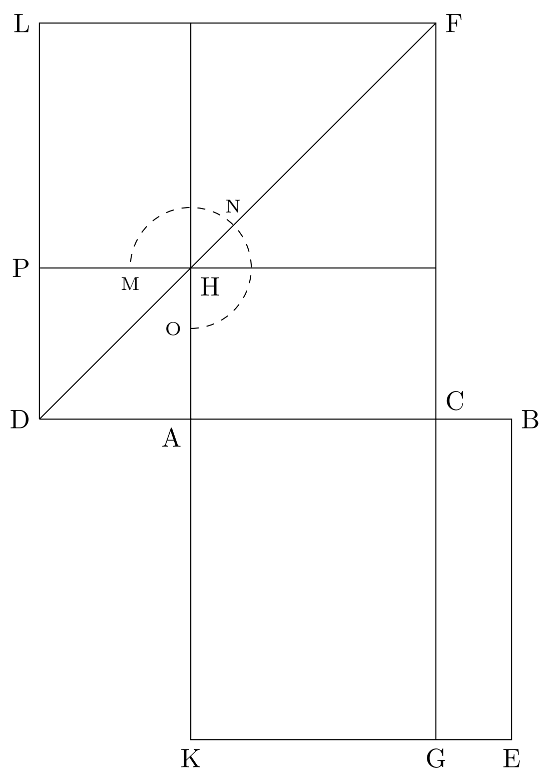
# Kitap XIII

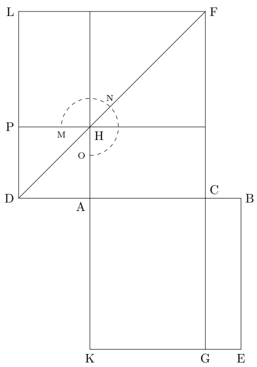
## 1. Önermeler

**1. Önerme:**
**Eğer bir doğru uç ve orta oranda kesilirse, büyük parçayla bütünün yarısının oluşturduğu doğru üzerindeki kare yarının üzerindeki karenin beş katıdır.**




$AB$ doğrusu $C$ noktasında uç ve orta oranda kesilsin, ve $AC$ büyük parça olsun;

$AD$ doğrusu $CA$ doğrusuyla aynı yönde uzatılsın, ve $AD$, $AB$'nin yarısına eşit olsun;




diyorum ki, CD üzerindeki kare, AD üzerindeki karenin beş katıdır.

Çünkü, AB, DC üzerine AE, DF kareleri çizilsin,

ve DF içindeki şekil çizilsin;

FC, Gye kadar uzatılsın.

Şimdi, AB doğrusu C'de uç ve orta oranda kesildiğinden,

AB, BC dikdörtgeni AC üzerindeki kareye eşittir. **[Tan. VI.3, VI.17]**

Ve AB, BC dikdörtgeni CE'ye, ve AC üzerindeki kare de FH'ye eşittir;

öyleyse CE eşittir FH.

Ve, BA, AD'nin iki katı olduğundan,

ve bu arada BA, KA'ya, ve AD, AH'ye eşit olduğundan,

KA da AH'nin iki katıdır.

Ama, KA'nın AH'ye oranı, CK'nin CH'ye oranına eşittir; **[VI.1]**

Ama LH, HC birlikte CH'nin iki katıdır.

Öyleyse KC eşittir LH, HC.

Ama CE'nin de HF'ye eşit olduğu kanıtlanmıştı;

öyleyse AE karesinin tamamı MNO kadranına eşittir.

Ve, BA, AD'nin iki katı olduğundan,

BA üzerindeki kare AD üzerindeki karenin dört katıdır,

yani AE, DH'nin dört katıdır.

Ama AE karesi MNO kadranına eşittir;

öyleyse MNO kadranı AP'nin dört katıdır;

öyleyse DF'nin tümü AP'nin beş katıdır.

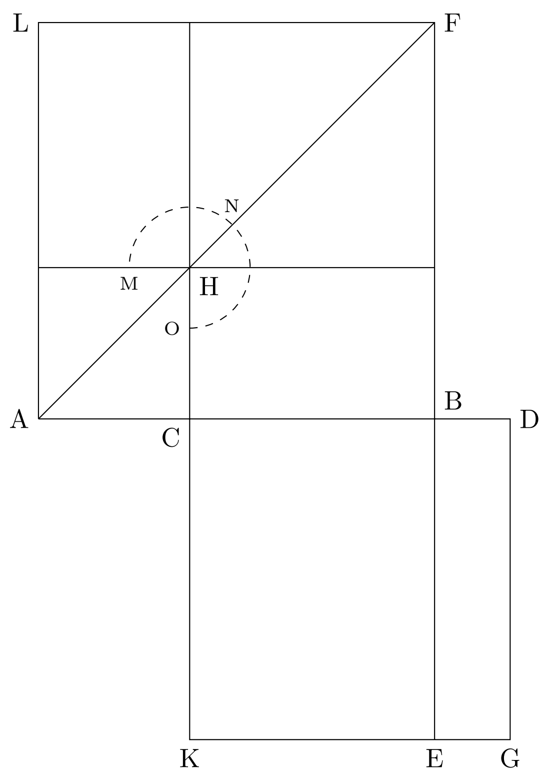
Ve DF karesi DC üzerindeki karedir, ve AP de DA üzerindeki karedir;

öyleyse CD üzerindeki kare DA üzerindeki karenin beş katıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**2. Önerme:**

**Eğer bir doğru üzerindeki kare bu doğrunun bir parçası üzerindeki karenin beş katıysa, kalan kısım bu parçanın iki katına kadar uzatılıp uç ve orta oranda kesildiğinde oluşan büyük kısım başta kalan kısımdır.**




$AB$ doğrusu üzerindeki kare, parçası olan $AC$ üzerindeki karenin beş katı olsun,

ve $AC$'nin iki katı $CD$ olsun;

diyorum ki, $CD$ doğrusu uç ve orta oranda kesildiğinde, daha büyük olan parça $CB$'dir.

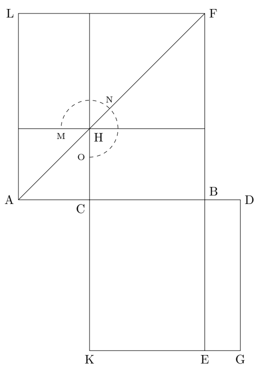
$AB$, $CD$ üzerine sırasıyla $AF$, $CG$ kareleri çizilsin,

$AF$ içindeki şekil çizilsin,

ve $BE$ çizilsin.

Şimdi, $BA$ üzerindeki kare $AC$ üzerindeki karenin beş katı olduğundan,

$AF$, $AH$'nin beş katıdır.




Öyleyse MNO kadranı AH'nin dört katıdır.

Ve, DC, CA'nın iki katı olduğundan,

DC üzerindeki kare CA üzerindeki karenin dört katıdır,

böylece CG, AH'nin dört katı olur.

Ama MNO kadranı da AH'nin dört katıydı;

öyleyse MNO kadranı CG'ye eşittir.

Ve, DC, CA'nın iki katı olduğundan,

ve bu arada DC eşittir CK, ve AC eşittir CH olduğundan,

KB de BH'nin iki katıdır. **[VI.1]**

Ama LH, HB birlikte HB'nin iki katıdır;

öyleyse KB eşittir LH, HB.

Ama MNO kadranının CG'ye eşit olduğu kanıtlanmıştı;

öyleyse HF kalanı BG'ye eşittir.

Ve BG ise CD, DB dikdörtgenidir, çünkü CD, DGye eşittir;

ve HF de CB üzerindeki karedir;

bu durumda CD, DB dikdörtgeni CB üzerindeki kareye eşit olur.

Öyleyse, DC'nin CB'ye oranı, CB'nin BD'ye oranına eşittir.

Ama DC, CB'den büyüktür;

bu durumda CB de BD'den büyük olur.

Öyleyse, CD doğrusu uç ve orta oranda kesildiğinde büyük parça CB olur.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**Yardımcı Önerme:** AC'nin iki katının BC'den uzun olduğu şöyle kanıtlanabilir.

Eğer değilse, BC eğer mümkünse CA'nın iki katı olsun.

Bu durumda BC üzerindeki kare CA üzerindeki karenin dört katı olur;

öyleyse BC, CA üzerindeki kareler CA üzerindeki karenin beş katıdır.

Ama varsayım gereği, BA üzerindeki kare de CA üzerindeki karenin beş katıdır;

öyleyse BA üzerindeki kare BC, CA üzerindeki karelere eşittir ki bu olamaz. **[II.4]**

Öyleyse CB, AC'nin iki katı olamaz.

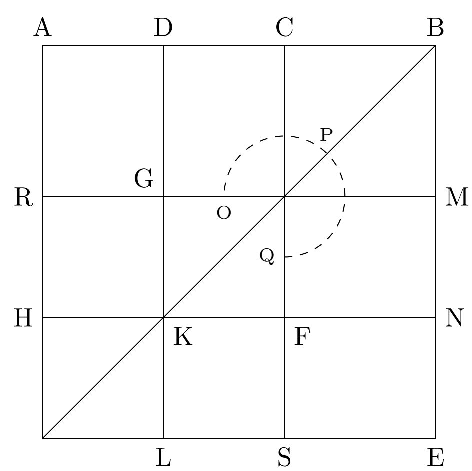
Benzer şekilde, CB'den daha küçük bir doğrunun da CA'nın iki katı olamayacağını kanıtlayabiliriz; çünkü bu durumdaki olanaksızlık daha açıktır.

Öyleyse AC'nin iki katı CB'den büyüktür.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**3. Önerme:**

**Eğer bir doğru uç ve orta oranda kesilirse, küçük parçanın büyük parçanın yarısına eklenerek elde edilen doğru üzerindeki kare büyük parçanın yarısı üzerindeki karenin beş katıdır.**

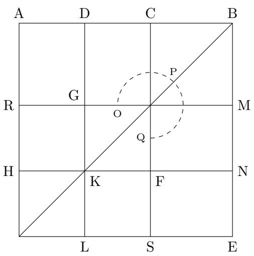



AB doğrusu C noktasında uç ve orta oranda bölünsün, ve AC büyük parça olsun, ve AC doğrusu D'de ikiye bölünsün;

diyorum ki, BD üzerindeki kare DC üzerindeki karenin beş katıdır.

Çünkü, AB üzerinde AE karesi çizilsin, ve şekil tamamlansın.

AC, DC'nin iki katı olduğundan, AC üzerindeki kare DC üzerindeki karenin dört katıdır,




yani RS, FG'nin dört katıdır.

Ve AB, BC dikdörtgeni AC üzerindeki kareye eşit olduğundan,

ve CE de AB, BC dikdörtgenine eşit olduğundan,

CE, RSye eşittir.

Ama RS, FG'nin dört katıdır;

öyleyse CE de FG'nin dört katıdır.

Yine, AD, DC'ye eşit olduğundan, HK, KF'ye eşit olur.

Bu nedenle GF karesi HL karesine eşittir.

Öyleyse GK, KL'ye eşittir, yani MN, NE'ye;

bu durumda MF, FE'ye eşit olur.

Ama MF, CG'ye eşittir; öyleyse CG de FE'ye eşittir.

Her birine CN eklensin; bu durumda OPQ kadranı CE'ye eşit olur.

Ama CE'nin GF'nin dört katı olduğu kanıtlanmıştı;

öyleyse OPQ kadranı da FG'nin dört katıdır.

Ama OPQ kadranı ve FG karesi birlikte DN karesidir.

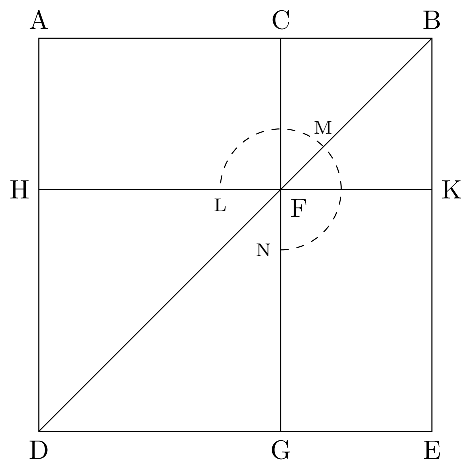
Ve DN karesi DB üzerindeki karedir, ve GF karesi de DC üzerindeki karedir.

Öyleyse DB üzerindeki kare DC üzerindeki karenin beş katıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**4. Önerme:**

**Eğer bir doğru uç ve orta oranda kesilirse, bütün üzerindeki kareyle küçük parça üzerindeki kare birlikte büyük parça üzerindeki karenin üç katıdır.**




$AB$ bir doğru olsun ve $C$ noktasında uç ve orta oranda kesilsin, ve büyük parça $AC$ olsun;

diyorum ki, $AB$, $BC$ üzerindeki kareler $CA$ üzerindeki karenin üç katıdır.

Çünkü, $AB$ üzerine $ADEB$ karesi çizilsin, ve şekil tamamlansın.

$AB$ doğrusu $C$ noktasında uç ve orta oranda kesildiğinden, ve $AC$ büyük parça olduğundan,

$AB$, $BC$ dikdörtgeni $AC$ üzerindeki kareye eşittir, **[Tan. VI.3, VI.17]**

Ve $AK$ dikdörtgeni $AB$, $BC$ dikdörtgenidir, ve $HG$ de $AC$ üzerindeki karedir;

öyleyse $AK$, $HG$'ye eşittir.

Ve, $AF$, $FE$ye eşit olduğundan,

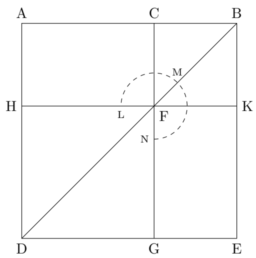
her birine $CK$ eklendiğinde,

$AK$'nin tamamı $CE$'nin tamamına eşit olur;

öyleyse $AK$, $CE$ birlikte $AK$'nin iki katıdır.

Ama $AK$, $CE$ birlikte $LMN$ kadranı ve $CK$ karesine eşittir;

bu durumda $LMN$ kadranı ve $CK$ karesi $AK$'nin iki katıdır.




Ama, AK'nin HG'ye eşit olduğu kanıtlanmıştı;

öyleyse LMN kadranı ile CK, HG kareleri birlikte HG karesinin üç katıdır.

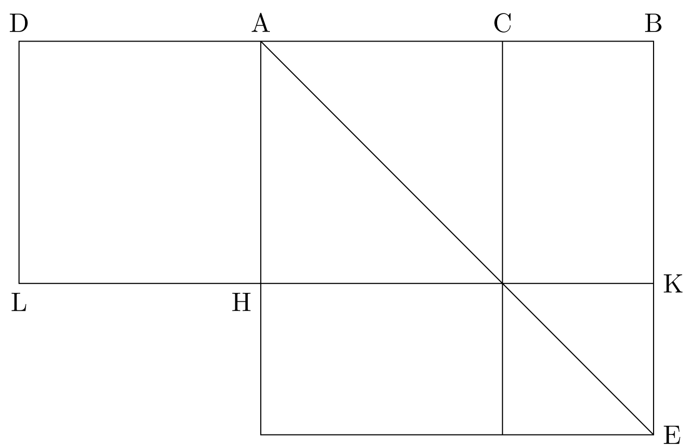
Ve, LMN kadranı ve CK, HG kareleri, AB ve BC üzerindeki kareler olan AE ve CK üzerindeki karelere eşittir,

ve bu arada HG de AC üzerindeki karedir.

Öyleyse AB, BC üzerindeki kareler AC üzerindeki karenin üç katıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**5. Önerme:**
**Eğer bir doğru uç ve orta oranda kesilir ve uzun parçası kadar uzatılırsa, yeni doğru uç ve orta oranda kesildiğinde bu sefer baştaki doğru uzun parça olur.**




AB doğrusu C noktasında uç ve orta oranda kesilsin, AC büyük parça olsun, ve AD, AC'ye eşit olsun.

Diyorum ki, DB doğrusu A noktasında uç ve orta oranda kesilmiştir ve baştaki AB doğrusu büyük parçadır.

Çünkü, AB üzerine AE karesi çizilsin, ve şekil tamamlansın.

AB doğrusu C noktasında uç ve orta oranda kesildiğinden AB, BC dikdörtgeni AC üzerindeki kareye eşittir. **[Tan. VI.3, VI.17]**

Ve CE dikdörtgeni AB, BC dikdörtgenidir, ve CH karesi de AC üzerindeki karedir;

öyleyse CE, HC'ye eşittir.

Ama HE, CE'ye, ve DH, HC'ye eşittir;

bu durumda DH de HE'ye eşit olur.

Öyleyse DK'nin tamamı AE'nin tamamına eşittir.

Ve DK dikdörtgeni BD, DA dikdörtgenidir, çünkü AD eşittir DL;

ve AE karesi de AB üzerindeki karedir;

öyleyse BD, DA dikdörtgeni AB üzerindeki kareye eşittir.

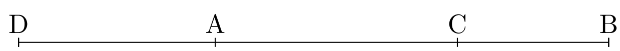
Bu durumda DB'nin BA'ya oranı, BA'nın AD'ye oranına eşit olur. **[VI.17]**

Ve DB, BA'dan büyüktür; öyleyse BA da AD'den büyüktür. **[V.14]**

Öyleyse DB doğrusu A'da uç ve orta oranda bölünmüştür ve AB büyük parçadır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**6. Önerme:**
**Eğer bir rasyonel doğru uç ve orta oranda kesilirse, her bir parça ayrık denen türde irrasyonel doğru olur.**




AB doğrusu rasyonel bir doğru olsun, C noktasında uç ve orta oranda kesilsin, ve AC büyük parça olsun;

diyorum ki, AC, CB doğrularının her biri ayrık denen türde irrasyonel doğrudur.

Çünkü, BA uzatılsın, ve AD, BA'nın yarısına eşit olsun.

O zaman, AB doğrusu uç ve orta oranda kesildiğinden, büyük parça AC'ye AB'nin yarısı olan AD eklendiğinden,

CD üzerindeki kare DA üzerindeki karenin beş katıdır. **[XIII.1]**

Öyleyse CD üzerindeki karenin DA üzerindeki kareye oranı, bir sayının bir sayıya oranına eşittir;

bu durumda CD üzerindeki kare DA üzerindeki kareyle eşölçeklidir. **[X.6]**


Ama, $DA$ üzerindeki kare rasyoneldir, çünkü $DA$, rasyonel olan $AB$'nin yarısı olduğundan, rasyoneldir;

öyleyse $CD$ üzerindeki kare de rasyoneldir; **[Tan. X.4]**

bu durumda $CD$ de rasyoneldir.

Ve, $CD$ üzerindeki karenin $DA$ üzerindeki kareye oranı, kare bir sayının kare bir sayıya oranına eşit olmadığından,

$CD$, $DA$ ile uzunlukta eşölçeksizdir; **[X.9]**

öyleyse $CD$, $DA$ yalnızca karede eşölçekli olan iki rasyonel doğrudur;

bu durumda $AC$ ayrık olur. **[X.73]**

Yine, $AB$ uç ve orta oranda kesildiğinden, ve $AC$ büyük parça olduğundan,

$AB$, $BC$ dikdörtgeni $AC$ üzerindeki kareye eşittir. **[Tan. VI.3, VI.17]**

Öyleyse ayrık olan $AC$ üzerindeki kareye eşit bir dikdörtgen $AB$ üzerine çizildiğinde $BC$ genişliğini oluşturur.

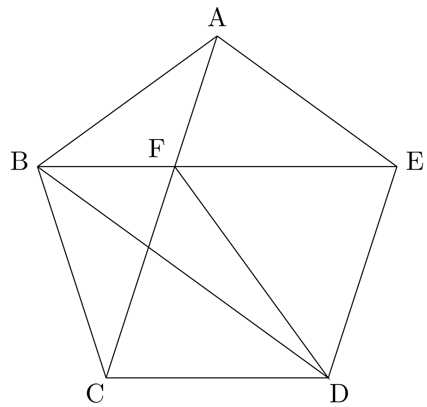
Ama bir ayrık üzerindeki kareye eşit bir dikdörtgen rasyonel bir doğru üzerine çizildiğinde genişlik olarak birinci türden ayrık bir doğru oluşturur; **[X.97]**

öyleyse $CB$ birinci türden ayrıktır.

Ve $CA$'nın ayrık olduğu da kanıtlanmıştı.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**7. Önerme:**
**Eşkenar bir beşgenin sıralı ya da sırasız seçilen üç açısı eşitse bu beşgen eşaçılıdır.**




$ABCDE$ eşkenar beşgeninde, önce sırayla alınmış üç açı, $A$, $B$, $C$'deki açılar birbirine eşit olsun;

diyorum ki, $ABCDE$ beşgeni eşaçılıdır.

Çünkü, $AC$, $BE$, $FD$ birleştirilsin.

Şimdi, $CB$, $BA$ kenarları sırasıyla $BA$, $AE$ kenarlarına eşit olduğundan, ve $CBA$ açısı $BAE$ açısına eşit olduğundan,

$AC$ tabanı $BE$ tabanına eşittir,

$ABC$ üçgeni $ABE$ üçgenine eşittir,

ve kalan açılar da birbirine eşit olacaktır, yani eşit kenarların gördüğü açılar. **[I.4]**

yani $BCA$ açısı $BEA$ açısına, ve $ABE$ açısı $CAB$ açısına eşit olacaktır;

bu nedenle $AF$ kenarı $BF$ kenarına eşit olur. **[I.6]**

Ama $AC$'nin tamamının $BE$'nin tamamına eşit olduğu kanıtlanmıştı;

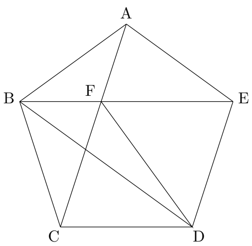
öyleyse $FC$ kalanı da $FE$ kalanına eşit olur.

Ama $CD$ de $DE$'ye eşittir.

Öyleyse iki kenar $FC$, $CD$, iki kenar $FE$, $ED$'ye eşittir; ve $FD$ tabanı ortaktır;

bu durumda $FCD$ açısı $FED$ açısına eşit olur. **[I.8]**

Ama $BCA$ açısının $AEB$ açısına eşit olduğu kanıtlanmıştı;




Öyleyse $BCD$ açısının tamamı $AED$ açısının tamamına eşittir.

Ama varsayım gereği $BCD$ açısı $A$, $B$'deki açılara eşittir;

öyleyse $AED$ açısı da $A$, $B$'deki açılara eşittir.

Benzer şekilde $CDE$ açısının da $A$, $B$, $C$'deki açılara eşit olduğunu kanıtlayabiliriz;

öyleyse $ABCDE$ beşgeni eşaçılıdır.

Şimdi de sırayla alınmış açılar eşit olmasın, ama $A$, $C$, $D$'deki açılar eşit olsun;

diyorum ki, bu durumda da $ABCDE$ beşgeni eşaçlıdır.

Çünkü, $BD$ birleştirilsin.

O zaman, iki kenar $BA$, $AE$, iki kenar $BC$, $CD$'ye eşit olduğundan, ve eşit açılar çevrelediklerinden,

$BE$ tabanı $BD$ tabanına eşittir,

ve $ABE$ üçgeni $BCD$ üçgenine eşittir,

ve kalan açılar da kalan açılara eşit olacaktır, yani eşit kenarların gördüğü açılar; **[I.4]**

bu durumda $AEB$ açısı $CDB$ açısına eşit olur.

Ama $BED$ açısı da $BDE$ açısına eşittir, çünkü $BE$ kenarı $BD$ kenarına eşittir. **[I.5]**

Öyleyse $AED$ açısının tamamı $CDE$ açısının tamamına eşittir.

Ama varsayım gereği $CDE$ açısı $A$, $C$'deki açılara eşittir;

öyleyse $AED$ açısı da $A$, $C$'deki açılara eşittir.

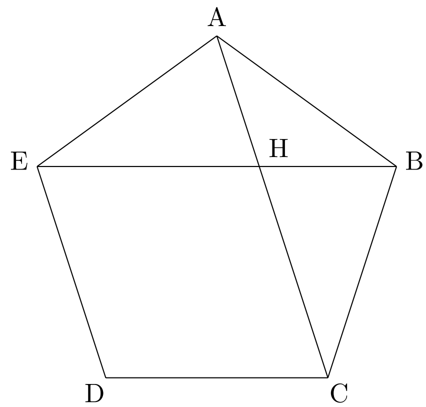
Aynı nedenden dolayı, $ABC$ açısı da $A$, $C$, $D$'deki açılara eşittir.

Öyleyse $ABCDE$ beşgeni eşaçılıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**8. Önerme:**

**Eşkenar ve eşaçılı bir beşgende ardışık iki açıyı gören iki köşegen birbirlerini uç ve orta oranda keser ve uzun parçaları beşgenin kenarına eşittir.**




Eşkenar ve eşaçılı $ABCDE$ beşgeninde, $H$ noktasında kesişen $AC$, $BE$ doğruları ardışık iki açıyı, $A$, $B$'deki açıları görsün;

diyorum ki, her biri $H$ noktasında uç ve orta oranda kesilmiştir, ve büyük parçaları beşgenin kenarına eşittir.

Çünkü $ABCDE$ beşgeni dışına $ABCDE$ çemberi çizilsin. **[IV.4]**

O zaman, $EA$, $AB$ doğruları $AB$, $BC$'ye eşit olduğundan, ve eşit açılar içerdiklerinden,

$BE$ tabanı $AC$ tabanına eşittir,

$ABE$ üçgeni $ABC$ üçgenine eşittir,

ve kalan açılar da kalan açılara sırasıyla eşit olacaktır, yani eşit kenarların gördüğü açılar. **[I.4]**

Öyleyse $BAC$ açısı $ABE$ açısına eşittir;

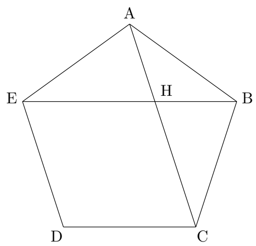
bu durumda $AHE$ açısı $BAH$ açısının iki katı olur. **[I.32]**

Ama $EAC$ açısı da $BAC$ açısının iki katıdır, çünkü $EDC$ çevresi $CB$ çevresinin iki katıdır; **[III.28, VI.33]**

öyleyse $HAE$ açısı $AHE$ açısına eşittir;

bu nedenle $HE$ doğrusu da $EA$'ya, yani $AB$'ye eşittir. **[I.6]**

Ve, $BA$ doğrusu $AE$'ye eşit olduğundan,




$ABE$ açısı da $AEB$ açısına eşit olur. **[I.5]**

Ama $ABE$ açısının $BAH$ açısına eşit olduğu kanıtlanmıştı;

öyleyse $BEA$ açısı $BAH$ açısına eşittir.

Ve $ABE$ açısı $ABE$ ve $ABH$ üçgenlerinde ortaktır;

bu durumda kalan $BAE$ açısı kalan $AHB$ açısına eşit olur; **[I.32]**

öyleyse $ABE$ üçgeni $ABH$ üçgeniyle eşaçılıdır;

öyleyse orantı olarak, $EB$'nin $BA$'ya oranı, $AB$'nin $BH$'ye oranına eşittir. **[VI.4]**

Ama $BA$, $EH$'ye eşittir;

öyleyse $BE$'nin $EH$'ye oranı, $EH$'nin $HB$'ye oranına eşittir.

Ve $BE$, $EH$'den büyüktür; öyleyse $EH$ de $HB$'den büyüktür. **[V.14]**

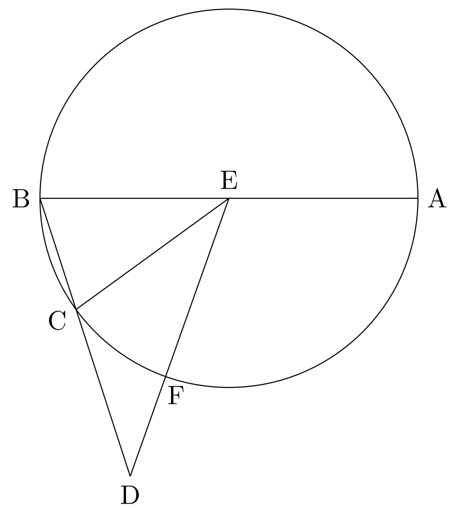
Öyleyse $BE$ doğrusu $H$'de uç ve orta oranda kesilmiştir, ve büyük parçası $HE$ beşgenin kenarına eşittir.

Benzer şekilde $AC$'nin de $H$'de uç ve orta oranda kesildiğini ve uzun parçası $CH$'nin beşgenin kenarına eşit olduğunu kanıtlayabiliriz.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**9. Önerme:**

**Aynı çember içine çizilen düzgün altıgenin bir kenarına aynı çember içine çizilen düzgün ongenin kenarı eklenirse, bu yeni doğru uç ve orta oranda kesilmiş olur ve uzun parçası altıgenin kenarı olur.**




$ABC$ bir çember olsun; $ABC$ çemberi içine çizilen şekillerden $BC$ ongenin kenarı, $CD$ de altıgenin kenarı olsun, ve aynı doğru üzerinde olsunlar;

diyorum ki, $BD$ doğrusu uç ve orta oranda kesilmiştir ve büyük parçası $CD$'dir.

Çünkü, çemberin merkezi olan $E$ noktası alınsın,

$EB$, $EC$, $ED$ birleştirilsin, $BE$ doğruau $A$'ya kadar uzatılsın.

$BC$ doğrusu bir eşkenar ongenin kenarı olduğundan, $ACB$ çevresi $BC$ çevresinin beş katıdır;

bu durumda $AC$ çevresi $CB$'nin dört katıdır.

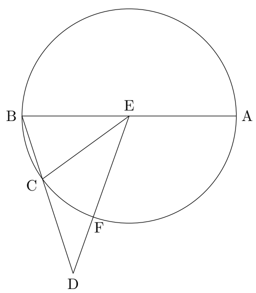
Ama, $AC$ çevresinin $CB$'ye oranı, $AEC$ açısının $CEB$ açısına oranına eşittir; **[VI.33]**

bu durumda $AEC$ açısı $CEB$ açısının dört katı olur.

Ve, $EBC$ açısı $ECB$ açısına eşit olduğundan, **[I.5]**

$AEC$ açısı $ECB$ açısının iki katıdır. **[I.32]**

Ve, $EC$ doğrusu $CD$ doğrusuna eşit olduğundan,




çünkü her biri ABC çemberi içine çizilen altıgenin kenarıdır, **[DS. IV.15]**

CED açısı CDE açısına eşittir; **[I.5]**

öyleyse ECB açısı EDC açısının iki katıdır. **[I.32]**

Ama AEC açısının ECB açısının iki katı olduğu kanıtlanmıştı;

öyleyse AEC açısı EDC açısının dört katıdır.

Ama AEC açısının BEC açısının da dört katı olduğu kanıtlanmıştı;

öyleyse EDC açısı BEC açısına eşittir.

Ama EBD açısı BEC ve BED üçgenlerinde ortaktır;

öyleyse kalan açı BED, kalan açı ECB'ye eşittir; **[I.32]**

bu durumda EBD üçgeni EBC üçgeniyle eşaçılı olur.

Öyleyse orantılar olarak, DB'nin BE'ye oranı, EB'nin BC'ye oranına eşittir. **[VI.4]**

Ama EB, CD'ye eşittir.

Öyleyse, BD'nin DC'ye oranı, DC'nin CB'ye oranına eşittir.

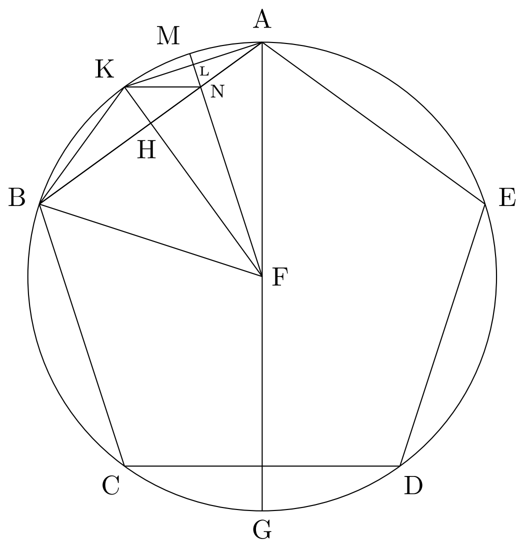
Ve BD, DC'den büyüktür; öyleyse DC de CB'den büyüktür.

Öyleyse BD doğrusu uç ve orta oranda kesilmiştir ve DC büyük parçasıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**10. Önerme:**

**Eğer bir eşkenar beşgen bir çember içine çizilirse, beşgenin kenarı üzerindeki kare, aynı çember içine çizilen altıgenin kenarıyla ongenin kenarı üzerindeki karelere eşittir.**




$ABCDE$ bir çember olsun; ve $ABCDE$ eşkenar beşgeni $ABCDE$ çemberi içine çizilmiş olsun.

Diyorum ki, $ABCDE$ beşgeninin kenarı üzerindeki kare, aynı çemberin içine çizilen altıgenin kenarıyla ongenin kenarı üzerine çizilen karelere eşittir.

Çünkü, çemberin merkezi $F$ noktası alınsın,

$AF$ birleştirilsin ve $G$'ye kadar uzatılsın,

$FB$ birleştirilsin,

$F$'den $AB$'ye dik $FH$ çizilsin ve $K$'ye kadar uzatılsın,

$AK$, $KB$ birleştirilsin,

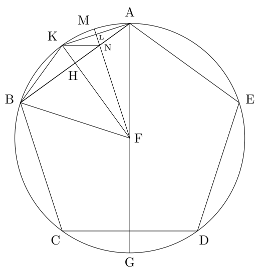
yine $F$'den $AK$'ye dik $FL$ çizilsin ve $M$'ye kadar uzatılsın,

ve $KN$ birleştirilsin.

$ABCG$ çevresi $AEDG$ çevresine eşit olduğundan, ve bunların içinde $ABC$, $AED$'ye eşit olduğundan,

kalan $CG$ çevresi kalan $GD$'ye eşittir.

Ama $CD$ beşgene aittir; öyleyse $CG$ ongene aittir.




Ve FA, FBye eşit olduğundan, ve FH dik olduğundan,

AFK açısı KFB açısına eşittir. **[I.5, I.26]**

Bu nedenle AK çevresi KB'ye eşittir; **[III.26]**

öyleyse AB çevresi BK çevresinin iki katına eşittir;

bu durumda AK doğrusu ongenin bir kenarı olur.

Aynı nedenden dolayı, AK, KM'nin iki katı olur.

Şimdi, AB çevresi BK çevresinin iki katı olduğundan,

ve bu arada CD çevresi AB çevresine eşit olduğundan,

CD çevresi de BK çevresinin iki katıdır.

Ama CD çevresi CG'nin de iki katıdır;

öyleyse CG çevresi BK çevresine eşittir.

Ama BK, KM'nin iki katıdır, çünkü KA da öyledir;

bu durumda CG de KM'nin iki katı olur.

Ama, CB çevresi de BK çevresinin iki katıdır, çünkü CB çevresi BA'ya eşittir.

Öyleyse GB çevresinin tamamı BM'nin iki katıdır;

böylece GFB açısı BFM açısının iki katına eşit olur. **[VI.33]**

Ama GFB açısı FAB açısının da iki katıdır, çünkü FAB açısı ABF açısına eşittir.

Öyleyse BFN açısı FAB açısına eşittir.

Ama ABF açısı ABF ve BFN üçgenlerinde ortaktır;

öyleyse kalan AFB açısı kalan BNF açısına eşittir; **[I.32]**

bu durumda ABF üçgeni BFN üçgeniyle eşaçılı olur.

Öyleyse orantılar olarak, AB doğrusunun BF'ye oranı, FB'nin BN'ye oranına eşittir; **[VI.4]**

bu durumda AB, BN dikdörtgeni, BF üzerindeki kareye eşittir. **[VI.17]**

Yine, AL, LK'ye eşit olduğundan,

ve LN ortak ve dik olduğundan,

$KN$ tabanı $AN$ tabanına eşittir; **[I.4]**

öyleyse $LKN$ açısı $LAN$ açısına eşittir.

Ama $LAN$ açısı $KBN$ açısına eşittir;

öyleyse $LKN$ açısı $KBN$ açısına eşittir.

Ve $A$'daki açı $AKB$ ve $AKN$ üçgenlerinde ortaktır.

Öyleyse kalan $AKB$ açısı kalan $KNA$ açısına eşittir; **[I.32]**

bu durumda $KBA$ üçgeni $KNA$ üçgeniyle eşaçılı olur.

Öyleyse orantılar olarak, $BA$ doğrusunun $AK$'ye oranı, $KA$'nın $AN$'ye oranına eşittir; **[VI.4]**

bu durumda $BA$, $AN$ dikdörtgeni $AK$ üzerindeki kareye eşit olur. **[VI.17]**

Ama $AB$, $BN$ dikdörtgeninin $BF$ üzerindeki kareye eşit olduğu da kanıtlanmıştı;

öyleyse $AB$, $BN$ dikdörtgeniyle $BA$, $AN$ üzerindeki dikdörtgen birlikte, yani $BA$ üzerindeki kare, **[II.2]**

$BF$ üzerindeki kareyle $AK$ üzerindeki karenin toplamına eşittir.

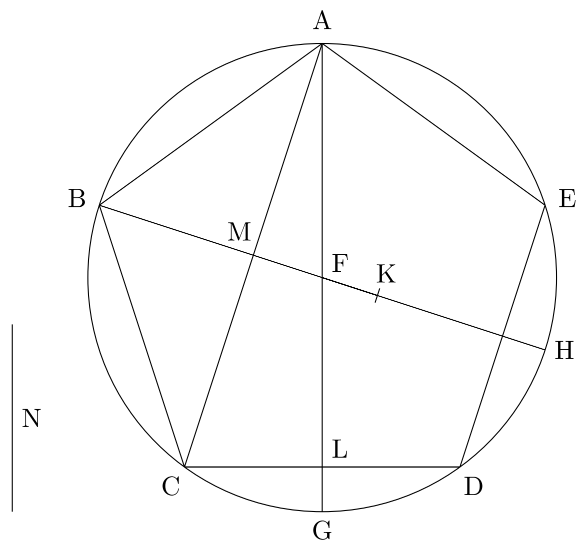
Ve $BA$ beşgenin kenarı, $BF$ altıgenin, **[DS. IV.15]**

ve $AK$ de ongenin kenarıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**11. Önerme:**

**Rasyonel çaplı bir çemberin içine çizilen düzgün bir beşgenin kenarı ufak türde bir irrasyonel doğru olur.**




Çapı rasyonel olan $ABCDE$ çemberi içine eşkenarlı $ABCDE$ beşgeni çizilsin;

diyorum ki, beşgenin kenarı ufak denen türde bir irrasyonel doğrudur.

Çünkü, çemberin merkeze $F$ noktası alınsın,

$AF$, $FB$ birleştirilsin ve $G$, $H$ noktalarına kadar uzatılsın,

$AC$ birleştirilsin,

ve $FK$ doğrusu $AF$'nin dörtte biri olsun.

Şimdi, $AF$ rasyoneldir; öyleyse $FK$ rasyoneldir.

Ama $BF$ de rasyoneldir; öyleyse $BK$'nin tamamı rasyoneldir.

$ACG$ çevresi $ADG$ çevresine eşit olduğundan, ve bunların içinde $ABC$, $AED$'ye eşit olduğundan,

kalan $CG$ kalan $GD$'ye eşittir.

Ve, eğer $AD$'yi birleştirirsek, $L$'deki açıların dik olduğunu, ve $CD$'nin de $CL$'nin iki katı olduğunu görürüz.

Aynı nedenden dolayı, $M$'deki açılar diktir, ve $AC$, $CM$'nin iki katıdır.

$ALC$ açısı $AMF$ açısına eşit olduğundan,

ve $LAC$ açısı $ACL$ ve $AMF$ üçgenlerinde ortak olduğundan,

kalan $ACL$ açısı kalan $MFA$ açısına eşittir; **[I.32]**

öyleyse $ACL$ üçgeni $AMF$ üçgeniyle eşaçılıdır;

öyleyse orantılar olarak, $LC$'nin $CA$'ya oranı, $MF$'nin $FA$'ya oranına eşittir.

Ve öncüllerin iki katı alınabilir;

öyleyse $LC$'nin iki katının $CA$'ya oranı, $MF$'nin iki katının $FA$'ya oranına eşittir.

Ama $MF$'nin iki katının $FA$'ya oranı, $MF$'nin $FA$'nın yarısına oranına eşittir;

öyleyse, $LC$'nin iki katının $CA$'ya oranı, $MF$'nin $FA$'nın yarısına oranına eşittir.

Ve ardılların yarısı alınabilir;

öyleyse $LC$'nin iki katının $CA$'nın yarısına oranı, $MF$'nin $FA$'nın dörtte birine oranına eşittir.

Ve $DC$, $LC$'nin iki katı, $CM$, $CA$'nın yarısı, ve $FK$ de $FA$'nın dörtte biridir;

bu durumda $DC$'nin $CM$'ye oranı, $MF$'nin $FK$'ye oranına eşit olur.

Birleşik oranlar olarak, $DC$, $CM$ toplamının $CM$'ye oranı, $MK$'nin $KF$'ye oranına eşittir; **[V.18]**

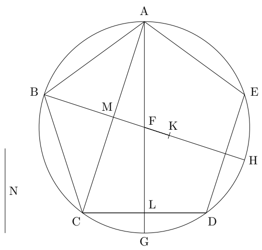
öyleyse $DC$, $CM$ toplamı üzerindeki karenin $CM$ üzerindeki kareye oranı, $MK$ üzerindeki karenin $KF$ üzerindeki kareye oranına eşittir.

Ve, beşgenin iki kenarını birden gören bir doğru, $AC$ gibi, uç ve orta oranda kesildiğinde büyük parçası beşgenin kenarına, yani $DC$'ye eşit olduğundan, **[XIII.8]**

ve bu arada büyük parçanın bütünün yarısına eklenmesiyle oluşan doğru üzerindeki kare tüm parçanın yarısı üzerindeki karenin beş katı olduğundan, **[XIII.1]**

ve $CM$, $AC$'nin yarısı olduğundan,

$DC$, $CM$'nin bir doğrultuda alınmasıyla oluşan doğru üzerindeki kare $CM$ üzerindeki karenin beş katıdır.




Ama DC, CM'nin aynı doğrultuda alınmasıyla oluşan doğru üzerindeki karenin CM üzerindeki kareye oranının, MK üzerindeki karenin KF üzerindeki kareye eşit olduğu kanıtlanmıştı;

öyleyse MK üzerindeki kare KF üzerindeki karenin beş katıdır.

Ama KF üzerindeki kare rasyoneldir, çünkü çap rasyoneldir;

öyleyse MK üzerindeki kare de rasyoneldir;

bu durumda MK rasyonel olur.

Ve BF, FK'nin dört katı olduğundan, BK, KF'nin beş katıdır;

öyleyse BK üzerindeki kare KF üzerindeki karenin yirmi beş katıdır.

Ama MK üzerindeki kare KF üzerindeki karenin beş katıdır;

öyleyse BK üzerindeki kare KM üzerindeki karenin beş katıdır;

bu durumda BK üzerindeki karenin KM üzerindeki kareye oranı, bir kare sayının bir kare sayıya oranına eşit değildir;

öyleyse BK, KM ile uzunlukta eşölçeksizdir. **[X.9]**

Ve her biri rasyoneldir.

Öyleyse BK, KM doğruları yalnızca karede eşölçeklidir.

Ama eğer rasyonel bir doğrudan bütünle yalnızca karede eşölçekli bir rasyonel doğru çıkarılırsa, kalan ayrık denen türde bir irrasyonel doğrudur;

öyleyse MB ayrıktır ve MK de eklentisidir. **[X.73]**

Şimdi de diyorum ki, MB dördüncü türden ayrıktır.

N üzerindeki kare, BK üzerindeki karenin KM üzerindeki kareden farkına eşit olsun;

öyleyse BK üzerindeki kare KM üzerindeki kareden N üzerindeki kare kadar büyüktür.

Ve KF, FB ile eşölçekli olduğundan,

birleşik oranlar olarak, KB de FB ile eşölçeklidir. **[X.15]**

Ama BF, BH ile eşölçeklidir;

öyleyse BK de BH ile eşölçeklidir. **[X.12]**

Ve BK üzerindeki kare KM üzerindeki karenin beş katı olduğundan,

BK üzerindeki karenin KM üzerindeki kareye oranı, 5'in 1'e oranına eşittir.

Öyleyse, çevrilmiş oranlar olarak, BK üzerindeki karenin N üzerindeki kareye oranı, 5'in 4'e oranına eşittir, **[DS. V.19]**

ve bu oran kare bir sayının kare bir sayıya oranı değildir;

öyleyse BK, N ile eşölçeksizdir; **[X.9]**

öyleyse BK üzerindeki kare KM üzerindeki kareden BK ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyüktür.

O zaman, BK'nin tamamı üzerindeki kare, KM eklentisi üzerindeki kareden, BK ile eşölçeksiz bir doğru üzerindeki kare kadar büyük olduğundan,

ve BK'nin tamamı da başta alınan BH rasyonel doğrusuyla eşölçekli olduğundan,

MB dördüncü türden ayrıktır. **[Tan. X.14]**

Ama rasyonel bir doğruyla dördüncü türden ayrık bir doğru tarafından içerilen dikdörtgen irrasyoneldir,

ve onun karekökü de irrasyoneldir ve ufak olarak adlandırılır. **[X.94]**

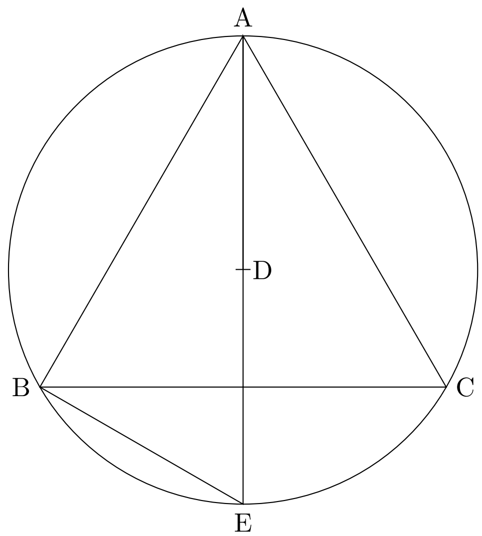
Ama AB üzerindeki kare HB, BM dikdörtgenine eşittir,

çünkü, AH birleştirildiğinde ABH üçgeni ABM üçgeniyle eşaçılı olur, ve HB'nin BA'ya oranı, AB'nin BM'ye oranına eşit olur.

Öyleyse beşgenin AB kenarı ufak denen türde bir irrasyonel doğrudur.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**12. Önerme:**
**Eğer bir çember içine eşkenar bir üçgen çizilirse, üçgenin kenarı üzerindeki kare çemberin yarıçapı üzerindeki karenin üç katıdır.**




$ABC$ bir çember olsun ve $ABC$ eşkenar üçgeni içine çizilsin;

diyorum ki, $ABC$ üçgeninin bir kenarı üzerindeki kare çemberin yarıçapı üzerindeki karenin üç katıdır;

Çünkü, $ABC$ çemberinin merkezi $D$ alınsın, $AD$ birleştirilsin ve $E$'ye kadar uzatılsın, ve $BE$ birleştirilsin.

O zaman, $ABC$ üçgeni eşkenar olduğundan, $BEC$ çevresi $ABC$ çemberinin çevresinin üçte biridir.

Öyleyse $BE$ çevresi çemberin çevresinin altıda biridir;

bu durumda $BE$ doğrusu bir altıgene aittir;

öyleyse yarıçap $DE$'ye eşittir. **[DS. IV.15]**

Ve $AE$, $DE$'nin iki katı olduğundan, $AE$ üzerindeki kare $ED$ üzerindeki karenin, yani $BE$ üzerindeki karenin dört katıdır.

Ama $AE$ üzerindeki kare $AB$, $BE$ üzerindeki karelere eşittir; **[III.31, I.47]**

öyleyse $AB$, $BE$ üzerindeki kareler birlikte $BE$ üzerindeki karenin dört katıdır.

Bu durumda ayrışık oranlar olarak, $AB$ üzerindeki kare $BE$ üzerindeki karenin üç katı olur.

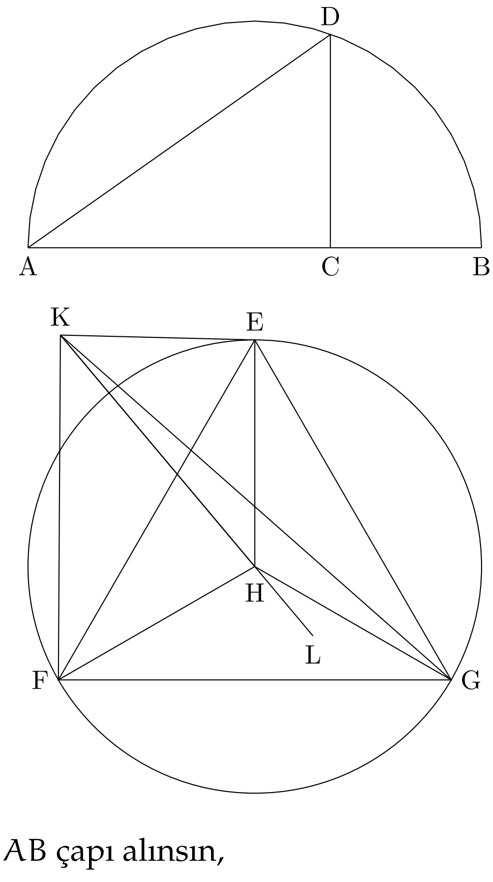
Ama BE, DE’ye eşittir;

bu durumda AB üzerindeki kare DE üzeindeki karenin üç katına eşit olur.

Öyleyse üçgenin kenarı üzerindeki kare yarıçap üzerindeki karenin üç katına eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**13. Önerme:**
**Verilen bir küre içine bir dörtyüzlü çizmenin, ve kürenin çapı üzerindeki karenin dörtyüzlünün kenarı üzerindeki karenin bir buçuk katı olduğunu göstermenin yolu.**

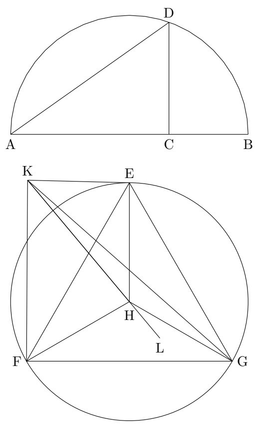



Verilen kürenin AB çapı alınsın,

ve AC, CB’nin iki katı olacak şekilde C noktasında kesilsin;

AB etrafına ADB yarıçemberi çizilsin,

ve C noktasından AB’ye dik CD çizilsin, ve DA birleştirilsin;




yarıçapı DC'ye eşit EFG çemberi alınsın,

ve EFG çemberi içine EFG eşkenar üçgeni çizilsin, **[IV.2]**

çemberin merkezi H noktası alınsın **[III.1]**

EH, HF, HG birleştirilsin;

H noktasından EFG çemberinin düzlemine dik olarak HK çizilsin, **[XI.12]**

HK, AC'ye eşit olsun,

ve KE, KF, KG birleştirilsin.

Şimdi, KH doğrusu EFG çemberinin düzlemine dik olduğundan,

EFG çemberinin düzleminde olan ve onu kesen her doğruya da dik olacaktır. **[Tan. XI.3]**

Ama HE, HF, HG doğrularının her biri onu keser;

öyleyse HK doğrusu HE, HF, HG doğrularının her birine diktir.

Ve AC, HK'ye, ve CD, HE'ye eşit olduğundan, ve dik açılar içerdiklerinden,

DA tabanı KE tabanına eşittir. **[I.4]**

Aynı nedenden dolayı,

KF, KG doğrularının her biri de DA'ya eşittir;

bu durumda KE, KF, KG doğruları birbirine eşit olur.

Ve AC, CB'nin iki katı olduğundan,

AB, BC'nin üç katıdır.

Ama, daha sonra kanıtlanacağı gibi, AB'nin BC'ye oranı, AD üzerindeki karenin DC üzerindeki kareye oranına eşittir.

> *[ Bu sonuç, şimdi sürmekte olan kanıt bittikten sonra Yardımcı Önerme olarak kanıtlanacaktır. ]*

Bu durumda AD üzerindeki kare DC üzerindeki karenin üç katı olur.

Ama FE üzerindeki kare de EH üzerindeki karenin üç katıdır, **[XIII.12]**

ve DC, EH'ye eşittir;

öyleyse DA, EF'ye eşittir.

Ama DA'nın KE, KF, KG doğrularının her birine eşit olduğu kanıtlanmıştı;

öyleyse EF, FG, GE doğrularının her biri KE, KF, KG doğrularının her birine eşittir;

bu durumda EFG, KEF, KFG, KEG, üçgenlerinin her biri eşkenar olur.

Öyleyse dört eşkenar üçgenle, tabanı EFG üçgeni ve tepesi K noktası olan bir piramit çizilmiş oldu.

Şimdi istenen, bunu verilen kürenin içinde olarak algılamak ve kürenin çapı üzerindeki karenin piramidin kenarı üzerindeki karenin bir buçuk katı olduğunu göstermek.

HL doğrusu KH ile aynı doğrultuda uzatılsın ve HL, CB'ye eşit olsun.

Şimdi, AC'nin CD'ye oranı, CD'nin CB'ye oranına eşit olduğundan, **[DS. VI.8]**

ve bu arada AC, KH'ye, CD, HE'ye, ve CB, HL'ye eşit olduğundan,

KH'nin HE'ye oranı, EH'nin HL'ye oranına eşittir;

öyleyse KH, HL dikdörtgeni, EH üzerindeki kareye eşittir. **[VI.17]**

Ve KHE, EHL açılarının her biri diktir;

öyleyse KL üzerine çizilen yarıçember E'den de geçecektir. **[VI.8, III.31]**

O zaman, eğer KL'yi sabit tutarak bu yarıçember döndürülüp tekrar başladığı konuma geri getirildiğinde, F, G noktalarından da geçecektir,

çünkü eğer FL, LG birleştirilirse, F, G'deki açılar da benzer şekilde dik olacaktır;

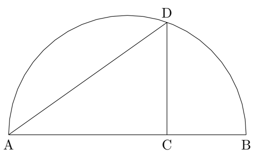
ve piramit verilen küre içinde algılanacaktır.

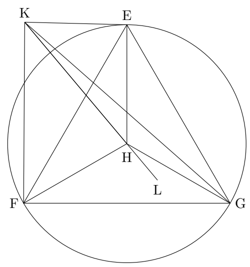
Çünkü, KH, AC'ye, ve HL, CB'ye eşit çizildiğinden, bu kürenin çapı KL, verilen kürenin çapı AB'ye eşittir.

Şimdi de diyorum ki, kürenin çapı üzerindeki kare piramidin kenarı üzerindeki karenin bir buçuk katıdır.

Çünkü, AC, CB'nin iki katı olduğundan, AB, BC'nin üç katıdır;

ve çevrilmiş oranlar olarak, BA, AC'nin bir buçuk katıdır.




Ama $BA$'nın $AC$'ye oranı, $BA$ üzerindeki karenin $AD$ üzerindeki kareye oranına eşittir.

*[ Bu kanıtı izleyen Yardımcı Önerme için verilen kanıt kullanılarak bu sonuç elde edilebilir. ]*

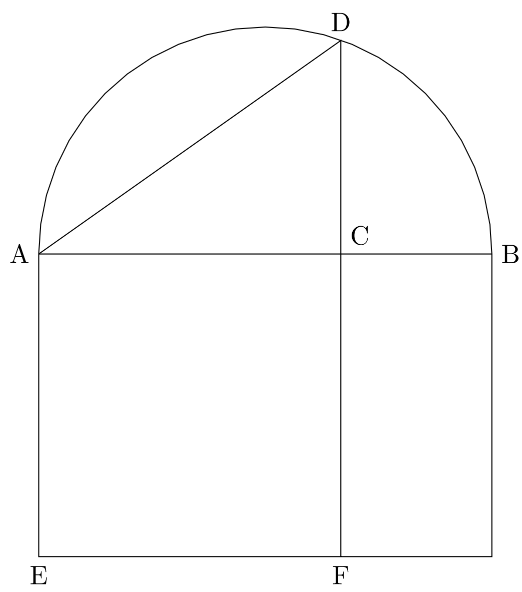
Öyleyse $BA$ üzerindeki kare $AD$ üzerindeki karenin bir buçuk katıdır.

Ve $BA$ verilen kürenin çapıdır, ve $AD$ de piramidin kenarıdır

Öyleyse kürenin çapı üzerindeki kare piramidin kenarı üzerindeki karenin bir buçuk katıdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**Yardımcı Önerme:** $AB$ nin $BC$ ye oranının, $AD$ üzerindeki karenin $DC$ üzerindeki karenin oranına eşit olduğu gösterilecek.




Yarım çemberin şekli alınsın, $DB$ birleştirilsin,

$AC$ üzerine $EC$ karesi çizilsin,

ve $FB$ paralelkenarı tamamlansın.

O zaman, $DAB$ üçgeni $DAC$ üçgeniyle eşaçılı olduğundan,

$BA$'nın $AD$'ye oranı, $DA$'nın $AC$'ye oranına eşittir, **[VI.8, VI.4]**

öyleyse $BA$, $AC$ dikdörtgeni $AD$ üzerindeki kareye eşittir. **[VI.17]**

Ve $AB$'nin $BC$'ye oranı $EB$'nin $BF$'ye oranına eşit olduğundan, **[VI.1]**

ve, $EA$, $AC$'ye eşit olduğu için $EB$ dikdörtgeni $BA$, $AC$ dikdörtgeni olduğundan,

ve $BF$ dikdörtgeni de $AC$, $CB$ dikdörtgeni olduğundan,

$AB$'nin $BC$'ye oranı, $BA$, $AC$ dikdörtgeninin $AC$, $CB$ dikdörtgenine oranına eşittir.

Ve $BA$, $AC$ dikdörtgeni $AD$ üzerindeki kareye, $AC$, $CB$ dikdörtgeni de $DC$ üzerindeki kareye eşittir,

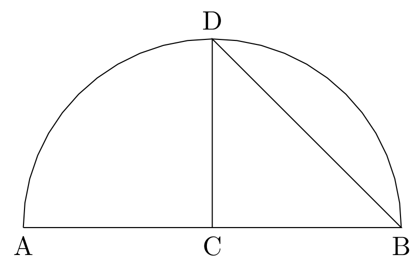
çünkü, $ADB$ açısı dik olduğundan, $DC$ dikmesi $AC$, $CB$ parçaları arasında orta orantılıdır. **[DS. VI.8]**

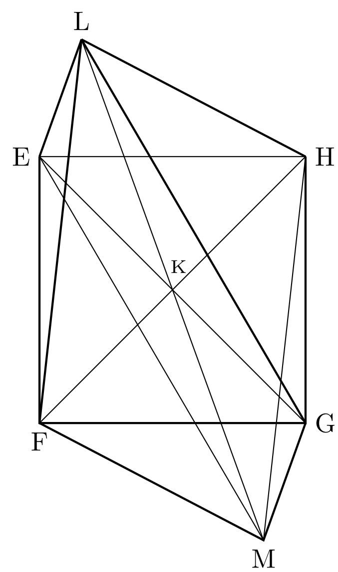
Öyleyse $AB$'nin $BC$'ye oranı, $AD$ üzerindeki karenin $DC$ üzerindeki kareye oranına eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**14. Önerme:**

**Verilen bir küre içine bir sekizyüzlü çizmenin, ve kürenin çapı üzerindeki karenin sekizyüzlünün kenarı üzerindeki karenin iki katı olduğunu göstermenin yolu.**




Verilen kürenin çapı AB alınsın, ve C'de ikiye bölünsün;

AB üzerinde ADB yarıçemberi çizilsin,

AB'ye C'de CD dikmesi çizilsin, DB birleştirilsin;

her bir kenarı DB'ye eşit olan EFGH karesi alınsın, HF, EG birleştirilsin,

*[ Kesiştikleri nokta* K *olsun. ]*

K noktasından EFGH karesinin düzlemine dik olarak KL çizilsin, **[XI.12]**

ve düzlemin öbür tarafında da KM olarak uzatılsın;

KL, KM doğruları üzerindeki KL, KM parçaları EK, FK, GK, HK doğrularından birine eşit olacak şekilde kesilsin., LE, LF, LG, LH, ME, MF, MG, MH birleştirilsin.

O zaman, KE, KH'ye eşit olduğundan, ve EKH açısı dik olduğundan,

HE üzerindeki kare EK üzerindeki karenin iki katıdır. **[I.47]**

Yine, LK, KE'ye eşit olduğundan, ve LKE açısı dik olduğundan,

EL üzerindeki kare EK üzeindeki karenin iki katıdır. **[I.47]**

Ama HE üzerindeki karenin de EK üzerindeki karenin iki katı olduğu kanıtlanmıştı;

öyleyse LE üzerindeki kare EH üzerindeki kareye eşittir;

bu durumda LE, EH'ye eşit olur.

Aynı nedenden dolayı, LH de HE'ye eşit olur;

öyleyse LEH üçgeni eşkenardır.

Benzer şekilde, EFGH karesinin kenarları tabanları olan ve L, M noktalarında tepeleri olan diğer üçgenlerin her birinin de eşkenar olduğu kanıtlanabilir;

böylece sekiz eşkenar üçgen tarafından içerilen bir sekizyüzlü çizilmiş oldu.

Şimdi istenen bunu verilen kürenin içinde olarak algılamak ve kürenin çapı üzerindeki karenin sekizyüzlünün kenarı üzerindeki karenin iki katı olduğunu göstermek.

LK, KM, KE doğrularının her biri birbirine eşit olduğundan, LM üzerine çizilecek yarıçember E'den de geçecektir.

Ve aynı nedenden dolayı,

eğer LM sabit kalacak şekilde bu yarıçember döndürülüp başlangıçtaki konumuna getirildiğinde, F, G, H noktalarından da geçecektir,

ve bu sekizyüzlü bir küre içinde algılanacaktır.

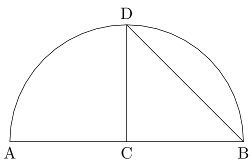
Şİmdi de diyorum ki, verilen küre içinde algılanmıştır.

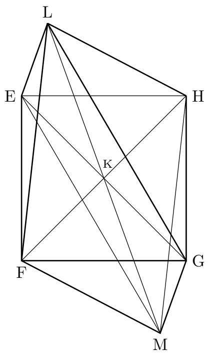
Çünkü, LK, KM'ye eşit olduğundan,

ve bu arada KE ortak olduğundan,

ve dik açılar içerdiklerinden,

LE tabanı EM tabanına eşittir. **[I.4]**




Ve, bir yarıçember içinde olduğu için LEM açısı dik olduğundan, **[III.31]**

LM üzerindeki kare LE üzerindeki karenin iki katıdır. **[I.47]**

Yine, AC, CB'ye eşit olduğundan, AB, BC'nin iki katıdır.

Ama, AB'nin BC'ye oranı, AB üzerindeki karenin BD üzerindeki kareye oranına eşittir;

bu durumda AB üzerindeki kare BD üzerindeki karenin iki katı olur.

Ama LM üzerindeki karenin de LE üzerindeki karenin iki katı olduğu kanıtlanmıştı.

Ve DB üzerindeki kare LE üzerindeki kareye eşittir, çünkü EH, DB'ye eşit çizilmişti.

Öyleyse AB üzerindeki kare LM üzerindeki kareye eşittir;

bu durumda AB, LM'ye eşit olur.

ve AB, verilen kürenin çapıdır;

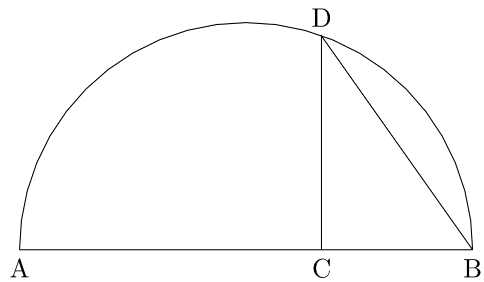
öyleyse LM, verilen kürenin çapına eşittir.

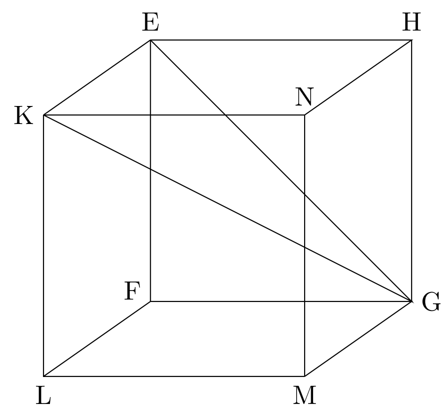
Öyleyse verilen kürenin içine bir sekizyüzlü çizilmiş oldu, ve aynı zamanda kürenin çapı üzerindeki karenin sekizyüzlünün kenarı üzerindeki karenin iki katı olduğu kanıtlandı.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**15. Önerme:**

**Verilen bir küre içine bir küp çizmenin, ve kürenin çapı üzerindeki karenin kübün kenarı üzerindeki karenin üç katı olduğunu göstermenin yolu.**




Verilen kürenin çapı AB alınsın,

AC, CB'nin iki katı olacak şekilde C'den kesilsin;

AB üzerinde ADB yarım çemberi çizilsin,

AB'ye C'de CD dikmesi çizilsin,

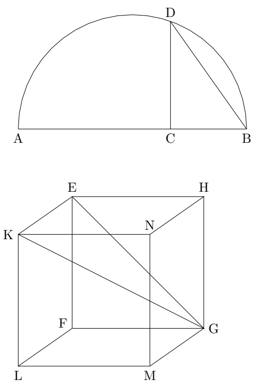
ve DB birleştirilsin;

Kenarı DB'ye eşit olacak şekilde EFGH karesi alınsın,

EFGH karesinin olduğu düzleme E, F, G, H noktalarında EK, FL, GM, HN dikmeleri çizilsin,

EK, FL, GM, HN doğrultuları üzerinde EF, FG, GH, HE doğrularından birine eşit olacak şekilde EK, FL, GM, HN çizilsin,

ve KL, LM, MN, NK birleştirilsin;




böylece altı eşit kare tarafından içerilen bir küp çizilmiş oldu.

Şimdi istenen bunu verilen kürenin içinde olarak algılamak ve kürenin çapı üzerindeki karenin kübün kenarı üzerindeki karenin üç katı olduğunu göstermek.

KG, EG birleştirilsin.

O zaman, KE doğrusu EG'nin olduğu düzleme dik olduğundan EG doğrusuna da dik olacağı için, **[Tan. XI.3]**

KEG açısı dik olduğundan,

KG üzerine çizilecek yarım daire E noktasından geçecektir.

Yine, GF doğrusu FL, FE doğrularından her birine dik olduğundan,

GF doğrusu FK'nin olduğu düzleme diktir;

bu nedenle, eğer FK'yi birleştirirsek, GF doğrusu FK'ye dik olacaktır;

ve bu nedenden dolayı, GK üzerine çizilen yarım çember F noktasından da geçecektir.

Benzer şekilde kübün kalan köşelerinden de geçecektir.

O zaman, eğer KG sabit kalacak şekilde bu yarıçember döndürülüp yine başladığı konuma geri getirilirse,

bu küp bir kürenin içinde olarak algılanacaktır.

Şimdi de diyorum ki, verilen kürenin içinde algılanmıştır.

Çünkü, GF, FE'ye eşit olduğundan,

ve F'deki açı dik olduğundan,

EG üzerindeki kare EF üzerindeki karenin iki katıdır.

Ama EF, EK'ye eşittir;

öyleyse EG üzerindeki kare EK üzerindeki karenin iki katıdır;

bu nedenle GE, EK üzerindeki kareler, yani GK üzerindeki kare, **[I.47]**

EK üzerindeki karenin üç katıdır.

Ve, AB, BC'nin üç katı olduğundan,

ve bu arada AB'nin BC'ye oranı, AB üzerindeki karenin BD üzerindeki kareye oranına eşit olduğundan,

$AB$ üzerindeki kare $BD$ üzerindeki karenin üç katıdır.

Ama $GK$ üzerindeki karenin $KE$ üzerindeki karenin üç katı olduğu kanıtlanmıştı.

Ve $KE$, $DB$'ye eşit çizilmişti;

öyleyse $KG$, $AB$'ye eşittir.

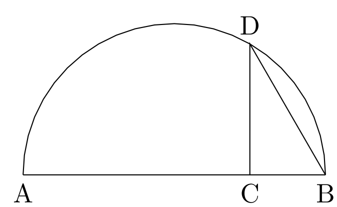
Ve $AB$, verilen kürenin çapıdır;

bu durumda $KG$ de verilen kürenin çapına eşit olur.

Öyleyse bu küp verilen kürenin içinde olarak algılanmıştır, ve aynı zamanda kürenin çapı üzerindeki karenin kübün kenarı üzerindeki karenin üç katı olduğu da kanıtlanmıştır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**16. Önerme:**
**Verilen bir küre içine bir yirmiyüzlü çizmenin, ve bu yirmiyüzlünün bir kenarının ufak türde bir irrasyonel doğru olduğunu göstermenin yolu.**



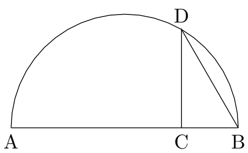

Verilen kürenin $AB$ çapı alınsın,

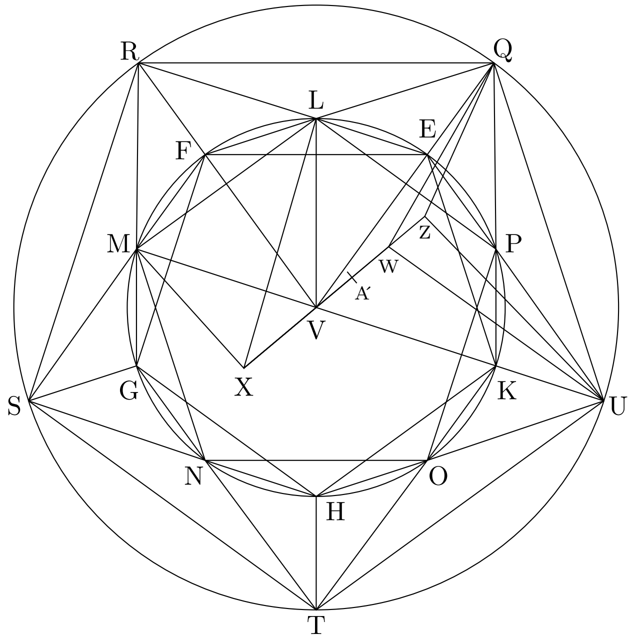
$AC$, $CB$'nin dört katı olacak şekilde $C$'de kesilsin,

$AB$ üzerine $ADB$ yarım çemberi çizilsin,

$AB$'ye $C$ noktasında $CD$ dikmesi çizilsin,

ve $DB$ birleştirilsin;




Yarıçapı DB'ye eşit olan EFGHK çemberi alınsın,

EFGHK çemberi içine eşaçılı ve eşkenar EFGHK beşgeni çizilsin,

EF, FG, GH, HK KE yayları L, M, N, O, P noktalarında ikiye bölünsün,

ve LM, MN, NO, OP, PL, EP birleştirilsin.

Bu durumda LMNOP beşgeni de eşkenar olur, ve EP doğrusu bir ongene ait olur.

Şimdi, çemberin bulunduğu düzleme E, F, G, H, K noktalarından EQ, FR, GS, HT, KU dikmeleri çizilsin ve her biri EFGHK çemberinin yarıçapına eşit olsun,

QR, RS, ST, TU, UQ, QL, LR, RM, MS, SN, NT, TO, OU, UP, PQ birleştirilsin.

Şimdi, EQ, KU doğrularının her biri aynı düzleme dik olduğundan,

EQ, KU'ya paraleldir. **[XI.6]**

Ama ona eşittir de;

ve, aynı yönde olan eşit ve paralel doğruların uçlarını birleştiren doğrular da eşit ve paraleldir. **[I.33]**

Öyleyse $QU$, $EK$'ye eşit ve paraleldir.

Ama $EK$ eşkenar bir beşgene aittir;

öyleyse $QU$ da $EFGHK$ çemberi içine çizilmiş eşkenar beşgene aittir.

Aynı nedenden dolayı,

$QR$, $RS$, $ST$, $TU$ doğrularının her biri $EFGHK$ çemberi içine çizilen beşgene aittir;

öyleyse $QRSTU$ beşgeni eşkenardır.

Ve, $QE$ bir altıgene, ve $EP$ de bir ongene ait olduğundan,

ve $QEP$ açısı dik olduğundan,

$QP$ bir beşgene aittir;

çünkü, beşgenin kenarı üzerindeki kare, aynı çemberin içine çizilmiş altıgenin kenarı üzerine çizilen kareyle ongenin kenarı üzerine çizilen kareye eşlittr. **[XIII.10]**

Aynı nedenden dolayı, $PU$ da bir beşgene aittir.

Ama $QU$ da beşgene aittir; öyleyse $QPU$ üçgeni eşkenardır.

Aynı nedenden dolayı, $QLR$, $RMS$, $SNT$, $TOU$ üçgenlerinin her biri eşkenardır.

Ve, $QL$, $QP$ doğrularının her birinin bir beşgene ait olduğu kanıtlandığından,

ve $LP$ de bir beşgene ait olduğundan,

$QLP$ üçgeni eşkenardır.

Aynı nedenden dolayı,

$LRM$, $MSN$, $NTO$, $OUP$ üçgenlerinin her biri eşkenardır.

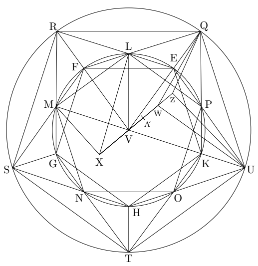
$EFGHK$ çemberinin merkezi, $V$ noktası alınsın;

çemberin bulunduğu düzleme $V$ noktasından $VZ$ dikmesi çizilsin,

öbür yönde de $VX$ olarak uzatılsın,

$VW$ doğrusu bir altıgenin kenarına eşit olsun,

$VX$, $WZ$ doğruları bir ongenin kenarı olsun,




*[ Öklid'in burada sözünü ettiği altıgen ve ongen, üzerinde çalışılan* EFGHK *çemberi içine çizilen eşkenar altıgenle eşkenar ongendir. ]*

ve QZ, QW, UZ, EV, LV, LX, XM birleştirilsin.

Şimdi, VW, QE doğrularının her biri çemberin düzlemine dik olduğundan,

VW, QE'ye paraleldir. **[XI.6]**

Ama eşittirler de;

öyleyse EV, QW da eşit ve paraleldir. **[I.33]**

Ama EV bir altıgene aittir, ve WZ de bir ongene,

ve QWZ açısı diktir,

öyleyse QZ bir beşgene aittir. **[XIII.10]**

Aynı nedenden dolayı,

UZ de bir beşgene aittir,

çünkü VK, WU'yu birleştirirsek, karşılıklı ve eşit olacaklar, ve yarıçap olduklarından altıgene ait olacaklardır. **[DS. IV.15]**

öyleyse WU da bir altıgene aittir.

Ama WZ bir ongene aittir,

ve UWZ açısı diktir;

öyleyse UZ bir beşgene aittir. **[XIII.10]**

Ama QU da bir beşgene aittir;

öyleyse QUZ üçgeni eşkenardır.

Aynı nedenden dolayı,

geriye kalan, tabanları QR, RS, ST, TU olan ve tepeleri Z noktası olan üçgenlerin her biri de eşkenardır.

Yine, VL bir altıgene ait olduğundan, ve VX bir ongene,

ve LVX açısı dik olduğundan,

LX bir beşgene aittir. **[XIII.10]**

Aynı nedenden dolayı,

bir altıgene ait olan $MV$'yi birleştirirsek, $MX$'in de bir beşgene ait olduğu görülür.

Ama $LM$ de bir beşgene aittir;

öyleyse $LMX$ üçgeni eşkenardır.

Benzer şekilde,

geriye kalan, tabanları $MN$, $NO$, $OP$, $PL$ olan ve tepeleri $X$ noktası olan üçgenlerin her birinin de eşkenar olduğu kanıtlanabilir.

Böylece yirmi eşkenar üçgen tarafından içerilen bir yirmiyüzlü çizilmiş oldu.

Şimdi istenen bunu verilen kürenin içinde olarak algılamak ve yirmiyüzlünün kenarının ufak denen bir irrasyonel doğru olduğunu göstermek.

$VW$ bir altıgene, ve $WZ$ bir ongene ait olduğundan,

$VZ$ doğrusu $W$'da uç ve orta oranda kesilmiştir ve büyük parçası $VW$'dir. **[XIII.9]**

öyleyse $ZV$'nin $VW$'ye oranı, $VW$'nin $WZ$'ye oranına eşittir.

Ama $VW$, $VE$'ye, ve $WZ$ de $VX$'e eşittir;

öyleyse $ZV$'nin $VE$'ye oranı, $EV$'nin $VX$'e oranına eşittir.

Ve $ZVE$, $EVX$ açıları diktir;

öyleyse, eğer $EZ$ doğrusunu çizersek, $XEZ$, $VEZ$ üçgenlerinin benzerliğinden dolayı $XEZ$ açısı dik olacaktır.

*[ Üçgenlerin benzerliğinden ve dik üçgen olmalarından dolayı $ZEV$ açısıyla $VEX$ açısının toplamı bir dik açıdır. ]*

Aynı nedenden dolayı,

$ZV$'nin $VW$'ye oranı, $VW$'nin $WZ$'ye oranına eşit olduğundan,

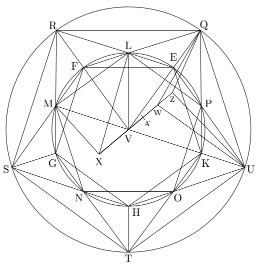
ve $ZV$, $XW$'ye, ve $VW$de $WQ$'ya eşit olduğundan,

$XW$'nun $WQ$'ya oranı, $QW$'nin $WZ$'ye oranına eşittir.

Ve yine bu nedenden,

eğer $QX$ doğrusunu çizersek, $Q$'daki açı dik olacaktır; **[VI.8]**

bu durumda $XZ$ üzerine çizilen yarım çember $Q$'dan da geçecektir. **[III.31]**




Ve eğer $XZ$ sabit olacak şekilde bu yarım çember döndürülüp yine başladığı konuma geri getirildiğinde $Q$ noktasından ve yirmiyüzlünün diğer köşelerinden geçecektir,

ve böylece bu yirmiyüzlü bir küre içine çizilmiş olarak algılanacaktır.

Şimdi de diyorum ki verilen kürenin içinde algılanmıştır.

Çünkü, $VW$ doğrusu $A'$ noktasında ikiye bölünsün.

O zaman, $VZ$ doğrusu $W$ noktasında uç ve orta oranda kesildiğinden, ve küçük parçası $ZW$ olduğundan,

$ZW$ doğrusunu büyük parçanın yarısına, yani $WA'$ doğrusuna ekleyerek elde edilen doğrunun üzerindeki kare büyük parçanın yarısı üzerindeki karenin beş katıdır. **[XIII.3]**

öyleyse $ZA'$ üzerindeki kare $A'W$ üzerindeki karenin beş katıdır.

Ve $ZX$, $ZA'$ doğrusunun, $VW$ da $A'W$ doğrusunun iki katıdır;

öyleyse $ZX$ üzerindeki kare $WV$ üzerindeki karenin beş katıdır.

Ve, $AC$, $CB$'nin dört katı olduğundan,

$AB$, $BC$'nin beş katıdır.

Ama $AB$'nin $BC$'ye oranı, $AB$ üzerindeki karenin $BD$ üzerindeki kareye oranına eşittir; **[VI.8, Tan. V.9]**

öyleyse $AB$ üzerindeki kare $BD$ üzerindeki karenin beş katıdır.

Ama $ZX$ üzerindeki karenin de $VW$ üzerindeki karenin beş katı olduğu kanıtlanmıştı.

Ve $DB$, $VW$'ye eşittir, çünkü her biri $EFGHK$ çemberinin yarıçapıdır.

öyleyse $AB$, $XZ$'ye eşittir.

Ve $AB$, verilen kürenin çapıdır;

bu durumda $XZ$ de verilen kürenin çapına eşit olur.

Öyleyse bu yirmiyüzlü verilen kürenin içinde algılanmıştır.

Şimdi de diyorum ki, bu yirmiyüzlünün kenarı ufak denen türde bir irrasyonel doğrudur.

Çünkü, kürenin çapı rasyoneldir,

ve üzerindeki kare EFGHK çemberinin yarıçapı üzerindeki karenin beş katıdır,

bu durumda EFGHK çemberinin yarıçapı da rasyonel olur;

öyleyse çapı da rasyoneldir.

Ama, eğer çapı rasyonel olan bir çemberin içine eşkenar bir beşgen çizilirse, beşgenin kenarı ufak denen türde bir irrasyonel doğrudur. **[XIII.11]**

Ve EFGHK beşgeninin kenarı yirmiyüzlünün kenarıdır.

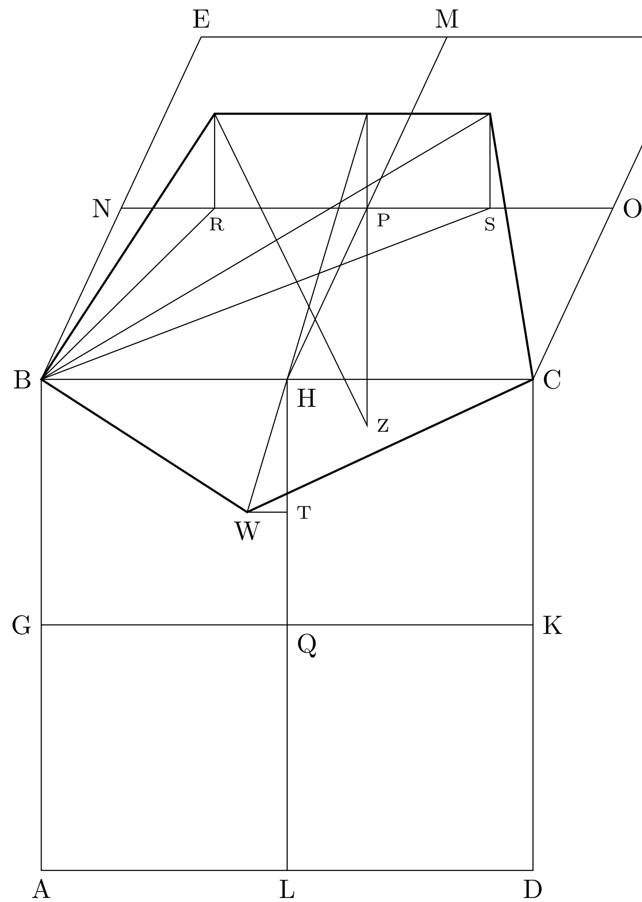
Öyleyse yirmiyüzlünün kenarı ufak denen türde bir irrasyonel doğrudur.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**Doğal Sonuç:** Buradan açıkça görülür ki, kürenin çapı üzerindeki kare yirmiyüzlüyü çizmekte kullanılan çemberin yarıçapı üzerindeki karenin beş katıdır, ve kürenin çapı, aynı çember içindeki, bir altıgen kenarı ve iki ongen kenarından oluşur.

*[ Kürenin çapı* XZ*'dir ve* AB*'ye eşittir. Yirmiyüzlüyü çizmek için kullanılan çember* EFGHK *çemberidir ve yarıçapı* DB*'ye eşittir; ve* AB *üzerindeki kare* DB *üzeindeki karenin beş katıdır. Ayrıca, kürenin çapı* XZ*'dir ve* XZ *doğrusu* VW, WZ, XV *doğrularının toplamı şeklinde yazılır, ve* VW *bir altıgen kenarı,* XV, VZ*'in her biri de bir ongen kenarıdır. ]*

**17. Önerme:**
**Bir küre içine bir onikiyüzlü çizmenin ve bu onikiyüzlünün bir kenarının ayrık türde bir irrasyonel doğru olduğunu göstermenin yolu.**




Daha öce sözü edilen kübün **[XIII.15]**

birbirine dik düzlemleri, ABCD, CBEF alınsın,

AB, BC, CD, DA, EF, EB, FC kenarları sırasıyla G, H, K, L, M, N O noktalarında ikiye bölünsün,

GK, HL, MH, NO birleştirilsin,

*[ Kesişme noktaları* Q *ve* P *olsun. ]*

NP, PO, HQ doğruları, sırasıyla R, S, T noktalarında uç ve orta oranda kesilsin,

ve RP, PS, TQ bunların büyük parçaları olsun;

R, S, T noktalarından kübün düzlemine dik ve dışarı doğru RU, SV, TW doğruları çizilsin,

bunlar RP, PS, TQ'ya eşit olsun,

ve UB, BW, WC, CV, VU birleştirilsin.

Diyorum ki, UBWCV beşgeni eşkenardır, bir düzlemdedir ve ayrıca eşaçılıdır.

Çünkü, RB, SB, VB birleştirilsin.

O zaman, NP doğrusu R'de uç ve orta oranda kesildiğinden, ve büyük parçası RP olduğundan,

PN, NR üzerindeki kareler RP üzerindeki karenin üç katıdır. **[XIII.4]**

Ama PN, NB'ye, ve PR de RU'ya eşittir;

öyleyse BN, NR üzerindeki kareler, RU üzerindeki karenin üç katına eşittir.

Ama BR üzerindeki kare BN, NR üzerindeki karelere eşittir; **[I.47]**

öyleyse BR üzerindeki kare RU üzerindeki karenin üç katıdır;

bu nedenle BR, RU üzerindeki kareler RU üzerindeki karenin dört katıdır.

Ama BU üzerindeki kare BR, RU üzerindeki karelere eşittir;

bu durumda BU, RU'nun iki katı olur.

Ama, SR, PR'nin, yani RU'nun iki katı olduğundan,

VU da UR'nin iki katıdır.

Benzer şekilde, BW, WC, CV doğrularının her birinin BU, VU doğrularının her birine eşit olduğu kanıtlanabilir.

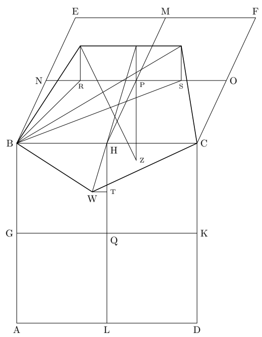
Öyleyse BUVCW beşgeni eşkenardır.

Şimdi de diyorum ki, bir düzlemdedir.

Çünkü, P noktasından RU, SV doğrularının her birine paralel, ve kübün dışına doğru PX çizilsin,

ve XH, HW birleştirilsin;

diyorum ki, XHW bir doğrudur.




Çünkü, HQ doğrusu T noktasındada uç ve orta oranda kesilmiş olduğundan, ve QT büyük parçası olduğundan,

HQ'nun QT'ye oranı, QT'nin TH'ye oranına eşittir.

Ama, HQ, HP'ye eşittir, ve QT de TW, PX doğrularının her birine eşittir;

öyleyse HP'nin PX'e oranı, WT'nin TH'e oranına eşittir.

Ve, HP, TW'ye paraleldir, çünkü ikisi dee BD'nin düzlemine diktir; **[XI.6]**

ve TH, PX'e paraleldir, çünkü ikisi de BF'nin düzlemine diktir. **[XI.6]**

Ama , XPH, HTW gibi iki üçgenin karşılıklı ikişer kenarı orantılıysa ve bu karşılıklı kenarlar paralel olacak şekilde bir köşelerinde birleştirilirlerse, kalan kenarları aynı doğru üzerinde olur; **[VI.32]**

öyleyse XH ile HW aynı doğru üzerindedir.

Ama her doğru bir düzlem içindedir; **[XI.1]**

> *[ Burada* BCVU *dörtgeninin bir düzlemde olduğunu görmek kolay. Eğer* BWC *üçgeni de aynı düzlemdeyse, o zaman* UBWCV *beşgeni bir düzlemde olacak.* XHW*'nin bir doğru üzerinde olduğunu görmek onun için önemliydi. ]*

öyleyse UBWCV beşgeni bir düzlemdedir.

Şimdi de diyorum ki eşaçılıdır.

Çünkü, NP doğrusu R'de uç ve orta oranda kesildiğinden, ve PR büyük parçası olduğundan,

ve bu arada PR, PS'ye eşit olduğundan,

NS de P'de uç ve orta oranda kesilmiştir, ve NP büyük parçasıdır; **[XIII.5]**

öyleyse NS, SP üzerindeki kareler NP üzerindeki karenin üç katıdır. **[XIII.4]**

Ama NP, NB'ye, ve PS de SV'ye eşittir;

öyleyse NS, SV üzerindeki kareler NB üzerindeki karenin üç katıdır;

bu nedenle VS, SN, NB üzerindeki kareler, NB üzerindeki karenin dört katı olur.

Ama $SB$ üzerindeki kare, $SN$, $NB$ üzerindeki karelere eşittir;

öyleyse $BS$, $SV$ üzerindeki kareler, yani $VSB$ açısı dik olduğundan, $BV$ üzerindeki kare, $NB$ üzerindeki karenin dört katıdır;

bu durumda $VB$, $BN$'nin iki katı olur.

Ama $BC$ de $BN$'nin iki katıdır;

öyleyse $BV$, $BC$'ye eşittir.

Ve, iki kenar $BU$, $UV$, iki kenar $BW$, $WC$'ye eşit olduğundan,

ve $BV$ tabanı, $BC$ tabanına eşit olduğundan,

$BUV$ açısı $BWC$ açısına eşittir. **[I.8]**

Benzer şekilde $UVC$ açısının da $BWC$ açısına eşit olduğunu kanıtlayabiliriz;

öyleyse $BWC$, $BUV$, $UVC$ açıları birbirine eşittir.

Ama eğer eşkenar bir beşgende üç açı birbirine eşitse, beşgen eşaçılı olur, **[XIII.7]**

bu durumda $BUVCW$ beşgeni eşaçılı olur.

Ama eşkenar olduğu da kanıtlanmıştı;

öyleyse $BUVCW$ beşgeni eşkenar, eşaçılıdır, ve kübün $BC$ kenarı üstündedir.

Öyleyse, eğer bu çizimi kübün on iki kenarının her biri üstünde yaparsak, on iki eşkenar ve eşaçılı beşgen tarafından içerilen, ve onikiyüzlü denen bir cisim oluşturulmuş olacak.

Şimdi istenen bunu verilen kürenin içinde olarak algılamak ve onikiyüzlünün kenarının ayrık denen bir irrasyonel doğru olduğunu göstermek.

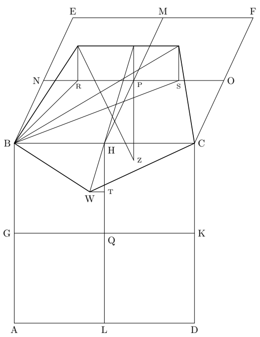
$XP$ uzatılsın, ve uzatılan doğru $XZ$ olsun;

> *[ $XZ$'in uzunluğu henüz belirtilmedi. Şimdilik $XZ$ uzayıp giden bir doğru olarak düşünülecek. ]*

öyleyse $PZ$ kübün köşegenini keser, ve bunlar birbirine ikiye böler,

çünkü bunun böyle olduğu on birinci kitabın sondan bir önceki önermesinde kanıtlanmıştı. **[XI.38]**

Kesiştikleri nokta $Z$ olsun;




bu durumda Z noktası kübü çevreleyen kürenin merkezi olur,

ve ZP de kübün kenarının yarısına eşit olur.

UZ birleştirilsin.

Şimdi, NS doğrusu P'de uç ve orta oranda kesildiğinden, ve büyük parçası NP olduğundan,

NS, SP üzerindeki kareler, NP üzerindeki karenin üç katıdır. **[XIII.4]**

Ama, NP, PZ'ye, ve XP de PS'ye eşit olduğundan,

NS eşittir XZ.

> *[ Yukardaki eşitlikler* XZ *doğrusunun* P *noktasında uç ve orta oranda kesildiğini ve uzun parçasının* PZ *olduğunu gösterir. ]*

Ama dahası, PS, XU'ya da eşittir, çünkü RP'ye eşittir;

öyleyse, ZX, XU üzerindeki kareler, NP üzerindeki karenin üç katıdır.

Ama UZ üzerindeki kare, ZX, XU üzerindeki karelere eşittir;

öyleyse UZ üzerindeki kare, NP üzerindeki karenin üç katıdır.

Ama kübü çevreleyen kürenin yarıçapı üzerindeki kare de kübün yarısı üzerindeki karenin üç katıdır,

çünkü daha önce bir küp çizip onu nasıl bir küre içinde algılayacağımızı göstermiş, ve çapı üzerindeki karenin kenarı üzerindeki karenin üç katı olduğunu kanıtlamıştık. **[XIII.15]**

Ama bütünün bütüne oranı neyse yarımın yarıma oranı da odur;

ve NP kübün kenarının yarısıdır;

öyleyse UZ kübü çevreleyen kürenin yarıçapına eşittir.

Ve Z kübü çevreleyen kürenin merkezidir;

öyleyse U noktası bu kürenin üzerindedir.

Benzer şekilde onikiyüzlünün kalan köşelerinin her birinin bu kürenin üzerinde olduğunu kanıtlayabiliriz;

böylece onikiyüzlü verilen kürenin içinde olarak algılanmıştır.

Şimdi de diyorum ki, onikiyüzlünün kenarı ayrık denen türde bir irrasyonel doğrudur.

Çünkü, NP doğrusu uç ve orta oranda bölündüğünden, ve RP büyük parça olduğundan,

ve PO da uç ve orta oranda bölündüğünden, ve RS büyük parça olduğundan,

NO'nun tamamı da uç ve orta oranda bölünürse, büyük paraç RS olur.

> *[ Şu açıklamanın metne sonradan eklendiği düşünülüyor: ]*
>
> NP'nin PR'ye oranı, PR'nin RN'ye oranına eşit olduğundan, aynı eşitlik iki katları için de geçerlidir, çünkü parçaların oranı, eşkatlarının oranıyla aynıdır; **[V.15]**
>
> öyleyse NO'nun RS'ye oranı, RS'nin NR ile SO'un toplamına oranına eşittir.
>
> Ama NO, RS'den büyüktür;
>
> öyleyse RS de NR, SO toplamından büyüktür;
>
> bu durumda NO uç ve orta oranda bölünmüştür, ve RS büyük parçasıdır.

Ama RS, UV'ye eşittir;

öyleyse, NO uç ve orta oranda kesildiğinde, UV büyük parçadır.

Ve, kürenin çapı rasyonel olduğundan, ve onun üzerindeki kare kübün kenarı üzerindeki karenin üç katı olduğundan,

NO, kübün kenarı olduğu için, rasyoneldir.

Ama eğer rasyonel bir doğru uç ve orta oranda kesilirse, her bir parçası ayrık türden bir irrasyonel doğrudur. **[XIII.6]**

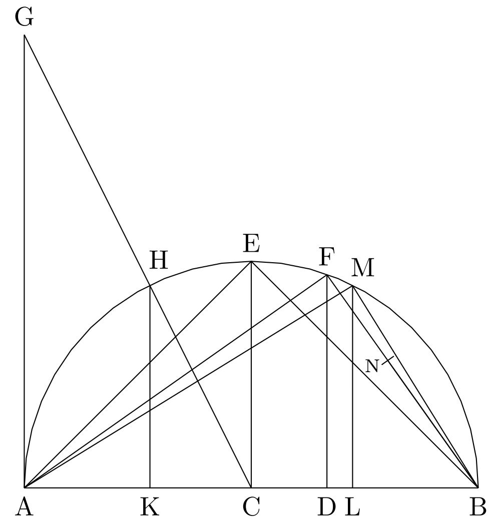
Öyleyse UV, onikiyüzlünün bir kenarı olarak, bir irrasyonel ayrıktır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**Doğal Sonuç:** Buradan açıkça görülür ki, kübün kenarı uç ve orta oranda kesildiğinde, büyük parça onikiyüzlünün kenarıdır.

**18. Önerme:**

**Söz konusu edilmiş olan beş düzgünyüzlünün kenarlarını çizmenin ve birbirleriyle kıyaslamanın yolu.**




Verilen kürenin çapı AB olsun,

C noktasında, AC, CB'ye eşit olacak şekilde,

ve D noktasında da, AD, DB'nin iki katı olacak şekilde kesilsin;

AB üzerine AEB yarıçemberi çizilsin,

C, D noktalarından AB'ye dik CE, DF çizilsin,

ve AF, FB, EB birleştirilsin.

O zaman, AD, DB'nin iki katı olduğundan, AB, BD'nin üç katıdır.

Çevrilmiş oranlar olara, BA, AD'nin bir buçuk katıdır.

Ama, BA'nın AD'ye oranı, BA üzerindeki karenin AF üzerindeki kareye oranına eşittir, **[Tan. V.9, VI.8]**

çünkü AFB üçgeni AFD üçgeniyle eşaçılıdır;

öyleyse BA üzerindeki kare AF üzerindeki karenin bir buçuk katıdır.

Ama kürenin çapı üzerindeki kare de piramidin kenarı üzerindeki karenin bir buçuk katıdır. **[XIII.13]**

Ve AB kürenin çapıdır;

öyleyse AF piramidin kenarına eşittir.

Yine, $AD$, $DB$'nin iki katı olduğundan, $AB$, $BD$'nin üç katıdır.

Ama, $AB$'nin $BD$'ye oranı, $AB$ üzerindeki karenin $BF$ üzerindeki kareye oranına eşittir; **[VI.8, Tan. V.9]**

öyleyse $AB$ üzerindeki kare $BF$ üzerindeki karenin üç katıdır.

Ama kürenin çapı üzerindeki kare de kübün kenarı üzerindeki karenin üç katıdır. **[XII.15]**

Ve $AB$ kürenin çapıdır;

öyleyse $BF$ kübün kenarıdır.

Ve, $AC$, $CB$'ye eşit olduğundan, $AB$, $BC$'nin iki katıdır.

Ama, $AB$'nin $BC$'ye oranı, $AB$ üzerindeki karenin $BE$ üzerindeki kareye oranına eşittir;

öyleyse $AB$ üzerindeki kare $BE$ üzerindeki karenin iki katıdır.

Ama kürenin çapı üzerindeki kare de sekizyüzlünün kenarı üzerindeki karenin iki katıdır. **[XIII.14]**

Ve $AB$ kürenin çapıdır;

öyleyse $BE$ sekizyüzlünün kenarıdır.

Şimdi de, $A$ noktasından $AB$ doğrusuna dik olarak $AG$ çizilsin;

$AG$, $AB$'ye eşit olsun,

$GC$ birleştirilsin,

ve $H$'den $AB$'ye dik $HK$ çizilsin.

O zaman, $GA$, $AC$'nin iki katı olduğundan, çünkü $GA$ eşittir $AB$,

ve $GA$'nın $AC$'ye oranı, $HK$'nin $KC$'ye oranına eşit olduğundan,

$HK$, $KC$'nin iki katıdır.

Öyleyse $HK$ üzerindeki kare, $KC$ üzerindeki karenin dört katıdır;

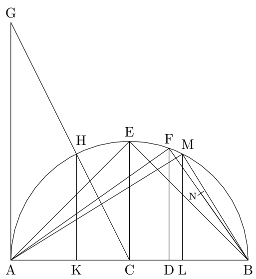
öyleyse $HK$, $KC$ üzerindeki kareler, yani $HC$ üzerindeki kare, $KC$ üzerindeki karenin beş katıdır.

Ama $HC$, $CB$'ye eşittir;

öyleyse $BC$ üzerindeki kare, $CK$ üzerindeki karenin beş katıdır.

Ve, $AB$, $CB$'nin iki katıdır, ve içlerinde, $AD$, $DB$'nin iki katıdır,

öyleyse kalan $BD$, kalan $DC$'nin iki katıdır.




Öyleyse BC, CD'nin üç katıdır;

öyleyse BC üzerindeki kare, CD üzerindeki karenin dokuz katıdır.

Ama BC üzerindeki kare, CK üzerindeki karenin beş katıdır;

öyleyse CK üzerindeki kare, CD üzerindeki kareden büyüktür;

bu durumda CK, CD'den büyük olur.

CL, CK'ye eşit çizilsin,

L'den AB'ye dik olarak LM çizilsin, ve MB birleştirilsin.

Şimdi, BC üzerindeki kare, CK üzerindeki karenin beş katı olduğundan,

ve AB, BC'nin iki katı, ve KL de CK'nin iki katı olduğundan,

AB üzerindeki kare, KL üzerindeki karenin beş katıdır.

Ama kürenin çapı üzerindeki kare de yirmiyüzlünün tanımlandığı çemberin yarıçapı üzerindeki karenin beş katıdır. **[DS. XIII.16]**

Ve AB kürenin çapıdır;

öyleyse KL, yirmiyüzlünün tanımlandığı çemberin yarıçapıdır;

bu durumda KL o çemberin içindeki altıgenin kenarıdır. **[DS. IV.15]**

Ve kürenin çapı, bu altıgenin kenarı ve aynı çember içine çizilen ongenin iki kenarından oluşur, **[DS. XIII.16]**

ve AB kürenin çapıdır,

ve bu arada KL altıgenin kenarıdır,

ve AK, LB'ye eşittir,

öyleyse AK, KB doğrularının her biri yirmiyüzlünün tanımlandığı çemberin içine çizilen ongenin kenarıdır.

Ve, LB bir ongene ait olduğundan, ve ML de bir altıgene,

çünkü, ML, KL'ye eşittir, çünkü merkezden eşit uzaklıkta olduğu için HK'ye de eşittir, ve HK, KL doğrularının her biri KC'nin iki katıdır,

bu durumda MB bir beşgene ait olur. **[XIII.10]**

Ama beşgenin kenarı yirmiyüzlünün kenarıdır; **[XIII.16]** öyleyse $MB$ yirmiyüzlüye aittir.

Şimdi, $FB$ kübün kenarı olduğundan, $N$ noktasında uç ve orta oranda kesilsin, ve $NB$ büyük parçası olsun;

öyleyse $NB$ onikiyüzlünün kenarıdır. **[DS. XIII.17]**

Ve kürenin çapı üzerindeki karenin piramidin kenarı $AF$ üzerindeki karenin bir buçuk katı olduğu, ve sekizyüzlünün kenarı $BE$ üzerindeki karenin iki katı olduğu, ve kübün kenarı üzerindeki karenin de üç katı olduğu kanıtlandığından,

kürenin çapı üzerindeki karenin içerdiği altı parçaysa, piramidin kenarı üzerindeki kare dört, sekizyüzlünün kenarı üzerindeki kare üç, ve kübün kenarı üzerindeki kare iki parça içerir.

Öyleyse, piramidin kenarı üzerindeki kare, sekizyüzlünün kenarı üzerindeki karenin dörtte üçüdür, ve kübün kenarı üzerindeki karenin iki katıdır;

ve sekizyüzlünün kenarı üzerindeki kare kübün kenarı üzerindeki karenin bir buçuk katıdır.

Öyleyse, sözü edilen bu üç cismin kenarları, yani piramit, sekizyüzlü ve küpün kenarları, birbirleriyle rasyonel orandadır.

Ama kalan ikisi, yani yirmiyüzlünün kenarı ve onikiyüzlünün kenarı, ne birbirleriyle ne de yukarda sözü edilen cisimlerin kenarlarıyla rasyonel oranda olmaz;

çünkü bunlar irrasyoneldir, biri ufak, **[XIII.16]**

ve diğeri de ayrıktır. **[XIII.17]**

Yirmiyüzlünün kenarı $MB$'nin onikiyüzlünün kenarı $NB$'den büyük olduğunu şöyle kanıtlayabiliriz.

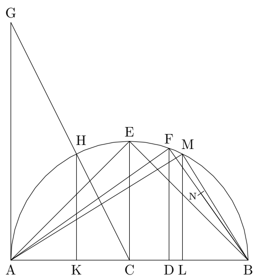
$FDB$ üçgeni $FAB$ üçgeniyle eşaçılı olduğundan, **[VI.8]**

orantılar olarak, $DB$'nin $BF$'ye oranı, $BF$'nin $BA$'ya oranına eşittir. **[VI.4]**

Ve, üç doğru orantılı olduğundan,

birincinin üçüncüye oranı, birinci üzerindeki karenin ikinci üzerindeki kareye oranına eşittir; **[Tan. V.9, DS. VI.20]**

öyleyse $DB$'nin $BA$'ya oranı, $DB$'nin üzerindeki karenin $BF$ üzerindeki kareye oranına eşittir;




öyleyse ters oranlar olarak, AB'nin BD'ye oranı, FB üzerindeki karenin BD üzerindeki kareye oranına eşittir.

Ama AB, BD'nin üç katıdır;

öyleyse FB üzerindeki kare BD üzerindeki karenin üç katıdır.

Ama AD üzerindeki kare de DB üzerindeki karenin dört katıdır, çünkü AD, DB'nin iki katıdır;

öyleyse AD üzerindeki kare FB üzerindeki kareden büyüktür;

bu durumda AD, FB'den büyük olur;

öyleyse AL, FB'den daha da büyüktür.

Ve, AL uç ve orta oranda kesildiğinde, KL büyük parçadır,

çünkü LK bir altıgene aittir, ve KA da bir ongene; **[XIII.9]**

ve, FB uç ve orta oranda kesildiğinde, NB büyük parçadır;

öyleyse KL, NB'den büyüktür.

Ama KL, LM'ye eşittir;

öyleyse LM, NB'den büyüktür.

Öyleyse, yirmiyüzlünün kenarı olan MB, onikiyüzlünün kenarı olan NB'den daha da büyüktür.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**Şimdi de diyorum ki, yukarda sözü edilen beş şekil dışında, birbirine eşit, eşkenar ve eşaçılı şekiller tarafından içerilen başka şekil çizilemez.**

Çünkü iki üçgenle, hatta aslında iki düzlemle, bir çokyüzlü açı çizilemez.

Üç üçgenle piramidin açısı çizildi, dört üçgenle sekizyüzlünün, ve beş üçgenle de yirmiyüzlünün;

ama bir çokyüzlü açı altı eşkenar ve eşaçılı üçgeni bir noktada bir araya getirerek çizilemez,

çünkü, eşkenar üçgenin açısı dik açının üçte ikisi olduğundan, altı tanesi dört dik açı edecektir: ki bu olamaz, çünkü bir çokyüzlü açı dört dik açıdan küçük açılar tarafından içerilir. **[XI.21]**

Aynı nedenden dolayı altıdan fazla sayıda düzlem açıyla da bir çokyüzlü açı çizilemez.

Üç kareyle kübün açısı çizildi, ama dört ile bir çokyüzlü açı çizilemez çünkü toplam yine dört dik açı olacak.

Üç tane eşkenar ve eşaçılı beşgen kullanılarak onikiyüzlünün açısı çizildi;

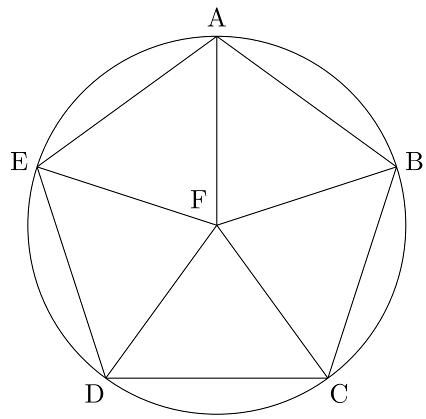
ama dört tane ile bir çokyüzlü açı çizmek mümkün olamaz,

çünkü bir eşkenar beşgenin açısı bir dik açı ve dik açının beşte biridir, ve dört tanesi dört dik açıdan büyük olur: bu olamaz.

Yine, aynı nedenlerden, başka çokgenler kullanarak da bir çokyüzlü açı çizmek olanaksızdır.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■

**Yardımcı Önerme:** Ama eşkenar ve eşaçılı bir beşgenin iç açısının bir dik açıyla bir dik açının beşte birinin toplamına eşit olduğunu şu şekilde kanıtlamalıyız.




$ABCDE$, eşkenar ve eşaçılı bir beşgen olsun,

ve $ABCDE$ çemberi de dışına çizilmiş olsun,

çemberin $F$ merkezi alınsın,

ve $FA$, $FB$, $FC$, $FD$, $FE$ birleştirilsin.

Bu durumda bunlar beşgenin $A$, $B$, $C$, $D$, $E$'deki açılarını ikiye bölerler.

Ve $F$'deki açılar dört dik açıya ve birbirine eşittir,

öyleyse bunlardan biri, $AFB$ açısı, bir dik açıdan beşte bir eksiktir;

bu durumda kalan açılar, $FAB$, $ABF$ birlikte bir dik açı ve beşte bire eşittir.

Ama $FAB$ açısı $FBC$ açısına eşittir;

öyleyse beşgenin $ABC$ açısının tamamı bir dik açı ve beşte bire eşittir.

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu. ■