanıtlandığından, ve ayrıca FA da FB'ye eşit olduğundan,

iki kenar FA, AG sırasıyla iki kenar FB, BH'ye eşittir.

Ve FAG açısının FBH açısına eşit olduğu kanıtlanmıştı;

> *[* FAG *açısı* FAD *açısıdır,* FBH *açısı da* FBC *açısıdır, ve* FAD *açısının* FBC *açısına eşit olduğu az önce kanıtlanmıştı.]*

öyleyse FG tabanı FH tabanına eşittir. **[I.4]**

Şimdi yine, GE'nin EH'ye eşit olduğu kanıtlandığından, ve EF ortak olduğundan,

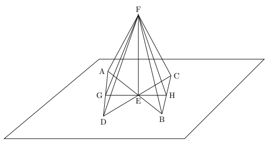
GE, EF kenarları HE, EF kenarlarına eşittir;

ve FG tabanı FH tabanına eşittir;

bu durumda GEF açısı HEF açısına eşit olur. **[I.8]**

Öyleyse GEF, HEF açılarının her biri diktir. **[Tan. I.10]**

Bu durumda FE doğrusu E noktasından rasgele çizilen GH'ye diktir.



Benzer şekilde FE'nin onu kesen ve referans düzleminde olan tüm doğrularla dik açı yapacağını kanıtlayabiliriz.

Ama bir doğru, aynı düzlemde olan ve onu kesen tüm doğrularla dik açı yaparsa o düzleme diktir; **[Tan. XI.3]**

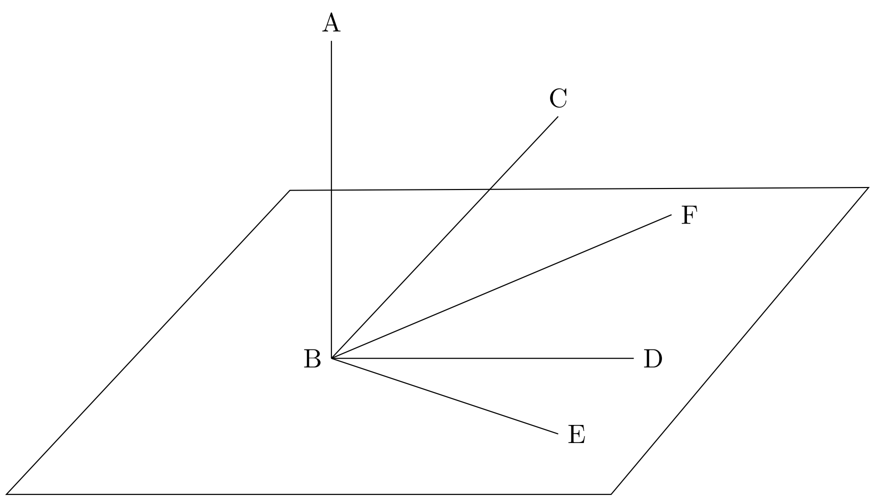
öyleyse FE referans düzlemine diktir.

Ama referans düzlemi AB, CD doğrularından geçen düzlemdir.

Öyleyse FE doğrusu AB, CD'den geçen düzleme diktir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

5. Önerme:
Eğer bir doğru, aynı noktada kesişen üç doğruya kesiştikleri noktada dikse, bu üç doğru aynı düzlemdedir.



AB doğrusu BC, BD, BE doğrularına kesiştikleri B noktasında dik olsun;

diyorum ki, BC, BD, BE aynı düzlemdedir.

Çünkü, aynı düzlemde olmadıklarını varsayalım, ama eğer mümkünse, BD, BE referans düzleminde olsun, ve BC de başka bir düzlemde olsun;

AB, BC'den geçen düzlem oluşturulsun; böylece referans düzlemiyle arakesiti bir doğru olacaktır. **[XI.3]**

Bu doğru BF olsun.

Bu durumda AB, BC, BF doğruları aynı düzlemde olacaktır, yani AB, BC'den geçen düzlemde.

Şimdi, AB doğrusu BD, BE doğrularının her birine dik olduğundan,

AB doğrusu BD, BE'den geçen düzleme de diktir. **[XI.4]**

Ama BD, BE'den geçen düzlem referans düzlemidir; öyleyse AB referans düzlemine diktir.

Böylece AB, referans düzleminde olan ve onu kesen her doğruya dik olacaktır. **[Tan. XI.3]**

Ama referans düzleminde olan BF onu keser; öyleyse ABF açısı diktir.

Ama varsayıma göre ABC açısı da diktir; öyleyse ABF açısı ABC açısına eşittir.

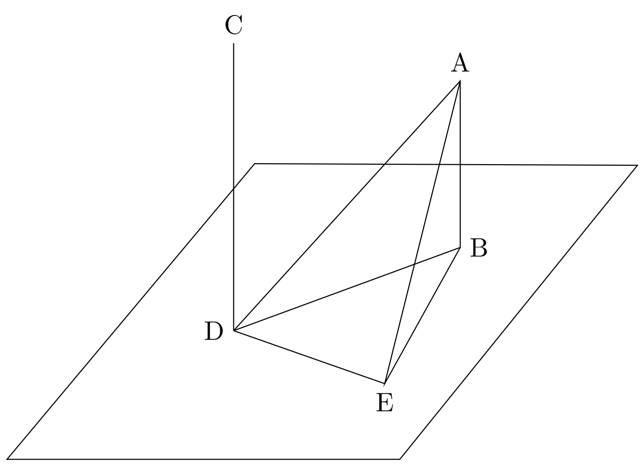
Ve aynı düzlemdeler: bu olamaz.

Öyleyse BC doğrusu başka bir düzlemde değildir; bu durumda BC, BD, BE doğruları aynı düzlemdedir.

Öyleyse eğer bir doğru üç doğruya kesiştikleri noktada dikse, bu üç doğru aynı düzlemdedir.

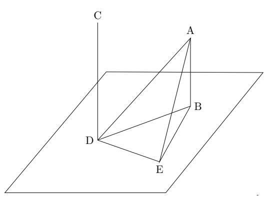
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

6. Önerme:
Eğer iki doğru aynı düzleme dikse, bu doğrular paraleldir.



AB, CD doğruları referans düzlemine dik olsun;

diyorum ki, AB, CD'ye paraleldir.



Çünkü, referans düzlemini B, D noktalarında kessinler, BD çizilsin, referans düzleminde BD'ye dik DE çizilsin, DE eşittir AB olsun, ve BE, AE, AD çizilsin.

Şimdi, AB doğrusu referans düzlemine dik olduğundan, referans düzleminde olan ve onu kesen her doğruya dik olacaktır. **[Tan. XI.3]**

Ama BD, BE doğrularının her biri referans düzleminde ve AB'yi keser;

öyleyse ABD, ABE açılarının her biri diktir.

Aynı nedenden, CDB, CDE açılarının her biri diktir.

Ve AB, DE'ye eşit, ve BD ortak olduğundan,

AB, BD kenarları ED, DB kenarlarına eşittir; ve aralarındaki açı diktir;

bu durumda AD tabanı BE tabanına eşit olur. **[I.4]**

Ve AB, DE'ye eşit olduğundan, ve ayrıca AD de BE'ye eşit olduğundan,

AB, BE kenarları ED, DA kenarlarına eşittir; ve AE ortak tabandır;

öyleyse ABE açısı EDA açısına eşittir. **[I.8]**

Ama ABE açısı diktir; öyleyse EDA açısı da diktir;

bu durumda ED, DA'ya diktir.

Ama BD, DC doğrularının her birine de diktir; öyleyse ED doğrusu BD, DA, DC doğrularına kesişme noktalarında diktir;

bu durumda BD, DA, DC doğruları aynı düzlemdedir. **[XI.5]**

Ama DB, DA hangi düzlemdeyse, AB de o düzlemdedir, çünkü her üçgen bir düzlemde yatar; **[XI.2]**

Öyleyse AB, BD, DC doğruları aynı düzlemdedir.

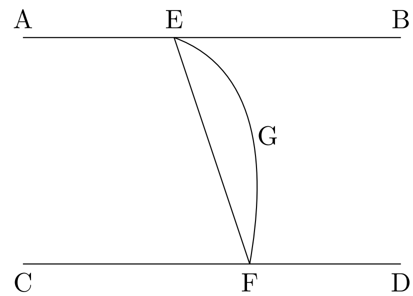
Ve ABD, BDC açılarının her biri diktir;

öyleyse AB, CD'ye paraleldir. **[I.28]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

7. Önerme:

Eğer iki doğru paralelse ve her biri üzerinde rasgele noktalar alınırsa, bu noktaları birleştiren doğrular o paralel doğrularla aynı düzlemdedir.



AB, CD iki paralel doğru olsun, ve sırasıyla E, F noktaları üzerlerinde rasgele alınan noktalar olsun;

diyorum ki, E, F noktalarını birleştiren doğru paralel doğrularla aynı düzlemdedir.

Çünkü öyle olmadığını varsayalım, ama eğer mümkünse EGF gibi başka bir düzlemde olsun, ve EGF'den geçen bir düzlem çizilmiş olsun;

o zaman referans düzlemiyle arakesit olarak bir doğru oluşturacaktır. **[XI.3]**

Oluştursun ve bu doğru EF olsun;

bu durumda iki doğru EGF, EF bir alan içerecektir: bu olamaz.

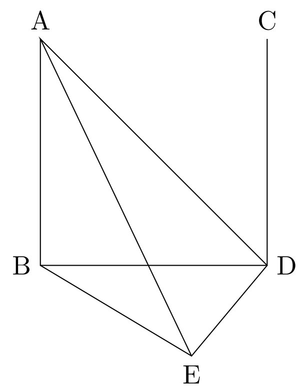
Öyleyse E'den F'ye çizilen doğru başka bir düzlemde değildir;

öyleyse E'den F'ye çizilen doğru AB, CD paralel doğrularından geçen düzlemdedir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

8. Önerme:

Eğer iki doğru paralelse ve bunlardan biri bir düzleme dikse, diğeri de aynı düzleme diktir.



AB, CD iki paralel doğru olsun ve bunlardan biri, diyelim AB, referans düzlemine dik olsun;

diyorum ki, diğeri, yani CD de aynı düzleme dik olacaktır.

Çünkü, AB, CD referans düzlemini B, D noktalarında kessin, ve BD birleştirilsin;

bu durumda AB, CD, BD aynı düzlemde olur. **[XI.7]**

Referans düzleminde BD'ye dik DE çizilsin,

DE, AB'ye eşit olsun,

ve BE, AE, AD birleştirilsin.

Şimdi, AB doğrusu referans düzlemine dik olduğundan, AB doğrusu referans düzleminde olan ve onu kesen her doğruya da diktir; **[Tan. XI.3]**

Ve BD doğrusu AB, CD paralellerini kestiğinden, ABD, CDB açıları iki dik açıya eşittir. **[I.29]**

Ama ABD açısı diktir; öyleyse CDB açısı da diktir; bu durumda CD doğrusu BD'ye dik olur.

Ve, AB, DE'ye eşit olduğundan, ve BD ortak olduğundan,

iki kenar AB, BD, iki kenar ED, DB'ye eşittir;

ve her biri dik olduğu için ABD açısı EDB açısına eşittir;

öyleyse AD tabanı BE tabanına eşittir.

Ve, AB, DE'ye, ve BE, AD'ye eşit olduğundan,

iki kenar AB, BE, sırasıyla iki kenar ED, DA'ya eşittir, ve AE ortak tabanlarıdır;

bu durumda ABE açısı EDA açısına eşit olur.

Ama ABE açısı diktir; öyleyse EDA açısı da diktir; bu durumda ED doğrusu AD'ye dik olur.

Ama aynı zamanda DB'ye de diktir;

bu durumda ED doğrusu BD, DA'dan geçen düzleme de dik olur. **[XI.4]**

Öyleyse ED doğrusu BD, DA'dan geçen düzlemin içinde olan ve onu kesen tüm doğrulara da dik olacaktır, **[XI.2]**

Ama, AB, BD doğruları BD, DA doğrularından geçen düzlemin içinde olduklarından DC de BD, DA'dan geçen düzlemin içindedir, **[XI.2]**

ve DC aynı zamanda AB, BD'nin olduğu düzlemdedir.

Öyleyse ED doğrusu DC'ye diktir, böylece CD, DE'ye dik olur.

Ama CD, BD'ye de diktir.

Öyleyse CD doğrusu kesişen DE, DB doğrularına kesiştikleri D noktasında diktir;

böylece CD doğrusu DE, DB'den geçen düzleme de diktir. **[XI.4]**

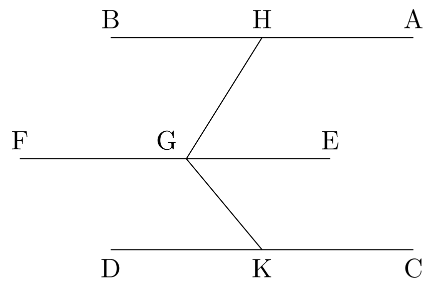
Ama DE, DB'den geçen düzlem referans düzlemidir;

öyleyse CD referans düzlemine diktir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

9. Önerme:

Aynı doğruya paralel olan ama onunla aynı düzlemde olmayan doğrular birbirine de paraleldir.



AB, CD doğrularının her biri EF'ye paralel olsun, ama onunla aynı düzlemde olmasın;

diyorum ki, AB, CD'ye paraleldir.

Çünkü, EF üzerinde rasgele bir G noktası alınsın, ve oradan, EF, AB'den geçen düzlemin içinde, EF'ye dik GH çizilsin,

ve FE, CD'den geçen düzlemin içinde, EF'ye dik GK çizilsin.

Şimdi, EF doğrusu GH, GK doğrularının her birine dik olduğundan,

EF doğrusu GH, GK'den geçen düzleme de diktir. **[XI.4]**

Ve EF, AB'ye paraleldir; öyleyse AB de HG, GK'den geçen düzleme diktir. **[XI.8]**

Aynı nedenden dolayı CD de HG, GK'den geçen düzleme diktir;

bu durumda AB, CD doğrularının her biri HG, GK'den geçen düzleme dik olur.

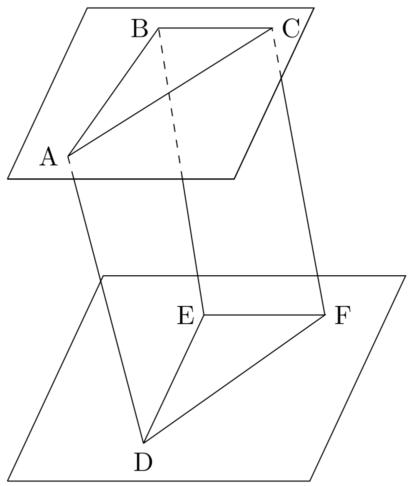
Ama, eğer iki doğru aynı düzleme dikse, bu doğrular paraleldir; **[XI.6]**

öyleyse AB, CD'ye paraleldir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

10. Önerme:

Birbirini kesen iki doğru kendileriyle aynı düzlemde olmayan ve birbirini kesen başka iki doğruya paralelse, bu kesişen doğrular aynı açıyla birbirlerini keserler.



Kesişen AB, BC doğruları, onlarla aynı düzlemde olmayan ve kesişen DE, EF doğrularına paralel olsun;

diyorum ki, ABC açısı DEF açısına eşittir.

Çünkü, BA, BC, ED, EF birbirine eşit çizilsin ve AD, CF, BE, AC, DF birleştirilsin.

Şimdi, BA, ED'ye eşit ve paralel olduğundan, AD de BE'ye eşit ve paraleldir. **[I.33]**

Aynı nedenden dolayı CF de BE'ye eşit ve paraleldir.

Öyleyse AD, CF doğrularının her biri BE'ye eşit ve paraleldir.

Ama aynı doğruya paralel olan ve onunla aynı düzlemde olmayan doğrular birbirine paraleldir; **[XI.9]**

bu durumda AD, CF'ye paralel olur.

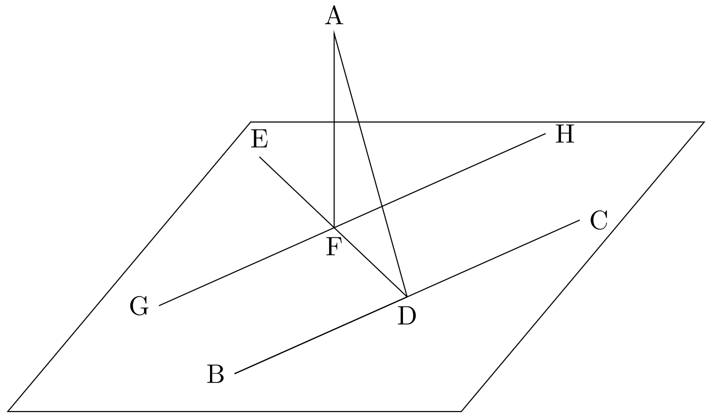
Ve, AC, DF onları birleştirir; öyleyse AC de DF'ye eşit ve paraleldir. **[I.33]**

Şimdi, iki kenar AB, BC, iki kenar DE, EF'ye eşit olduğundan, ve AC tabanı DF tabanına eşit olduğundan,

ABC açısı DEF açısına eşittir. **[I.8]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

11. Önerme:
Bir düzlemin dışındaki bir noktadan düzleme dik bir doğru çizmenin yolu.



Verilen düzlemin dışındaki nokta A olsun;

böylece A noktasından verilen düzleme bir dikme çizilmesi isteniyor.

Verilen düzlemde rasgele bir BC doğrusu çizilsin, ve AD doğrusu ona dik olsun. **[I.12]**

Eğer AD doğrusu verilen düzleme de dikse yapılmak istenen çizim yapılmıştır.

Ama eğer değilse, verilen düzlemde BC'ye dik DE çizilsin, **[I.11]**

A'dan DE'ye dik AF çizilsin, **[I.12]**

ve F noktasından BC'ye paralel GH çizilsin. **[I.31]**

Şimdi, BC doğrusu DA, DE doğrularının her birine dik olduğundan, BC doğrusu ED, DA'dan geçen düzleme de diktir. **[XI.4]**

Ve GH ona paraleldir;

ama, eğer iki doğru paralelse ve bunlardan biri bir düzleme dikse, diğeri de o düzleme diktir; **[XI.8]**

öyleyse GH de ED, DA'dan geçen düzleme diktir.

Bu durumda GH doğrusu, ED, DA'dan geçen düzlem içinde olan ve onu kesen her doğruya dik olur. **[Tan. XI.3]**

Ama AF onu keser ve ED, DA'dan geçen düzlem içindedir; öyleyse GH, FA'ya diktir, böylece FA da GH'ye diktir.

Ama AF, DE'ye de diktir;

öyleyse AF doğrusu GH, DE doğrularının her birine diktir.

Ama eğer bir doğru kesisen iki doğruya kesiştikleri noktada dikse, onlardan geçen düzleme de diktir; **[XI.4]**

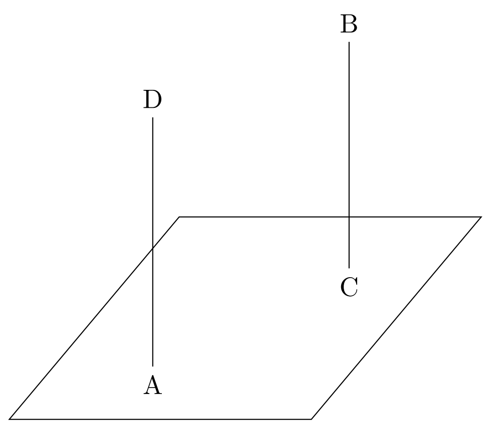
bu durumda FA doğrusu ED, GH'den geçen düzleme diktir.

Ama ED, GH'den geçen düzlem verilen düzlemdir; öyleyse AF verilen düzleme diktir.

Böylece verilen düzlemde olmayan A noktasından verilen düzleme dik AF doğrusu çizlmiştir.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

12. Önerme:
Düzlemdeki bir noktadan o düzleme dik bir doğru çizmenin yolu.



A noktası verilen düzlemde bir nokta olsun;

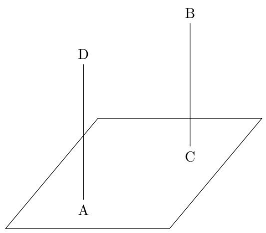
böylece A noktasından verilen düzleme dik bir doğru çizilmesi istenmektedir.

Verilen düzlemin dışında bir B noktası alınsın, B noktasından verilen düzleme dik BC doğrusu çizilsin, **[XI.11]**

ve A noktasından BC'ye paralel AD çizilsin. **[I.31]**

O zaman, AD, CB doğruları, içlerinden birinin, BC'nin, verilen düzleme dik olduğu iki paralel doğru olduğundan,

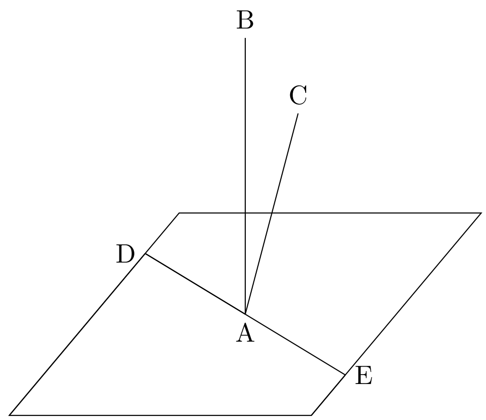
diğeri, AD de verilen düzleme diktir. **[XI.8]**



Böylece verilen düzleme A noktasında dik olan AD doğrusu çizilmiştir.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

13. Önerme:
Düzlemdeki bir noktadan düzlemin aynı tarafında olmak ve düzleme dik olmak şartıyla iki farklı doğru çizilemez.



Çünkü, eğer mümkünse, A noktasından verilen düzleme dik ve aynı tarafta olan AB, AC doğruları çizilsin,

ve BA, AC'den geçen düzlem çizilsin;

o zaman bu düzlem verilen düzlemle A'dan geçen bir arakesit doğrusu oluşturacaktır. **[XI.3]**

DAE doğrusunu oluştursun; bu durumda AB, AC, DAE doğruları aynı düzlemde olur.

Ve CA verilen düzleme dik olduğundan, verilen düzlemde olan ve onu kesen her doğruya dik olacaktır. **[Tan. XI,3]**

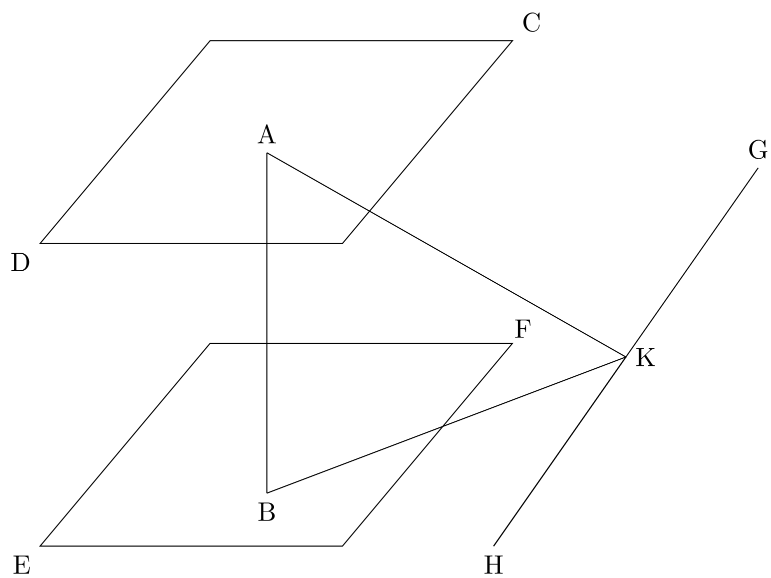
Ama DAE onu keser ve verilen düzlemdedir; öyleyse CAE açısı diktir.

Aynı nedenden dolayı BAE açısı da diktir; öyleyse CAE açısı BAE açısına eşittir.

Ve bunlar aynı düzlemdedir: bu olamaz.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

14. Önerme:
Aynı doğruyla dik açı yapan düzlemler birbirine paraleldir.



AB doğrusu CD, EF düzlemlerinin her birine dik olsun;

diyorum ki, bu düzlemler paraleldir.

Çünkü, eğer değilseler, uzatıldıklarında kesişeceklerdir.

Kesişsinler; o zaman arakesit olarak bir doğru oluşturacaklardır.

GH'yi oluştursunlar; GH üzerinde rasgele bir K noktası alınsın, ve AK, BK birleştirilsin.

Şimdi, AB doğrusu EF düzlemine dik olduğundan, AB doğrusu EF düzleminin uzantısında olan BK'ye de diktir; **[Tan. XI.3]**

bu durumda ABK açısı dik olur.

Aynı nedenden dolayı BAK açısı da diktir.

Böylece ABK üçgeninde ABK, BAK açıları diktir: bu olamaz. **[I.17]**

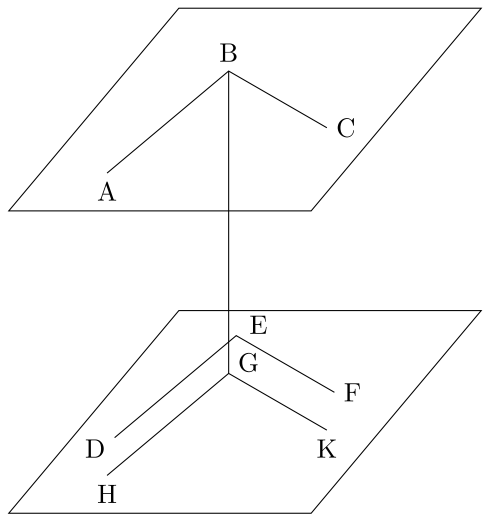
Öyleyse CD, EF düzlemleri uzatıldıklarında kesişmez; bu durumda CD, EF düzlemleri paralel olur. **[Tan. XI.8]**

Öyleyse aynı doğrunun dik olduğu düzlemler paraleldir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

15. Önerme:

Birbirini kesen iki doğru kendileriyle aynı düzlemde olmayan ve birbirini kesen başka iki doğruya paralelse, bu doğruların bulunduğu düzlemler paraleldir.



Kesişen AB, BC doğruları, onlarla aynı düzlemde olmayan ve kesişen DE, EF doğrularına paralel olsun;

diyorum ki, AB, BC'den geçen düzlemle DE, EF'den geçen düzlem uzatıldıklarında birbirini kesmez.

Çünkü, B noktasından BG doğrusu DE, EF'den geçen düzleme dik çizilsin, **[XI.11]**

ve o düzlemi G noktasında kessin;

G noktasından EDye paralel GH, ve EF'ye paralel GK çizilsin. **[I.31]**

Şimdi, BG doğrusu DE, EF'den geçen düzleme dik olduğundan, DE, EF'den geçen düzlemde olan ve onu kesen her doğruya da dik olacaktır. **[Tan. XI.3]**

Ama GH, GK doğrularının her biri onu keser ve DE, EF'den geçen düzlemdedir;

öyleyse BGH, BGK açılarının her biri diktir.

Ve BA, GH'ye paralel olduğundan, **[XI.9]**

GBA, BGH açıları iki dik açıya eşittir. **[I.29]**

Ama BGH açısı diktir; öyleyse GBA açısı da diktir;

bu durumda GB, BA'ya diktir.

Aynı nedenden dolayı GB BC'ye de diktir.

O zaman, GB doğrusu kesişen BA, BC doğrularına dik olduğundan, BA, BC'den geçen düzleme de diktir. **[XI.4]**

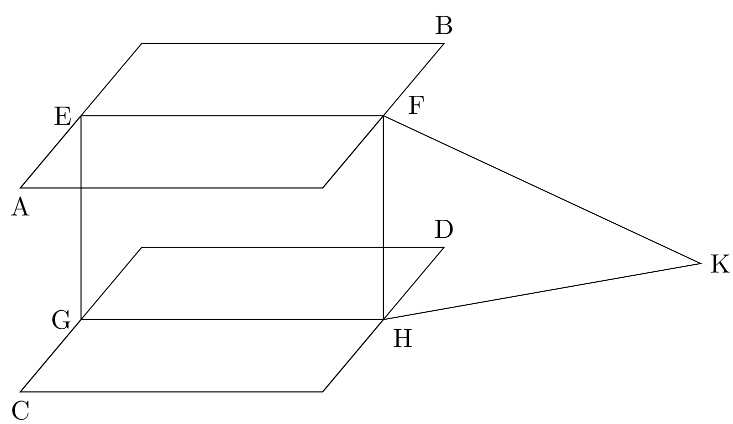
Ama aynı doğrunun dik olduğu düzlemler paraleldir; **[XI.14]**

bu durumda AB, BC'den geçen düzlem DE, EF'den geçen düzleme paralel olur.

Öyleyse, eğer kesişen iki doğru aynı düzlemde olamayan ve kesişen iki doğruya paralelse, bunlardan geçen düzlemler de paraleldir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

16. Önerme:
Paralel iki düzlemi kesen bir düzlemin bu düzlemlerle olan arakesitleri paraleldir.



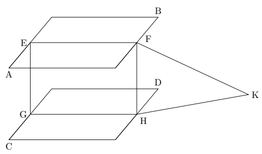
AB, CD paralel düzlemleri EFGH düzlemiyle kesişsin, ve arakesitleri EF, GH olsun;

diyorum ki, EF, GH'ye paraleldir.

Çünkü, eğer değilse, EF, GH uzatıldıklarında ya F, H yönünde ya da E, G yönünde kesişecektir.

F, H yönünde uzatılsınlar ve K noktasında kesişsinler.

Şimdi, EFK doğrusu AB düzleminde olduğundan, EFK üzerindeki tüm noktalar da AB düzlemindedir. **[XI.1]**



Ama K noktası EFK doğrusu üzerindeki noktalardan biridir; öyleyse K noktası AB düzlemindedir.

Aynı nedenden dolayı K noktası aynı zamanda CD düzlemindedir;

bu durumda AB, CD düzlemleri uzatıldıklarında kesişecektir.

Ama kesişmezler çünkü varsayım gereği paraleldirler;

öyleyse EF, GH doğruları F, H yönünde uzatıldığında kesişmeyecektir.

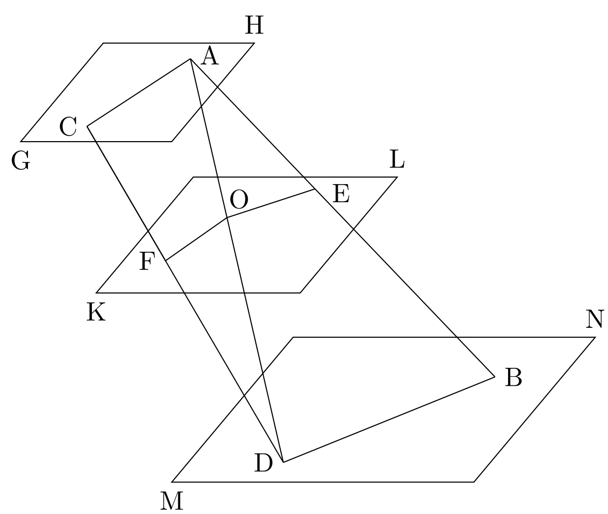
Benzer şekilde EF, GH doğrularının E, G yönünde uzatıldıklarında da kesişmeyeceğini kanıtlayabiliriz.

Ama her iki yönde de uzatıldıklarında kesişmeyen doğrular paraleldir. **[Tan. I.23]**

Öyleyse EF, GH'ye paraleldir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

17. Önerme:
Paralel düzlemler tarafından kesilen iki doğru aynı oranlarda kesilir.



AB, CD doğruları GH, KL, MN paralel düzlemleri tarafından A, E, B ve C, F, D noktalarında kesilsin;

diyorum ki, doğru parçaları olarak AE'nin EB'ye oranı, CF'nin FD'ye oranına eşittir.

Çünkü, AC, BD, AD birleştirilsin, AD doğrusu KL düzlemini O'da kessin, ve EO, OF birleştirilsin.

Şimdi, KL, MN paralel düzlemleri EBDO düzlemi tarafından kesildiğinden, arakesitler olarak EO, BD'ye paraleldir. **[XI.16]**

Aynı nedenden dolayı, GH, KL paralel düzlemleri AOFC düzlemi tarafından kesildiğinden, arakesitleri olarak AC, OF'ye paraleldir. **[XI.16]**

Ama, EO doğrusu ABD üçgeninin bir kenarı olan BD'ye paralel çizildiğinden,

AE'nin EB'ye oranı, AO'nun OD'ye oranına eşittir. **[VI.2]**

Yine, OF doğrusu ADC üçgeninin bir kenarı olan AC'ye paralel çizildiğinden,

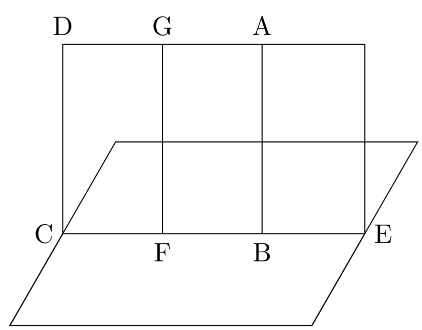
AO'nun OD'ye oranı, CF'nin FD'ye oranına eşittir. **[VI.2]**

Ama AO'nun OD'ye oranının AE'nin EB'ye oranına da eşit olduğu kanıtlanmıştı;

öyleyse AE'nin EB'ye oranı, CF'nin FD'ye oranına eşittir. **[V.11]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

18. Önerme:
Bir doğru bir düzleme dikse, o doğruyu içeren tüm düzlemler de o düzleme diktir.



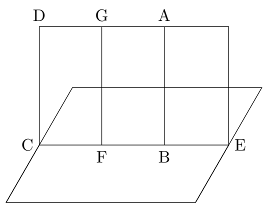
AB doğrusu verilen bir düzleme dik olsun;

diyorum ki, AB'den geçen tüm düzlemler de verilen düzleme diktir.

Çünkü, AB'den geçen DE düzlemi çizilsin,

verilen düzlemle DE düzleminin arakesiti CE olsun,

CE üzerinde bir F noktası alınsın,



ve F noktasından CE doğrusuna DE düzlemi içinde FG doğrusu dik olarak çizilsin. **[I.11]**

Şimdi, AB doğrusu verilen düzleme dik olduğundan, AB doğrusu verilen düzlemde onunla kesişen her doğruya da diktir; **[Tan. XI.3]**

böylece CE'ye de diktir;

öyleyse ABF açısı diktir.

Ama GFB açısı da diktir; öyleyse AB, FG'ye paraleldir. **[I.28]**

Ama AB verilen düzleme diktir; öyleyse FG de verilen düzleme diktir. **[XI.8]**

Şimdi bir düzlemin içinde, diğer düzlemle olan arakesite dik olarak çizilen doğrular diğer düzleme dikse, bu düzlem diğer düzleme diktir, **[Tan. XI.4]**

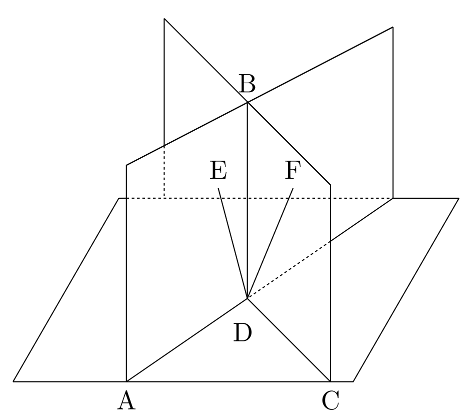
Ve FG doğrusu DE düzlemi içinde, düzlemlerin arakesiti CE'ye dik çizilmiştir ve verilen düzleme dik olduğu kanıtlanmıştır;

öyleyse DE düzlemi verilen düzleme diktir.

Benzer şekilde AB'den geçen her düzlemin verilen düzleme dik olduğu kanıtlanabilir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

19. Önerme:
Kesişen iki düzlem bir başka düzleme dikse, onların arakesiti de o düzleme diktir.



AB, BC düzlemleri verilen bir düzleme dik olsun, ve arakesitleri BD olsun;

diyorum ki, arakesitleri olan BD verilen düzleme diktir.

Çünkü, olmadığını varsayalım, ve D noktasından AB düzlemi içinde AD doğrusuna DE dikmesi çizilsin,

ve BC düzlemi içinde CD doğrusuna dik DF çizilsin.

Şimdi, AB düzlemi verilen düzleme dik olduğundan, ve DE doğrusu AB içinde arakesit AD'ye dik çizildiğinden,

DE doğrusu verilen düzleme diktir. **[Tan. XI.4]**

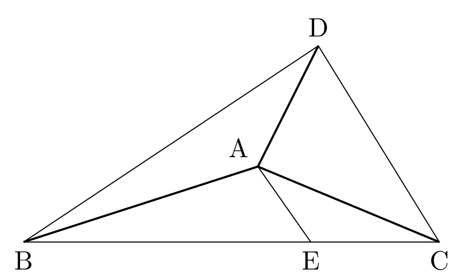
Benzer şekilde DF'nin de verilen düzleme dik olduğunu kanıtlayabiliriz.

Öyleyse D noktasından verilen düzlemin aynı tarafında iki dik doğru çizilmiş oldu: bu olamaz. **[XI.13]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

20. Önerme:

Bir çokyüzlü açı eğer üç düzlem açısıyla çevreleniyorsa, bu açılardan herhangi iki tanesinin toplamı diğerinden büyüktür.

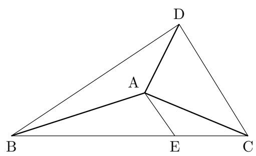


Çokyüzlü A açısı üç düzlem açısı BAC, CAD, DAB tarafından çevrelenmiş olsun;

diyorum ki, BAC, CAD, DAB açılarının herhangi iki tanesi birlikte alındığında diğerinden büyüktür.

Şimdi, eğer BAC, CAD, DAB açıları birbirine eşitse, açıktır ki herhangi iki tanesi diğerinden büyüktür.

Ama değilse, BAC daha büyük olsun,



AB doğrusu üzerinde, A noktasında, BA, AC'den geçen düzlemin içinde BAE açısı DAB açısına eşit olarak çizilsin,

AE, AD'ye eşit olsun;

ve E'den geçen BEC doğrusu AB, AC doğrularını B, C noktalarında kessin;

DB, DC birleştirilsin.

Şimdi, DA, AE'ye eşit olduğundan, ve AB ortak olduğundan, iki kenar iki kenara eşittir;

ve DAB açısı BAE açısına eşittir;

bu durumda DB tabanı BE tabanına eşit olur. **[I.4]**

Ve, BD, DC kenarları birlikte BC'den büyük olduğundan, **[I.20]**

ve bunlardan DB'nin BE'ye eşit olduğu kanıtlandığından,

kalan DC, kalan EC'den büyüktür.

Şimdi, DA, AE'ye eşit olduğundan, ve AC ortak olduğundan, ve DC tabanı EC tabanından büyük olduğundan,

DAC açısı EAC açısından büyüktür. **[I.25]**

Ama DAB açısının BAE açısına eşit olduğu kanıtlanmıştı;

öyleyse DAB, DAC açıları birlikte BAC açısından büyüktür.

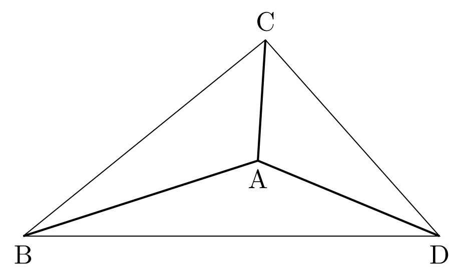
Benzer şekilde diğer açıların da ikişe ikişer alındığında kalan açıdan büyük olduğunu kanıtlayabiliriz.

> *[Aslında burada "Benzer şekilde" demeye gerek yok.* BAC *açısı diğer iki açının her birinden büyük olduğu için, bunlardan biriyle toplandığında, toplam diğer açıdan büyüktür.]*

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

21. Önerme:

Çokyüzlü bir açıyı çevreleyen düzlem açıların toplamı dört dik açıdan küçüktür.



A'daki çokyüzlü açı BAC, CAD, DAB düzlem açıları tarafından çevrelenmiş olsun;

diyorum ki, BAC, CAD, DAB açıları birlikte dört dik açıdan küçüktür.

Çünkü, AB, AC, AD doğruları üzerinde sırasıyla rasgele B, C, D doğruları alınsın, ve BC, CD, DB birleştirilsin.

Şimdi, B'deki çokyüzlü açı CBA, ABD, CBD düzlem açılarıyla çevrelendiğinden, herhangi ikisi diğerinden büyüktür; **[XI.20]**

öyleyse CBA, ABD açıları CBD açısından büyüktür.

Aynı nedenden dolayı,

BCA, ACD açıları BCD açısından büyüktür,

ve CDA, ADB açıları CDB açısından büyüktür;

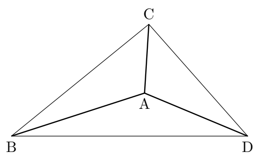
öyleyse altı açı, CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB açıları birlikte, üç açının toplamından, CBD, BCD, CDB açılarının toplamından büyüktür.

Ama bu üç açı, CBD, BDC, BCD açıları birlikte iki dik açıya eşittir; **[I.32]**

öyleyse bu altı açı, CBA, ABD, BCA, ACD, CDA, ADB açıları iki dik açıdan büyüktür.

Ve, ABC, ACD, ADB üçgenlerinin her birinin üç açısı iki dik açıya eşit olduğundan,

bu üç üçgenin dokuz açısı, CBA, ACB, BAC, ACD, CDA, CAD, ADB, DBA, BAD açıları altı dik açıya eşittir;



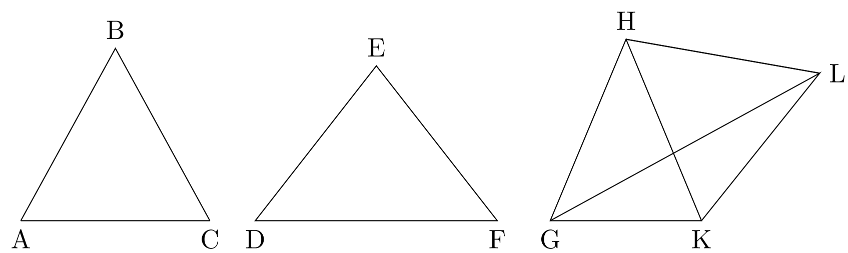
ve bunlardan altı tanesi, ABC, BCA, ACD, CDA, ADB, DBA açıları iki dik açıdan büyüktür;

öyleyse kalan üç açı, çokyüzlü açıyı çevreleyen BAC, CAD, DAB açıları dört dik açıdan küçüktür.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

[Öklid burada önermeyi yalnızca üç düzlem açı tarafından içerilen bir çokyüzlü açı için kanıtlayıp genel durumu okuyucuya bırakır. Genel durumun kanıtı için kullanılacak şekilde tabandaki BCD *üçgeni yerine* $BCD\cdots N$ *çokgeni olacağı düşünülürse, genel durumun kanıtı kolayca yapılabilir.]*

22. Önerme:
Eşit uzunlukta doğrular tarafından belirlenmiş, herhangi ikisinin toplamı diğerinden büyük olan üç düzlem açısı varsa, her bir açının kenarlarının uçlarını birleştirerek elde edilen doğrularla bir üçgen oluşturulabilir.



ABC, DEF, GHK gibi üç düzlem açısı olsun, öyle ki ikişer ikişer alındıklarında üçüncüden büyük olsunlar, yani

ABC, DEF açıları GHK açısından,

DEF, GHK açıları ABC açısından,

ve GHK, ABC açıları DEF açısından büyük olsun;

AB, BC, DE, EF, GH, HK doğruları eşit olsun,

ve AC, DF, GK birleştirilsin;

diyorum ki, AC, DF, GK'ye eşit doğrularla bir üçgen çizmek mümkündür, yani AC, DF, GK doğrularının herhangi iki tanesi kalanından büyüktür.

Şimdi, eğer ABC, DEF, GHK açıları birbirine eşitse, açıktır ki AC, DF, GK doğruları da birbirine eşit olacağından, AC, DF, GK doğrularına eşit doğrularla bir üçgen çizmek mümkündür.

Ama değilse, eşit olmasınlar, ve HK doğrusu üzerinde, ve üzerindeki H noktasında, ABC açısına eşit KHL açısı çizilsin;

HL doğrusu AB, BC, DE, EF, GH, HK doğrularından birine eşit olsun,

ve KL, GL birleştirilsin.

Şimdi, iki kenar AB, BC, iki kenar KH, HL'ye eşit olduğundan,

ve B'deki açı KHL açısına eşit olduğundan,

AC tabanı KL tabanına eşittir. **[I.4]**

Ve, ABC, GHK açıları DEF açısından büyük olduğundan, ve bu arada ABC açısı KHL açısına eşit olduğundan,

GHL açısı DEF açısından büyüktür.

Ve, GH, HL kenarları DE, EF kenarlarına eşit olduğundan, ve GHL açısı DEF açısından büyük olduğundan,

GL tabanı DF tabanından büyüktür. **[I.24]**

Ama GK, KL kenarları GL'den büyüktür.

Bu durumda GK, KL kenarları DF'den daha da büyüktür.

Ama KL eşittir AC; öyleyse AC, GK kenarları diğer doğru DF'den büyüktür.

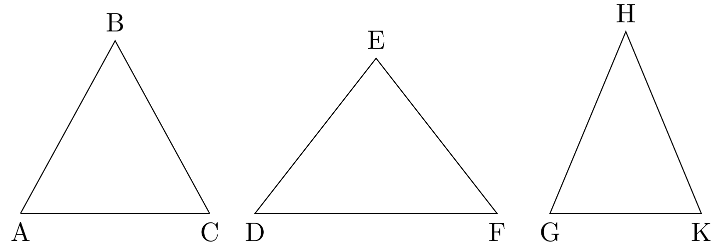
Benzer şekilde AC, DF'nin GK'den,

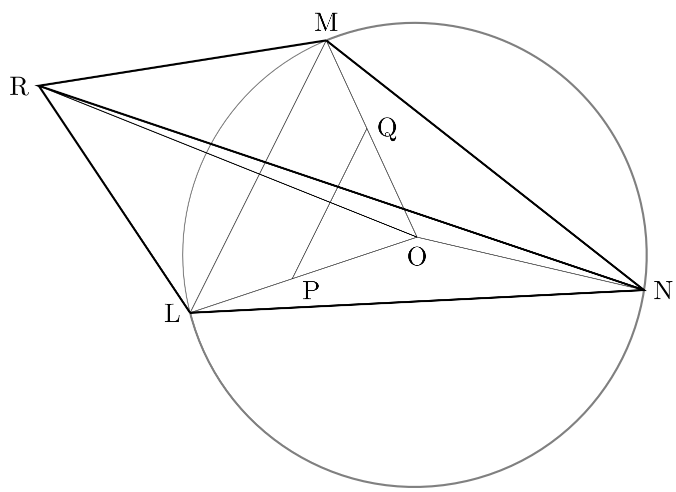
ve DF, GK'nin AC'den büyük olduğunu kanıtlayabiliriz.

Öyleyse AC, DF, GK'ye eşit doğrularla bir üçgen çizmek mümkündür.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

23. Önerme:
herhangi iki tanesinin toplamı üçüncüden büyük olacak şekilde verilen üç düzlem açısıyla çevrelenen bir çokyüzlü açı çizmenin yolu: bu durumda bu açıların toplamının dört dik açıdan küçük olması gerekir.





Verilen üç düzlem açısı ABC, DEF, GHK olsun, ve herhangi iki tanesi birlikte alındığında üçüncüden büyük olsun, ve bu arada toplamları da dört dik açıdan küçük olsun;

böylece ABC, DEF, GHK açılarına eşit açılarla bir çokyüzlü açı çizilmesi isteniyor.

AB, BC, DE, EF, GH, HK birbirine eşit çizilsin,

ve AC, DF, GK birleştirilsin;

bu durumda AC, DF, GK'ye eşit doğrularla bir üçgen çizmek mümkündür. **[XI.22]**

LMN üçgeni bu şekilde çizilmiş olsun, yani AC, LM'ye, DF, MN'ye, ve GK, NL'ye eşit olsun, LMN çemberi LMN üçgeninin dışına çizilsin, merkezi O olsun;

ve LO, MO, NO birleştirilsin;

diyorum ki, AB, LO'dan büyüktür.

Çünkü, eğer değilse, AB doğrusu ya LO'ya eşittir ya da ondan küçüktür.

Önce eşit olsun.

O zaman, AB, LO'ya eşit olduğundan, ve bu arada AB, BC'ye, ve OL, OM'ye eşit olduğundan,

iki kenar AB, BC sırasıyla iki kenar LO, OM'ye eşittir;

ve varsayıma göre AC tabanı LM tabanına eşittir;

öyleyse ABC açısı LOM açısına eşittir. **[I.8]**

Aynı nedenden dolayı DEF açısı MON açısına, ve hatta GHK açısı da NOL açısına eşittir;

bu durumda üç açı, ABC, DEF, GHK açıları üç açıya, LOM, MON, NOL açılarına eşittir.

Ama LOM, MON, NOL açıları dört dik açıya eşittir;

öyleyse ABC, DEF, GHK açıları da dört dik açıya eşit olur.

Ama varsayım gereği aynı zamanda dört dik açıdan küçüktürler: bu olamaz.

Öyleyse AB, LO'ya eşit değildir.

Şimdi de diyorum ki, AB, LO'dan küçük de olamaz.

Çünkü eğer mümkünse öyle olsun,

ve OP, AB'ye eşit çizilsin, ve OQ da BC'ye eşit olsun, ve PQ birleştirilsin.

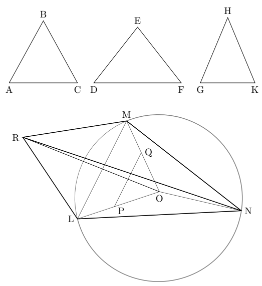
O zaman, AB, BC'ye eşit olduğundan, OP de OQ'ya eşit olur.

Böylece kalan LP, kalan QM'ye eşittir.

Öyleyse LM, PQ'ya paraleldir, **[VI.2]**

ve LMO ile PQO eşaçılıdır; **[I.29]**

bu durumda OL'nin LM'ye oranı, OP'nin PQ'ya oranına eşit olur; **[VI.4]**



ve değiştirilmiş oranlar olarak, LO'nun OP'ye oranı, LM'nin PQ'ya oranına eşittir. **[V.16]**

Ama LO, OP'den büyüktür; öyleyse LM de PQ'dan büyüktür.

Ama LM, AC'ye eşit çizilmişti; öyleyse AC de PQ'dan büyüktür.

O zaman, iki kenar AB, BC, iki kenar PO, OQ'ya eşittir,

ve AC tabanı PQ tabanından büyüktür,

bu durumda ABC açısı POQ açısından büyük olur. **[I.25]**

Benzer şekilde, DEF açısının MON açısından, ve GHK açısının NOL açısından büyük olduğunu kanıtlayabiliriz.

Öyleyse ABC, DEF, GHK açıları, LOM, MON, NOL açılarından büyüktür.

Ama varsayım gereği ABC, DEF, GHK açıları dört dik açıdan küçüktür;

öyleyse LOM, MON, NOL açıları da dört dik açıdan küçüktür.

Ama bunlar dört dik açıya eşittir: bu olamaz.

Öyleyse AB, LO'dan küçük değildir.

Ve eşit de olmadığı kanıtlanmıştı; öyleyse AB, LO'dan büyüktür.

O zaman, LMN üçgeninin olduğu düzleme O noktasından OR dikmesi çizilsin, **[XI.12]**

ve OR üzerindeki kare AB üzerindeki karenin LO üzerindeki kareye farkına eşit olsun; **[Kanıt sonundaki YÖ.]**

RL, RM, RN birleştirilsin.

O zaman, RO doğrusu LMN çemberinin düzlemine dik olduğundan,

RO doğrusu LO, MO, NO doğrularının her birine diktir.

Ve, LO, OM'ye eşit olduğundan, ve bu arada OR ortak dikme olduğundan,

RL tabanı RM tabanına eşittir. **[I.4]**

Aynı nedenden dolayı, RN de RL, RM doğrularının her birine eşittir;

bu durumda RL, RM, RN doğruları birbirine eşit olur.

Sonra, varsayım gereği, OR üzerindeki kare AB üzerindeki karenin LO üzerindeki kareden farkına eşit olduğundan,

AB üzerindeki kare LO, OR üzerindeki karelere eşittir.

Ama, LOR açısı dik olduğundan, LR üzerindeki kare LO, OR üzerindeki karelere eşittir; **[I.47]**

öyleyse AB üzerindeki kare RL üzerindeki kareye eşittir;

bu durumda AB, RL'ye eşit olur.

Ama BC, DE, EF, GH, HK doğrularının her biri AB'ye eşittir,

ve bu arada RM, RN doğrularının her biri RL'ye eşittir;

öyleyse AB, BC, DE, EF, GH, HK doğrularının her biri RL, RM, RN doğrularının her birine eşittir.

Ve LR, RM kenarları AB, BC kenarlarına eşit olduğundan,

ve varsayım gereği LM tabanı AC tabanına eşit olduğundan,

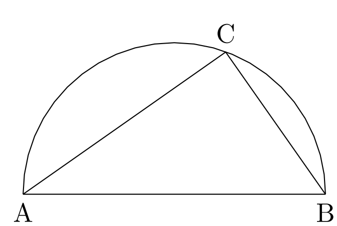
LRM açısı ABC açısına eşit olur. **[I.8]**

Aynı nedenden dolayı, MRN açısı DEF açısına, ve LRN açısı GHK açısına eşittir.

Öyleyse, verilen ABC, DEF, GHK düzlem açılarına eşit LRM, MRN, LRN açılarıyla R noktasında LRM, MRN, LRN açılarıyla çevrelenen çokyüzlü açı çizlimiştir.

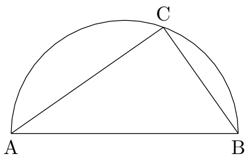
Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

Yardımcı Önerme: AB üzerindeki karenin LO üzerindeki kareden farkına eşit bir kareyi OR üzerine nasıl çizebileceğimizi aşağıda anlatacağız.



AB, LO doğruları alınsın, ve AB daha büyük olsun;

AB üzerine ABC yarıçemberi çizilsin,



ve ABC yarıçemberi içine, çaptan büyük olmadığı için LO'ya eşit AC çizilsin; **[IV.1]**

CB birleştirilsin.

O zaman, ACB açısı ACB yarıçemberi içinde bir açı olduğundan, ACB açısı diktir. **[III.31]**

Öyleyse AB üzerindeki kare AC, CB üzerindeki karelere eşittir. **[I.47]**

Böylece AB üzerindeki kare AC üzerindeki kareden CB üzerindeki kare kadar büyük olur.

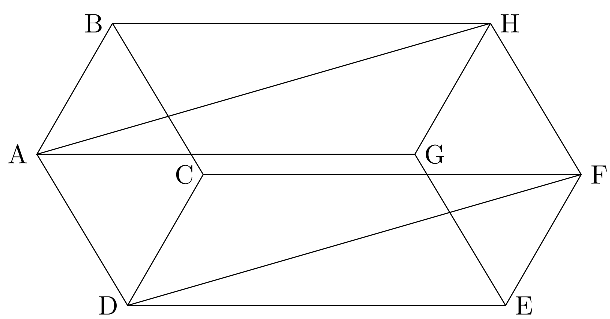
Ama AC, LO'ya eşittir.

Öyleyse AB üzerindeki kare LO üzerindeki kareden CB üzerindeki kare kadar büyüktür.

Eğer OR'yi BC'ye eşit çizersek, AB üzerindeki kare LO üzerindeki kareden OR üzerindeki kare kadar büyük olacaktır.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

24. Önerme:
Bir cisim paralel düzlemler tarafından çevreleniyorsa, karşılıklı yüzler eşittir ve her biri paralelkenardır.



[Bu önermenin kanıtından da anlaşılacağı gibi Öklid burada "paralel düzlemler" diyor ama yalnızca"üç çift paralel düzlem" düşünüyor.]

$CDHG$ cismi AC, GF, AH, DF, BF, AE düzlemleri tarafından içerilsin;

diyorum ki, karşılıklı yüzler eşittir ve paralelkenardır.

Çünkü, BG, CE paralel düzlemleri AC düzlemi tarafından kesildiğinden, arakesitleri paraleldir. **[XI.16]**

Öyleyse AB, DC'ye paraleldir.

Yine, BF, AE paralel düzlemleri AC düzlemi tarafından kesildiğinden, arakesitleri paraleldir, **[XI.16]**

Öyleyse BC, AD'ye paraleldir.

Ama AB'nin de DC'ye paralel olduğu kanıtlanmıştı;

öyleyse AC paralelkenardır.

Benzer şekilde DF, FG, GB, BF, AE düzlemlerinin her birinin paralelkenar olduğunu kanıtlayabiliriz.

AH, DF birleştirilsin.

O zaman, AB, DC'ye, ve BH, CF'ye paralel olduğundan, kesişen AB, BH doğruları kesişen ve bunlarla aynı düzlemde olmayan DC, CF doğrularına paraleldir;

öyleyse aralarındaki açılar eşittir; **[XI.10]**

bu durumda ABH açısı DCF açısına eşit olur.

Ve, AB, BH kenarları sırasıyla DC, CF kenarlarına eşit olduğundan, **[I.34]**

ve ABH açısı DCF açısına eşit olduğundan,

AH tabanı DF tabanına eşittir, ve ABH üçgeni DCF üçgenine eşittir. **[I.4]**

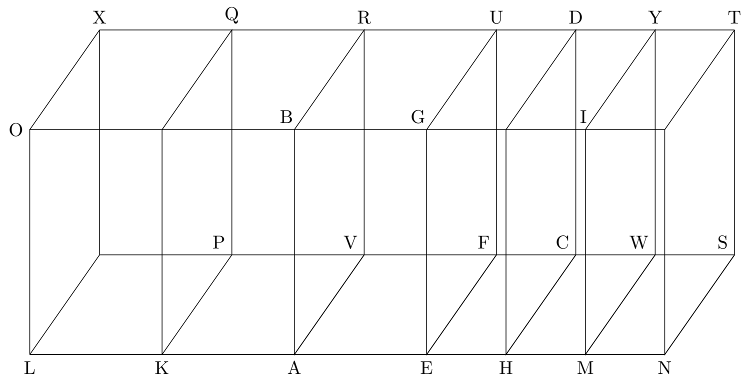
Ve BG paralelkenarı ABH üçgeninin iki katıdır, ve CE paralelkenarı da DCF üçgeninin iki katıdır; **[I.34]**

öyleyse BG paralelkenarı CE paralelkenarına eşittir.

Benzer şekilde AC paralelkenarının GF'ye, ve AE'nin BF'ye eşit olduğunu kanıtlayabiliriz.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

25. Önerme:
Bir paralelyüzlü karşı iki yüze paralel bir düzlemle kesilirse, oluşan cisimlerin oranı, oluşan tabanların oranına eşittir.



ABCD paralelyüzlü cisim RA, DH karşı yüzlere paralel FG düzlemiyle kesilsin;

diyorum ki, AEFV tabanının EHCF tabanına oranı, ABFU cisminin EGCD cismine oranına eşittir.

Çünkü, AH iki yönde de uzatılsın,

AE'ye eşit bir miktar AK, KL çizilsin,

ve EH'ye eşit bir miktar HM, MN çizilsin;

ve LP, KV, HW, MS paralelkenarları, ve LQ, KR, DM, MT cisimleri çizilsin.

O zaman, LK, KA, AE doğruları birbirine eşit olduğundan, LP, KV, AF paralelkenarları birbirine,

ve KO, KB, AG paralelkenarları da birbirine eşittir,

ve hatta LX, KQ, AR de, karşı yüzler olduklarından, birbirlerine eşittir. **[XI.24]**

Aynı nedenden dolayı, EC, HW, MS paralelkenarları birbirine eşittir,

HG, HI, IN birbirine eşittir,

ve hatta DH, MY, NT de birbirine eşittir.

Öyleyse LQ, KR, AU cisimlerinde üç yüz, üç yüze eşittir.

Ama bu üç yüz karşı yüzlere eşittir; bu durumda LQ, KR, AU cisimleri birbirine eşittir.

Aynı nedenden dolayı, ED, DM, MT cisimleri de birbirine eşittir.

Öyleyse LF tabanı AF tabanının kaç katıysa, LU cismi de AU cisminin aynı katıdır.

Aynı nedenden dolayı, NF tabanı FH tabanının kaç katıysa, NU cismi de HU cisminin aynı katıdır.

Ve eğer LF tabanı NF tabanına eşitse, LU cismi de NU cismine eşittir;

ve eğer biri küçükse, öbürü de küçüktür.

Öyleyse, ikisi AF, FH tabanları, ikisi de AU, UH cisimleri olmak üzere dört nicelik olduğunda,

AF tabanının ve AU cisminin eşkatları, yani LF tabanı ve LU cismi, alındı,

ve HF tabanıyla HU cisminin eşkatları, yani NF tabanı ve NU cismi, alındı,

ve eğer LF tabanı FN tabanından büyükse, LU cisminin NU cisminden büyük olduğu,

eğer tabanlar eşitse, cisimlerin eşit olduğu,

ve eğer tabanlar küçükse, cisimlerin küçük olduğu kanıtlandı.

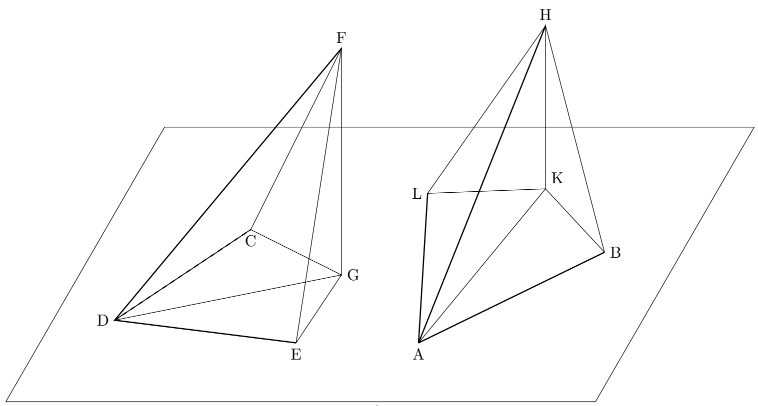
Öyleyse, AF tabanının FH tabanına oranı, AU cisminin UH cismine oranına eşittir. **[Tan. V.1]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

[Dikkatli okuyucu Öklid'in "paralelyüzlü" için daha önce bir tanım vermediğini, anlamın kanıtın gidişinden çıkarıldığını fark edecektir.]

26. Önerme:

Verilen bir doğru üzerinde ve o doğrunun üzerinde verilen bir noktada, verilen bir çokyüzlü açıya eşit bir çokyüzlü açı çizmenin yolu.



Verilen doğru AB, ve üzerinde verilen nokta A olsun, ve verilen çokyüzlü açı da EDC, EDF, FDC açılarıyla çevrelenen D açısı olsun;

böylece AB üzerindeki A noktasında D açısına eşit bir çokyüzlü açı çizilmesi isteniyor.

DF üzerinde rasgele bir F noktası alınmış olsun, ve F noktasından FG doğrusu ED, DC'den geçen düzleme dik olarak çizilsin ve onu G'de kessin, **[XI.11]**

DG birleştirilsin,

AB doğrusu üzerinde A noktasında EDC açısına eşit BAL açısı çizilsin, ve EDG açısına eşit BAK açısı çizilsin, **[I.23]**

AK, DG'ye eşit olsun,

K noktasından KH doğrusu BA, AL'den geçen düzleme dik çizilsin, **[XI.12]**

KH, GF'ye eşit olsun,

HA birleştirilsin;

diyorum ki, A'da BAL, BAH, HAL açıları tarafından çevrelenen çokyüzlü açı, D'de EDC, EDF, FDC açıları tarafından çevrelenen çokyüzlü açıya eşittir.

Çünkü AB, DE birbirine eşit çizilsin,

ve HB, KB, FE, GE birleştirilsin.

O zaman, FG verilen düzleme dik olduğundan, verilen düzlemde olan ve onu kesen tüm doğrulara da dik olacaktır; **[Tan. XI.3]**

öyleyse FGD, FGE açılarının her bir diktir.

Aynı nedenden dolayı HKA, HKB açılarının her biri de diktir.

Ve iki kenar KA, AB, sırasıyla iki kenar GD, DE'ye eşit olduğundan, ve eşit açılar içerdiklerinden,

KB tabanı GE tabanına eşittir. **[I.4]**

Ama KH de GF'ye eşittir, ve dik açılıdırlar; bu durumda HB, FE'ye eşit olur. **[I.4]**

Yine, iki kenar AK, KH iki kenar DG, GF'ye eşit olduğundan, ve dik açı içerdiklerinden,

AH tabanı FD tabanına eşittir. **[I.4]**

Ama AB de DE'ye eşittir; öyleyse iki kenar HA, AB iki kenar DF, DE'ye eşittir.

Ve HB tabanı FE tabanına eşittir;

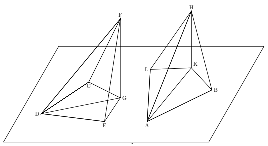
öyleyse BAH açısı EDF açısına eşittir. **[I.8]**

Aynı nedenden dolayı HAL açısı da FDC açısına eşittir.

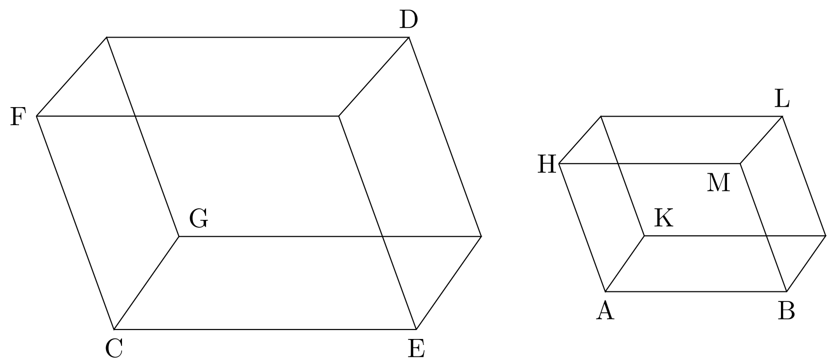
Ve BAL açısı da EDC açısına eşittir.

Böylece AB doğrusu üzerinde A noktasında D çokyüzlü açısına eşit bir çokyüzlü açı çizilmiş oldu.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □



27. Önerme:
Verilen bir doğru üzerine verilen bir paralelyüzlü cisme benzer ve aynı konumda bir paralelyüzlü cisim çizmenin yolu.



AB verilen doğru, ve CD de verilen paralelyüzlü cisim olsun;

böylece verilen AB doğrusu üzerine verilen papralelyüzlü cisim CD'ye benzer ve aynı konumda bir paralelyüzlü cisim çizilmesi isteniyor.

Verilen AB doğrusu üzerinde ve A noktasında C'deki çokyüzlü açıya eşit ve BAH, HAK, KAB açıları tarafından içerilen çokyüzlü açı çizilsin, öyle ki BAH açısı ECF açısına, BAK açısı ECG açısına, ve KAH açısı da GCF açısına eşit olsun;

ve EC'nin CG'ye oranının, BA'nın AK'ye oranına,

GC'nin CF'ye oranının, KA'nın AH'ye oranına eşit olması sağlansın. **[VI.12]**

Bu durumda eşit dış oranlar olarak, EC'nin CF'ye oranı, BA'nın AH'ye oranına eşit olur. **[V.22]**

HB paralelkenarı ve AL cismi tamamlansın.

Şimdi, EC'nin CG'ye oranı, BA'nın AK'ye oranına eşit olduğundan, ve böylece eşit ECG, BAK açıları etrafındaki kenarlar orantılı olduğundan,

GE paralelkenarı KB paralelkenarıyla benzerdir.

Aynı nedenden dolayı, KH paralelkenarı GF paralelkenarıyla, ve FE de HB ile benzerdir;

öyleyse CD cisminin üç paralelkenarı AL cisminin üç paralelkenarıyla benzerdir.

Ama ilk üçü karşı kenarlarla hem benzer hem de eşittir,

ve ikinciler de karşı kenarlarla hem benzer hem de eşittir;

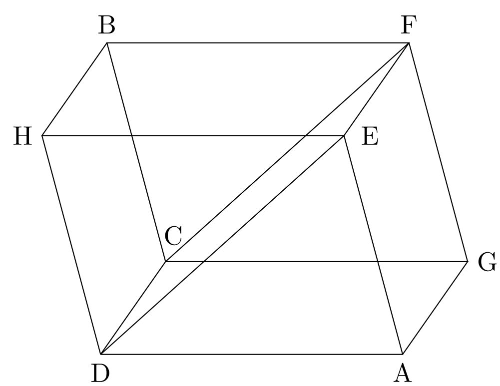
bu durumda CD cismi AL cismiyle benzerdir. **[Tan. XI.9]**

Böylece verilen AB doğrusu üzerine verilen CD cismine benzer ve aynı konumda AL paralelyüzlü cismi çizilmiş oldu.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

28. Önerme:

Bir paralelyüzlü cisim karşılıklı iki yüzünün köşegenlerinden geçen bir düzlemle kesilirse, cisim iki eşit parçaya bölünür.



AB paralelyüzlü cismi karşılıklı kenarlarının köşegenleri olan CF, DE'den geçen $CDEF$ düzlemiyle kesilmiş olsun;

diyorum ki, AB cismi $CDEF$ düzlemi tarafından ikiye bölünmüştür.

Çünkü, CGF üçgeni CFB üçgenine, ve ADE üçgeni DEH üçgenine eşit olduğundan,

ve bu arada, karşılıklı oldukları için CA paralelkenarı EB paralelkenarına, ve GE, CHye eşit olduğundan,

CGF, ADE üçgenleriyle GE, AC, CE paralelkenarları tarafından içerilen prizmayla, CFB, DEH üçgenleriyle CH, BE, CE paralelkenarları tarafından içerilen prizma eşittir;

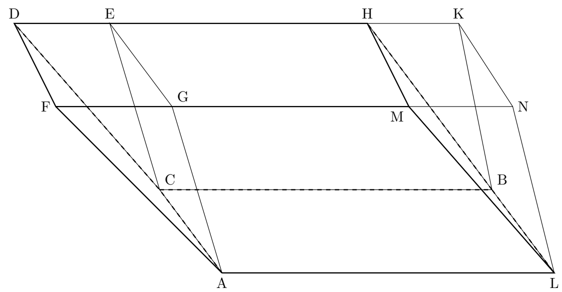
çünkü hem sayıca hem de büyüklük olarak aynı yüzeyler tarafından içerilirler. **[Tan. XI.10]**

Böylece AB cisminin tamamı $CDEF$ düzlemiyle ikiye bölünmüştür.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

29. Önerme:

Tabanları ve yükseklikleri aynı olan ve tabandan yükselen yüzlerinin kenarlarının uçları aynı doğrular üzerinde olan paralelyüzler birbirine eşittir.



CM, CN paralelyüzleri, aynı AB tabanı üzerinde ve aynı yükseklikte iki paralelyüzlü cisim olsun, ve tabandan yükselen yüzlerinin uçları, yani AG, AF, LM, LN, CD, CE, BH, BK aynı doğrular, FN, DK üzerinde olsun;

diyorum ki, CM cismi CN cismine eşittir.

Çünkü, CH, CK şekillerinin her biri paralelkenar olduğundan, CB doğrusu DH, EK doğrularının her birine eşittir; **[I.34]**

böylece DH, EK'ye eşit olur.

Her birinden EH çıkarılsın; bu durumda DE kalanı HK kalanına eşit olur.

Bundan dolayı DCE üçgeni HBK üçgenine eşittir, **[I.8, I.4]**

ve DG paralelkenarı HN paralelkenarına eşittir. **[I.36]**

Aynı nedenden dolayı AFG üçgeni MLN üçgenine eşittir.

Ama karşı yüzler olduklarından CF paralelkenarı BM paralelkenarına, ve CG, BN'ye eşittir; öyleyse AFG, DCE üçgenleri ve AD, DG, CG paralelkenarları tarafından içerilen prizmayla, MLN, HBK üçgenleriyle BM, HN, BN paralelkenarları tarafından içerilen prizma eşittir.

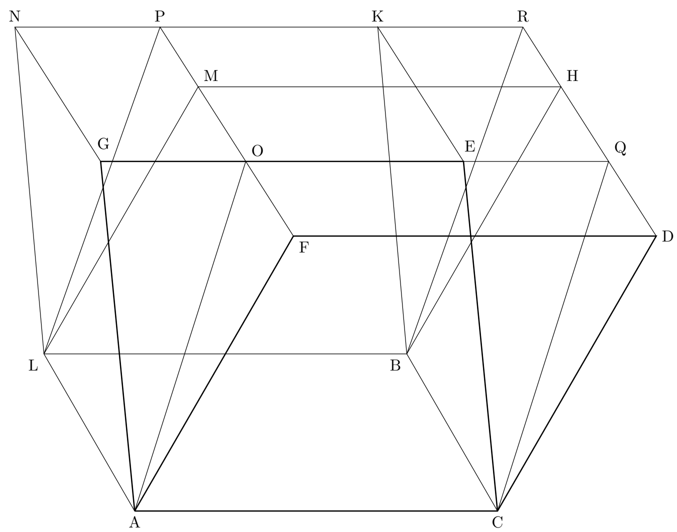
Her birine tabanı AB, ve karşı yüzü $GEHM$ olan cisim eklensin;

bu durumda CM paralelyüzlü cisminin tamamı CN paralelyüzlü cisminin tamamına eşit olur.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

30. Önerme:

Tabanları ve yükseklikleri aynı olan ve tabandan yükselen yüzlerinin kenarlarının uçları aynı doğrular üzerinde olmayan paralelyüzler birbirine eşittir.



CM, CN, aynı AB tabanı üzerinde ve aynı yükseklikte iki paralelyüzlü cisim olsun, ve tabandan yükselen yüzlerinin uçları, yani AG, AF, LM, LN, CD, CE, BH, BK aynı doğrular üzerinde olmasın;

diyorum ki, CM cismi CN cismine eşittir.

Çünkü, NK, DH uzatılsın ve birbirini R'de kessin,

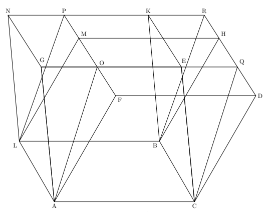
ve ayrıca FM, GE doğruları P, Q'ya kadar uzatılsın;

AO, LP, CQ, BR birleştirilsin.

O zaman, tabanı $ACBL$ paralelkenarı ve karşı yüzü $FDHM$ olan CM cismi, tabanı $ACBL$ paralelkenarı ve karşı yüzü $OQRP$ olan CP cismine eşittir;

çünkü aynı $ACBL$ tabanı üzerindeler ve aynı yükseklikteler, ve tabandan yükselen yüzlerinin uçları, yani AF, AO, LM, LP, CD, CQ, BH, BR, aynı doğrular, yani FP, DR üzerindedir. **[XI.29]**

Ama tabanı $ACBL$ paralelkenarı ve karşı yüzü $OQRP$ olan CP cismi, tabanı $ACBL$ paralelkenarı ve karşı yüzü $GEKN$ olan CN cismine eşittir;

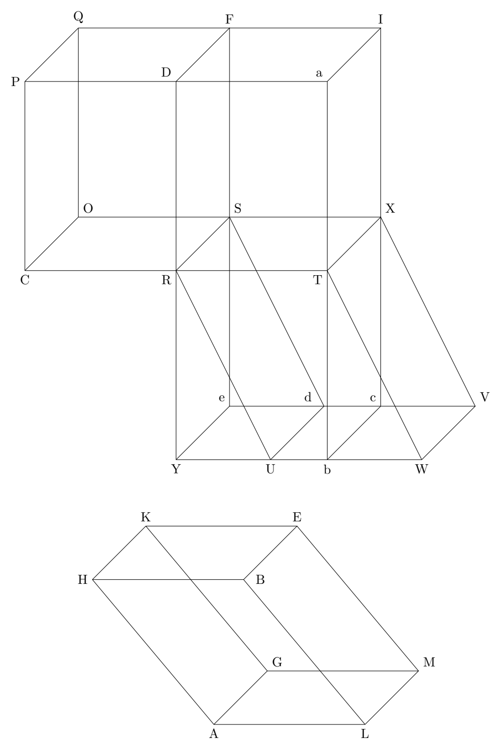


çünkü yine aynı ACBL tabanı üzerindeler ve aynı yükseklikteler, ve tabandan yükselen yüzlerinin uçları, yani AG, AO, CE, CQ, LN, LP, BK, BR, aynı doğrular, yani GQ, NR üzerindedir.

Bundan dolayı CM cismi de CN cismine eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

31. Önerme:
Taban alanları eşit ve yükseklikleri aynı olan paralelyüzler birbirine eşittir.



Aynı yükseklikteki AE, CF paralelyüzleri AB, CD eşit tabanları üzerinde olsun.

Diyorum ki, AE cismi CF cismine eşittir.

Önce, tabandan yükselen HK, BE, AG, LM, PQ, DF, CO, RS kenarları AB, CD tabanlarına dik olsun;

RT doğrusu CR doğrultusunda uzatılsın;

RT doğrusuna, üzerindeki R noktasında ALB açısına eşit TRU açısı çizilsin, **[I.23]**

RT, AL'ye eşit olsun, ve RU da LB'ye,

ve, RW tabanı ve XU cismi tamamlansın.

Şimdi, TR, RU kenarları AL, LB kenarlarına eşit olduğundan, ve eşit açılar içerdiklerinden,

RW paralelkenarı HL paralelkenarına eşit ve benzerdir.

Yine, AL eşittir RT, ve LM eşittir RS olduğundan, ve eşit açılar içerdiklerinden,

RX paralelkenarı AM paralelkenarına eşit ve benzerdir.

Aynı nedenden dolayı, LE de SU'ya eşit ve benzerdir;

öyleyse AE cisminin üç paralelkenarı XU cisminin üç paralelkenarına eşit ve benzerdir.

Ama ilk üç, karşı yüzlere eşit ve benzerdir, ve ikinci yüz de kendi karşı yüzlerine eşit ve paraleldir; **[XI.24]**

öyleyse AE paralelyüzlü cismi, XU paralelyüzlü cismine eşittir. **[Tan. XI.10]**

DR, WU uzatılsınlar ve birbirini Y'de kessinler,

T'den DY'ye paralel aTb çizilsin,

PD doğrusu A'ya kadar uzatılsın,

ve YX, RI cisimleri tamamlansın.

O zaman, tabanı RX paralelkenarı ve karşı yüzü Yc olan XY cismi, tabanı RX paralelkenarı ve karşı yüzü UV olan XU cismine eşittir,

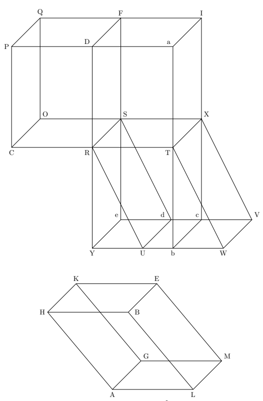
çünkü aynı RX tabanı üzerinde ve aynı yükseklikteler, ve tabandan yükselen yüzlerinin uçları, yani RY, RU, Tb, TW, Se, Sd, Xc, XV aynı doğrular, YW, eV üzerindedir. **[XI.29]**

Ama XU cismi AE cismine eşittir;

öyleyse XY cismi de AE cismine eşit olur.

Ve, $RUWT$ paralelkenarı YT paralelkenarına eşit olduğundan,

çünkü aynı RT tabanı üzerindeler ve aynı RT, YW paralelleri arasındalar, **[I.35]**



ve bu arada, RUWT de CD'ye eşit olduğundan, çünkü aynı zamanda AB'ye eşittir,

YT paralelkenarı CD paralelkenarına eşittir.

Ama DT de bir paralelkenardır;

öyleyse taban olarak CD'nin DT'ye oranı, YT'nin DT'ye oranına eşittir. **[V.7]**

Ve CI paralelyüzlü cismi karşı yüzlere paralel RF düzlemi tarafından kesildiğinden,

CD tabanının DT tabanına oranı, CF cisminin RI cismine oranına eşittir. **[XI.25]**

Aynı nedenden dolayı,

YI paralelyüzlü cismi karşı yüzlere paralel RX düzlemi tarafından kesildiğinden,

YT tabanının TD tabanına oranı, YX cisminin RI cismine oranına eşittir. **[XI.25]**

Ama, taban olarak CD'nin DT'ye oranı, YT'nin DT'ye oranına eşittir;

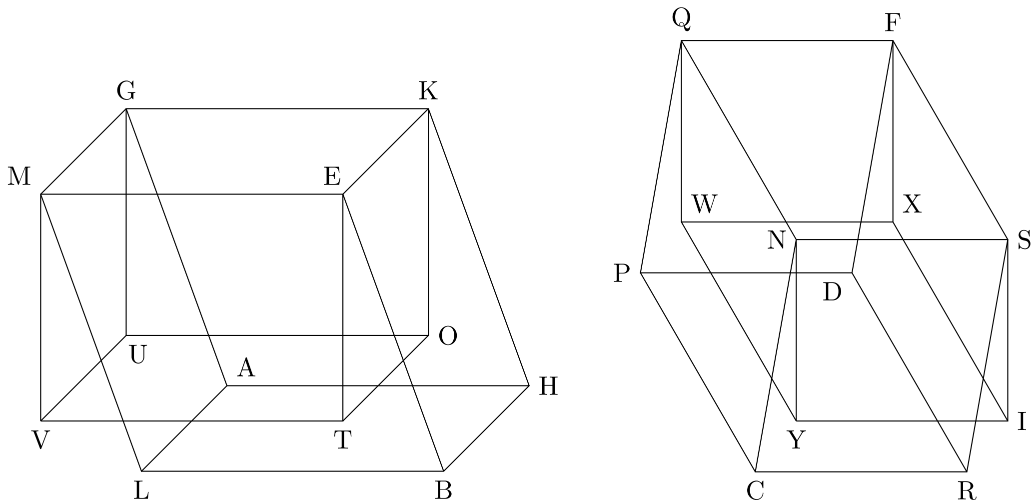
öyleyse CF cisminin RI cismine oranı da, YX'in RI'ya oranına eşittir. **[V.11]**

Öyleyse CF, YX cisimlerinin her birinin RI'ya oranı aynıdır;

öyleyse CF cismi YX cismine eşittir. **[V.9]**

Ama YX'in AE'ye eşit olduğu kanıtlanmıştı;

öyleyse AE de CF'ye eşittir.



Şimdi de, tabandan yükselen AG, HK, BE, LM, CN, PQ, DF, RS kenarları AB, CD tabanlarına dik olmasın;

diyorum ki, yine AE cismi CF cismine eşittir.

Çünkü, K, E, G, M, Q, F, N, S noktalarından verilen düzleme dik olarak KO, ET, GU, MV, QW, FX, NY, SI doğruları çizilsin ve bu doğrular düzlemi O, T, U, V, W, X, Y, I noktalarında kessin,

ve OT, OU, UV, TV, WX, WY, YI, IX birleştirilsin.

O zaman KV cismi QI cismine eşittir,

çünkü KM, QS gibi eşit tabanlar üzerinde ve aynı yükseklikteler, ve tabandan yükselen kenarları tabana diktir. **[Bu önermenin ilk kısmı]**

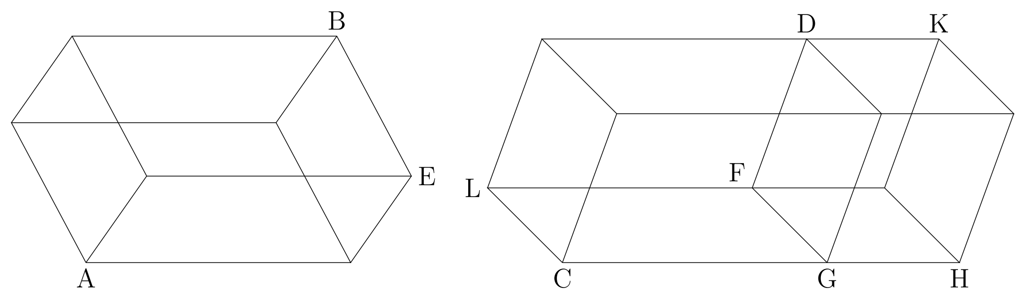
Ama KV cismi AE cismine, ve QI cismi CF cismine eşittir;

çünkü aynı taban üzerinde ve aynı yükseklikteler, ve tabandan yükselen yüzlerinin uçları aynı doğru üzerinde değildir. **[XI.30]**

Öyleyse AE cismi CF cismine eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

32. Önerme:
Yükseklikleri aynı olan paralelyüzlü cisimlerin birbirine oranı tabanlarının oranına eşittir.



AB, CD cisimleri aynı yükseklikte iki paralelyüzlü olsun;

diyorum ki, AB, CD paralelyüzlü cisimlerin birbirine oranı, tabanlarının oranına eşittir, yani AE tabanının CF tabanına oranı, AB cisminin CD cismine oranına eşittir.

Çünkü, FG üzerine AE'ye eşit FH çizilsin, **[I.45]**

ve FH taban olacak şekilde ve CD ile aynı yükseklikte GK paralelyüzlü cismi çizilsin.

O zaman AB cismi GK cismine eşit olur; çünkü eşit AE, FH tabanları üzerindeler ve aynı yükseklikteler. **[XI.31]**

Ve, CK paralelyüzlü cismi karşı yüzlere paralel DG düzlemiyle kesildiğinden,

CF tabanının FH tanabına oranı, CD cisminin DH cismine oranına eşittir. **[XI.25]**

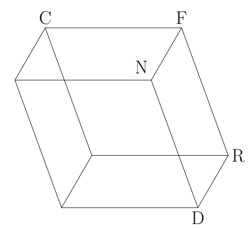
Ama FH tabanı AE tabanına eşittir, ve GK cismi AB cismine eşittir;

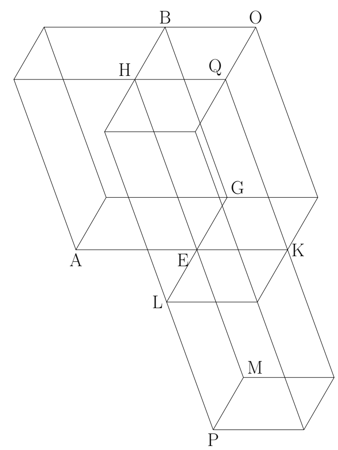
öyleyse, AE tabanının CF tabanına oranı da, AB cisminin CD cismine oranına eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

33. Önerme:

Benzer paralelyüzlü cisimlerin oranı karşılıklı kenarlarının üç kat oranına eşittir.





AB, CD paralelyüzlü benzer cisimler olsun, ve CF'ye karşılık gelen kenar AE olsun;

diyorum ki, AB cisminin CD cismine oranı, AE'nin CF'ye olan oranının üç kat oranına eşittir.

Çünkü, AE, GE, HE doğrultusunda EK, EL, EM çizilsin,

ve EK, CF'ye, EL, FN'ye, ve de EM, FR'ye eşit olsun,

ve, KL paralelkenarı ve KP cismi tamamlansın.

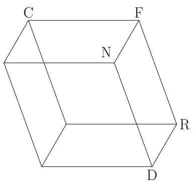
Şimdi, KE, EL kenarları CF, FN kenarlarına eşit olduğundan,

ve bu arada, AB, CD cisimlerinin benzer olması nedeniyle AEG açısının CFN açısına eşit olmasından dolayı,

KEL açısı CFN açısına eşit olduğundan,

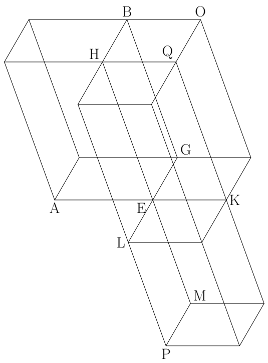
KL paralelkenarı CN paralelkenarına eşittir.

[ve aynı zamanda benzerdir.]



Aynı nedenden dolayı, KM paralelkenarı CR paralelkenarına, ve EP, DF'ye eşit ve benzerdir;

öyleyse KP cisminin üç paralelkenarı CD cisminin üç paralelkenarına eşit ve benzerdir.



Ama ilk üç paralelkenar karşı yüzlere eşit ve benzerdir, ve ikinci üç de kendi karşı yüzlerine eşit ve benzerdir; **[XI.24]**

öyleyse KP cisminin tamamı CD cisminin tamamına eşit ve benzerdir. **[Tan. XI.10]**

GK paralelkenarı tamamlansın, ve GK, KL paralelkenar tabanları üzerine AB ile aynı yükseklikte EO, LQ cisimleri çizilsin.

O zaman, AB, CD cisimlerinin benzerliğinden dolayı,

AE'nin CF'ye oranı, EG'nin FN'ye oranına, ve EH'nin FR'ye oranına eşit olduğundan,

ve bu arada CF, EK'ye, FN, EL'ye, ve FR, EMye eşit olduğundan,

AE'nin EK'ye oranı, GE'nin EL'ye oranına, ve HE'nin EM'ye oranına eşittir.

Ama, AE'nin EK'ye oranı, AG paralelkenarının GK'ye oranına,

GE'nin EL'ye oranı, GK'nin KL'ye oranına,

ve, HE'nin EM'ye oranı, QE'nin KM'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

öyleyse AG paralelkenarının GK'ye oranı, GK'nin KL'ye ve QE'nin KM'ye oranına eşittir.

Ama, AG'nin GK'ye oranı, AB cisminin EO cismine oranına,

GK'nin KL'ye oranı, OE cisminin QL cismine oranına,

ve QE'nin KM'ye oranı da QL cisminin KP cismine oranına eşittir; **[XI.32]**

öyleyse AB cisminin EO'ya oranı da EO'nun QL'ye oranına, ve QL'nin KP'ye oranına eşittir.

Ama eğer dört nicelik sürekli orantılıysa, birincinin dördüncüye oranı, ikinciye oranının üç kat oranıdır; **[Tan. V.10]**

Öyleyse AB cisminin KP'ye oranı, AB'nin EO'ya oranının üç kat oranıdır.

Ama AB'nin EO'ya oranı, AG paralelkenarının GK'ye oranına, ve AE doğrusunun EK'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

bu nedenle AB cisminin KP'ye oranı, AE'nin EK'ye oranının üç kat oranıdır.

Ama KP cismi CD cismine, ve EK doğrusu CF'ye eşittir;

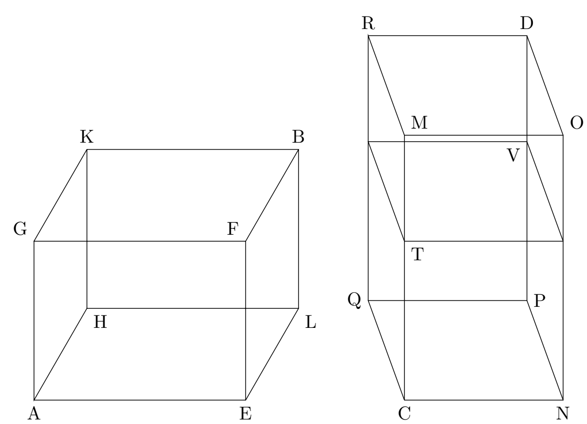
öyleyse AB cisminin CD cismine oranı, AE kenarının karşılığı olan CF kenarına oranının üç kat oranıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

Doğal Sonuç: Bunun sonucunda açıkça görülür ki eğer sürekli orantılı olan dört doğru varsa, birincinin dördüncüye oranı, birincinin ikinciye oranının üç kat oranı olduğundan, birincinin dördüncüye oranı, birinci üzerine çizilen bir paralelyüzlü cismin ikinci üzerine çizilen, ve onunla aynı konumda ve ona benzer, paralelyüzlü cisme oranına eşittir.

34. Önerme:

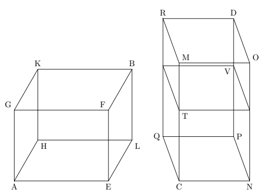
Eşit paralelyüzlü cisimlerin tabanlarının oranı yüksekliklerinin oranının tersidir; ve tabanlarının oranı yüksekliklerinin oranına ters olan paralelyüzlü cisimler eşittir.



AB, CD eşit iki paralelyüzlü cisim olsun;

diyorum ki, paralelyüzlü cisimler AB, CD'de tabanlar yüksekliklerle ters orantılıdır,

yani EH tabanının NQ tabanına oranı, CD cisminin yüksekliğinin AB cisminin yüksekliğine oranına eşittir.



İlk olarak, tabandan yükselen kenarlar, AG, EF, LB, HK, CM, NO, PD, QR, tabanlara dik olsun;

diyorum ki, EH tabanının NQ tabanına oranı, CM'nin AG'ye oranına eşittir.

Şimdi eğer EH tabanı NQ tabanına eşitse, ve bu arada AB cismi CD cismine eşit olduğundan,

CM, AG'ye eşit olacaktır.

Çünkü aynı yükseklikteki paralelyüzlü cisimlerin birbirine oranı, tabanlarının oranına eşittir; **[XI.31]**

ve, EH tabanının NQ'ya oranı, CM'nin AG'ye oranına eşit olacaktır,

ve açıktır ki AB, CD paralelyüzlü cisimlerinde tabanlar yüksekliklerle ters orantılıdır.

Şimdi de EH tabanı NQ tabanına eşit olmasın, ama daha büyük olan EH olsun.

Şimdi AB cismi CD cismine eşittir; öyleyse CM de AG'den büyüktür.

[Burada Öklid daha önce belirtmediği bir varsayımı kullanıyor gibi görünse de bu sonuç XI.32 kullanılarak kanıtlanabilir.]

O zaman CT, AG'ye eşit çizilsin, ve NQ üzerinde CT yüksekliğiyle VC paralelyüzlü cismi tamamlansın.

Şimdi, AB cismi CD cismine eşit olduğundan, ve CV bunların dışında olduğundan,

ve eşit şeylerin aynı şeye oranları da eşit olduğundan, **[V.7]**

AB cisminin CV cismine oranı, CD cisminin CV cismine oranına eşittir.

Ama, AB cisminin CV cismine oranı, EH tabanının NQ tabanına oranına eşittir, çünkü AB, CV cisimleri aynı yüksekliktedir; **[XI.32]**

ve CD cisminin CV cismine oranı, MQ tabanının TQ tabanına oranına, **[XI.25]**

ve CM'nin CT'ye oranına eşittir; **[VI.1]** öyleyse EH tabanının NQ tabanına oranı, MC'nin CT'ye oranına eşittir.

Ama CT, AG'ye eşittir;

öyleyse EH tabanının NQ tabanına oranı, MC'nin AGye oranına eşittir.

Öyleyse AB, CD paralelyüzlü cisimlerinde tabanlar yüksekliklerle ters orantılıdır.

Şimndi de, AB, CD paralelyüzlü cisimlerinde tabanlar yüksekliklerle ters orantılı olsun, yani EH tabanının NQ tabanına oranı, CD cisminin yüksekliğinin AB cisminin yüksekliğine oranına eşit olsun;

diyorum ki, AB cismi CD cismine eşittir.

Tabandan yükselen kenarlar yine tabana dik olsun.

Şimdi, eğer EH tabanı NQ tabanına eşitse,

ve EH tabanının NQ tabanına oranı, CD cisminin yüksekliğinin AB cisminin yüksekliğine oranına eşit olduğundan,

CD cisminin yüksekliği de AB cisminin yüksekliğine eşit olur.

Ama eşit tabanlar üzerindeki eşit yükseklikli paralelyüzlü cisimler birbirine eşittir; **[XI.31]**

öyleyse AB cismi CD cismine eşittir.

Şimdi de EH tabanı NQ tabanına eşit olmasın, ama daha büyük olan EH olsun;

bu durumda CD cisminin yüksekliği de AB cisminin yüksekliğinden büyük olur, yani CM, AG'den büyüktür.

Yine CT, AG'ye eşit çizilsin, ve CV cismi benzer şekilde tamamlansın.

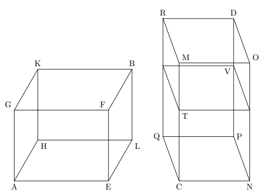
EH tabanının NQ tabanına oranı, MC'nin AG'ye oranına eşit olduğundan,

ve bu arada AG, CT'ye eşit olduğundan,

EH tabanının NQ tabanına oranı, CM'nin CT'ye oranına eşittir.

Ama EH tabanının NQ'ya oranı, AB cisminin CV cismine oranına eşittir, çünkü AB, CV cisimleri aynı yüksekliktedir; **[XI.32]**

ve CM'nin CT'ye oranı, MQ tabanının QT tabanına oranına, **[VI.1]**

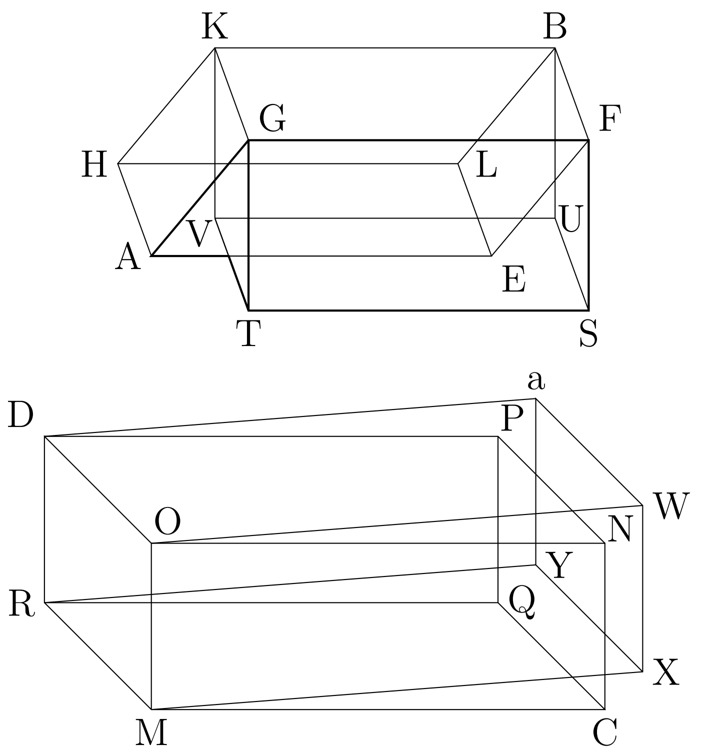


ve CD cisminin CV cismine oranına eşittir. **[XI.25]**

Öyleyse yine AB cisminin CV cismine oranı, CD cisminin CV cismine oranına eşittir;

bu durumda AB, CV cisimlerinin her birinin CV cismine oranı eşit olur.

Öyleyse AB cismi CD cismine eşittir. **[V.9]**



Şimdi de tabandan yükselen kenarlar, FE, BL, GA, HK, ON, DP, MC, RQ, tabana dik olmasın;

F, G, B, K, O, M, D, R noktalarından EH, NQ'dan geçen düzlemlere dikler çizilsin, ve bunlar düzlemleri S, T, U, V, W, X, Y, a noktalarında kessin,

ve FV, OY cisimleri tamamlansın;

diyorum ki, bu durumda da, eğer AB, CD cisimleri eşitse, tabanları yükseklikleriyle ters orantılıdır, yani EH tabanının NQ tabanına oranı, CD cisminin yüksekliğinin AB cisminin yüksekliğine oranına eşittir.

AB cismi CD cismine eşit olduğundan,

ve bu arada, aynı FK tabanı üzerinde ve aynı yükseklikte olduklarından dolayı AB cismi BT cismine eşit olduğundan, **[XI.29, XI.30]**

ve yine aynı RO tabanı üzerinde olduklarından ve aynı yükseklikte olduklarından dolayı CD cismi DX cismine eşit olduğundan, **[XI.29, XI.30]**

BT cismi de DX cismine eşittir.

Öyleyse FK tabanının OR tabanına oranı, DX cisminin yüksekliğinin BT cisminin yüksekliğine oranına eşittir.

Bu durumda BT cismi DX cismine eşittir. **[İlk kısım]**

Ama FK tabanı EH tabanına, ve OR tabanı NQ tabanına eşittir;

öyleyse EH tabanının NQ tabanına oranı, DX cisminin yüksekliğinin BT cisminin yüksekliğine oranına eşittir.

Ama DX, BT cisimleri, sırasıyla, DC, BA cisimleriyle aynı yükseklik-tedir;

bu durumda EH tabanının NQ tabanına oranı, DC cisminin yüksekliğinin AB cisminin yüksekliğine oranına eşit olur.

Öyleyse AB, CD paralelyüzlü cisimlerinde tabanlar yüksekliklerle ters orantılıdır.

Yine, AB, CD paralelyüzlü cisimlerinde tabanlar yüksekliklerle ters orantılı olsun,

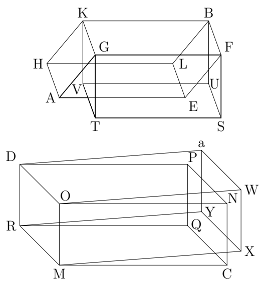
yani EH tabanının NQ tabanına oranı, CD cisminin yüksekliğinin AB cisminin yüksekliğine oranına eşit olsun;

diyorum ki, AB cismi CD cismine eşittir.

Çünkü, aynı çizimi kullanarak, EH tabaının NQ tabanına oranı, CD cisminin yüksekliğinin AB cisminin yüksekliğine oranına eşit olduğundan,

ve bu arada EH tabanı FK tabanına, ve NQ da OR'ye eşit olduğundan,

FK tabanının OR tabanına oranı, CD cisminin yüksekliğinin AB cisminin yüksekliğne oranına eşittir.



Ama AB, CD cisimleri, sırasıyla, BT, DX cisimleriyle aynı yükseklik-tedir;

öyleyse FK tabanının OR tabanına oranı, DX cisminin yüksekliğinin BT cisminin yüksekliğine oranına eşittir.

Öyleyse BT, DX paralelyüzlü cisimlerinde tabanlar yüksekliklerle ters orantılıdır; **[İlk kısım]**

Ama aynı FK tabanı üzerinde olduklarından ve aynı yükseklikte olduklarından BT, BAya eşittir, **[XI.29, XI.30]**

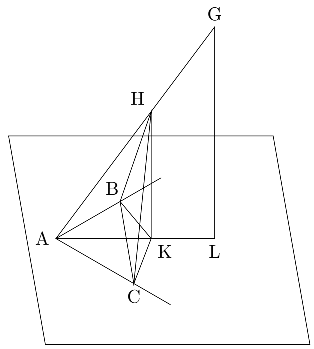
ve DX cismi DC cismine eşittir. **[XI.29, XI.30]**

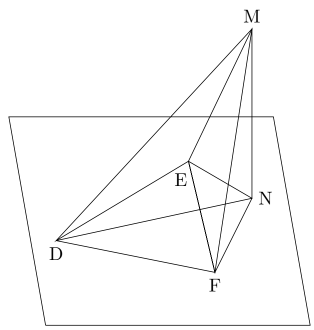
Öyleyse AB cismi de CD cismine eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

35. Önerme:

Eşit iki düzlem açısı alındığında bunların köşelerinden karşılıklı kenarlarıyla sırasıyla aynı açıyı yapacak şekilde düzlemden yukarı doğru birer doğru çizilse ve bu doğrular üzerinde rastgele birer nokta alınıp bu noktalardan baştaki düzlem açıların olduğu düzleme birer dikme indirilse, bu dikmelerin düzlemi kestiği noktaları düzlemdeki açıların köşelerine birleştiren doğrular düzlemden yukarı doğru çizilmiş olan doğrularla eşit açı yaparlar.





BAC, EDF açıları iki düzlem açısı olsun, ve A, D noktalarından yukarı doğru AG, DM doğruları, baştaki doğrularla karşılıklı olarak eşit açı yapacak şekilse çizilsin, yani MDE açısı GAB açısına, ve MDF açısı GAC açısına eşit olsun,

AG, DM üzerinde G, M noktaları rasgele alınmış olsun,

BA, AC'den ve ED, DF'den geçen düzlemlere G, M noktalarından GL, MN dikmeleri çizilsin, ve düzlemleri L, N noktalarında kessin,

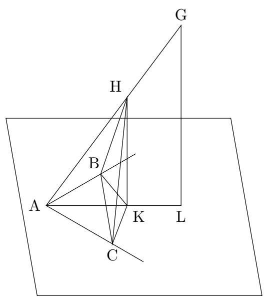
ve LA, ND birleştirilsin;

diyorum ki, GAL açısı MDN açısına eşittir.

AH, DM'ye eşit olsun, ve H'den GL'ye paralel olarak HK çizilsin.

Ama GL doğrusu BA, AC'den geçen düzleme diktir; öyleyse HK de BA, AC'den geçen düzleme diktir. **[XI.8]**

K, N noktalarından AC, DF, AB, DE doğrularına dik olarak KC, NF, KB, NE doğruları çizilsin, ve HC, CB, MF, FE birleştirilsin.



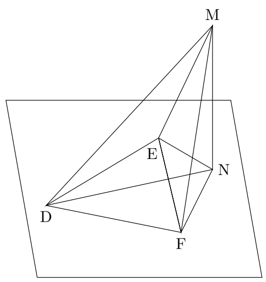
HA üzerindeki kare HK, KA üzerindeki karelere eşit olduğundan, ve KC, CA üzerindeki kareler de KA üzerindeki kareye eşit olduğundan, **[I.47]**

HA üzerindeki kare HK, KC, CA üzerindeki karelere eşittir.

Ama HC üzerindeki kare HK, KC üzerindeki karelere eşittir;

öyleyse HA üzerindeki kare HC, CA üzerindeki karelere eşittir.

Bu durumda HCA açısı dik olur. **[I.48]**



Aynı nedenden dolayı DFM açısı da diktir.

Öyleyse ACH açısı DFM açısına eşittir.

Ama HAC açısı da MDF açısına eşittir.

Öyleyse MDF, HAC üçgenlerinde karşılıklı ikişer açı birbirine eşittir ve bu eşit açılardan birini gören kenarlar, yani HA, MD eşittir;

bu durumda kalan kenarları da karşılıklı eşit olacaktır. **[I.26]**

Öyleyse AC, DF'ye eşittir.

Benzer şekilde AB'nin de DE'ye eşit olduğunu kanıtlayabiliriz.

O zaman, AC, DF'ye, ve AB, DE'ye eşit olduğundan, iki kenar CA, AB, iki kenar FD, DE'ye eşittir.

Ama CAB açısı da FDE açısına eşittir;

bu durumda BC tabanı EF tabanına, üçgen üçgene, ve kalan açılar kalan açılara eşit olur. **[I.4]**

öyleyse ACB açısı DFE açısına eşittir.

Ama ACK dik açısı DFN dik açısına eşittir; öyleyse kalan BCK açısı EFN açısına eşittir.

Aynı nedenden dolayı, CBK açısı FEN açısına eşittir.

Öyleyse BCK, EFN üçgenlerinde karşılıklı iki açı iki açıya eşittir, ve bir kenar bir kenara, yani eşit açıların arasındaki kenar, yani BC, EF'ye eşittir;

öyleyse kalan kenarlar da kalan kenarlara eşit olacaktır. **[I.26]**

Bu durumda CK, FNye eşit olur.

Ama AC de DF'ye eşittir;

öyleyse iki kenar AC, CK iki kenar DF, FN'ye eşittir, ve dik açı içerirler.

Öyleyse AK tabanı DN tabanına eşittir. **[I.4]**

Ve AH, DM'ye eşit olduğundan, AH üzerindeki kare DM üzerindeki kareye eşittir.

Ama, AKH açısı dik olduğundan, AK, KH üzerindeki kareler AH üzerindeki kareye eşittir; **[I.47]**

ve DNM açısı dik olduğundan, DN, NM üzerindeki kareler DM üzerindeki kareye eşittir; **[I.47]**

öyleyse AK, KH üzerindeki kareler DN, NM üzerindeki karelere eşittir;

ve bunlardan AK üzerindeki kare DN üzerindeki kareye eşittir;

öyleyse kalan KH üzerindeki kare NM üzerindeki kareye eşittir;

bu durumda HK, MN'ye eşit olur.

Ve iki kenar HA, AK iki kenar MD, DN'ye eşit olduğundan,

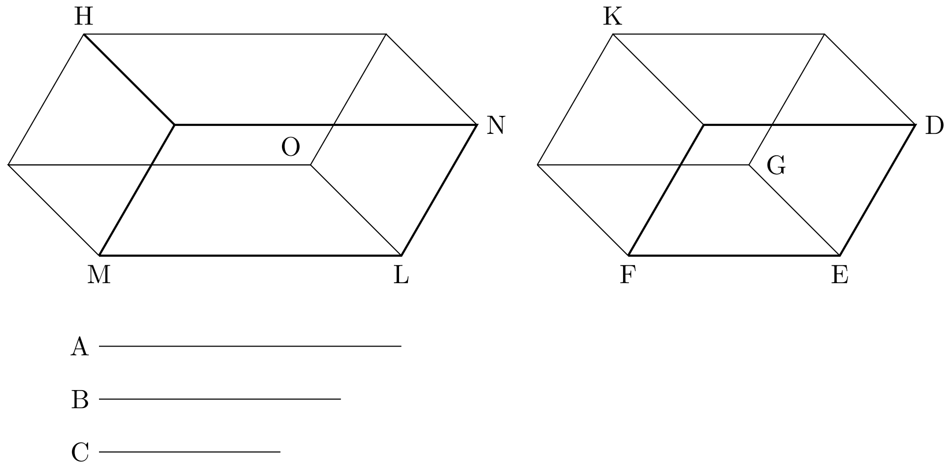
ve HK tabanının MN tabanına eşit olduğu da kanıtlanmış olduğundan,

HAK açısı MDN açısına eşittir. **[I.8]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

Doğal Sonuç: Bunun sonucunda açıkça görülür ki eğer eşit iki düzlem açısı alındığında bunların köşelerinden karşılıklı kenarlarıyla sırasıyla aynı açıyı yapacak şekilde düzlemden yukarı doğru eşit uzunlukta birer doğru çizilse, bu doğruların ucundan düzleme çizilen dikmeler eşittir.

36. Önerme:
Eğer üç doğru sürekli orantılıysa, bu üçüyle oluşturulan paralel yüzlü, ortadaki ile oluşturulan ve onunla eşaçılı olan eşkenar cisme eşittir.



A, B, C sürekli orantılı üç doğru olsun, yani A'nın B'ye oranı, B'nin C'ye oranına eşit olsun;

diyorum ki, A, B, C ile oluşturulan cisim, B ile oluşturulan eşkenar ama önceki cisimle eşaçılı olan cisme eşittir.

E noktasında DEG, GEF, FED açılarıyla içerilen çokyüzlü açı çizilsin,

DE, GE, EF doğrularının her biri B'ye eşit olsun, ve EK paralelyüzlü cismi tamamlansın,

LM, A'ya eşit olsun,

LM doğrusu üzerinde ve L noktasında E'deki çokyüzlü açıya eşit bir çokyüzlü açı çizilsin, yani NLO, OLM, MLN açıları tarafından içerilen açı;

LO, B'ye, ve LN, C'ye eşit olsun.

Şimdi, A'nın B'ye oranı, B'nin C'ye oranına eşit olduğundan,

ve bu arada A, LM'ye, B de LO, ED doğrularının her birine, ve C, LN'ye eşit olduğundan,

LM'nin EF'ye oranı, DE'nin LN'ye oranına eşittir.

Böylece NLM, DEF eşit açılarının kenarları ters orantılı olur;

öyleyse MN paralelkenarı DF paralelkenarına eşittir. **[VI.14]**

Ve, DEF, NLM iki düzkenar düzlem açısı olduklarından, ve üzerlerine yukarı doğru LO, EG doğruları birbirine eşit ve baştaki doğrularla karşılıklı eşit açılar içerecek şekilde çizilmiş olduğundan,

G, O noktalarından NL, LM ve DE, EF doğrularından geçen düzlemlere çizilen dikmeler birbirine eşit olur; **[DS. XI.31]**

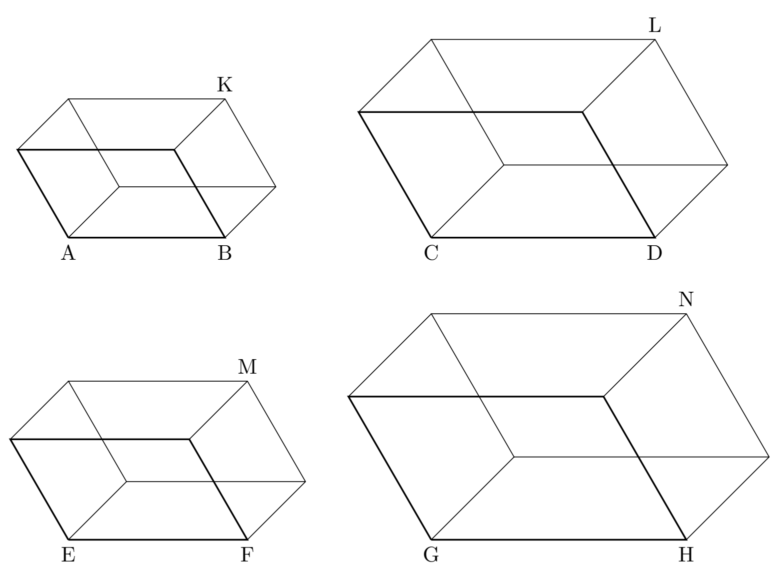
öyleyse HL cismi EK cismine eşittir.

Ve LH cismi A, B, C üzerinde oluşturulan cisimdir, ve EK de B üzerinde;

öyleyse A, B, C üzerinde oluşturulan paralelyüzlü cisim, B üzerinde oluşturulan eşkenar ama onunla eşaçılı cisme eşittir.

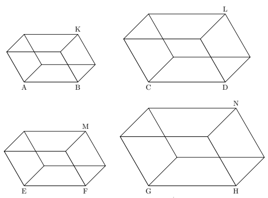
Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

37. Önerme:
Eğer dört doğru orantılıysa, üzerlerinde oluşturulan benzer ve aynı konumdaki paralelyüzlü cisimler de orantılı olacaktır; ve eğer üzerlerinde oluşturulan benzer ve aynı konumdaki paralelyüzlü cisimler orantılıysa, doğruların kendileri de orantılı olacaktır.



AB, CD, EF, GH orantılı dört doğru olsun, öyle ki AB'nin CD'ye oranı, EF'nin GH'ye oranına eşit olsun;

ve AB, CD, EF, GH üzerine benzer ve aynı konumda KA, LC, ME, NG paralelyüzlü cisimleri çizilsin;



diyorum ki, KA'nın LC'ye oranı, ME'nin NG'ye oranına eşittir.

Çünkü, KA paralelyüzlü cismi LC'ye benzer olduğundan, KA'nın LC'ye oranı, AB'nin CD'ye oranının üç kat oranıdır. **[XI.33]**

Aynı nedenden dolayı,

ME'nin NGye oranı, EF'nin GH'ye oranının üç kat oranıdır.

Ve, AB'nin CD'ye oranı, EF'nin GH'ye oranına eşittir.

Öyleyse AK'nin LC'ye oranı, ME'nin NG'ye oranına eşittir.

Şimdi de, AK cisminin LC cismine oranı, ME cisminin NG cismine oranına eşit olsun;

diyorum ki, AB doğrusunun CD'ye oranı, EF'nin GH'ye oranına eşittir.

Çünkü, yine KA'nın LC'ye oranı, AB'nin CD'ye oranının üç kat oranı olduğundan, **[XI.33]**

ve ME'nin NG'ye oranı da EF'nin GH'ye oranının üç kat oranı olduğundan,

ve KA'nın LC'ye oranı, ME'nin NG'ye oranına eşit olduğundan,

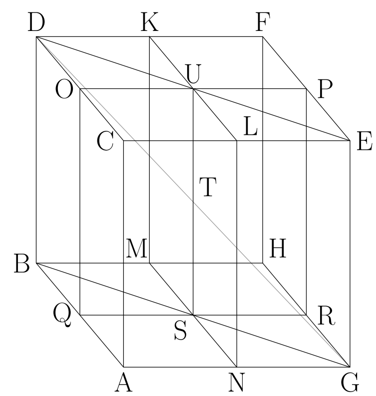
AB'nin CD'ye oranı, EF'nin GH'ye oranına eşit olur.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

[Dikkatli okuyucu burada Öklid'in, eğer iki oran eşitse, üç kat oranlarının da eşit olacağını, ve hatta tersine üç kat oranları eşit olan oranların eşit olacağını varsaydığını fark edecektir. Bu önermenin bu varsayımı kullanmadan yapılan kanıtı da vardır ve onu bulmayı okuyucuya bırakıyorum.]

38. Önerme:

Eğer bir kübün karşılıklı yüzlerinin kenarları ikiye bölünürse, ve bu kesim noktalarından düzlemler çizilirse, bu düzlemlerin arakesitiyle kübün köşegeni birbirine ikiye böler.



AF kübünün karşılıklı yüzleri CF, AH'nin kenarları K, L, M, N, O, Q, P, R noktalarında ikiye bölünsün, ve bu noktalardan KN, OR düzlemleri geçsin;

US bu düzlemlerin arakesiti, ve DG de AF kübünün köşegeni olsun.

Diyorum ki, UT eşittir TS, ve DT eşittir TG.

Çünkü, DU, UE, BS, SG birleştirilsin.

O zaman, DO, PE'ye paralel olduğundan, ters iç açılar DOU, UPE birbirine eşittir. **[I.29]**

Ve, DO, PE'ye, ve OU, UP'ye eşit olduğundan, ve eşit açılar içerdiklerinden,

DU tabanı UE tabanına eşittir,

DOU üçgeni PUE üçgenine eşittir,

ve kalan açılar da kalan açılara eşittir; **[I.4]**

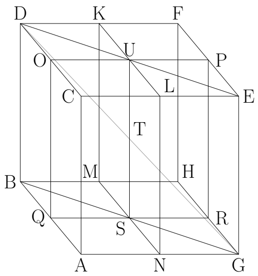
bu durumda OUD açısı PUE açısına eşit olur.

Bu nedenden dolayı DUE bir doğrudur.

Aynı nedenden dolayı BSG de bir doğrudur, ve BS, SG'ye eşittir.

Şimdi, CA, DB'ye eşit ve paralel olduğundan,

ve bu arada CA da EG'ye eşit ve paralel olduğundan,



DB, EG'ye eşit ve paraleldir. **[XI.9]**

Ve uçlarını DE, BG birleştirir; öyleyse DE, BG'ye paraleldir. **[I.33]**

Öyleyse, ters iç açılar olduklarından EDT açısı BGT açısına eşittir; **[I.29]**

ve DTU açısı da GTS açısına eşittir. **[I.15]**

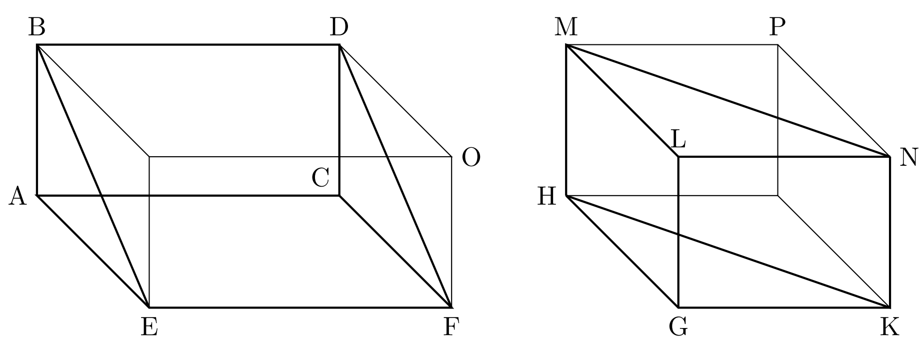
Öyleyse DTU, GTS üçgenlerinde iki açı iki açıya, ve bir kenar bir kenara, yani eşit açılardan birini görenler, yani DU, GS'ye eşittir, çünkü bunlar DE, BG'nin yarılarıdır;

bu durumda kalan kenarlar da kalan kenarlara eşit olacaktır. **[I.26]**

Öyleyse DT, TG'ye, ve UT, TS'ye eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

39. Önerme:
Aynı yüksekliğe sahip iki prizmadan birinin tabanı paralelkenar diğerinin tabanı üçgense ve paralelkenar üçgenin iki katıysa bu prizmalar eşittir.



$ABCDEF$, $GHKLMN$, aynı yükseklikte iki prizma olsun,

birisinin tabanı AF paralelkenarı, ve diğerinin tabanı GHK üçgeni olsun,

ve AF paralelkenarı GHK üçgeninin iki katı olsun;

diyorum ki, $ABCDEF$ prizması $GHKLMN$ prizmasına eşittir.

Çünkü, AO, GP cisimleri tamamlansın.

AF paralelkenarı GHK üçgeninin iki katı olduğundan, ve bu arada HK paralelkenarı da GHK üçgeninin iki katı olduğundan, **[I.34]**

AF paralelkenarı HK paralelkenarına eşittir.

Ama eşit tabanlı ve aynı yükseklikteki paralelyüzlü cisimler birbirine eşittir; **[XI.31]**

öyleyse AO cismi GP cismine eşittir.

Ve $ABCDEF$ prizması AO cisminin yarısıdır, ve $GHKLMN$ prizması da GP cisminin yarısıdır; **[XI.28]**

öyleyse $ABCDEF$ prizması $GHKLMN$ prizmasına eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■