

Öklid'i Okurken

1. Elemanlar nedir

Elemanlar MÖ 300 yıllarında yazıldığı düşünölen bir geometri, oranlar ve sayılar kuramı kitabıdır. Kitabın önemi içerdığı geometri bilgilerinin yanı sıra bu bilgileri sistematik bir yapı içinde sunmasındadır.

Her yeni bilgi sadece daha önce kanıtlanmış bilgiler kullanılarak ve belli bir akıl yürütme düzeni içinde kanıtlanır.

İlk kanıtların dayanacağı daha önce yapılmış kanıtlar olmadığı için kitabın başında geometriye özgü beş belit, ve akıl yürütmeye yarayacak beş ortak kavram sıralanır. Ve kitaptaki tüm önermeler sıkı bir mantık zinciri içinde hep daha önceki sonuçlara dayanarak, ve bu belitler ve ortak kavramlar kullanılarak geliştirilir.

Kitabın bu belitsel yaklaşımı doğu ve batı uygarlıklarını eşit düzeyde ve derinden etkilemiştir. Kitabın etkisi öyle güçlü olmuştur ki yazılmasının üzerinden iki bin yıldan fazla bir zaman geçmesine rağmen herhangi bir konuda yazılacak her kitap *Elemanlar*'ın yöntemiyle yazılmaya çalışılmaktadır.

Elemanlar'a giriş olarak aşağıdaki yazım yararlı olabilir:

- *Öklid ve Elemanları*, Bilim ve Teknik Dergisi, sayı: 602, Ocak 2018, sayfa 14-23.

2. Kaynak metin

Öklid *Elemanlar*'ını mutlaka papirüsler üzerine yazmıştı. Bu papirüsler yüz yıllarca elle çoğaltıldı. Her çoğaltmada bazı hataların metne girdiğini tahmin etmek zor değil.

Yüzlerce yıl papirüslerde çoğaltılarak nesilden nesile aktarılan bu metin kitap formatının bulunmasıyla kitap formatında ve yine elle yazılıp çoğaltılmaya devam etti.

Çoğu zaman da metni çoğaltan matematikçi kendince ve iyi niyetle düzeltmeler, ekleme ve çıkartmalar yaptı.

Dokuzuncu yüzyılda yazılmış ve Vatikan kütüphanesinde bulunan bir elyazması orijinaline en yakın ve bugüne kalan en eski elyazmalardan biri olarak kabul edilir. Bugün yapılan *Elemanlar* çevirilerinin hemen hemen hepsi için, Öklid'den yaklaşık bin iki yüz yıl sonra yazılmış bu elyazması esas alınır. Daha eski ve daha yetkin bir elyazması bulunana kadar bu elyazmasındaki hata, ekleme ve çıkarmaları yok sayıp, Öklid'in asıl metninin bu olduğunu kabul ediyoruz.

3. Elemanların içeriği

Elemanlar XIII kitaptan oluşur ve her kitabın konusu farklıdır.

- I. Düzlem geometrinin temelleri: doğrular
- II. Geometriye ilişkin hesapların temelleri
- III. Düzlem geometrinin temelleri: çemberler
- IV. Çemberlerin içine ve dışına çizilen şekiller
- V. Oranlar
- VI. Benzer şekiller
- VII. Temel sayılar kuramı
- VIII. Sürekli oranlar
- IX. Sayılar kuramının uygulamaları
- X. Eşölçeksiz nicelikler
- XI. Uzay geometrisi
- XII. Uzay geometrisinde oranlar
- XIII. Platonik cisimler

4. Öklid'in anlatım biçimi

Her önerme tamamen sözeldir; herhangi bir şekle ya da simgeye bağlı değildir. İlk okumada önermenin ne dediğini anlamak zor olabilir ama bir süre sonra Öklid'in anlatım biçimine alışınca her önerme ilk okunuşta anlaşılır.

Kanıtın başında ilk olarak bir şekil üzerinde önermenin içeriği açıklanır. Önermenin hangi koşulları benimsediği şekil üzerinde açıkça belirtilir.

Kanıtlanması istenilen iddiaya sıra gelince Öklid "Diyorum ki" diye başlayan bir cümle ile yine şekil üzerinde neyin kanıtlanması gerektiğini anlatır.

Doğruların ve düzlem şekillerinin herhangi bir ölçme biriminden bağımsız mutlak bir büyüklükleri vardır. O yüzden Öklid çoğu zaman "uzunluk" ve "alan" kelimelerini kullanmamayı tercih eder.

Kenarları AB ve CD doğrularından oluşan bir dikdörtgenin alanıyla kenarı EF olan bir karenin alanının toplamı, kenarları GH ve KL olan karelerin alanlarının toplamına eşitse, o zaman Öklid bunu şöyle anlatır:

AB, CD tarafından içerilen dikdörtgen EF üzerindeki kareyle birlikte GH, KL üzerindeki karelere eşittir.

Biz bugün bir paralelkenardan söz ederken dört köşesini de sırayla anarak "ABCD paralelkenarı" deriz. Öklid aynı paralelkenardan söz ederken "AC paralelkenarı" der.

Eğer AC paralelkenarının alanı EFG üçgeninin alanıyla aynıysa, Öklid bunu "AC, EFG'ye eşittir" diyerek belirtir.

Eğer Öklid "AC, EH'ye eşittir" derse, ne demek istediğini kanıtın gidişinden çıkarmak gerekir; burada iki doğrunun aynı uzunlukta olduğu, iki paralelkenarın aynı alana sahip olduğu, ya da iki paralelkenarın özdeş olduğu anlatılıyor olabilir. Cümle, ondan önce gelen cümlelerle beraber ele alınmalıdır. Bu konu elyazması metinlerde bolca noktalı virgül kullanılarak ayarlanmıştır.

Öklid okumaya başlayanın gözüne çarpacak ilk ayrıntılardan biri kanıt metinlerinde çok fazla noktalı virgül kullanıldığı olacaktır. Kanıtın her bir parçası içindeki cümleler birbirine noktalı virgülle bağlanır. Ve ancak o düşünce zincirinin sonunda hedeflenen ara sonuç elde edilince cümle noktayla biter. Bazı çevirilerde her noktalı virgül yerine nokta kullanıldıysa da ben metnin lezzetini aktarmak için noktalı virgülleri değiştirmedim.

Mantık akışının rahat takip edilmesi ve varılacak sonuçların ikna ediciliğinin üzerinde bir şüphe belirmesin diye Öklid kanıtın her

aşamasında her ayrıntıyı yeri geldikçe tekrarlamaktan kaçınmaz. Bir süre sonra sıkılıp bu tekrarları azalttığında, ya da metni kopyalayan kişi sıkılıp kestirmeden sonuca ulaştığında içinizde bir eksiklik hissedersiniz.

Kanıtları okurken akılda tutulması gereken bir önemli ayrıntı da Öklid'in kanıtın gerektirdiği tüm durumları değil, örnek oluşturacak özel durumları kanıtladığıdır. Örneğin "istediğimiz kadar doğru alalım" dedikten sonra iki, ya da üç doğru alır. Ama kanıtın yöntemini daha çok sayıda doğruya aynen uygulayabilirsiniz.

Bazen, değil günlük hayatta, geometrinin soyut derinliklerinde bile işe yaramayacağını düşündüğünüz tuhaf bağıntılar kanıtlar. Sayfalar sonra, hatta birkaç kitap sonra son derece karışık görünen bir kanıtın en can alıcı yerinde o tuhaf sonuca atıfta bulunup kanıtı birden bire çözüme ulaştırdığında kitabın nasıl bir özenle hazırlandığına bir kez daha şahit olursunuz.

Öklid'i okumaya hazırlananlar aşağıdaki tanıtım yazımı yararlı bulabilirler:

- *Öklid'i Okurken*, Bilim ve Teknik Dergisi, Mart 2018, Sayı 604, sayfa 74-83.

5. Bundan dolayı vs ...

Öklid ispatı şekil üzerinde sonuca ulaştırdıktan sonra "Bundan dolayı" diye başlayan bir cümle ile önermenin tüm metnini yeniden aktararak sonucun aslında şekle bağlı değil, mutlak bir geometri sonucu olduğunu hatırlatır. Ama kitabı bin yıllardır yeniden yazarlar üşendiği, ve günümüz çevirmenleri de bu tembelliği adetten saydığı için, biraz da yerden tasarruf etmek bahanesiyle, Öklid'in yaptığı gibi kanıt sonunda önerme tekrarlanmaz ama Öklid'in bu tekrarlamayı yaptığını hatırlatmak için

Tam olarak kanıtlanması istenen de buydu.

denir.

Eski Yunan uygarlığının yerini Roma uygarlığı almaya başlayınca, kanıtların sonuna QED yazılmaya başlanmıştır. Buradaki QED harfleri kanıt sonunu işaret etmek için kullanılan, ve Latince "Quod Erat Demonstrandum" sözlerinin baş harfleridir.

Ben bu çeviride kanıt sonlarını ■ ile belirttim.

Bazı önermeler bir çizim problemiyle ilgilidir. Belli şartlar altında bazı çizimlerin mümkün olduğunu iddia eder. Öklid bu önermeleri "falanca şekli çizmek" olarak kaleme almıştır. Günümüz diline çevirirsek "falanca şekli çizmenin bir yolu vardır" dememiz gerekir. Osmanlıda bu çeşit çizim problemleri "falanca şekli çizmenin yolu" diye dillendirilirken son dönemde biz "falanca şekli çizmenin yolu" demeyi seçiyoruz.

Tüm çizimler yalnızca cetvel ve pergel kullanılarak yapılan çizimlerdir.

Bu çeşit çizim önermelerinin kanıt kısmı bitince,

Tam olarak yapılması istenen de buydu.

der.

Zaman içinde, yine Roma Uygarlığının etkisiyle çizim sonlarını belirtmek için QEF yazılmaya başlanmıştır. Buradaki QEF harfleri, yapılmak istenen de buydu anlamındaki Latince "Quod Erat Faciendum" kelimelerinin baş harfleridir.

Ben bu çeviride çizim sonlarını □ ile belirttim.

Öklid'in özgün metninde olmadığı halde son dönemlerde yapılan çevirilerde bazı cümle sonlarına eklenen [III.14] şeklinde atıflar vardır. Bunlar Öklid'in o sırada kullandığı bilgiyi hangi kitabın kaçınıcı önermesinde kanıtladığını hatırlatan işaretlerdir.

Örneğin [III.14], III. Kitabın 14. önermesi demektir. Diğer atıfları okuyucu kendisi çözebilir.

[Bir de bu şekilde yazılmış kısa notlar vardır. Onlar metinde olmayan, benim açıklamalarım. Bazen Öklid'in bir geometri ifadesini Öklid'den bin yıl sonra icat edilen cebir diliyle yeniden yazıyorum. Buradan Öklid'in aklından bunların geçtiği anlaşılmalı; bunlar çoğu zaman iki bin yıl öteden yapılan yorumlar olarak algılanmalı.]

6. Çeviri hakkında

Öklid'in zamanında Eski Yunanca yalnızca büyük harfler kullanılarak ve kelime aralarında boşluk bırakmadan yazılırdı. Ören yerlerindeki taş yazıtlardaki harflerin büyük olması bundandır. Kelimeler arasında boşluk bırakma kuralı yüzyıllarca sonra ortaya çıkmıştır. Küçük harfleri kullanılması ondan da sonradır. Eğer bugün Öklid mümkün olsa da eline *Elemanlar'*ın bir elyazma kopyasını alsa okuyabilmesi mümkün değildir.

Bugün en eski ve güvenilir elyazmaları olarak Bodleian kopyası ve Vatikan kopyası anılmaktadır. Bu kopyalar dokuzuncu ve onuncu yüz yıllarda Bizans'ın başkenti İstanbul'da yazılmıştır.

Günümüzdeki çeviriler genel olarak Vatikan kopyasını esas alarak Heiberg'in geçen yüz yıl başında yaptığı derlemeyi kullanır.

Ben bu çeviriyi aşağıdaki kaynakları kıyaslayarak ve yer yer Heiberg kopyasını kullanarak derledim. Metnin elyazmalarındaki ve Öklid'e ait olduğu düşünülen üslûba yakın olmasına dikkat ettiysem de "orijinalinde de böyle yazıyor, ben de öyle yazayım" tutumuyla anlamadığım hiçbir cümle kurmadım. Her cümle asıl metindeki cümlenin anlamını yansıtır. Bunun yetersiz olduğunu düşündüğüm yerlerde, bana ait olduğu belli olacak şekilde açıklamalar yaptım.

Bunun sonucu olarak bu çeviri baştan sona, başka kaynaklardan açıklama aramaya gerek olmadan okunabilir.

Çeviriyi yaparken kıyasladığım metinler şunlar.

- Heath, Euclid The thirteen books of the Elements, Dover edition, Cilt I, II, III, 1956
- Fitzpatrick, Euclid's Elements of Geometry, <http://farside.ph.utexas.edu/Books/Euclid/Euclid.html>
- Joyce, Euclid's Elements, <https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/java/elements/>
- Öztürk ve Pierce, Öklid'in Öğelerinin 13 Kitabından Birinci Kitap, <http://math.msgsu.edu.tr/~dpierce/Dersler/Oklid/>
- Tosun, Hüseyin Rifkı Tamani ve Elementler Çevirisi, Atatürk Kültür Merkezi Yayınları, 2010 (Öklid'in Elemanlarının 1-6, kısmen 11

ve 12. kitaplardan yapılan Bonnycastle (1789) çevirisinden Osmanlıcaya aktarılmıştır)

- Henrion, Les quinze livres des elements geometriques d'euclide, Isaac Dedin, Paris, 1632
- Peyrard, Les elemens de geometrie D'euclide, F. Louis, Paris, 1804.

Öklid'in *Elemanları*, artık kullanılmayan bir dil olan Antik Yunanca ile yazılmıştır. Yukardaki çevirilerde kaynak metin olarak, Peyrard Vatikan kopyasını, Heath ve Fitzpatrick ise, Vatikan kopyasını esas alan Heiberg'in düzenlediği Antik Yunanca metni esas almışlardır. Bu Antik Yunanca metnin bir kopyası Fitzpatrick'in kitabında bulunabilir.

Çeviri süreci hakkında daha ayrıntılı bilgi arayanlara aşağıdaki yazımı önerebilirim.

- *Öklid ve Türkçesi*, Bilim ve Teknik Dergisi, Nisan 2018, Sayı 605.

Bu çevirideki bütün şekiller TikZ ve tkz-euclide çizim paketleri kullanılarak çizilmiştir. *Elemanlar*'ın değişik çevirilerine aşina okuyucu, özellikle üç boyutlu önermelerin şekillerinde ve bu şekillerdeki noktaların harflendirilmesinde bazı farklılıklar olduğunu bilir. Hatta bazı çevirilerin şekillerindeki harflerle kanıt metninden şekildeki noktalara verilen atıflar birbirini tutmaz.

Bu çeviride bu çeşit hatalar ayıklanmıştır. Şekiller için asıl kaynak olarak yine Heiberg metni kullanılmıştır.

7. Türkçe'de Elemanlar

Elemanlar'ın ilk Türkçe çevirisi on sekizinci yüz yılda ve kısmen gerçekleşmiştir.

Zamanın padişahu III. Selim, askeriye'nin işine yaramayan bilgilerle meşgul olan âlimleri müderris olarak atamayacağını açıkça beyan edince, *Elemanlar*'ı çevirmeyi planlayan Târnâni çareyi Bonnycastle çevirisini Türkçe'ye aktarmakta bulmuştur. John Bonnycastle, bir askeri okulda okutulmak üzere *Elemanlar*'ın içinden subayların işine yarayacak kısımları ayıklayıp İngilizce'ye çevirmiştir. Uzun yıllar bu çeviri askeri okullarda kullanılmıştır.

Kaba bir hesapla Bonnycastle çevirisi *Elemanların* 465 önermesinin 185'ini içerir, yani Bonnycastle *Elemanların* yaklaşık % 40'ını çevirmiştir. Târnâni'nin Türkçeye çevirdiği *Elemanlar* işte bu çeviridir.

Bu bilgileri Ali Rıza Tosun'un yukarıda andığım kitabından alıyorum.

Bundan sonraki ilk çeviri Özer Öztürk ve David Pierce'in üniversite birinci sınıf matematik öğrencileriyle ders kitabı olarak kullanma amacıyla yaptıkları çeviridir. Onlar da çok itinayla hazırladıkları bu çevirilerinde *Elemanların* yalnızca, 48 önermeden oluşan, ilk kitabını çevirmişlerdir.

İnternet'te bir arama yapınca Evren İşbilen'in Thomas Elrington'un *Elemanlar*'ın ilk altı kitabını içeren 1833 tarihli kitabından ilk iki kitabı çevirdiğini gördüm. Benim indirdiğim kopyada şekiller yoktu. Elrington bu kitabı üniversitede ders kitabı olarak düzenlediğinden orijinal metne fazla sadık kalmadığını, özellikle bazı kritik tanımları değiştirdiğini belirtir.

Yine bir İnternet aramasında Ufuk Deniz Yar'ın Fitzpatrick'in İngilizce çevirisini kullanarak birinci kitabı çevirdiğini gördüm.

Tâmânî ustadan 200 yıl sonra, ona yarım bıraktırılan işi tamamlama isteğinin bu topraklarda yeniden canlandığını görmek sevindirici.

Elinizdeki bu çeviri matematik eğitimi almış okuyucular içindir. Matematik tarihi eğitimi almış okuyucular için ilerde o konuya yakın kişilerce başka çevirilerin yapılacağını umuyorum.

8. Oranlar eşit midir aynı mıdır?

Öklid kitabında oranlar için "*kendi kendine eşit*" anlamında bir kelime kullanmıştır. Diğer nicelikler içinse beklendiği üzere *eşit* kelimesini kullanmıştır.

Geçen yüz yıla kadar bu ayırım kimseyi ilgilendirmemiştir çünkü *Elemanlar* kitabının matematiği ve yöntemleri üzerine yoğunlaşmıştı. Matematikte kavramlar önemlidir. Bir bakıma matematik, kavramları anlama ve kavramlar arasında ilişki görme ve mümkünse verilen bir kavrama uygun tüm durumları sınıflandırma sanatıdır.

Öklid'in oranların eşitliğini ifade ederken farklı bir kelime kullanması ortada farklı bir kavram olduğu şeklinde yorumlanmasının biraz zorlama olduğunu düşünmek mümkün, çünkü oranların oluşturduğu farklı bir 'dünya' yok. Nitekim ortak ölçüye sahip nicelikler arasındaki oranın tamsayılar arasındaki oranlar olarak ifade edileceğini kanıtlayan önermeler de vardır *Elemanlar*'da.

Oranlar için *aynı* kelimesinin kullanılmasında yarar görenler genellikle "hepimiz kanun önünde eşitiz ama biz aynı değiliz" derler. Buradaki kelime oyunundan hareketle oranların yeni bir nicelik kümesi oluşturduğu sonucuna varmanızı beklerler. Oysa "hepimiz kanun karşısında aynıyız ama biz eşit değiliz" dendiğinde de yukardaki cümlelerin mesajı tam olarak aktarılmış olur. Bu cümlelerde anlatılan kavramlar kelimeler üzerine yüklenmeye çalışılan anlamlardan bağımsızdır.

Kelime oyunlarının matematik kavramlarının anlaşılmasında ve tanımlanmasında fazla bir yararı olmayacağını düşünüyorum. Herhalde bunun aksini düşünmenin pek mümkün olmayacağını söyleyebiliriz.

Bu çeviride matematik eğitimi almış kişileri hedef okuyucu kitlesi olarak düşündüğüm için bu çeşit kelime oyunlarında anlam aranması kapısını açmamak için oranlar için *eşit* kelimesini kullandım.

Oranlarla ilgili yaptığım metin dışı açıklamalarımda, "A'nın B'ye oranı" için $\frac{A}{B}$, ve eşitliği göstermek için de $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ kullandım. Bunun bölme ya da kesir olmadığını, sadece oranı görsel olarak daha rahat algılamak için ödünç alınmış bir simge olduğunun altını çizdim.

Oranlar konusu açıldığında, kesinlikle böyle bir notasyon kullanılmaması gerektiğini savunanlar, aynı oran için A: B yazarlar ve oranların *aynılığı* için de, oranlar için *eşitlik* kullanılmaması gerektiğini hatırlatmak için A: B: : C: D yazarlar. Oysa bu simgeler Öklid'ten iki bin yıl sonra icat edilmiştir.

Metnin içinde zaten *eşit olmak* ya da *aynı olmak* simgelerle değil sözel olarak anlatılmıştır.

Öklid bir oranın diğer orandan ne zaman büyük olacağını da tanımlar. Birbirlerinden büyük veya küçük olabilen nicelikler eşitliğe sıra gelince kendilerine ayrı bir statü aramayacaklardır diye düşünüyorum.

Yine de "oranlar *eşit* midir *aynı* mıdır?" konusunda sizin gibi düşünenlerin neler yazdıklarını merak ediyor ve yalnız olmadığınızı görmenin huzurunu tatmak istiyorsanız aşağıdaki makaleleri beğenebilirsiniz. İlk ikisi "*aynı*" taraftarı, son ikisi de "*eşit*" taraftarıdır.

- Unguru, S., *On the need to rewrite the history of Greek mathematics*, Arch. History Exact Sci. 15, (1975/76), 67-114.

- Grattan-Guinness, I., *Numbers, Magnitudes, Ratios, and Proportions in Euclid's Elements: How did he handle them?*, *Historia Mathematica* 23 (1996), 355-375.
- Freudenthal, H., *What is algebra and what has it been in history?*, *Arch. History Exact Sci.* 16 (1976/77), 189–200.
- Weil, A., *Who betrayed Euclid? Extract from a letter to the editor*, *Arch. History Exact Sci.* 19 (1978/79), 91–93.

9. Elemanlar mükemmel midir?

Hiçbir ölümlü henüz mükemmeli yakalayamadı. Öklid bundan muaf değildi.

Matematik araştırmacıları arasında yaygın olan, biraz da şakayla karışık dillendirilen, bir inanç vardır: her büyük eserde çok daha büyük gerçeklerin bulunmasına yol açacak bir hata vardır!

Öklid de *Elemanlar'* da zaman zaman önceden belirtmediği bazı varsayımları, bilerek ya da bilmeyerek, kullanıverir. Bazı tanımlar yapılmamış, kanıtların gidişinden anlamlarının çıkarılması beklenmiştir.

Bu sorunlar, doğal olarak, kusursuz bir geometri kuramı nasıl kurulur sorusunu ve bu soruya bağlı olarak yeni bir matematik dalının ortaya çıkmasına neden olmuştur.

Konuya merak duyanlar için aşağıdaki iki kitap uygun olabilir.

Hilbert'in kitabı tutarlı bir belitler topluluğu ortaya koymak için yapılmış bir çalışmadır.

Lee'nin kitabı bu konuya başlayanlar için bir ders kitabıdır. Özellikle kitabın başlarındaki "*Gaps in Euclid's Arguments*" kısmı ilginizi çekebilir.

- Hilbert, D., *Foundations of Geometry*, çeviren Leo Unger, Open Court, LaSalle, Ill. (1971) ix+226.
- Lee, J. M., *Axiomatic Geometry*, American Mathematical Society, (2013).

10. İyi Okumalar!

Kütüphanede rastgele bir matematik kitabını elinize alsanız ve açıp okumaya başlasanız ne anlarsınız? Ben hemen söyleyeyim: hiçbir şey anlamazsınız. Çünkü bir matematik kitabı öyle okunmaz.

Bir matematik kitabını okumak için sakın, sessiz bir yere çekilmeniz ve yanınıza birkaç kalem ve bolca boş kağıt almanız gerekir. Sonra bir okuyup, on düşünüp, yirmi yazmanız gerekir. Tekrar, tekrar. Bir ara, yazarın bir sonraki sayfalarda ne söylemesi gerektiği konusunda bazı beklentilerinizin oluştuğunu hissetmeye başlarsınız. Ve yazar gerçekten sizin beklediğiniz şeyleri söylemeye başladığında bedeninizi bir sıcaklığın sardığını farkedersiniz; işte matematik virüsünü kaptığınız an o andır.

Geometri virüsünü kapmanız umuduyla iyi okumalar!

Dünya durdukça bu yaptıklarımı görecek zevk sahibi insanlar, çabalarımın ciddiyetini göz önünde bulundurarak insaf ile bakarlar ve hayır dua ile anarlar, inşallah.

Mimar Sinan (1489-1588)