SEMİNER*

Ali Sinan Sertöz

1 KONİ KESİTLERİ

Tarih: 5 Şubat 1998, Antalya

1.1 Başlangıç

Koni kesitleri ilk kez eski Yunan'da ortaya çıkmıştır. MÖ 350 yıllarında yaşamış olan Menaechmus'un koni kesitlerini ilk kez kullanan kişi olduğu kabul edilir. Menaechmus koni kesitleri yardımıyla bir küpün hacminin iki katına eşit bir başka küp inşa etmiştir. Koni kesitlerinin ilk tanımında koninin yüzeyine dik bir düzlemle koni kesilir ve tepe açısının değerine göre değişik koni kesitleri elde edilirdi. Koni kesitleri üzerine ilk sistematik çalışmayı yapan Pergeli Apollonius'tur. Apollonius'un MÖ 250 yıllarında yazdığı Konika adlı eseri sekiz ciltten oluşur ve son cildi kayıptır. İlk dört cilt Yunanca kopyalarından günümüze kalmıştır. Diğer üç cilt ise Musa Oğullarının 9. yüzyıldaki çalışmalarıyla Arapça olarak günümüze kalmıştır. Kayıp olan son ciltte neler olacağı konusunda ilk yedi cilde bakarak tahminlerde bulunmak yakın zamana kadar bilim dünyasında rağbet görmüş bir uğraştı. Bu konudaki ilk bilinen çalışma Heysem'e aittir. Bugün Musa Oğullarının Kitab-ı Mahrutat adını taşıyan Konika kopyasının Heysem'in elyazısıyla çoğaltılmış kopyası Süleymaniye Kütüphanesindedir. Heysem'in sekizinci cilt tamamlaması da bilinmeyen bir yazarın elyazısıyla Manisa Kütüphanesindedir. Her iki kitabın ve ilk dört cildin İngilizce çevirileri de Springer-Verlag yayınlarından yakın zamanda çıkmıştır.

*5. Antalya Semineri Bildirileri, TED Ankara Koleji Vakfı Genel Müdürlüğü, 1998, 155-158.

1.2 Projektif Uzayda Koni Kesitleri

Afin uzayda sıfırdan geçen tüm doğruların oluşturduğu uzaya projektif uzay deriz. Afin uzay projektif uzayın içinde yatıyor olarak düşünülür. Bu durumda afin uzayın içinde olan bir eğrinin sonsuzdaki kapanışından söz edilebilir. Koni kesitlerini oluşturan eğrilerin sonsuzdaki kapanışlarını düşündüğümüz zaman projektif anlamda birbirlerine eşdeğer eğriler elde ederiz. Projektif noktaların aslında sıfırdan geçen doğrular olduğunu göz önüne alırsak ilk baştaki tanımda kullanılan koniyi geri kazanırız.

1.3 Cebirsel Genelleme

Koni kesitleri cebirsel anlamda $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ şeklinde ifade edilen ikinci dereceden düzlem eğrileri olarak karşımıza çıkarlar. Bazı dejenere durumların olacağı göz ardı edilmezse genel olarak $B^2 - 4AC$ ifadesinin işareti bize denklemin hangi koni kesitini verdiğini söyler. Afin uzaydaki bu denklemi projektif uzaya taşıdığımız zaman denklem $AX^2+BXY+CY^2 + DXZ + EYZ + FZ^2 = 0$ şekline dönüşür. Burada $[X : Y : Z]$ projektif koordinatlardır ve $Z \neq 0$ durumunda $x = X/Z$, $y = Y/Z$ dönüşümleri kullanılır. $Z = 0$ hali sonsuzdaki noktaları ifade eder. Bu genel denklem

$$(X\ Y\ Z)\begin{pmatrix} A & B/2 & D/2 \\ B/2 & C & E/2 \\ D/2 & E/2 & F \end{pmatrix}\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

şeklinde de yazılabileceği için konu kuadratik formlar teorisine bağlanır.

1.4 Cebirsel Kapalı Cisimlere Geçiş

İki eğrinin nerelerde kesişeceği problemini incelerken ilk karşılaşılan sorun sonsuza kaçan noktalardır. Projektif uzaya geçerek bu problem halledilir. Fakat bazı formel kesişmeler kullanılan sayı cisminde ifade edilemeyince cebirle geometri arasında bir ihtilaf ortaya çıkar. Bu nedenle geometri genellikle reel sayıların cebirsel kapanışı olan karmaşık sayılar üzerinde yapılır. Yukarıda anlatılan tüm teori karmaşık sayılar üzerinde yeniden yazıldığında daha estetik görünüm veren bir teori elde edilir. Fakat artık karmaşık düzlemin reel dört boyutlu bir uzaya karşılık gelmesi nedeniyle şekil çizmek mümkün değildir. Daha güçlü bir teori elde etmek için bu verilmiş bir ödündür.

1.5 Yüksek Boyutlara Geçiş

Projektif düzlemde ikinci dereceden bir denklemin kökleri bize koni kesitlerini verdi ve buradan zengin bir teori çıkardık. Doğal olarak ilk sorulacak soru aynı yapıda bir denklemi projektif n-boyutlu bir uzayda incelersek ne bulacağımızdır. Projektif n-boyutlu uzayda ikinci dereceden bir denklemin köklerinin oluşturduğu uzaya kuadratik yüzey denir. n-boyutlu bir uzaydaki kuadratik yüzeyin boyutu n-1'dir. n sayısının tek veya çift oluşuna göre bu yüzeyler değişik ve oldukça zengin bir geometrik yapı sergilerler. En belirgin özellikleri de kendileri lineer olmamalarına rağmen içlerinde lineer uzaylar barındırmalarıdır.

1.6 Yakın Zamanlar

Bir kuadratik uzayın içindeki k-boyutlu lineer uzayların oluşturduğu uzay Grassmann uzayının bir alt uzayı olur. Bu alt uzayın boyutu İbrahim Dibağ tarafından 1976 yılında hesaplanmıştır. Kuadratik yüzeyin geometrik yapısı bu alt uzaylar yardımıyla yazılan Schubert hücreleri yardımıyla anlaşılır. Bu hücrelerin kesişme özelliklerini hesaplamak için ilk çalışma 1993 yılında Sertöz tarafından yapıldı. 1997 yılında Kanada'lı Sottile bu çarpımları önemli bir özel halde tam olarak hesapladı.

2 SAYILAR VE GEOMETRİ

Tarih: 6 Şubat 1998, Antalya

2.1 Hardy ve Ramanujan

Bu yüzyılın başlarında İngiliz matematikçi Hardy ile Hintli matematikçi Ramanujan'ın dostluğu sayılar teorisine pek çok anektod bırakmıştır. Ramanujan formel bir eğitim almamış olmasına rağmen matematiği ve özellikle sayıların özelliklerini 'hissederek' çalışmış ve bugün de hâlâ hayranlık uyandıran sonuçlar çıkarmıştır. Fakat sayılar teorisi, özellikle de asal sayılar teorisi, her türlü içgüdüye şiddetle direnen bir konudur. Örneğin 1'den x'e kadar olan sayılar arasında kaç tane asal sayı olduğunu veren $\pi(x)$ fonksiyonu ile bir integral ifade ile tanımlanan $Li(x)$ fonksiyonu arasında bütün tablolarda gözlenen ilişkiye bakarak yapılacak tahminler yanlıştır ve bu tahminlerin yanlış çıkması beklenen ilk sayılar evrendeki atomların toplam sayısından üssel olarak fazla bir sayıdır.

2.2 Ramanujan

Ramanujan bir tutku derecesinde matematikle uğraşan bir insandır. Bu tutkusu nedeniyle formel bir eğitim alamaz. Bir arkadaşının onun adına ödünç aldığı Carr tarafından yazılmış bir matematik kitabından matematik öğrenir. Bu kitabın yazarı Carr da sıradışı bir insandır. Kırk yaşına kadar özel matematik dersleri vererek hayatını kazanan Carr ancak kırk yaşından sonra üniversiteye yazılır ve matematik öğrenmeye başlar! Bu kitabı da üniversite yıllarında yazar. İçinde hiç ispat olmayan bu kitap her nasılsa Ramanujan'ın olduğu şehirdeki üniversiteye gelir ve Ramanujan daha sonra dostlarını çok sıkıntıya sokacak olan o ispatsız matematik stilini bu kitaptan alır. Ramanujan'ın Hardy ile tanışması Hardy'e yazdığı bir mektupla ona elde ettiği formülleri göndermesiyle başlar. Daha sonraki yıllarda İngiltere'ye gelen ve önemli çalışmalar yapan Ramanujan'ın ispatsız bıraktığı teoremler üzerine bugün hâlâ çalışılmakta ve bu teoremler teker teker ispat edilmektedir.

2.3 Sayıların Toplama Özellikleri Üzerine

Asal sayılar teorisi sayıların çarpım özellikleri üzerine kuruludur. Sayıların toplam özellikleri de içlerinde pek çok sır barındırmaktadır. Bu sırlardan biri de Frobenius problemi olarak anılan bir Diophant problemidir. Bu problemde verilen $a_1, \ldots, a_n$ pozitif tam sayılarının doğal sayılar üzerindeki lineer kombinasyonlarıyla elde edilebilen ve elde edilemeyen sayılar sorulur. Eğer $a_1, ..., a_n$ sayıları aralarında asal ise $x_1, ..., x_n$ sayıları negatif olmayan tam sayılar olmak üzere $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n$ şeklinde yazılamayan en büyük bir tam sayı vardır ve problem bu sayıyı tarif etmekten ibarettir. Eğer yalnızca a_1 ve

a_2 sayıları kullanılırsa yazılamayan en büyük sayı $a_1a_2 - a_1 - a_2$'dir. Oysa daha çok sayı kullanıldığında böyle basit bir formül yoktur ve olamayacağı da ispatlanmıştır. Öyleyse problem basit bir ifadesi olmasa da bu sayının nasıl bulunacağı problemidir.

2.4 Biraz da Geometri

Uzayda koordinatları tam sayılardan oluşan noktalara kafes noktaları denir. Herhangi bir N tamsayısı için $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = N$ düzlemine π_N diyelim. Frobenius denkleminde N sayısı için bir çözüm olması demek π_N düzleminin birinci sekizlikte kalan kesiminde, yani koordinatları sıfır ya da daha büyük olan noktaların oluşturduğu kesimde, en az bir kafes noktasının olması demektir. Frobenius probleminde aranan N sayısı da birinci sekizlikte kafes noktası olmadığı halde her $k > 0$ tamsayısı için π_{N+k} düzleminin birinci sekizlikte kafes noktası bulunan π_N düzlemini bulmakla eşdeğerdir. Bu yaklaşım kullanılarak Özlük ve Sertöz tarafından bir çözüm algoritması verilmiştir.

2.5 Arf Halkaları

Frobenius problemi geometride çok sık olarak ortaya çıkar. Bu durumlardan biri de tekil bir eğri kolunun çok katlılık dizisini tanımlamaya yönelik problemde görülür. Bu tekilliğin her patlatılışında ortaya çıkan tekil eğri koluna karşılık gelen çok katlılıkları incelemekten ibaret olan bu problemde her tekillikte karşımıza bir halka çıkar. Bu halka tek değişkenli kuvvet serileri halkasının bir alt halkası olarak düşünülebilir ve bu durumda içindeki her elemana bir başlangıç derecesi karşılık gelir. Bu şekilde elde edilen sayılar aslında bir kaç sayının lineer kombinasyonu olarak yazılabilir ki bu da bizi baştaki Frobenius problemine götürür. Burada ortaya çıkan tüm sayıları yazmakta kullanılan baz sayıları tekil noktanın Arf karakterleri olarak anılırlar. Bu karakterler kullanılarak DuVal tarafından değiştirilmiş bir Jacobi algoritmasıyla çok katlılık dizisinin nasıl bulunacağı gösterilmiştir.

– – – 0 – – –