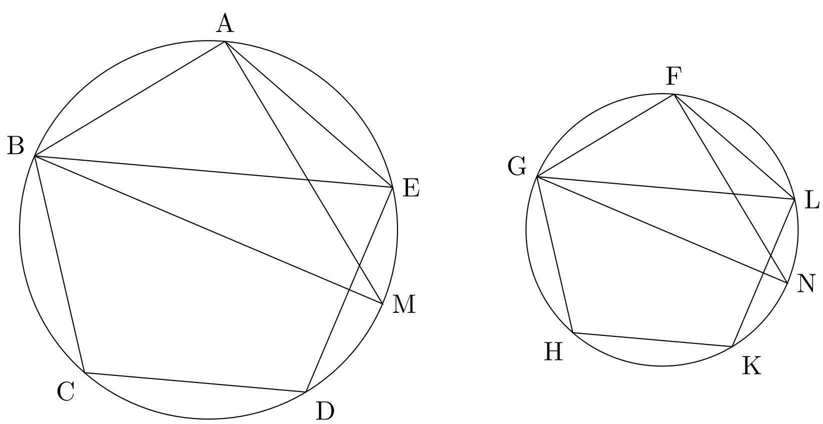
# Kitap XII

## 1. Önermeler

**1. Önerme:**
**Çember içine çizilmiş benzer çokgenlerin oranları çemberlerin çapları üzerindeki karelerin oranına eşittir.**




ABC, FGH iki çember olsun,

ABCDE, FGHKL benzer çokgenleri bu çemberlerin içine çizilmiş olsun ve çemberlerin çapları BM, GN olsun;

diyorum ki, BM üzerindeki karenin GN üzerindeki kareye oranı, ABCDE çokgeninin FGHKL çokgenine oranına eşittir.

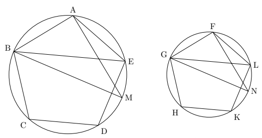
Çünkü, BE, AM, GL, FN birleştirilsin.

Şimdi, ABCDE çokgeni FGHKL çokgenine benzer olduğundan,

BAE açısı GFL açısına eşittir,

ve BA'nın AE'ye oranı, GF'nin FL'ye oranına eşittir. **[Tan. VI.1]**

Böylece BAE, GFL üçgenlerinde bir açı bir açıya eşittir, yani BAE açısı GFL açısına eşittir, ve eşit açıların etrafındaki kenarlar orantılıdır;




öyleyse $ABE$, üçgeni $FGL$ üçgeniyle eşaçılıdır. **[VI.6]**

Bu durumda $AEB$ açısı $FLG$ açısına eşit olur.

Ama $AEB$ açısı $AMB$ açısına eşittir çünkü eşit çevreleri görüyorlar; **[III.27]**

ve $FLG$ açısı $FNG$ açısına eşittir;

öyleyse $AMB$ açısı $FNG$ açısına eşittir.

Ama $BAM$ dik açısı da $GFN$ dik açısına eşittir; **[III.31]**

öyleyse kalan açı da kalan açıya eşittir. **[I.32]**

Öyleyse $ABM$ üçgeni $FGN$ üçgeniyle eşaçılıdır.

Öyleyse orantı olarak, $BM$'nin $GN$'ye oranı, $BA$'nın $GF$'ye oranına eşittir. **[VI.4]**

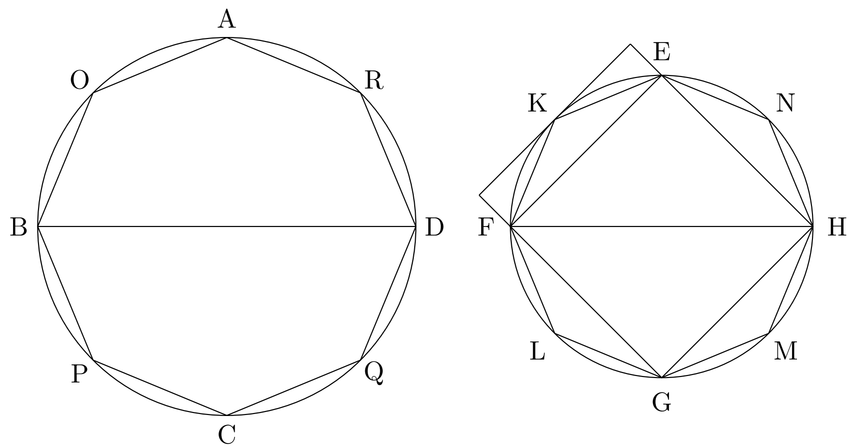
Ama $BM$ üzerindeki karenin $GN$ üzerindeki kareye oranı, $BM$'nin $GN$'ye oranının çift oranıdır,

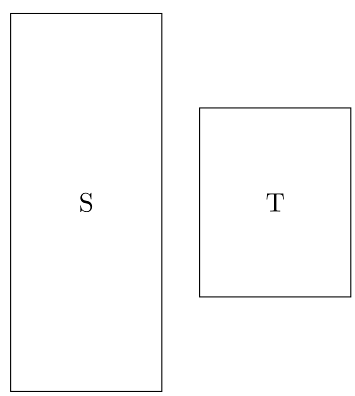
ve $ABCDE$ çokgeninin $FGHKL$ çokgenine oranı, $BA$'nın $GF$'ye oranının çift oranıdır; **[VI.20]**

öyleyse $BM$ üzerindeki karenin $GN$ üzerindeki kareye oranı, $ABCDE$ çokgeninin $FGHKL$ çokgenine oranına eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**2. Önerme:**
**Dairelerin birbirine oranı çapları üzerindeki karelerin oranına eşittir.**




ABCD, EFGH iki çember olsun, ve BD, FH onların çapları olsun;

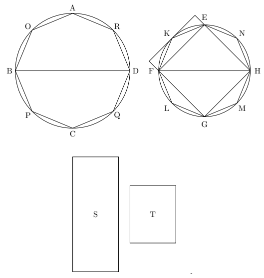
diyorum ki, ABCD çemberinin EFGH çemberine oranı, BD üzerindeki karenin FH üzerindeki kareye oranına eşittir.

Çünkü, eğer BD üzerindeki karenin FH üzerindeki kareye oranı, ABCD çemberinin EFGH çemberine oranına eşit değilse,

o zaman, BD üzerindeki karenin FH üzerindeki kareye oranı, ABCD çemberinin EFGH çemberinden ya daha küçük bir alana ya da daha büyük bir alana oranına eşit olacaktır.

İlk olarak, daha küçük bir S alanıyla o oranda olsun.

EFGH çemberi içine EFGH karesi çizilsin;




o zaman, içe çizilen bu kare EFGH çemberinin yarısından büyüktür, çünkü eğer E, F, G, H noktalarından çembere teğetler çizilirse, EFGH karesi dışa çizilen karenin yarısına eşittir, ve çember dışa çizilen kareden küçüktür;

bu nedenle içe çizilen EFGH karesi EFGH çemberinin yarısından büyüktür.

EF, FG, GH, HE yayları K, L, M, N noktalarında ikiye bölünsün,

ve EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE birleştirilsin;

öyleyse EKF, FLG, GMH, HNE üçgenlerinin her biri etrafındaki çember parçasının yarısından büyüktür, çünkü eğer K, L, M, N noktalarından çembere teğetler çizer ve EF, FG, GH, HE doğruları üzerindeki paralelkenarları tamamlarsak, EKF, FLG, GMH, HNE üçgenlerinin her biri etrafındaki paralelkenarın yarısına eşit olacaktır,

bu arada etrafındaki çember parçası paralelkenardan küçüktür;

bu nedenle EKF, FLG, GMH, HNE üçgenlerinin her biri etrafındaki çember parçasının yarısından büyüktür.

Böylece, kalan yayları ikiye bölerek ve doğruları birleştirerek, ve bunu sürekli yaparak, çemberin üzerinde, EFGH çemberinin S alanından farkından daha küçük bir parça bırakacağız.

Çünkü, onuncu kitabın birinci önermesinde, farklı iki nicelikle başlandığında, büyük olandan kendi yarısından büyük bir nicelik çıkarılıp, kalan nicelikten de yine yarısından büyük bir nicelik çıkarılarak devam edildiğinde en baştaki küçük nicelikten daha küçük bir niceliğe ulaşılacağı kanıtlanmıştı.

Yukarda tanımlandığı gibi parçalar elde edilmiş olsun, ve EFGH çemberinin EK, KF, FL, LG, GM, MH, HN, NE üzerindeki parçaları EFGH çemberinin S alanından farkından küçük olsun.

Öyleyse kalan çokgen, yani EKFLGMHN çokgeni, S alanından büyüktür.

ABCD çemberinin içine de EKFLGMHN çokgenine benzer AOBPCQDR çokgeni çizilsin;

bu durumda BD üzerindeki karenin FH üzerindeki kareye oranı, AOBPCQDR çokgeninin EKFLGMHN çokgenine oranına eşittir. **[XII.1]**

Ama BD üzerindeki karenin FH üzerindeki kareye oranı, ABCD çemberinin S alanına oranına eşittir;

öyleyse ABCD çemberinin S alanına oranı, AOBPCQDR çokgeninin EKFLGMHN çokgenine oranına eşittir. **[V.11]**

bu durumda değiştirilmiş oranlar olarak, ABCD çemberinin içine çizilmiş çokgene oranı, S alanının EKFLGMHN çokgenine oranına eşittir. **[V.16]**

Ama ABCD çemberi içine çizilen çokgenden büyüktür;

öyleyse S alanı da EKFLGMHN çokgeninden büyüktür.

Ama aynı zamanda da küçüktür: bu olamaz.

Öyleyse, BD üzerindeki karenin FH üzerindeki kareye oranı, ABCD çemberinin EFGH çemberinden daha küçük hiçbir alana oranına eşit olamaz.

Benzer şekilde, EFGH çemberinin de ABCD çemberinden daha küçük bir alana oranının, FH üzerindeki karenin BD üzerindeki kareye oranına eşit olamayacağını kanıtlayabiliriz.

Şimdi de diyorum ki, ABCD çemberinin EFGH çemberinden büyük hiçbir alana oranı, BD üzerindeki karenin FH üzerindeki kareye oranına eşit olamaz.

Çünkü, eğer mümkünse, daha büyük bir S alanına o oranda olsun.

Öyleyse, ters oranlar olarak, FH üzerindeki karenin DB üzerindeki kareye oranı, S alanının ABCD çemberine oranına eşittir.

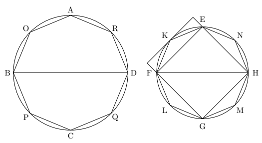
Ama, S alanının ABCD çemberine oranı, EFGH çemberinin ABCD çemberinden daha küçük bir alana oranına eşittir;

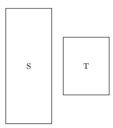
öyleyse FH üzerindeki karenin BD üzerindeki kareye oranı, EFGH çamberinin ABCD çemberinden daha küçük bir alana oranına eşittir: **[V.11]**

bu olamaz.

Öyleyse, BD üzerindeki karenin FH üzerindeki kareye oranı, ABCD çemberinin EFGH çemberinden daha büyük bir alana oranına eşit olamaz.

Ve EFGH çemberinden daha küçük bir alana da o oranda olamayacağı da kanıtlanmıştı;




öyleyse $BD$ üzerindeki karenin $FH$ üzerindeki kareye oranı, $ABCD$ çemberinin $EFGH$ çemberine oranına eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**Yardımcı Önerme:** Diyorum ki, $S$ nin alanı $EFGH$ çemberinden büyük olduğundan, $S$ nin alanının $ABCD$ çemberine oranı, $EFGH$ çemberinin $ABCD$ çemberinden daha küçük olan bir alana oranına eşittir.

Çünkü, $S$ alanının $ABCD$ çemberine oranının, $EFGH$ çemberinin $T$ alanına oranına eşit olması sağlansın.

Diyorum ki, $T$ alanı $ABCD$ çemberinden küçüktür.

Çünkü, $S$ alanının $ABCD$ çemberine oranı, $EFGH$ çemberinin $T$ alanına oranına eşit olduğundan,

değiştirilmiş oranlar olarak, $S$ alanının $EFGH$ çemberine oranı, $ABCD$ çemberinin $T$ alanına oranına eşittir. **[V.16]**

Ama $S$ alanı $EFGH$ çemberinden büyüktür;

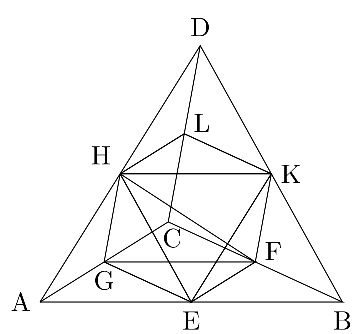
öyleyse $ABCD$ çemberi de $T$ alanından büyüktür

Bu nedenle, $S$ alanının $ABCD$ çemberine oranı, $EFGH$ çemberinin $ABCD$ çemberinden daha küçük bir alana oranına eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**3. Önerme:**

**Üçgen tabanlı her piramit, üçgen tabanlı eşit ve hem birbirine hem de ana piramide benzer iki piramide ve de eşit iki prizmaya ayrılır; ve bu iki prizma ana piramidin yarısından büyüktür.**



Tabanı ABC üçgeni olan ve tepe noktası D olan bir piramit olsun;

diyorum ki, ABCD piramidi, birbirine eşit, üçgen tabanlı ve ana piramide benzer iki piramide ve iki eşit prizmaya bölünür; ve bu iki prizma ana piramidin yarısından büyüktür.

Çünkü, AB, BC, CA, AD, DB, DC doğruları E, F, G, H, K, L noktalarında ikiye bölünsün, ve HE, EG, GH, HK, KL, LH, KF, FG birleştirilsin.

AE, EB'ye, ve AH de DH'ye eşit olduğundan, EH, DB'ye paraleldir. **[VI.2]**

Aynı nedenden dolayı, HK de AB'ye paraleldir.

Öyleyse HEBK bir paralelkenardır; bu durumda HK, EB'ye eşit olur. **[I.34]**

Ama EB, EA'ya eşittir; öyleyse AE de HK'ya eşittir.

Ama AH, HD'ye de eşittir;

öyleyse iki kenar EA, AH, iki kenar KH, HD'ye sırasıyla eşittir;

ve EAH açısı KHD açısına eşittir;

öyleyse EH tabanı KD tabanına eşittir. **[I.4]**

Bu durumda AEH üçgeni HKD üçgenine eşit ve benzer olur.

Aynı nedenden dolayı AHG üçgeni de HLD üçgenine eşit ve benzerdir.

Şimdi, kesişen EH, HG doğruları, aynı düzlemde olmayan ve kesişen KD, DL doğrularına paralel olduğundan, içerdikleri açılar eşittir. **[XI.10]**

Öyleyse EHG açısı KDL açısına eşittir.

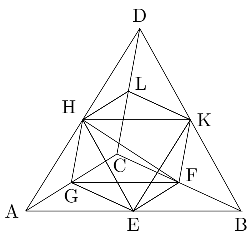
Ve, EH, HG doğruları sırasıyla KD, DL doğrularına eşit olduğundan, ve EHG açısı KDL açısına eşit olduğundan,

EG tabanı KL tabanına eşittir; **[I.4]**

öyleyse EHG üçgeni KDL üçgenine eşit ve benzerdir.

Aynı nedenden dolayı AEG üçgeni HKL üçgenine eşit ve benzerdir.

Öyleyse, tabanı AEG üçgeni ve tepesi H noktası olam piramit, tabanı HKL üçgeni olan ve tepesi D noktası olan piramide eşit ve benzerdir. **[Tan. XI.10]**




Ve, $HK$ doğrusu $ADB$ üçgeninin bir kenarı olan $AB$'ye paralel çizildiğinden,

$ADB$ üçgeni $DHK$ üçgeniyle eşaçılıdır; **[I.29]**

ve kenarları orantılıdır;

öyleyse $ADB$ üçgeni $DHK$ üçgenine benzerdir. **[Tan. VI.1]**

Aynı nedenden dolayı $DBC$ üçgeni $DKL$ üçgenine, ve $ADC$ üçgeni de $DLH$ üçgenine benzerdir.

Şimdi, kesişen $BA$, $AC$ doğruları, aynı düzlemde olmayan ve $KH$, $HL$ doğrularına paralel olduğundan, içerdikleri açılar eşittir. **[XI.10]**

Öyleyse $BAC$ açısı $KHL$ açısına eşittir.

Ve, $BA$'nın $AC$'ye oranı, $KH$'nin $HL$'ye oranına eşittir;

öyleyse $ABC$ üçgeni $HKL$ üçgenine benzerdir.

Öyleyse tabanı $ABC$ üçgeni ve tepesi $D$ noktası olan piramit de tabanı $HKL$ üçgeni ve tepesi $D$ noktası olan piramide benzerdir.

Ama tabanı $HKL$ üçgeni ve tepesi $D$ noktası olan piramidin, tabanı $AEG$ üçgeni ve tepesi $H$ noktası olan piramide benzer olduğu kanıtlanmıştı.

Öyleyse $AEGH$, $HKLD$ piramitlerinin her biri ana piramit $ABCD$'ye benzerdir.

Şimdi de, $BF$, $FC$'ye eşit olduğundan, $EBFG$ paralelkenarı $GFC$ üçgeninin iki katıdır.

Ve, eğer eşit yükseklikte iki prizma varsa, ve birinin tabanı bir paralelkenar diğerinin tabanı bir üçgense, ve paralekenar üçgenin iki katıysa, bu prizmalar eşit olacağından, **[XI.39]**

$BKF$, $EHG$ üçgenleri ve $EBFG$, $EBKH$, $HKFG$ paralelkenarları tarafından içerilen pirizma, $GFC$, $HKL$ üçgenleri ve $KFCL$, $LCGH$, $HKFG$ paralelkenarleri tarafından içerilen pirizmaya eşittir.

Ve açıktır ki, tabanı $EBFG$ paralelkenarı ve karşısı $HK$ doğrusu olan prizmayla, tabanı $GFC$ üçgeni ve karşısı $HKL$ üçgeni olan prizmaların her biri, tabanları $AEG$, $HKL$ üçgenleri ve tepe noktaları $H$, $D$ noktaları olan piramitlerin her birinden büyüktür, çünkü, eğer $EF$, $EK$ doğrularını çizersek, tabanı $EBFG$ paralelkenarı ve karşısı $HK$ doğrusu olan prizma, tabanı $EBF$ üçgeni ve tepesi $K$ noktası olan piramitten büyüktür.

Ama tabanı $EBF$ üçgeni ve tepesi $K$ noktası olan piramit, tabanı $AEG$ üçgeni ve tepesi $H$ noktası olan piramide eşittir; çünkü eşit ve benzer yüzeyler tarafından içeriliyorlar.

Bu nedenle tabanı $EBFG$ paralelkenarı ve karşısı $HK$ doğrusu olan prizma, tabanı $AEG$ üçgeni ve tepesi $H$ noktası olan piramitten büyüktür.

Ama tabanı $EBFG$ paralelkenarı ve karşısı $HK$ doğrusu olan prizma, tabanı $GFC$ üçgeni ve karşısı $HKL$ üçgeni olan prizmaya eşittir,

ve tabanı $AEG$ üçgeni ve tepesi $H$ noktası olan piramit, tabanı $HKL$ üçgeni ve tepesi $D$ noktası olan piramide eşittir.

Öyleyse bu iki prizma, tabanları $AEG$, $HKL$ üçgenleri ve tepeleri $H$, $D$ noktaları olan piramitlerden büyüktür.

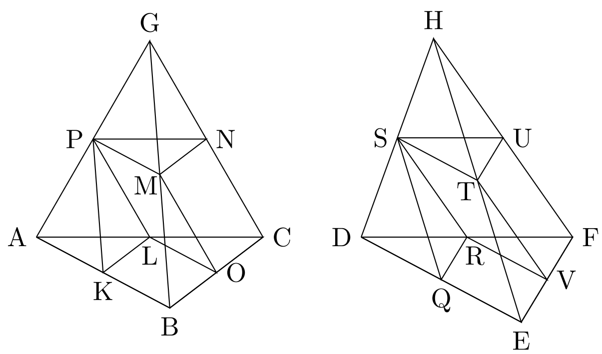
Böylece tabanı $ABC$ üçgeni ve tepesi $D$ noktası olan asıl piramit, birbirine eşit iki piramide ve iki eşit prizmaya ayrılmış oldu, ve bu iki prizma asıl piramidin yarısından büyük oldu.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**4. Önerme:**

**Aynı yükseklikte ve üçgen tabanlı iki piramit varsa, ve her biri birbirine eşit ve bütüne benzer iki piramide ve iki eşit prizmaya ayrıldıysa, piramitlerden birinin tabanının diğerinin tabanına oranı, birinin içindeki prizmaların tamamının diğerinin içindeki prizmaların tamamına oranına eşit olacaktır.**

*[ Kanıtın akışından görüleceği gibi Öklid, piramitlerden prizmalar çıktıktan sonra kalan piramitleri de aynı şekilde prizmalara ve piramitlere ayırıyor, ve bu işlemi her tekrarladığında o ana kadar elde edilen tüm prizmaları düşünüyor ve onlara "prizmaların tamamı" diyor. ]*




Tabanları $ABC$, $DEF$ üçgenleri ve tepeleri $G$, $H$ noktaları olan iki piramit olsun,

ve her biri, birbirine eşit ve bütüne benzer iki piramide ve iki eşit prizmaya ayrılsın; **[XII.3]**

diyorum ki, $ABC$ tabanının $DEF$ tabanına oranı, $ABCG$ piramidindeki tüm prizmaların $DEFH$ piramidindeki tüm prizmalara oranına eşittir.

Çünkü, $BO$, $OC$'ye, ve $AL$, $LC$'ye eşit olduğundan, $LO$, $AB$'ye paraleldir,

ve $ABC$ üçgeni $LOC$ üçgenine benzerdir.

Aynı nedenden dolayı, $DEF$ üçgeni $RVF$ üçgenine benzerdir.

Ve, $BC$, $CO$'nun, ve $EF$ de $FV$'nin iki katı olduğundan,

$BC$'nin $CO$'ya oranı, $EF$'nin $FV$'ye oranına eşittir.

Ve BC, CO üzerine benzer ve aynı konumda düzkenar ABC, LOC şekilleri çizilmiştir,

ve EF, FV üzerine benzer ve aynı konumda düzkenar DEF, RVF şekilleri çizilmiştir;

öyleyse ABC üçgeninin LOC üçgenine oranı, DEF üçgeninin RVF üçgenine oranına eşittir; **[VI.22]**

öyleyse, değiştirilmiş oranlar olarak, ABC üçgeninin DEF üçgenine oranı, LOC üçgeninin RVF üçgenine oranına eşittir. **[V.16]**

Ama, LOC üçgeninin DEF üçgenine oranı, tabanı LOC üçgeni ve karşısı PMN olan prizmanın, tabanı RVF üçgeni ve karşısı STU olan prizmaya oranına eşittir; **[Sondaki YÖ.]**

öyleyse, ABC üçgeninin DEF üçgenine oranı, tabanı LOC üçgeni ve karşısı PMN olan prizmanın, tabanı RVF üçgeni ve karşısı STU olan prizmaya oranına eşittir.

Ama, sözü edilen prizmaların birbirine oranı, tabanı KBOL paralelkenarı ve karşısı PM doğrusu olan prizmanın tabanı QEVR paralelkenarı ve karşısı ST doğrusu olan prizmaya oranına eşittir. **[XI.39, XII.3]**

Öyleyse, tabanı KBOL paralelkenarı ve karşısı PM olan prizma ve tabanı LOC üçgeni ve karşısı PMN olan iki prizmanın, tabanı QEVR ve karşısı ST doğrusu olan prizma ve tabanı RVF üçgeni ve karşısı STU olan iki prizmaya oranları eşittir. **[V.12]**

Bu durumda ABC tabanının DEF tabanına oranı, sözü edilen iki prizmanın sözü edilen diğer iki prizmaya oranına eşittir.

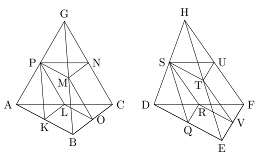
Ve benzer şekilde, eğer PMNG, STUH piramitleri iki prizma ve iki piramide ayrılırsa,

PMN tabanının STU tabanına oranı, PMNG piramidindeki iki prizmanın STUH piramidindeki iki prizmaya oranına eşit olacaktır.

Ama, PMN tabanının STU tabanına oranı, ABC tabanının DEF tabanına oranına eşittir;

çünkü PMN, STU üçgenleri sırasıyla LOC, RVF üçgenlerine eşittir.

Öyleyse yine, ABC tabanının DEF tabanına oranı, dört prizmanın dört prizmaya oranına eşittir.




Ve benzer şekilde, eğer kalan piramitleri iki piramide ve iki prizmaya ayırırsak, $ABC$ tabanının $DEF$ tabanına oranı, $ABCG$ piramidindeki tüm prizmaların $DEFH$ piramidindeki tüm prizmalara oranına eşit olacaktır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**Yardımcı Önerme:** $LOC$ üçgeninin $RVF$ üçgenine oranının, tabanı $LOC$ üçgeni ve karşısı $PMN$ olan prizmanın, tabanı $RVF$ üçgeni ve karşısı $STU$ olan prizmanın hacmine oranına eşit olduğunu aşağıdaki gibi kanıtlamalıyız.

Aynı şekil üzerinde $G$, $H$'den $ABC$, $DEF$ düzlemlerine dikmeler çizildiği düşünülsün; bunlar elbette eşittir çünkü varsayıma göre piramitlerin yükseklikleri aynıdır.

Şimdi, $GC$ doğrusu ve $G$'den çizilen dikme $ABC$, $PMN$ paralel düzlemleriyle kesildiklerinden, aynı oranda kesileceklerdir. **[XI.17]**

Ve $GC$ doğrusu $PMN$ düzlemiyle $N$'de ikiye bölünür;

öyleyse $G$'den $ABC$ düzlemine çizilen dikme de $PMN$ düzlemi tarafından ikiye bölünecektir.

Aynı nedenden dolayı, $H$'den $DEF$ düzlemine çizilen dikme de $STU$ düzlemi tarafından ikiye bölünecektir.

Ve $G$, $H$'den $ABC$, $DEF$ düzlemlerine çizilen dikmeler eşittir;

öyleyse $PMN$, $STU$ üçgenlerinden $ABC$, $DEF$ düzlemlerine çizilen dikmeler de eşittir.

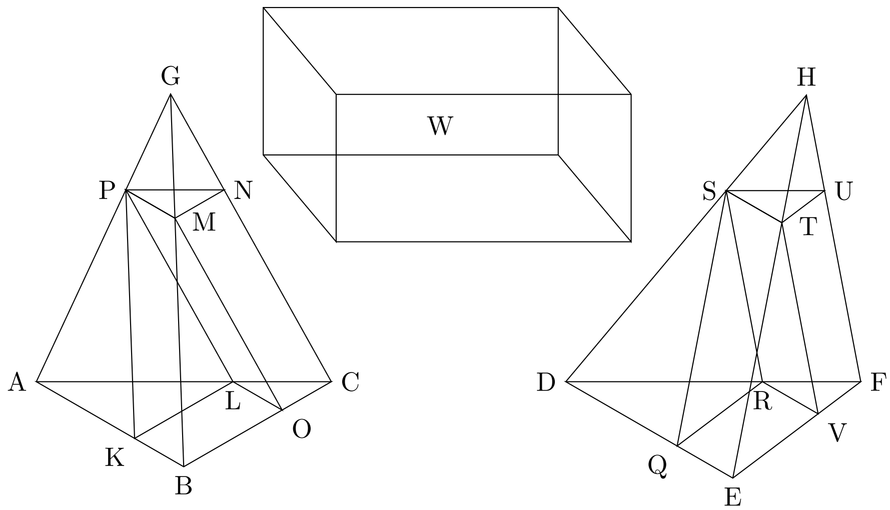
Bu durumda tabanları $LOC$, $RVF$ üçgenleri ve karşıları $PMN$, $STU$ olan prizmaların yükseklikleri aynıdır.

Bu nedenle sözü edilen prizmalardan çizilen paralelyüzlüler de eşit yüksekliktedir ve birbirlerine oranı tabanlarının oranına eşittir; **[XI.32]**

öyleyse onların yarıları, yani sözü edilen prizmaların birbirine oranı $LOC$ tabanının $RVF$ tabanına oranına eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**5. Önerme:**
**Yükseklikleri aynı olan üçgen tabanlı piramitlerin birbirine oranı tabanlarının oranına eşittir.**




Tabanları $ABC$, $DEF$ üçgenleri ve tepe noktaları $G$, $H$ olan piramitler olsun;

diyorum ki, $ABC$ tabanının $DEF$ tabanına oranı, $ABCG$ piramidinin $DEFH$ piramidine oranına eşittir.

Çünkü, eğer $ABCG$ piramidinin $DEFH$ piramidine oranı, $ABC$ üçgeninin $DEF$ üçgenine oranına eşit değilse,

o zaman, $ABC$ tabanının $DEF$ tabanına oranı, $ABCG$ piramidinin $DEFH$ piramidinden daha küçük ya da daha büyük bir cisme oranına eşit olacaktır.

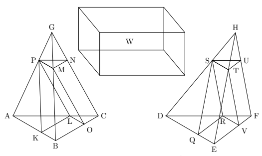
Önce o oranda daha küçük bir $W$ cismine eşit olsun, ve $DEFH$ piramidi birbirine eşit ve bütüne benzer iki piramide ve eşit iki prizmaya ayrılsın;

o zaman o iki prizma tüm piramidin yarısından büyüktür. **[XII.3]**

Yine, bu ayrışmadan kalan piramitler de benzer şekilde ayrıştırılsın,

ve $DEFH$ piramidinden artan piramitler $DEFH$ piramidinin $W$ cismine olan farkından küçük olana kadar bu sürdürülsün. **[X.1]**

Bu koşullara uyan piramitler artmış olsun, ve anlaşılsın diye bunların $DQRS$, $STUH$ olduğunu varsayalım;




bu durumda kalanlar, yani DEFH piramidindeki prizmalar $W$ cisminden büyük olur.

ABCG piramidi de benzer şekilde ve DEFH piramidine uygulandığı sayıda ayrıştırılsın;

bu durumda ABC tabanının DEF tabanına oranı, ABCG piramidindeki prizmaların DEFH piramidindeki prizmalara oranına eşit olur. **[XII.4]**

Ama, ABC tabanının DEF tabanına oranı, ABCG piramidinin $W$ cismine oranına eşittir; **[V.11]**

öyleyse ABCG piramidinin $W$ cismine oranı, ABCG piramidindeki tüm prizmaların DEFH piramidindeki tüm prizmlara oranına eşittir; **[V.11]**

bu durumda, değiştirilmiş oranlar olarak, ABCG piramidinin kendi içindeki prizmalara oranı, $W$ cisminin DEFH piramidi içindeki prizmalara oranına eşittir. **[V.16]**

Ama ABCG piramidi içindeki prizmalardan büyüktür; öyleyse $W$ cismi de DEFH piramidi içindeki prizmalardan büyüktür.

Ama aynı zamanda küçüktür de: bu olamaz.

Öyleyse ABCG piramidinin DEFH piramidinden daha küçük hiçbir cisme oranı, ABC tabanının DEF tabanına oranına eşit olamaz.

Benzer şekilde DEFH piramidinin de ABCG piramidinden daha küçük hiçbir cisme oranının, DEF tabanının ABC tabanına oranına eşit olamayacağı kanıtlanabilir.

Şimdi de diyorum ki, ABCG piramidinin DEFH piramidinden daha büyük hiçbir cisme oranı, ABC tabanının DEF tabanına oranına eşit olamaz.

Çünkü, eğer mümkünse daha büyük bir $W$ cismiyle oranı öyle olsun;

bu durumda, ters oran olarak, DEF tabanının ABC tabanına oranı, $W$ cisminin ABCG piramidine oranına eşit olur.

Ama, $W$ cisminin ABCG cismine oranı, DEFH piramidinin ABCG piramidinden daha küçük bir cisme oranına, daha önce kanıtlandığı gibi, eşittir; **[YÖ. XII.2]** öyleyse DEF tabanının ABC tabanına oranı, DEFH piramidinin ABCG piramidinden daha küçük bir cisme oranına eşittir: **[V.11]**

bunun olamayacağı kanıtlanmıştı.

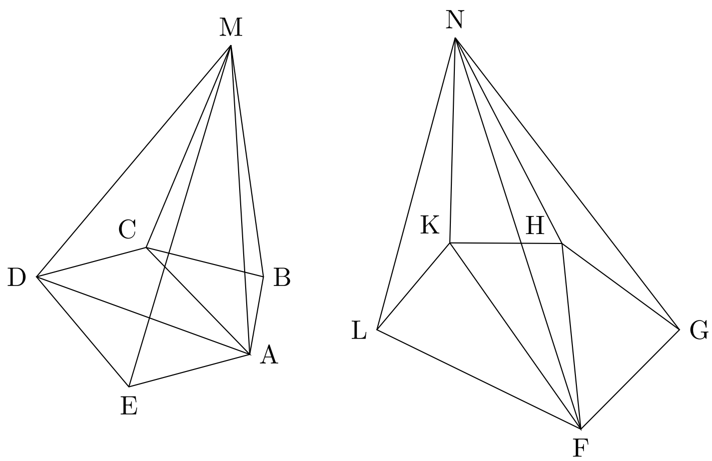
Öyleyse ABCG piramidinin DEFH piramidinden daha büyük hiçbir cisme oranı, ABC tabanının DEF tabanına oranına eşit olamaz.

daha küçük cisme oranının da bu orana eşit olmayacağı kanıtlanmıştı.

Öyleyse ABC tabanının DEF tabanına oranı, ABCG piramidinin DEFH piramidine oranına eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**6. Önerme:**
**Yükseklikleri aynı olan çokgen tabanlı piramitlerin birbirine oranı tabanlarının oranına eşittir.**

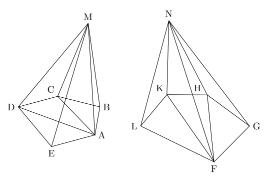



Tabanları ABCDE, FGHKL çokgenleri ve tepe noktaları M, N olan piramitler olsun;

diyorum ki, ABCDE tabanının FGHKL tabanına oranı, ABCDEM piramidinin FGHKLN piramidine oranına eşittir.

Çünkü, AC, AD, FH, FK birleştirilsin.

O zaman, ABCM, ACDM piramitlerinin tabanları üçgen ve yükseklikleri aynı olduğundan, birbirlerine oranı, tabanlarının oranına eşittir; **[XII.5]**




öyleyse, $ABC$ tabanının $ACD$ tabanına oranı, $ABCM$ piramidinin $ACDM$ piramidine oranına eşittir.

Ve, birleşik oranlar olarak, $ABCD$ tabanının $ACD$ tabanına oranı, $ABCDM$ piramidinin $ACDM$ piramidine oranına eşittir. **[V.18]**

Ama aynı zamanda, $ACD$ tabanının $ADE$ tabanına oranı, $ACDM$ piramidinin $ADEM$ piramidine oranına eşittir. **[XII.5]**

Öyleyse, eşit dış oranlar olarak, $ABCD$ tabanının $ADE$ tabanına oranı, $ABCDM$ piramidinin $ADEM$ piramidine oranına eşittir. **[V.22]**

Ve yine birleşik oranlar olarak, $ABCDE$ tabanının $ADE$ tabanına oranı, $ABCDEM$ piramidinin $ADEM$ piramidine oranına eşittir. **[V.18]**

Benzer şekilde, $FGHKL$ tabanının $FGH$ tabanına oranının, $FGHKLN$ piramidinin $FGHN$ piramidine oranına eşit olduğunu kanıtlayabiliriz.

Ve, $ADEM$, $FGHN$ piramitleri üçgen tabanlı ve aynı yükseklikte olduğundan,

$ADE$ tabanının $FGH$ tabanına oranı, $ADEM$ piramidinin $FGHN$ piramidine oranına eşittir. **[XII.5]**

Ama $ADE$ tabanının $ABCDE$ tabanına oranı, $ADEM$ piramidinin $ABCDEM$ piramidine oranına eşitti.

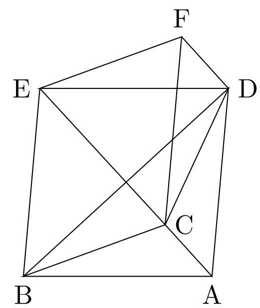
Öyleyse, eşit dış oranlar olarak, $ABCDE$ tabanının $FGH$ tabanına oranı, $ABCDEM$ piramidinin $FGHN$ piramidine oranına eşittir. **[V.22]**

Ama dahası, $FGH$ tabanının $FGHKL$ tabanına oranı da $FGHN$ piramidinin $FGHKLN$ piramidine oranına eşitti.

Öyleyse yine eşit dış oranlar olarak, $ABCDE$ tabanının $FGHKL$ tabanına oranı, $ABCDEM$ piramidinin $FGHKLN$ piramidine oranına eşittir. **[V.22]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**7. Önerme:**
**Üçgen tabanlı her prizma üçgen tabanlı ve birbirine eşit üç piramide bölünebilir.**




Tabanı ABC ve karşısı DEF olan bir prizma olsun;

diyorum ki, ABCDEF prizması birbirine eşit ve üçgen tabanlı üç piramide ayrılır.

Çünkü, BD, EC, CD birleştirilsin.

ABED bir paralelkenar ve BD de onun bir köşegeni olduğundan, ABD üçgeni EBD üçgenine eşittir; **[I.34]**

öyleyse tabanı ABD üçgeni ve tepesi C noktası olan piramit, tabanı DEB üçgeni ve tepesi C noktası olan piramide eşittir. **[XII.5]**

Ama tabanı DEB üçgeni ve tepesi C noktası olan piramit, tabanı EBC üçgeni ve tepesi D noktası olan piramitle aynıdır;

çünkü aynı düzlemler tarafından içerilirler.

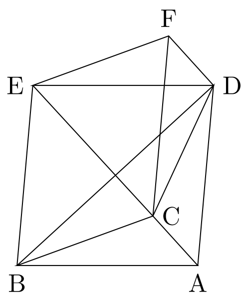
Öyleyse tabanı ABD üçgeni ve tepesi C noktası olan piramit, tabanı EBC üçgeni ve tepesi D noktası olan piramide de eşittir.

Yine, FCBE bir paralelkenar ve CE de onun bir köşegeni olduğundan, CEF üçgeni, CBE üçgenine eşittir. **[I.34]**

Öyleyse tabanı BCE üçgeni ve tepesi D noktası olan piramit, tabanı ECF üçgeni ve tepesi D noktası olan piramide eşittir. **[XII.5]**

Ama tabanı BCE üçgeni ve tepesi D noktası olan piramidin, tabanı ABD üçgeni ve tepesi C noktası olan piramide eşit olduğu kanıtlanmıştı;

öyleyse tabanı CEF üçgeni ve tepesi D noktası olan piramit de tabanı ABD üçgeni ve tepesi C noktası olan piramide eşittir;




bu durumda ABCDEF prizması birbirine eşit ve üçgen tabanlı üç piramide ayrılmış oldu.

Ve, tabanı ABD üçgeni ve tepesi C noktası olan piramit, aynı düzlemler tarafından içerildikleri için, tabanı CAB üçgeni ve tepesi D noktası olan piramitle aynı olduğundan,

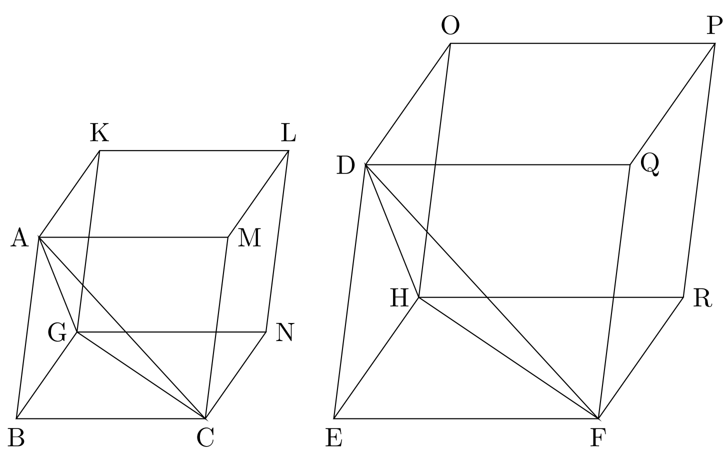
ve bu arada tabanı ABD üçgeni ve tepesi C noktası olan piramidin tabanı ABC üçgeni ve karşısı DEF olan prizmanın üçte biri olduğu kanıtlanmış olduğundan,

tabanı ABC üçgeni ve tepesi D noktası olan piramit de tabanı ABC üçgeni ve karşısı DEF olan prizmanın üçte biridir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**Doğal Sonuç:** Buradan açıkça görülür ki bir prizmayla aynı tabana ve yüksekliğe sahip piramit prizmanın üçte biridir.

**8. Önerme:**
**Üçgen tabanlı benzer piramitlerin oranları karşılıklı kenarlarının oranlarının üç kat oranına eşittir.**




Tabanları ABC, DEF üçgenleri ve tepeleri G, H noktaları olan, benzer ve aynı konumda yerleştirilmiş iki piramit olsun;

diyorum ki, ABCG piramidinin DEFH piramidine oranı, BC'nin EF'ye oranının üç kat oranıdır.

Çünkü, BGML, EHQP paralelyüzlü cisimler tamamlansın.

Şimdi ABCG piramidi DEFH piramidine benzer olduğundan, GBC açısı HEF açısına, ve ABG açısı DEH açısına eşittir;

ve AB'nin DE'ye oranı, BC'nin EF'ye, ve BG'nin EH'ye oranına eşittir.

Ve, AB'nin DE'ye oranı, BC'nin EF'ye oranına eşit olduğundan, eşit açılar etrafındaki kenarlar orantılı olduğundan,

BM paralelkenarı EQ paralelkenarına benzerdir.

Aynı nedenden dolayı, BN, ER'ye, ve BK, EO'ya benzerdir;

öyleyse MB, BK, BN paralelkenarları, EQ, EO, ER paralelkenarlarına benzerdir.

Ama MB, BK, BN paralelkenarları karşılarındaki paralelkenarlara eşit ve benzerdir,

ve, EQ, EO, ER paralelkenarları da kendi karşılarındaki paralelkenarlara eşit ve benzerdir. **[XI.24]**

Öyleyse BGML, EHQP cisimleri aynı sayıda benzer düzlemler tarafından içerilirler.

Bu durumda BGML cismi EHQP cismine benzerdir.

Ama benzer paralelyüzlü cisimlerin oranları karşılıklı kenarlarının oranının üç kat oranıdır. **[XI.33]**

Öyleyse BGML cisminin EHQP cismine oranı, karşılıklı kenarlar BC'nin EF'ye oranının üç kat oranıdır.

Ama, BGML cisminin EHQP cismine oranı, ABCG piramidinin DEFH piramidine oranına eşittir,

çünkü paralelyüzlü cismin yarısı olan prizma **[XI.28]**

piramidin üç katı olduğundan, **[XII.7]**

piramit bu cismin altıda biridir.

Öyleyse ABCG piramidinin DEFH piramidine oranı, BC'nin EF'ye oranının üç kat oranıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**Doğal Sonuç:** Buradan açıkça görülür ki çokgen tabanlı benzer piramitlerin birbirine oranı da karşılıklı kenarlarının oranlarının üç kat oranına eşittir.

Çünkü, içlerindeki üçgen tabanlı piramitlere ayrıştırılırlarsa, tabanlarını oluşturan benzer çokgenlerin sayıca aynı ve benzer üçgenlere ayrıştırılmış oldukları gerçeğinden dolayı,

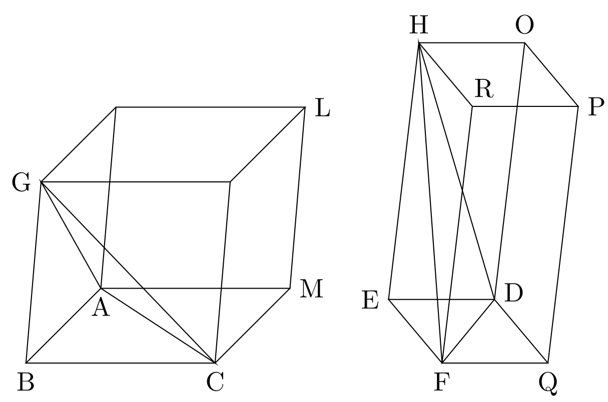
bütün piramitlerden birinin içindeki üçgen tabanlı bir piramidin, diğer bütün piramidin içindeki üçgen tabanlı bir piramide oranı, bir piramidin içindeki tüm üçgen tabanlı piramitlerin diğer piramit içindeki tüm üçgen tabanlı piramitlere oranına eşittir, **[V.12]**

yani çokgen tabanlı piramidin diğer çokgen tabanlı piramide oranına.

Ama üçgen tabanlı piramidin üçgen tabanlı piramide oranı, karşılıklı kenarların oranının üç kat oranıdır;

öyleyse çokgen tabanlı piramidin benzer tabanlı piramide oranı da kenarlarin oranının üç kat oranıdır.

**9. Önerme:**
**Üçgen tabanlı eşit piramitlerde tabanlar yüksekliklerle ters orantılıdır; ve tabanları yükseklikleriyle ters orantılı olan piramitler eşittir.**




Tabanları ABC, DEF üçgenleri ve tepeleri G, H noktaları olan iki eşit piramit olsun;

diyorum ki, ABCG, DEFH piramitlerinde tabanlar yüksekliklerle ters orantılıdır, yani ABC tabanının DEF tabanına oranı, DEFH piramidinin yüksekliğinin ABCG piramidinin yüksekliğine oranına eşittir.

Çünkü, $BGML$, $EHQP$ paralelyüzlü cisimleri tamamlansın.

Şimdi, $ABCG$ piramidi $DEFH$ piramidine eşit olduğundan,

ve $BGML$ cismi $ABCG$ piramidinin altı katı olduğundan,

ve $EHQP$ cismi de $DEFH$ piramidinin altı katı olduğundan,

$BGML$ cismi $EHQP$ cismine eşittir.

Ama eşit paralelyüzlü cisimlerde tabanlar yüksekliklerle ters orantılıdır; **[XI.34]**

öyleyse $BM$ tabanının $EQ$ tabanına oranı, $EHQP$ cisminin yüksekliğinin $BGML$ cisminin yüksekliğine oranına eşittir.

Ama, $BM$ tabanının $EQ$ tabanına oranı, $ABC$ üçgeninin $DEF$ üçgenine oranına eşittir. **[I.34]**

Öyleyse $ABC$ üçgeninin $DEF$ üçgenine oranı, $EHQP$ cisminin yüksekliğinin $BGML$ cisminin yüksekliğine oranına eşittir. **[V.11]**

Ama $EHQP$ cisminin yüksekliği $DEFH$ piramidinin yüksekliğiyle aynıdır,

ve $BGML$ cisminin yüksekiği de $ABCG$ piramidinin yüksekliğiyle aynıdır,

öyleyse taban $ABC$'nin taban $DEF$'ye oranı, $DEFH$ piramidinin yüksekliğinin $ABCG$ piramidinin yüksekliğine oranına eşittir.

Öyleyse $ABCG$, $DEFH$ piramitlerinde tabanlar yüksekliklerle ters orantılıdır.

Şİmdi de $ABCG$, $DEFH$ piramitlerinde tabanlar yüksekliklerle ters orantılı olsun;

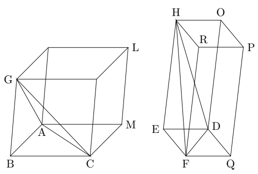
yani taban $ABC$'nin taban $DEF$'ye oranı, $DEFH$ piramidinin yüksekliğinin $ABCG$ piramidinin yüksekliğine eşit olsun;

diyorum ki, $ABCG$ piramidi $DEFH$ piramidine eşittir.

Çünkü, aynı çizimle,

$ABC$ tabanının $DEF$ tabanına oranı, $DEFH$ piramidinin yüksekliğinin $ABCG$ piramidinin yüksekliğine oranına eşit olduğundan,

ve bu arada $ABC$ tabanının $DEF$ tabanına oranı, $BM$ paralelkenarının $EQ$ paralelkenarına oranına eşit olduğundan,




BM paralelkenarının EQ paralelkenarına oranı, DEFH piramidinin yüksekliğinin ABCG piramidinin yüksekliğine oranına eşittir. **[V.11]**

Ama DEFH piramidinin yüksekliği EHQP paralelyüzlünün yüksekliğiyle aynıdır,

ve ABCG piramidinin yüksekliği de BGML paralelyüzlünün yüksekliğiyle aynıdır;

öyleyse BM tabanının EQ tabanına oranı, EHQP paralelyüzlünün yüksekliğinin BGML paralelyüzlünün yüksekliğine oranına eşittir.

Ama tabanları yüksekliklerine ters orantılı olan paralelyüzlü cisimler eşittir; **[XI.34]**

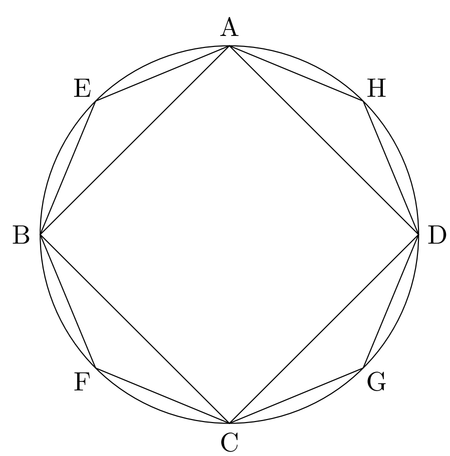
bu durumda BGML paralelyüzlü cismi EHQP paralelyüzlü cismine eşit olur.

Ve ABCG piramidi BGML'nin altıda biridir, ve DEFH piramidi de EHQP paralelyüzlünün altıda biridir;

öyleyse ABCG piramidi DEFH piramidine eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**10. Önerme:**
**Bir koninin hacmi aynı tabanlı ve aynı yükseklikteki silindirin hacminin üçte biridir.**




Bir koni kendisiyle aynı yükseklikteki bir silindirle aynı tabana sahip olsun, yani ABCD çemberine;

diyorum ki, koni silindirin üçte biridir, yani silindir koninin üç katıdır.

Çünkü, eğer silindir koninin üç katı değilse, ya koninin üç katından büyük olacaktır ya da üç katından küçük.

Önce, üç katından büyük olsun,

ve $ABCD$ çemberi içine $ABCD$ karesi çizilsin; **[IV.6]**

o zaman $ABCD$ karesi $ABCD$ dairesinin yarısından fazladır.

$ABCD$ karesi üzerine silindirle aynı yükseklikte bir prizma çizilsin.

O zaman bu prizma silindirin yarısından büyük olur,

çünkü, eğer $ABCD$ çemberi dışına bir kare çizersek, **[IV.7]**

$ABCD$ çemberi içine çizilmiş olan kare dışa çizilmiş karenin yarısıdır,

ve üzerlerine çizilen cisimler eşit yükseklikli paralelyüzlü prizmalardır,

ve bu arada paralelyüzlü cisimlerin oranları tabanlarının oranına eşittir; **[XI.32]**

öyleyse $ABCD$ karesi üzerine çizilen prizma $ABCD$ çemberi dışına çizilen karenin üzerindeki prizmanın yarısıdır;

ve silindir $ABCD$ çemberi dışına çizilen karenin üzerindeki prizmadan küçüktür;

öyleyse $ABCD$ karesi üzerine çizilen prizma, aynı yükseklikteki silindirin yarısından büyüktür.

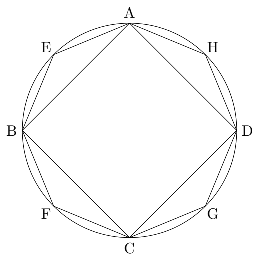
$AB$, $BC$, $CD$, $DA$ yayları $E$, $F$, $G$, $H$ noktalarında ikiye bölünsün,

ve $AE$, $EB$, $BF$, $FC$, $CG$, $GD$, $DH$, $HA$ birleştirilsin;

o zaman, daha önce kanıtladığımız gibi, $AEB$, $BFC$, $CGD$, $DHA$ üçgenlerinin her biri, $ABCD$ dairesinin kendi etrafındaki parçasının yarısından büyüktür.

> *[ $ABE$ üçgeni $ABE$ diare parçasının yarısından büyüktür; XII.2'nin kanıtı içinde bu sonuç kanıtlanmıştı. ]*

$AEB$, $BFC$, $CGD$, $DHA$ üçgenlerinin her biri üzerine silindirle aynı yükseklikte prizmalar çizilsin;




o zaman bu prizmaların her biri etrafındaki silindir parçasının yarısından büyüktür,

çünkü, $E$, $F$, $G$, $H$ noktalarından $AB$, $BC$, $CD$, $DA$'ya paraleller çizer, $AB$, $BC$, $CD$, $DA$ üzerindeki paralelkenarları tamamlarsak, ve bunların üzerine silindirle aynı yükeklikte paralelyüzlü prizmalar çizersek, $AEB$, $BFC$, $CGD$, $DHA$ üçgenlerinin üzerindeki prizmalar çizilen cisimlerin yarısına eşit olur;

ve silindirin parçaları çizilen paralelyüzlü cisimlerden küçüktür;

bu nedenle $AEB$, $BFC$, $CGD$, $DHA$ üçgenleri üzerindeki prizmalar silindirin etraflarındaki parçalarının yarısından daha büyüktür.

Böylece, kalan çember parçalarını ikiye bölerek, doğruları birleştirerek, her bir üçgen üzerine silindirin yüksekliğiyle aynı yükseklikte prizmalar çizerek,

ve bunu sürekli yaparak,

silindirin öyle parçaları kalacaktır ki bunlar silindirle koninin üç katı arasındaki farktan daha küçük olacaktır. **[X.1]**

Böyle parçalar kalmış olsun, ve bunlar $AE$, $EB$, $BF$, $FC$, $CG$, $GD$, $DH$, $HA$ olsun;

öyleyse geri kalan, tabanı $AEBFCGDH$ çokgeni olan ve silindirle aynı yükseklikteki prizma, koninin üç katından büyüktür.

Ama tabanı $AEBFCGDH$ çokgeni olan ve silindirle aynı yükseklikteki prizma, tabanı $AEBFCGDH$ çokgeni ve tepesi koniyle aynı olan piramidin üç katıdır; **[DS. XII.7]**

öyleyse tabanı $AEBFCGDH$ çokgeni ve tepesi koniyle aynı olan piramit de tabanı $ABCD$ çemberi olan koniden büyüktür.

Ama aynı zamanda küçüktür de çünkü onun içine çizilmiştir:

bu olamaz.

Öyleyse silindir koninin üç katından büyük değildir.

Şimdi de diyorum ki, silindir koninin üç katından küçük de olamaz.

Çünkü, eğer mümkünse, silindir koninin üç katından küçük olsun;

bu durumda, ters oran olarak, koni silindirin üçte birinden büyük olur.

$ABCD$ çemberi içine $ABCD$ karesi çizilsin;

öyleyse $ABCD$ karesi $ABCD$ dairesinin yarısından fazladır.

Şimdi $ABCD$ karesinin üzerine tepesi koninin tepesiyle aynı olan bir piramit çizilsin;

öyleyse bu şekilse çizilen piramit koninin yarısından büyüktür,

bunu gördükten sonra, daha önce kanıtladığımız gibi, çemberin etrafına bir kare çizersek, $ABCD$ karesi bu çemberin dışına çizilen karenin yarısı olacaktır,

ve eğer bu karelerin üzerine koniyle aynı yükseklikte paralelyüzlü cisimler çizersek, ki bunlara prizma da denir, $ABCD$ karesi üzerine çizilmiş olan cisim çemberin dışına çizilmiş karenin üzerindeki cismin yarısı olacaktır; çünkü birbirlerine oranları tabanlarının oranına eşittir. **[XI.32]**

Bu nedenle üçte birleri de aynı orandadır;

öyleyse tabanı $ABCD$ karesi olan piramit, çemberin dışın çizilen karenin üzerine çizilen piramidin yarısıdır.

Ve çemberin dışına çizilen karenin üzerine çizilmiş olan piramit koniden büyüktür, çünkü onu içerir.

Öyleyse tabanı $ABCD$ karesi olan ve tepesi konininkiyle aynı olan piramit koninin yarısından büyüktür.

$AB$, $BC$, $CD$, $DA$ yayları $E$, $F$, $G$, $H$ noktalarında ikiye bölünsün,

ve $AE$, $EB$, $BF$, $FC$, $CG$, $GD$, $DH$, $HA$ birleştirilsin;

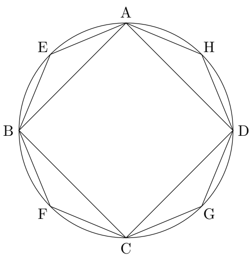
o zaman, $AEB$, $BFC$, $CGD$, $DHA$ üçgenlerinin her biri, daha önce kanıtladığımız gibi, $ABCD$ dairesinin etrafındaki parçasının yarısından büyüktür.

Şimdi, $AEB$, $BFC$, $CGD$, $DHA$ üçgenlerinin her biri üzerine tepesi konininkiyle aynı olan piramitler çizilsin;

öyleyse çizilen bu priamitlerin her biri, daha önce olduğu gibi, etraflarındaki koni parçasının yarısından büyüktür.

Böylece, kalan çember parçalarını ikiye bölerek, doğruları birleştirerek, her bir üçgen üzerine tepesi konininkiyle aynı olan piramitler çizerek,

ve bunu sürekli yaparak,




koninin öyle parçaları kalacaktır ki bunlar koniyle silindirin üçte biri arasındaki farktan daha küçük olacaktır. **[X.1]**

Böyle parçalar kalmış olsun, ve bunlar $AE$, $EB$, $BF$, $FC$, $CG$, $GD$, $DH$, $HA$ olsun;

öyleyse geri kalan, tabanı $AEBFCGDH$ çokgeni ve tepesi koninin-kiyle aynı olan piramit, silindirin üçte birinden büyüktür.

Ama tabanı $AEBFCGDH$ çokgeni ve tepesi konininkiyle aynı olan piramit, tabanı $AEBFCGDH$ çokgeni ve yüksekliği silindirle aynı olan prizmanın üçte biridir; öyleyse tabanı $AEBFCGDH$ çokgeni ve yüksekliği silindirle aynı olan prizma, tabanı $ABCD$ çemberi olan silindirden büyüktür.

Ama aynı zamanda küçüktür de çünkü onun içine çizilmiştir:

bu olamaz.

Öyleyse silindir koninin üç katından küçük değildir.

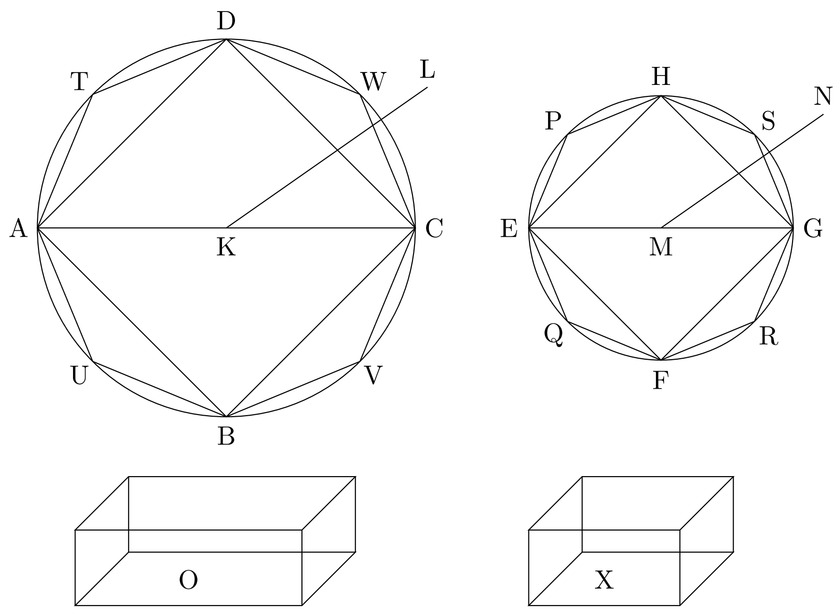
Ama üç katından büyük olmadığı da kanıtlanmıştı;

öyleyse silindir koninin üç katıdır;

böylece koni silindirin üçte biri olur.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**11. Önerme:**
**Aynı yükseklikteki konilerle silindirlerin birbirine oranı tabanlarının oranına eşittir.**




Aynı yükseklikte koniler ve silindirler olsun,

tabanları ABCD, EFGH çemberleri, eksenleri KL, MN, ve tabanlarının çapları AC, EG olsun;

diyorum ki, ABCD dairesinin EFGH dairesine oranı, AL konisinin EN konisine oranına eşittir.

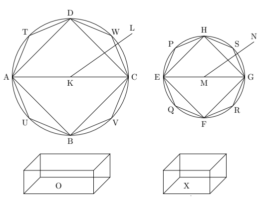
Çünkü, eğer değilse, o zaman AL konisinin EN konisinden ya daha küçük ya da daha büyük bir cisme oranı, ABCD dairesinin EFGH dairesine oranına eşit olacaktır.

Önce, daha küçük bir O cismine oranı eşit olsun, ve X cismi de EN konisiyle O cismi arasındaki farka eşit olsun;

bu durumda EN konisi O, X cisimlerine eşit olur.

EFGH çemberi içine EFGH karesi çizilsin; bu durumda kare dairenin yarısından büyük olur.

EFGH karesi üzerinde koniyle aynı yükseklikte bir piramit çizilsin; bu durumda bu şekilde çizilmiş piramit koninin yarısından büyük olur,




çünkü, eğer çemberin dışına bir kare çizersek, ve onun üzerine koniyle aynı yükseklikte bir piramit çizersek, içerdeki piramit dışardaki piramidin yarısı olur,

çünkü birbirlerine oranları tabanlarının oranına eşittir, **[XII.6]**

ve bu arada koni dışardaki piramitten küçüktür.

EF, FG, GH, HE yayları P, Q, R, S noktalarında ikiye bölünsün,

ve HP, PE, EQ, QF, FR, RG, GS, SH birleştirilsin.

Bu durumda HPE, EQF, FRG, GSH üçgenlerinin her biri etrafındaki daire parçasının yarısından büyüktür.

HPE, EQF, FRG, GSH üçgenlerinin her biri üzerine koniyle aynı yükseklikte piramitler çizilsin;

öyleyse bu şekilde çizilmiş piramitlerin her biri etrafında kalan koni parçasının yarısından büyüktür.

Böylece, kalan çember parçalarını ikiye bölerek, doğruları birleştirerek, her bir üçgen üzerine koniyle aynı yükseklikte piramitler çizerek,

ve bunu sürekli yaparak,

koninin öyle parçaları kalacaktır ki bunlar X cisminden küçük olacaktır. **[X.1]**

Böyle parçalar kalmış olsun ve bunlar HPE, EQF, FRG, GSH üzerindekiler olsun;

öyleyse geri kalan, tabanı HPEQFRGS çokgeni ve yüksekliği koninin yüksekliğiyle aynı olan piramit, O cisminden büyüktür.

ABCD çemberi içine de HPEQFRGS çokgenine benzer ve aynı konumda DTAUBVCW çokgeni çizilsin,

ve üzerine yüksekliği AL konisininkiyle aynı olan bir piramit çizilsin.

O zaman, AC üzerindeki karenin EG üzerindeki kareye oranı, DTAUBVCW çokgeninin HPEQFRGS çokgenine oranına eşit olduğundan, **[XII.1]**

ve bu arada AC üzerindeki karenin EG üzerindeki kareye oranı, ABCD dairesinin EFGH dairesine oranına eşit olduğundan, **[XII.2]**

$ABCD$ dairesinin $EFGH$ dairesine oranı, $DTAUBVCW$ çokgeninin $HPEQFRGS$ çokgenine oranına eşittir.

Ama, $ABCD$ dairesinin $EFGH$ dairesine oranı, $AL$ konisinin $O$ cismine oranına eşittir,

ve $DTAUBVCW$ çokgeninin $HPEQFRGS$ çokgenine oranı, tabanı $DTAUBVCW$ çokgeni ve tepesi $L$ noktası olan piramidin tabanı $HPEQFRGS$ çokgeni ve tepesi $N$ noktası olan piramide oranına eşittir. **[XII.6]**

Öyleyse, $AL$ konisinin $O$ cismine oranı, tabanı $DTAUBVCW$ çokgeni ve tepesi $L$ noktası olan piramidin tabanı $HPEQFRGS$ çokgeni ve tepesi $N$ noktası olan piramide oranına eşittir; **[V.11]**

öyleyse, değiştirilmiş oranlar olarak, $AL$ konisinin kendi içindeki piramide oranı, $O$ cisminin $EN$ konisi içindeki piramide oranına eşittir. **[V.16]**

Ama $AL$ konisi içindeki piramitten büyüktür;

öyleyse $O$ cismi de $EN$ konisi içindeki piramitten büyüktür.

Ama aynı zamanda küçüktür de: bu olamaz.

Öyleyse $AL$ konisinin $EN$ konisinden daha küçük hiçbir cisme oranı, $ABCD$ dairesinin $EFGH$ dairesine oranına eşit olamaz.

Benzer şekilde $EN$ konisinin $AL$ konisinden daha küçük hiçbir cisme oranının da $EFGH$ dairesinin $ABCD$ dairesine oranına eşit olamayacağını kanıtlayabiliriz.

Şimdi de diyorum ki, $AL$ konisinin $EN$ konisinden daha büyük hiçbir cisme oranı, $ABCD$ dairesinin $EFGH$ dairesine oranına eşit olamaz.

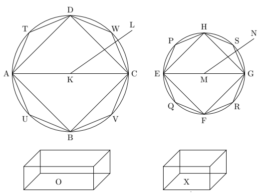
Çünkü, eğer mümkünse olsun, ve o daha büyük cisim $O$ olsun;

öyleyse ters oran olarak, $EFGH$ dairesinin $ABCD$ dairesine oranı, $O$ cisminin $AL$ konisine oranına eşittir.

Ama, $O$ cisminin $AL$ konisine oranı, $EN$ konisinin $AL$ konisinden daha küçük bir cisme oranına eşittir;

bu durumda $EFGH$ dairesinin $ABCD$ dairesine oranı, $EN$ konisinin $AL$ konisinden daha küçük bir cisme oranına eşit olur:

bunun olamayacağı kanıtlanmıştı.



Öyleyse $AL$ konisinin $EN$ konisinden daha büyük hiçbir cisme oranı, $ABCD$ dairesinin $EFGH$ dairesine oranına eşit olamaz.

Ama daha küçük bir cisme oranının da bu orana eşit olamayacağı kanıtlanmıştı;

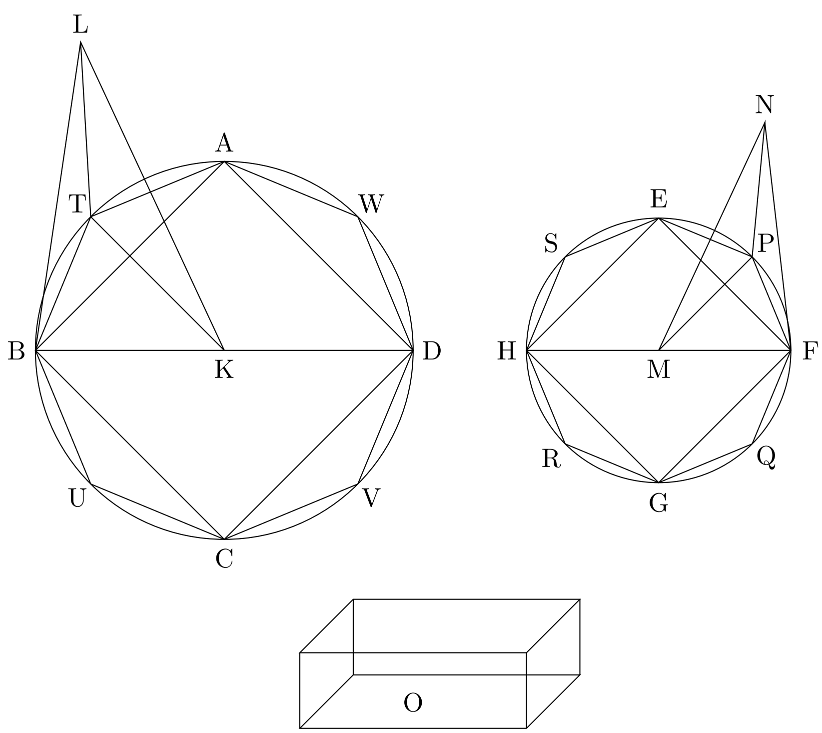
öyleyse $ABCD$ dairesinin $EFGH$ dairesine oranı, $AL$ konisinin $EN$ konisine oranına eşittir.

Ama koninin koniye oranı, silindirin silindire oranına eşittir, çünkü bunlar birbirinin üç katıdır; **[XII.10]**

Öyleyse, $ABCD$ dairesinin $EFGH$ dairasine oranı, üzerlerindeki aynı yükseklikteki silindirlerin oranına da eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**12. Önerme:**
**Benzer koni ve silindirlerin birbirine oranı, tabanlarının çaplarının oranının üç kat oranına eşittir.**




Benzer koniler ve silindirler olsun,

Tabanları ABCD, EFGH çemberleri, tabanlarının çapları BD, FH, ve bu konilerle silindirlerin eksenleri KL, MN olsun;

diyorum ki, tabanı ABCD çemberi ve tepesi L noktası olan koninin, tabanı EFGH çemberi ve tepesi N noktası olan koniye oranı, BD'nin FH'ye oranının üç kat oranına eşittir.

Çünkü, eğer ABCDL konisinin EFGHN konisine oranı BD'nin FH'ye oranının üç kat oranı değilse,

bu üç kat oran, ABCDL konisinin EFGHN konisinden ya daha küçük ya da daha büyük bir cisme oranına eşit olacaktır.

Önce, bu oran daha küçük bir O cismine oranına eşit olsun.

EFGH çemberi içine EFGH karesi çizilsin; **[IV.6]**

bu durumda EFGH karesi EFGH dairesinin yarısından büyük olur.

Şimdi, EFGH karesi üzerine tepesi konininkiyle aynı olan bir piramit çizilsin;

bu durumda bu çizilen piramit koninin yarısından büyük olur.

EF, FG, GH, HE yayları P, Q, R, S noktalarında ikiye bölünsün,

ve EP, PF, FQ, QG, GR, RH, HS, SE birleştirilsin.

Öyleyse EPF, FQG, GRH, HSE üçgenlerinin her biri kendi etrafındaki daire parçasının yarısından büyüktür.

Şimdi EPF, FQG, GRH, HSE üçgenlerinin her biri üzerine tepesi konininkiyle aynı olan bir piramit çizelim;

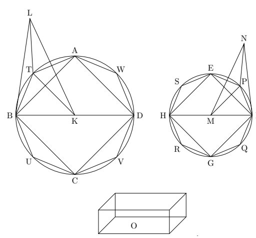
bu durumda bu piramitlerin her biri etrafındaki koni parçasının yarısından büyük olur.

Böylece, kalan çember parçalarını ikiye bölerek, doğruları birleştirerek, her bir üçgen üzerine tepesi konininkiyle aynı olan piramitler çizerek,

ve bunu sürekli yaparak,

koninin öyle parçaları kalacaktır ki bunlar EFGHN konisiyle O cismi arasındaki farktan küçük olacaktır. **[X.1]**

Böyle parçalar kalmış olsun ve bunlar EP, PF, FQ, QG, GR, RH, HS, SE yayları üzerinde olsun;




öyleyse geri kalan, tabanı EPFQGRHS çokgeni ve tepesi N noktası olan piramit, O cisminden büyüktür.

ABCD çemberi içine de EPFQGRHS çokgenine benzer ve aynı konumda ATBUCVDW çokgeni çizilsin;

ve ATBUCVDW çokgeni üzerine tepesi konininkiyle aynı olan bir piramit çizilsin;

tabanı ATBUCVDW çokgeni ve tepesi L noktası olan piramidi içeren yüzeylerden biri LBT üçgeni olsun,

ve tabanı EPFQGRHS çokgeni ve tepesi N noktası olan piramidi içeren yüzeylerden biri de NFP üçgeni olsun,

ve KT, MP birleştirilsin.

Şimdi, ABCDL konisi EFGHN konisine benzer olduğundan,

BD'nin FH'ye oranı, KL ekseninin MN eksenine oranına eşittir. **[Tan. XI.24]**

Ama BD'nin FH'ye oranı, BK'nin FM'ye oranına eşittir;

öyleyse BK'nin FM'ye oranı, KL'nin MN'ye oranına eşittir. **[V.16]**

Ve eşit açılar, yani BKL, FMN açıları etrafındaki kenarlar orantılıdır;

öyleyse BKL üçgeni FMN üçgenine benzerdir. **[VI.6]**

Yine, BK'nin KT'ye oranı, FM'nin MP'ye oranına eşit olduğundan, ve eşit açılar etrafında olduklarından, yani BKT, FMP açıları,

çünkü BKT açısı K merkezi etrafındaki dört dik açının hangi oranda parçasıysa, FMP açısı da M merkezi etrafındaki dört dik açının aynı oranda parçasıdır;

ve eşit açılar etrafındaki kenarlar orantılı olduğundan,

BKT üçgeni FMP üçgenine benzerdir. **[VI.6]**

Yine, BK'nin KL'ye oranının, FM'nin MN'ye oranına eşit olduğu kanıtlandığından,

ve bu arada BK, KT'ye, ve FM, PM'ye eşit olduğundan,

TK'nin KL'ye oranı, PM'nin MN'ye oranına eşittir;

ve eşit açılar etrafındaki kenarlar orantılıdır, yani TKL, PMN açıları eşittir çünkü diktirler;

öyleyse LKT üçgeni NMP üçgenine benzerdir. **[VI.6]**

Ve, LKB, NMF üçgenlerinin benzer olmasından dolayı,

LB'nin BKye oranı, NF'nin FM'ye oranına eşittir,

ve, BKT, FMP üçgenlerinin benzer olmasından dolayı,

KB'nin BT'ye oranı, MF'nin FP'ye oranına eşittir;

bu durumda eşit dış oranlar olarak, LB'nin BT'ye oranı, NF'nin FP'ye oranına eşit olur. **[V.22]**

Yine, LTK, NPM üçgenlerinin benzer olmasından dolayı,

LT'nin TK'ye oranı, NP'nin PM'ye oranına eşittir,

ve, TKB, PMF üçgenlerinin benzer olmasından dolayı,

KT'nin TB'ye oranı, MP'nin PF'ye oranına eşittir;

bu durumda, eşit dış oranlar olarak, LT'nin TB'ye oranı, NP'nin PF'ye oranına eşit olur. **[V.22]**

Ama TB'nin BL'ye oranının, PF'nin FN'ye oranına eşit olduğu kanıtlanmıştı.

Öyleyse, eşit dış oranlar olarak, TL'nin LB'ye oranı, PN'nin NF'ye oranına eşittir. **[V.22]**

Öyleyse LTB, NPF üçgenlerinde kenarlar orantılıdır;

bu durumda LTB, NPF üçgenleri eşaçılıdır; **[VI.5]**

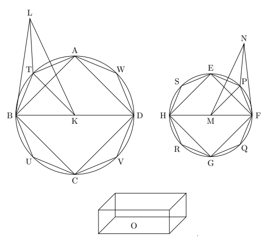
böylece benzer olurlar. **[Tan. VI.1]**

Öyleyse tabanı BKT üçgeni ve tepesi L noktası olan piramit, tabanı FMP üçgeni ve tepesi N noktası olan piramide benzerdir,

çünkü eşit sayıda benzer düzlemler tarafından içerilirler. **[Tan. XI.9]**

Ama üçgen tabanlı benzer piramitlerin birbirine oranı karşılıklı kenarlarının oranının üç kat oranına eşittir. **[XII.8]**

Öyleyse BKTL piramidinin FMPN piramidine oranı, BK'nin FM'ye oranının üç kat oranına eşittir.




Benzer şekilde, $A$, $W$, $D$, $V$, $C$, $U$'dan $K$'ye, ve $E$, $S$, $H$, $R$, $G$, $Q$'dan $M$'ye doğrular çizerek, ve bu üçgenlerin her biri üzerine tepe noktaları konilerinkiyle aynı olan piramitler çizerek,

benzer şekilde çizilmiş her bir piramidin benzer şekilde çizilmiş her bir piramide oranının, karşılıklı kenarlar $BK$'nin $FM$'ye oranının, yani $BD$'nin $FH$'ye oranının, üç kat oranı olduğunu kanıtlayabiliriz.

Ve, öncüllerden birinin ardıllardan birine oranı, tüm öncüllerin tüm ardıllara oranına eşittir; **[V.12]**

öyleyse, $BKTL$ piramidinin $FMPN$ piramidine oranı, tabanı $ATBUCVDW$ çokgeni ve tepesi $L$ noktası olan tüm piramidin, tabanı $EPFQGRHS$ çokgeni ve tepesi $N$ noktası olan piramide oranına eşittir;

bu nedenden dolayı, tabanı $ATBUCVDW$ çokgeni ve tepesi $L$ noktası olan tüm piramidin, tabanı $EPFQGRHS$ çokgeni ve tepesi $N$ noktası olan piramide oranı da, $BD$'nin $FH$'ye oranının üç kat oranına eşittir.

Ama, varsayım gereği, tabanı $ABCD$ çemberi ve tepesi $L$ noktası olan koninin $O$ cismine oranı da, $BD$'nin $FH$'ye oranının üç kat oranına eşittir;

öyleyse, tabanı $ABCD$ çemberi ve tepesi $L$ noktası olan koninin $O$ cismine oranı, tabanı $ATBUCVDW$ çokgeni ve tepesi $L$ noktası olan tüm piramidin, tabanı $EPFQGRHS$ çokgeni ve tepesi $N$ noktası olan piramide oranına eşittir;

öyleyse, değiştirilmiş oranlar olarak, tabanı $ABCD$ çemberi ve tepesi $L$ olan koninin, tabanı $ATBUCVDW$ çokgeni ve tepesi $L$ olan içindeki piramide oranı, $O$ cisminin tabanı $EPFQGRHS$ çokgeni ve tepesi $N$ olan piramide oranına eşittir. **[V.16]**

Ama sözü edilen koni içindeki piramitten büyüktür; çünkü onun etrafındadır.

Öyleyse $O$ cismi de tabanı $EPFQGRHS$ çokgeni ve tepesi $N$ olan piramitten büyüktür.

Ama aynı zamanda küçüktür de: bu olamaz.

Öyleyse, tabanı ABCD çemberi ve tepesi L olan koninin, tabanı EFGH çemberi ve tepesi N noktası olan koniden küçük hiç bir cisme oranı, BD'nin FH'ye oranının üç kat oranı olamaz.

Benzer şekilde, EFGHN konisinin ABCDL konisinden küçük hiç bir cisme oranının, FH'nin BD'ye oranının üç kat oranı olamayacağını kanıtlayabiliriz.

Şimdi de diyorum ki, ABCDL konisinin EFGHN konisinden büyük hiç bir cisme oranı da, BD'nin FH'ye oranının üç kat oranı olamaz.

Çünkü, eğer mümküse, daha büyük bir O cismine oranı bu orana eşit olsun.

Öyleyse, ters oran olarak, O cisminin ABCDL konisine oranı, FH'nin BD'ye oranının üç kat oranıdır.

Ama, O cisminin ABCDL konisine oranı, EFGHN konisinin ABCDL konisinden daha küçük bir cisme oranına eşittir.

Öyleyse, EFGHN konisinin ABCDL konisinden daha küçük bir cisme oranı, FH'nin BD'ye oranının üç kat oranına eşittir:

bunun olmayacağı kanıtlanmıştı.

Öyleyse ABCDL konisinin EFGHN konisinden daha büyük hiç bir cisme oranı, BD'nin FH'ye oranının üç kat oranı olamaz.

Ama EFGHN konisinden daha küçük bir cisme oranının da bu orana eşit olmayacağı kanıtlanmıştı.

Öyleyse ABCDL konisinin EFGHN konisine oranı, BD'nin FH'ye oranının üç kat oranına eşittir.

Ama, koninin koniye oranı, silindirin silindire oranına eşittir,

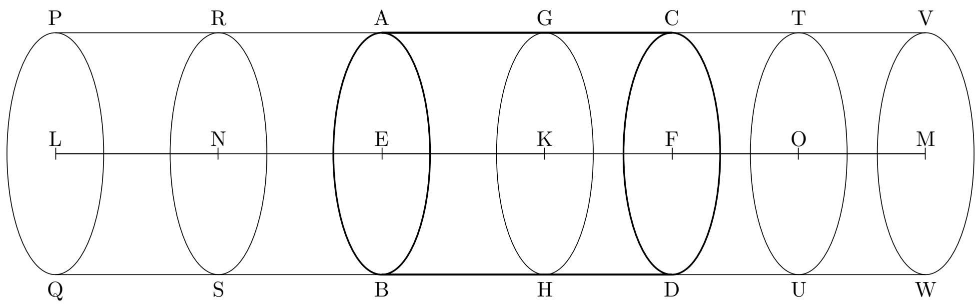
çünkü koniyle aynı tabanı ve aynı tepesi olan silindir koninin üç katıdır; **[XII.10]**

öyleyse, silindirin silindire oranı da BD'nin FH'ye oranının üç kat oranıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**13. Önerme:**

**Bir silindir karşılıklı kenarlarına paralel bir düzlemle kesildiğinde oluşan silindirlerin oranı kesilen eksen parçalarının oranına eşittir.**




$AD$ silindiri, $AB$, $CD$ karşılıklı kenarlarına paralel $GH$ düzlemiyle kesilsin,

$GH$ düzlemi ekseni $K$ noktasında kessin;

diyorum ki, $BG$ silindirinin $GD$ silindirine oranı, $EK$'nin $KF$'ye oranına eşittir.

Çünkü, $EF$ ekseni her iki yönde $L$, $M$ noktalarına uzatılsın,

ve $EK$ eksenine eşit, herhangi bir sayıda, $EN$, $NL$ eksenleri çizilsin,

ve $FK$ eksenine eşit, herhangi bir sayıda, $FO$, $OM$ eksenleri çizilsin;

ve $LM$ ekseni etrafına, tabanları $PQ$, $VW$ çemberleri olan $PW$ silindiri çizilsin.

$N$, $O$ noktalarından, $AB$, $CD$'ye ve $PW$ silindirinin tabanlarına paralel düzlemler geçirilsin,

ve bunlar merkezleri $N$, $O$ olan $RS$, $TU$ çemberlerini oluştursun.

O zaman, $LN$, $NE$, $EK$ eksenleri birbirine eşit olduğundan,

$QR$, $RB$, $BG$ silindirlerinin birbirine oranı tabanlarının oranına eşittir. **[XII.11]**

Ama tabanlar eşittir; öyleyse $QR$, $RB$, $BG$ silindirleri birbirine eşittir.

$LN$, $NE$, $EK$ eksenleri birbirine eşit olduğundan,

ve $QR$, $RB$, $BG$ silindirleri birbirine eşit olduğundan,

ve birincilerin sayısı ikincilerin sayısına eşit olduğundan,

$KL$ ekseni $EK$ ekseninin hangi katıysa, $QG$ silindiri de $GB$ silindirinin aynı katıdır.

Aynı nedenden dolayı, $MK$ ekseni $KF$ ekseninin hangi katıysa, $WG$ silindiri de $GD$ silindirinin aynı katıdır.

Ve, eğer $KL$ ekseni $KM$ eksenine eşitse, $QG$ silindiri de $GW$ silindirine eşit olacaktır,

eğer eksen eksenden büyükse, silindir silindirden büyük olacaktır,

ve küçükse küçük.

Böylece, dört nicelik olduğundan, $EK$, $KF$ eksenleri ve $BG$, $GD$ silindirleri,

$EK$ ekseni ve $BG$ silindirinin aynı katları alındı, yani $LK$ ekseni ve $QG$ silindiri,

ve $KF$ ekseniyle $GD$ silindirinin aynı katları alındı, yani $KM$ ekseni ve $GW$ silindiri;

ve kanıtlandı ki,

eğer $KL$ ekseni $KM$ ekseninden büyükse, $QG$ silindiri de $GW$ silindirinden büyüktür,

eşitse eşit,

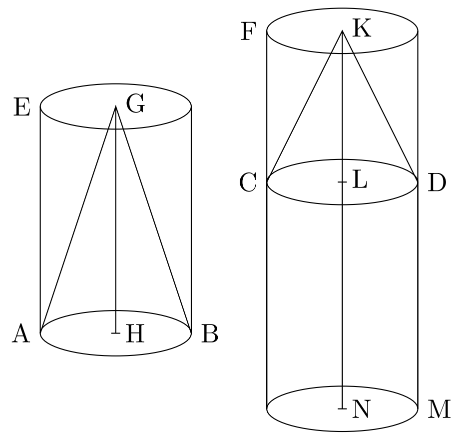
ve küçükse küçük.

Öyleyse, $EK$ ekseninin $KF$ eksenine oranı, $BG$ silindirinin $GD$ silindirine oranına eşittir. **[Tan. V.5]**

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**14. Önerme:**

**Eşit tabanlı koni ve silindirlerin birbirine oranı yükseklikle-rinin oranına eşittir.**




EB, FD silindirleri eşit tabanlar, AB, CD çemberleri, üzerinde olsun;

diyorum ki, EB silindirinin FD silindirine oranı, GH ekseninin KL eksenine oranına eşittir.

Çünkü, KL ekseni N'ye kadar uzatılsın, ve LN, GH'ye eşit olsun,

ve LN ekseni etrafında CM silindiri çizilsin.

O zaman, EB, CM silindirleri aynı yükseklikte olduklarından, birbirlerine oranları, tabanlarının oranına eşittir. **[XII.11]**

Ama tabanları birbirine eşittir;

öyleyse EB, CM silindirleri de eşittir.

Ve, FM silindiri karşılıklı yüzlerine paralel CD düzlemiyle kesildiğinden,

CM silindirinin FD silindirine oranı, LN ekseninin KL eksenine oranına eşittir. **[XII.13]**

Ama CM silindiri EB silindirine, ve LN ekseni GH eksenine eşittir;

öyleyse EB silindirinin FD silindirine oranı, GH ekseninin KL eksenine oranına eşittir.

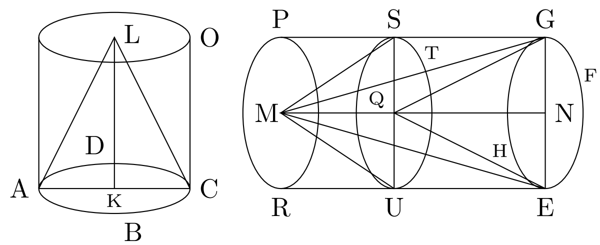
Ama, EB silindirinin FD silindirine oranı, ABG konisinin CDK konisine oranına eşittir. **[XII.10]**

Öyleyse, GH ekseninin KL eksenine oranı, ABG konisinin CDK konisine oranına, ve EB silindirinin FD silindirine oranına eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**15. Önerme:**

**Eşit koni ve silindirlerde tabanlar yüksekliklerle ters orantılıdır; ve tabanları yüksekliklerle ters orantılı olan koni ve silindirler eşittir.**




Tabanları ABCD, EFGH çemberleri olan eşit koniler ve silindirler olsun;

tabanların çapları AC, EG olsun,

ve eksenler de KL, MN olsun ki bunlar aynı zamanda silindir ve konilerin yükseklikleridir;

AO, EP silindirleri tamamlansın;

Diyorum ki, AO, EP silindirlerinde tabanlar yüksekliklerle ters orantılıdır,

yani ABCD tabanının EFGH tabanına oranı, MN yüksekliğinin KL yüksekliğine oranına eşittir.

Çünkü, LK yüksekliği MN yüksekliğine ya eşittir ya da değil.

Önce, eşit olsun.

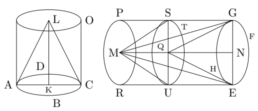
Şimdi AO silindiri EP silindirine eşittir.

Ama aynı yükseklikteki koni ve silindirlerin birbirine oranı tabanlarının oranına eşittir; **[XII.11]**

öyleyse ABCD tabanı da EFGH tabanına eşittir.

Bu nedenle, ters oranlar olarak, ABCD tabanının EFGH tabanına oranı, MN yüksekliğinin KL yüksekliğine oranına eşittir.

Şimdi de, LK yüksekliğ MN yüksekliğine eşit olmasın,




ama MN daha büyük olsun;

MN yüksekliğinden KL'ye eşit QN kesilsin,

Q noktasından, EFGH, RP çemberlerinin düzlemlerine paralel TUS düzlemiyle EP silindiri kesilsin,

ve EFGH çemberi üzerine NQ yüksekliğiyle ES silindiri çizilmiş olsun.

Şimdi, AO silindiri EP silindirine eşit olduğundan, AO silindirinin ES silindirine oranı, EP silindirinin ES silindirine oranına eşittir. **[V.7]**

Ama, AO silindirinin ES silindirine oranı, ABCD tabanının EFGH tabanına oranına eşittir,

çünkü AO, ES silindirleri aynı yüksekliktedir; **[XII.11]**

ve EP silindirinin ES silindirine oranı, MN yüksekliğinin QN yüksekliğine oranına eşittir,

çünkü EP silindiri karşılıklı yüzlerine paralel bir düzlem tarafından kesilmiştir. **[XII.13]**

Öyleyse, ABCD tabanının EFGH tabanına oranı, MN yüksekliğinin QN yüksekliğine oranına eşittir. **[V.11]**

Ama QN yüksekliği KL yüksekliğine eşittir;

öyleyse ABCD tabanının EFGH tabanına oranı, MN yüksekliğinin KL yüksekliğine oranına eşittir.

Öyleyse AO, EP silindirlerinde tabanlar yüksekliklerle ters orantılıdır.

Şimdi de, AO, EP silindirlerinde tabanlar yüksekliklerle ters orantılı olsun;

yani ABCD tabanının EFGH tabanına oranı, MN yüksekliğinin KL yüksekliğine oranına eşit olsun;

diyorum ki, AO silindiri EP silindirine eşittir.

Çünkü, aynı çizimle, ABCD tabanının EFGH tabanına oranı, MN yüksekliğinin KL yüksekliğine oranına eşit olduğundan,

ve bu arada KL yüksekliği QN yüksekliğine eşit olduğundan, ABCD tabanının EFGH tabanına oranı, MN yüksekliğinin QN yüksekliğine oranına eşittir.

Ama ABCD tabanının EFGH tabanına oranı, AO silindirinin ES silindirine oranına eşittir,

çünkü aynı yükseklikteler; **[XII.11]**

ve, MN yüksekliğinin QN'ye oranı, EP silindirinin ES silindirine oranına eşittir; **[XII.13]**

öyleyse AO silindirinin ES silindirine oranı, EP silindirinin ES silindirine oranına eşittir. **[V.11]**

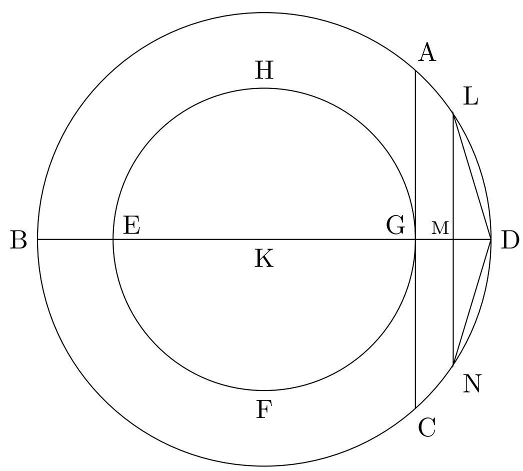
Öyleyse AO silindiri EP silindirine eşittir. **[V.9]**

Ve aynısı koniler için de doğrudur.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**16. Önerme:**

**Aynı merkezli iki çember verildiğinde büyük çemberin içine çift sayıda kenarı olan ve küçük çembere değmeyen bir eşkenar çokgen çizmenin yolu.**



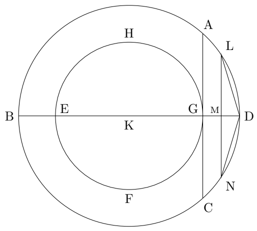

Merkezleri K olan ABCD, EFGH çemberleri verilsin;

böylece ABCD çemberinin içine çift sayıda kenarı olan ve EFGH çemberine değmeyen bir eşkenar çokgenin çizilmesi isteniyor.

K merkezinden geçen BKD doğrusu çizilsin,

ve G noktasından BD'ye dik GA çizilsin ve C'ye kadar uzatılsın;

bu durumda AC doğrusu EFGH çemberine değer. **[DS. III.16]**




Şimdi, BAD yayını ikiye bölerek, ve yarısını tekrar ikiye bölerek, ve bunu sürekli yaparak AD'den daha küçük bir yay oluşturacağız. **[X.1]**

Böyle bir yay oluşsun, ve LD olsun;

L'den BD'ye LM dikmesini çizilsin ve N'ye kadar uzatılsın,

LD, DN birleştirilsin;

bu durumda LD, DN'ye eşit olur. **[III.3, I.4]**

Şimdi, LN, AC'ye paraleldir, ve AC doğrusu EFGH çemberine değer,

öyleyse LN doğrusu EFGH çemberine değmez;

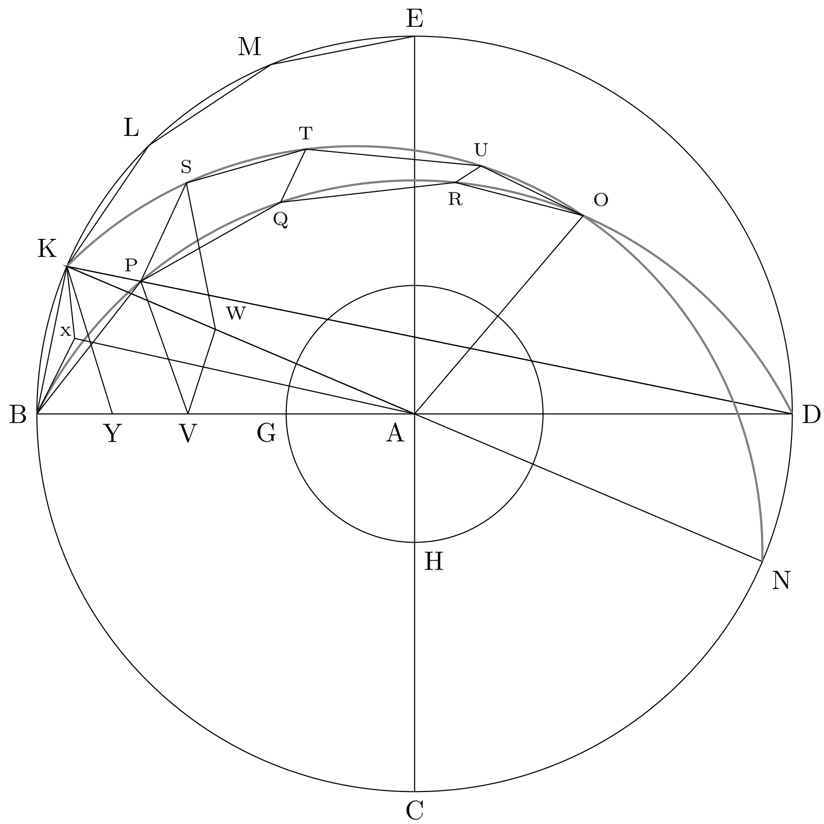
öyleyse LD, DN doğruları EFGH çemberine hiç değmez.

O zaman eğer ABCD çemberi içine sürekli olarak LD doğrusuna eşit doğrular yerleştirirsek, ABCD çemberi içine çift sayıda kenarı olan ve daha küçük olan EFGH çemberine değmeyen bir çokgen çizmiş oluruz.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

**17. Önerme:**

**Aynı merkezli iki küre verildiğinde büyük kürenin içine küçük küreye değmeyen bir çokyüzlü cisim çizmenin yolu.**



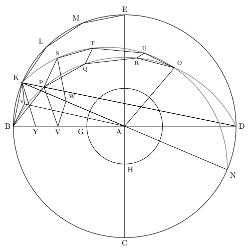

Aynı A merkezi etrafında iki küre alınsın;

böylece büyük kürenin içine küçük küreye değmeyen bir çokyüzlü çizilmesi isteniyor.

Küreler merkezden geçen herhangi bir düzlemle kesilsin; kesişimler birer çember olacaktır,

çünkü bir küre yarım dairenin sabit kalan çapı etrafında döndürülmesiyle elde edilir; **[Tan. XI.14]**

bu nedenle, yarım daire hangi konumda alınırsa alınsın, ondan geçen düzlem kürenin çevresinde bir çember oluşturacaktır.




Ve açıktır ki bu çember olabilecek en büyük çemberdir,

çünkü kürenin çapı, ki bu aynı zamanda çemberin de çapıdır, küreyi ya da çemberi kesen doğruların hepsinden büyüktür.

O zaman, büyük küredeki çember BCDE, ve küçük küredeki çember FGH olsun;

bunların içinde BD, CE çapları birbirine dik olarak çizilsin;

aynı merkez etrafında tanımlı BCDE, FGH çemberleri verildiğinden, daha büyük BCDE çemberi içine daha küçük FGH çemberine değmeyen çift sayıda kenarı olan eşaçılı bir çokgen çizilsin,

bunun birinci çeyrek dairedeki kenarları BK, KL, LM, ME olsun,

KA birleştirilsin ve N'ye kadar uzatılsın,

A noktasından BCDE çemberinin düzlemine dik olarak AO çizilsin ve kürenin yüzeyini O noktasında kessin,

AO'dan ve BD, KN doğrularının her birinden geçen düzlemler çizilsin;

yukarda belirtilen nedenlerle bunlar da kürenin yüzeyinde en büyük çemberleri oluşturacaktır.

Bu çemberler oluşsun, ve bunların içinde BD, KN üzerinde BOD, KON yarıçemberleri alınsın.

Şimdi, OA doğrusu BCDE çemberinin düzlemine dik olduğundan, OA'dan geçen her düzlem BCDE çemberinin düzlemine diktir; **[XI.18]**

bu nedenle BOD, KON yarıçemberleri de BCDE çemberinden geçen düzleme diktir.

Ve, BED, BOD, KON yarıçemberleri birbirine eşit olduğundan, çünkü BD, KN eşit çapları etrafındadırlar,

BE, BO, KO çeyrek çemberleri de birbirine eşittir.

Öyleyse, BE yarıçemberi içindeki çokgenin kaç kenarı varsa, BO, KO yarıçemberleri içinde de BK, KL, LM, ME doğrularına eşit o kadar doğru vardır.

Bunlar çizilsin, ve BP, PQ, QR, RO ve KS, ST, TU, UO olsun,

SP, TQ, UR birleştirilsin,

ve $P$, $S$ noktalarından $BCDE$ çemberinin düzlemine dikmeler indirilsin; **[XI.11]**

bunlar düzlemlerin arakesitleri olan $BD$, $KN$ üzerine düşecektir, çünkü $BOD$, $KON$'nin düzlemleri de $BCDE$ çemberinin düzlemine diktir. **[Tan. XI.4]**

Bu dikmeler indirilsin, ve $PV$, $SW$ olsun, $WV$ birleştirilsin.

Şimdi, eşit yarıdairelerin içinde eşit doğrular $BP$, $KS$ çizildiğinden,

ve $PV$, $SW$ dikmeleri çizildiğinden,

$PV$ eşittir $SW$, ve $BV$ eşittir $KW$ olur. **[III.27, I.26]**

Ama $BA$'nın tamamı $KA$'nın tamamına eşittir;

öyleyse $VA$ kalanı $WA$ kalanına eşittir;

öyleyse $BV$'nin $VA$'ya oranı, $KW$'nin $WA$'ya oranına eşittir;

bu durumda $WV$, $KB$'ye paralel olur. **[VI.2]**

Ve, $PV$, $SW$ doğrularının her biri $BCDE$ çemberinin düzlemine dik olduğundan, $PV$, $SW$'ye paraleldir. **[XI.6]**

Ama eşit olduğunu da kanıtlamıştık;

öyleyse $WV$, $SP$ de eşit ve paraleldir. **[I.33]**

Ve, $WV$, $SP$'ye paralel olduğundan, ve bu arada $WV$, $KB$'ye paralel olduğundan,

$SP$, $KB$'ye de paraleldir. **[XI.9]**

Ve $BP$, $KS$ bunların uçlarını birleştirir;

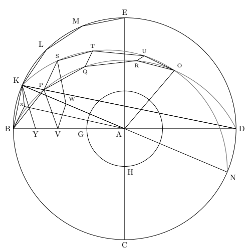
öyleyse $KBPS$ dörtgeni bir düzlem içindedir,

çünkü eğer iki doğru paralelse, ve her biri üzerinde rasgele noktalar alınsa, bu noktaları birleştiren doğru paralellerle aynı düzlemdedir. **[XI.7]**

Aynı nedenden dolayı, $SPQT$, $TQRU$ dörtgenlerinin her biri bir düzlemdedir.

Ama $URO$ üçgeni de bir düzlemdedir. **[XI.2]**

Sonra eğer $P$, $S$, $Q$, $T$, $R$, $U$ noktalarından $A$ noktasına doğrular çizildiğini düşünürsek, $BO$, $KO$ yayları arasına tabanları $KBPS$, $SPQT$, $TQRU$ dörtgenleri ve $URO$ üçgeni ve tepe noktaları $A$ noktası olan piramitlerden oluşan çokyüzlü cisimler çizilmiş olacaktır.




Ve eğer BK için yaptığımız çizimin aynısını KL, LM, ME kenarları, ve hatta diğer yarıçemberler için de yaparsak,

kürenin içine, tabanları sözünü ettiğimiz dörtgenler ve URO üçgeni, ve onlara karşılık gelen diğer şekiller, ve tepe noktaları A noktası olan piramitlerden oluşan bir çokyüzlü şekil çizilmiş olacaktır.

Diyorum ki, bu çizilen çokyüzlü, FGH çemberi üzerinde olan küçük kürenin yüzeyine değmeyecektir.

A noktasından KBPS dörtgeninin düzlemine bir dik çizilsin ve düzlemi X noktasında kessin; **[XI.11]**

XB, XK birlştirilsin.

O zaman, AX doğrusu KBPS dörtgeninin düzlemine dik olduğundan, dörtgenin düzleminde olan ve onu kesen her doğruya da diktir. **[Tan. XI.3]**

Öyleyse AX doğrusu BX, XK doğrularının her birine diktir.

Ve AB, AK'ye eşit olduğundan, AB üzerindeki kare de AK üzerindeki kareye eşittir.

Ve, AX, XB üzerindeki kareler AB üzerindeki kareye eşittir, çünkü X açısı diktir; **[I.47]**

ve AX, XK üzerindeki kareler de AK üzerindeki kareye eşittir. **[I.47]**

Öyleyse AX, XB üzerindeki kareler AX, XK üzerindeki karelere eşittir.

Her birinden AX üzerindeki kare çıkartılsın; bu durumda kalan, BX üzerindeki kare, diğer kalana, XK üzerindeki kareye, eşittir;

öyleyse BX eşittir XK olur.

Benzer şekilde, X'den P, S'ye çizilen doğruların her birinin BX, XK doğrularına eşit olduğunu kanıtlayabiliriz.

Öyleyse, X merkezini ve XB, XK uzunluklarından birini kullanarak çizilecek çember P, S noktalarından da geçecektir, ve KBPS dörtgeni çember içine çizilmiş bir dörtgen olacaktır.

Şimdi, KB, *WV*'den büyük olduğundan, ve bu arada *WV*, SP'ye eşit olduğundan,

KB, SP'den büyüktür.

Ama KB doğrusu KS, BP doğrularının her birine eşittir;

öyleyse KS, BP doğrularının her biri SP'den büyüktür.

Ve, KBPS çember içine çizilmiş bir dörtgen olduğundan,

ve KB, BP, KS eşit, ama PS küçük olduğundan,

ve BX bu çemberin yarıçapı olduğundan,

KB üzerindeki kare, BX üzerindeki karenin iki katından büyüktür.

> [ *Eğer* PS *de diğer kenarlara eşit olsaydı,* KBPS *bir kare olacaktı, ve o zaman bir kenar üzerindeki kare, yarıçap üzerindeki karenin iki katı olacaktı. Ama* KB *böyle bir karenin kenarından büyük, çünkü* PS *küçük.* ]

K noktasından BV'ye KY dikmesi çizilsin.

> [ *Şekildeki simetriden dolayı* Y *noktası* V *noktasıyla çakışır.* ]

O zaman, BD, DY'nin iki katından küçük olduğundan,

ve BD'nin DY'ye oranı, DB, BY tarafından içerilen dikdörtgeninin DY, YB tarafından içerilen dikdörtgenine oranına eşit olduğundan,

eğer BY üzerine bir kare çizilirse ve bu şekil YD üzerindeki dikdörtgene tamamlanırsa,

DB, BY tarafından içerilen dikdörtgen de DY, YB tarafından içerilen dikdörtgenin iki katından küçüktür.

Ve eğer KD birleştirilirse,

DB, BY tarafından içerilen dikdörtgen BK üzerindeki kareye eşittir,

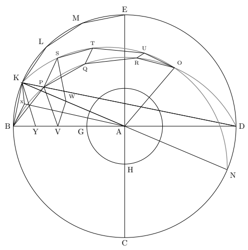
ve DY, YB tarafından içerilen dikdörtgen KY üzerindeki kareye eşittir; **[III.31, VI.8 ve DS.]**

> [ BKD *üçgeninde* K *açısı diktir, ve* K*'den* BD*'ye* KY *dikmesi indirilmiştir. Bu durumda yukardaki iki sonuç açık olarak görülür.* ]

Böylece KB üzerindeki kare, KY üzerindeki karenin iki katından küçüktür.

Ama KB üzerindeki kare, BX üzerindeki karenin iki katından büyüktür;

öyleyse KB üzerindeki kare BX üzerindeki kareden büyüktür.




Ve BA, KA'ya eşit olduğundan, BA üzerindeki kare AK üzerindeki kareye eşittir.

Ve BX, XA üzerindeki kareler, BA üzerindeki kareye eşittir,

ve KY, YA üzerindeki kareler KA üzerindeki kareye eşittir; **[I.47]**

öyleyse BX, XA üzerindeki kareler, KY, YA üzerindeki karelere eşittir,

ve bunlardan KY üzerindeki kare BX üzerindeki kareden büyüktür;

öyleyse kalan, YA üzerindeki kare, XA üzerindeki kareden küçüktür.

Öyleyse AX, AY'den büyüktür.

bu durumda AX, AG'den çok daha büyük olur.

Ve AX, çokyüzlünün tabanlarından birine diktir, ve AG, daha küçük olan kürenin yüzeyindedir;

bu nedenle çokyüzlü daha küçük kürenin yüzeyine değmeyecektir.

> *[ Öklid, bu çokyüzlünün yalnızca bir yüzünün küçük küreye değmeyeceğini kanıtlıyor. Diğer yüzeylerin,* SPQT, TQRU *dörtgenlerinin ve* URO *üçgeninin, merkezden* KBPS *dörtgeninden daha uzak olduğunu kanıtlamak da dikkatli okuyucuya bırakılıyor. ]*

Böylece, aynı merkezli iki küre verildiğinde, daha büyük kürenin içine, daha küçük kürenin yüzeyine değmeyen bir çokyüzlü çizilmiştir.

Tam olarak yapılması istenen de buydu. □

**Doğal Sonuç:** Ama bir başka kürenin içine de BCDE küresinin içine çizilen çokyüzlü cisme benzer bir cisim çizilirse, BCDE küresinin içindeki çokyüzlü cismin diğer kürenin içindeki çokyüzlü cisme oranı, BCDE küresinin çapının diğer kürenin çapına oranının üç kat oranına eşittir.

Çünkü, cisimler sayıca ve konumca benzer piramitlere ayrılırsa, piramitler benzer olacaktır.

Ama piramitlerin birbirine oranı, karşılıklı kenarlarının oranının üç kat oranına eşittir; **[DS. XII.8]** öyleyse tabanı KBPS dörtgeni ve tepesi A noktası olan piramidin, diğer kürede benzer şekilde yerleştirilmiş piramide oranı, karşılıklı kenarlarının oranının, yani A merkezli kürenin AB yarıçapının diğer kürenin yarıçapına oranının, üç kat oranına eşittir.

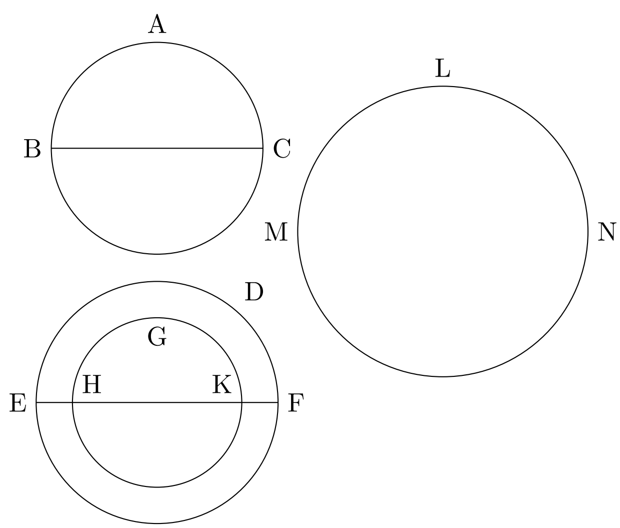
Benzer şekilde, A merkezli küredeki her piramidin diğer kürede benzer konumda yerleştirilmiş her piramide oranı, AB'nin diğer kürenin yarıçapına oranının üç kat oranına eşittir.

Ve bir öncülün bir ardıla oranı, öncüllerin tümünün ardılların tümüne oranına eşittir; **[V.12]**

bu nedenle A merkezli küredeki çokyüzlü cisim tamamının diğer küredeki çokyüzlü cismin tamamına oranı, AB'nin diğer kürenin yarıçapına oranının, yani BD çapının diğer kürenin çapına oranının, üç kat oranına eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

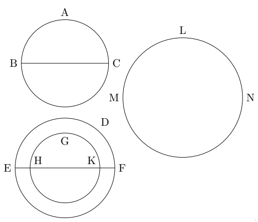
**18. Önerme:**
**Kürelerin birbirine oranı çaplarının oranının üç kat oranına eşittir.**




ABC, DEF küreleri alınsın, ve çapları BC, EF olsun;

diyorum ki, ABC küresinin DEF küresine oranı, BC'nin EF'ye oranının üç kat oranıdır.

Çünkü, eğer ABC küresinin DEF küresine oranı, BC'nin EF'ye oranının üç kat oranı değilse,




o zaman ABC küresinin DEF küresinden ya daha küçük ya da daha büyük bir küreye oranı, BC'nin EF'ye oranının üç kat oranıdır.

Önce, daha küçük GHK küresine oranı bu orana eşit olsun,

DEF küresi GHK küresiyle aynı merkez etrafına çizilsin,

daha büyük DEF küresinin içine daha küçük GHK küresine değmeyen bir çokyüzlü cisim çizilsin, **[XII.17]**

ve ABC küresinin içine de DEF küresinin içine çizilen çokyüzlü cisme benzer bir çokyüzlü cisim çizilsin;

öyleyse ABC küresi içine çizilen çokyüzlü cismin DEF küresi içindeki çokyüzlü cisme oranı, BC'nin EF'ye oranının üç kat oranıdır. **[DS. XII.17]**

Ama ABC küresinin GHK küresine oranı da, BC'nin EF'ye oranının üç kat oranıdır;

öyleyse ABC küresinin GHK küresine oranı, ABC küresi içindeki çokyüzlü cismin DEF küresi içindeki çokyüzlü cisme oranına eşittir;

ve değiştirilmiş oranlar olarak, ABC küresinin kendi içindeki çokyüzlü cisme oranı, GHK küresinin DEF küresi içindeki çokyüzlü cisme oranına eşittir. **[V.6]**

Ama ABC küresi kendi içindeki çokyüzlü cisimden büyüktür; öyleyse GHK küresi de DEF küresi içindeki çokyüzlü cisimden büyüktür.

Ama aynı zamanda küçüktür de, çünkü bu cismin içindedir.

Öyleyse ABC küresinin DEF küresinden daha küçük bir küreye oranı, BC'nin EF'ye oranının üç kat oranına eşit olamaz.

Benzer şekilde, DEF küresinin de ABC küresinden daha küçük bir küreye oranının, EF'nin BC'ye oranının üç kat oranına eşit olamayacağını kanıtlayabiliriz.

Şimdi de diyorum ki, ABC küresinin DEF küresinden daha büyük bir küreye oranı da, BC'nin EF'ye oranının üç kat oranı olamaz.

Çünkü, eğer mümkünse, daha büyük LMN küresine oranı bu orana eşit olsun, öyleyse ters oranlar olarak, $LMN$ küresinin $ABC$ küresine oranı, $EF$ çapının $BC$ çapına oranının üç kat oranına eşittir.

Ama daha önce kanıtlandığı gibi, $LMN$, $DEF$'den büyük olduğundan, $LMN$ küresinin $ABC$ küresine oranı, $DEF$ küresinin $ABC$'den daha küçük bir küreye oranına eşit olur. **[YÖ. XII.2]**

Öyleyse $DEF$ küresinin $ABC$ küresinden daha küçük bir küreye oranı da, $EF$'nin $BC$'ye oranının üç kat oranıdır, ki bunun olamayacağı kanıtlanmıştı.

Öyleyse $ABC$ küresinin $DEF$'den daha büyük hiçbir küreye oranı, $BC$'nin $EF$'ye oranının üç kat oranı olamaz.

Ama daha küçük bir küreye oranının da bu orana eşit olamayacağı kanıtlanmıştı.

Öyleyse $ABC$ küresinin $DEF$ küresine oranı, $BC$'nin $EF$'ye oranının üç kat oranıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■