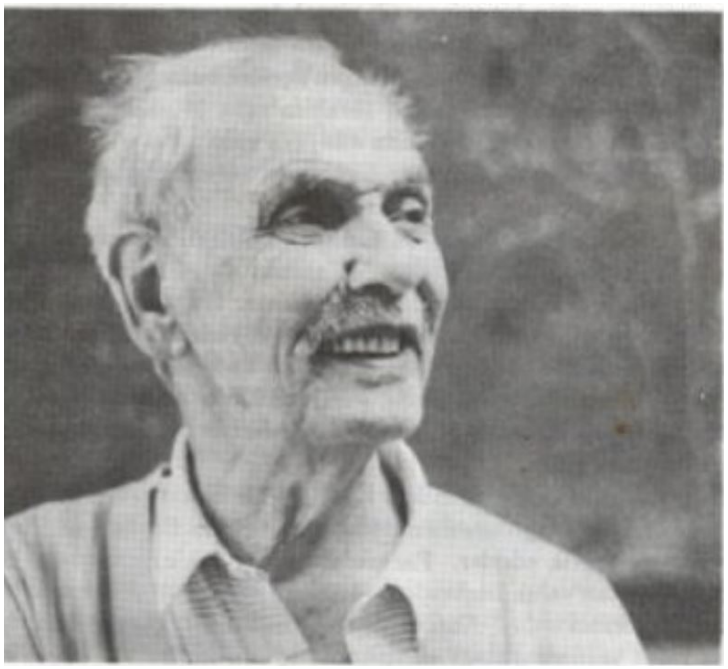
HÜSEYİN DEMİR
Problem kurmaya ve problem çözmeye adanmış bir ömür

Bu derlemeyi hazırlayan
Ali Sinan Sertöz
sertoz@bilkent.edu.tr

Bu genişletilmiş sürüm
Kürşat Aker ve Alp Eden'in katkılarıyla hazırlanmıştır
kursat.aker@uni.lu ve alp.eden5@gmail.com

Bölüm 0. Önsöz iii
Bölüm 1. MONTHLY için İleri Düzey Problemler 1
Bölüm 2. MONTHLY'deki İleri Düzey Problemlerin Çözümleri 5
Bölüm 3. MONTHLY için Temel Düzey Problemler 17
Bölüm 4. MONTHLY'deki Temel Düzey Problemlerin Çözümleri 25
Bölüm 5. MONTHLY Problemlerine Sunulan Çözümler 65
Bölüm 6. Mathematics Magazine için Önerilen Problemler 73
Bölüm 7. Önerilen Problemlerin Çözümleri 91
Bölüm 8. Mathematics Magazine için Kısa Problemler 175
Bölüm 9. Kısa Problemlerin Çözümleri 179
Bölüm 10. Mathematics Magazine Problemlerine Sunulan Çözümler 183
Bölüm 11. Mathesis için Problemler 217
Bölüm 12. Diğer Yayınlar 221
Bölüm 13. Hüseyin Demir'in Kurduğu Problemlerin Tam Listesi 223

0 Önsöz



1916-1995

Hüseyin Demir, yaşamı boyunca yüzden fazla problem kurmuş üretken bir matematikçiydi. Çalışmalarını neredeyse yalnızca American Mathematical Monthly ve Mathematics Magazine dergilerinde yayımladı.

İlk yayını, 1943 yılında American Mathematical Monthly'de "İleri Düzey Problem 4102" başlığıyla çıktı.

Son yayını ise, bir önceki yıl yayımlanan "Önerilen Problem 1405" için hazırladığı ve 1993 yılında Mathematics Magazine'de çıkan "Problemi önerenin çözümü" idi.

Hüseyin Demir'in American Mathematical Monthly ve Mathematics Magazine'deki yayınlarını bulmak için JSTOR'un arama motorunu kullandım. Burada yalnızca Demir'in önerdiği problemleri değil, bu problemlere verilen çözümleri de bir araya getirdim. Ayrıca Demir'in başka kişilerin problemlerine sunduğu yayımlanmış çözümleri de derledim.

Hüseyin Demir, Darüşşafaka Lisesi mezunuydu.

Darüşşafaka Cemiyeti, 1863 yılında yaşları 38, 35, 31, 27 ve 24 olan beş genç Osmanlı beyefendisi tarafından kuruldu. Kuruluşa izin veren Sultan Abdülaziz de o sırada yalnızca 33 yaşındaydı.

Darüşşafaka, Türk tarihindeki ilk sivil eğitim kuruluşudur. İmparatorluğun son on yıllarında askere alınan Müslüman Osmanlı erkeklerinin çoğu, uzun süren ve sık tekrarlanan

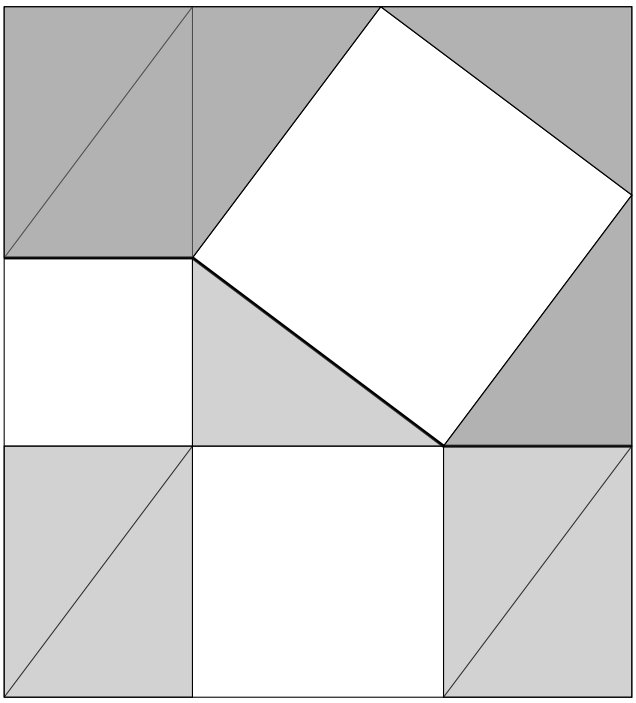
savaşlarda yaşamını yitiriyordu. Böylece birçok aile babasını kaybediyor; bunun sonucunda çocuklar da öğrenimlerini bırakıp Kapalıçarşı'da çalışmaya başlamak zorunda kalıyordu.

Öte yandan gayrimüslim Osmanlı çocukları bu talihsizlikle karşılaşmıyordu. Darüşşafaka Cemiyeti'nin o dönemdeki ve bugün de geçerliliğini koruyan ilkesi bu nedenle "Eğitimde fırsat eşitliği"dir. Anne veya babasını kaybetmiş, nitelikli bir eğitimi sürdürecek maddi olanaklara sahip olmayan çocuklar, seçici bir giriş sınavının ardından Darüşşafaka'ya kabul edilir. Darüşşafaka yatılı bir lisedir; öğrencilerin günlük yaşam ve eğitim giderlerinin tamamı, bugün de bağışlarla desteklenen Darüşşafaka Cemiyeti tarafından karşılanır. Darüşşafaka günümüzde Türkiye'nin en iyi eğitim kurumlarından biri olarak kabul edilmektedir.

Ünlü matematikçilerimizden Salih Zeki de Darüşşafaka'nın 1882 mezunlarındandır. Hüseyin Demir 1935 mezunudur ve kendi anlatımına göre okuldayken Salih Zeki'nin kitaplarını okumuştur. Darüşşafaka'da ortaokul öğrencisiyken Pisagor teoremine "sözsüz ispat" türünde yeni bir ispat bulmuştur; bu ispatı burada yeniden veriyorum.

Hüseyin Demir'in problemlerini bir araya getiren bu derlemeyi hazırlamayı okuluma karşı bir sorumluluk olarak gördüm. İçinde yetiştiğimiz geleneği sürdürmek amacıyla, bu derleme eğitim için serbestçe kullanılmak üzere hazırlanmıştır.

Ali Sinan Sertöz
Darüşşafaka 1973 mezunu
sertoz@bilkent.edu.tr
Aralık 2021 Ankara



İkinci Baskıya Önsöz

Hüseyin Demir, 1965'te yayını sona eren Mathesis dergisinde çeşitli problemler ve bir makale yayımlamıştır. Bu yayınları Kürşat Aker nezaket göstererek temin etti.

Demir, 1977'de yayını sona eren matematik dergisi Delta'da da bir makale yazmıştır. Bu makaleye, Bilkent Kütüphanesi'nin Kütüphanelerarası Ödünç Verme Sistemi'nin değerli yardımlarıyla ulaşıldı.

Son olarak Alp Eden, Demir'in METU Journal'da yayımlanmış, ancak başka yerde kaydı bulunmayan bir makalesini daha buldu. Bu makale de Bilkent Kütüphanesi tarafından temin edildi.

Mathesis problemleri bu kitapçığa alınmıştır. Yukarıda sözü edilen makaleler, benim Hüseyin Demir sayfamda bulunabilir.

Yardıma her zaman hazır olan Bilkent Kütüphanesi'ne içten teşekkürlerimi sunuyor; dostlarım Kürşat ve Alp'in, Hüseyin Demir'in çalışmalarını bir araya getiren bu derlemenin tamamlanmasına yaptıkları katkıları şükranla anıyorum.

Ali Sinan Sertöz
Eylül 2026 Ankara

1 MONTHLY için İleri Düzey Problemler

İleri Düzey Problemlerin Listesi:

[1] İleri Düzey Problem 4102, American Mathematical Monthly, 50, (1943), 638.
[2] İleri Düzey Problem 4125, American Mathematical Monthly, 51, (1944), 252.
[3] İleri Düzey Problem 4134, American Mathematical Monthly, 51, (1944), 475.
[4] İleri Düzey Problem 4193, American Mathematical Monthly, 53, (1946), 160.
[5] İleri Düzey Problem 4215, American Mathematical Monthly, 53, (1946), 470.
[6] İleri Düzey Problem 4679, American Mathematical Monthly, 63, (1956), 191.
[7] İleri Düzey Problem 4695, American Mathematical Monthly, 63, (1956), 426.
[8] İleri Düzey Problem 4710, American Mathematical Monthly, 63, (1956), 669.
[9] İleri Düzey Problem 4735, American Mathematical Monthly, 64, (1957), 277.
[10] İleri Düzey Problem 4818, American Mathematical Monthly, 65, (1958), 779.

İleri Düzey Problem 4102, American Mathematical Monthly, 50, (1943), 638.

4102. Öneren: Hüseyin Demir, Columbia Üniversitesi

O ve I, verilen bir ABC üçgeninin sırasıyla çevrel çemberinin ve içteğet çemberinin merkezleri olsun. BC, CA, AB üzerinde sırasıyla A_0, B_0, C_0 noktaları, her birinin diğer iki kenara olan cebirsel uzaklıklarının toplamı verilen bir l uzunluğuna eşit olacak biçimde alınsın. Şunları sentetik yöntemle ispatlayınız: (1) A_0, B_0, C_0 noktaları doğrusaldır; (2) $A_0B_0C_0$ üzerindeki noktaların ABC'nin kenarlarına olan uzaklıklarının toplamı l sabitidir; (3) $A_0B_0C_0$ doğrusu OI doğrusuna diktir.

İleri Düzey Problem 4125, American Mathematical Monthly, 51, (1944), 252.

4125. Öneren: Hüseyin Demir, Columbia Üniversitesi

Aşağıdaki eşitliği ispatlayınız:

$$\begin{vmatrix} \sin\theta_1 & -e^{-i\theta_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sin\theta_2 & e^{i\theta_2} & -e^{-i\theta_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sin\theta_3 & 0 & e^{i\theta_3} & -e^{-i\theta_3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sin\theta_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{i\theta_n} \end{vmatrix} = \sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n).$$

İleri Düzey Problem 4134, American Mathematical Monthly, 51, (1944), 475.

4134. Öneren: Hüseyin Demir, Columbia Üniversitesi

$C_1^1C_2^1C_3^1$, $A_1A_2A_3$ referans üçgeninin içine çizilmiş üçgen; $C_1^2C_2^2C_3^2$ de $C_1^1C_2^1C_3^1$ üçgeninin içine çizilmiş üçgen olsun. Böyle sürdürülerek n adım sonunda $C_1^nC_2^nC_3^n$ üçgeni elde edilsin. n'inci üçgenin açılarını C_i^n ile göstererek şunları ispatlayınız:

1. $(C_i^n-\pi/3)/(A_i-\pi/3)=(-1)^n2^{-n}$.

2. $n\to\infty$ iken $C_2^nC_3^n$ doğrusunun doğrultusunun limiti, $(A_2A_3, C_2^1C_3^1)$ açısını üç eşit parçaya bölen doğrulardan birinin doğrultusudur. Buradan, bir açıyı cetvel ve pergelle sonsuz sayıda adımda üç eşit parçaya ayıran bir yöntem elde ediniz.

İleri Düzey Problem 4193, American Mathematical Monthly, 53, (1946), 160.

4193. Öneren: Hüseyin Demir, Columbia Üniversitesi

İndisler 5 modülüne göre alınmak üzere, keyfî bir $A_1A_2A_3A_4A_5$ beşgeninin kenarları üzerinde $B_iA_{i+2}A_{i+3}$ üçgenleri, $B_iA_{i+2} \parallel A_iA_{i+1}$ ve $B_iA_{i+3} \parallel A_iA_{i+4}$ olacak biçimde kurulursa, A_iB_i doğruları bir C noktasında kesişir.

İleri Düzey Problem 4215, American Mathematical Monthly, 53, (1946), 470.

4215. Öneren: Hüseyin Demir, Columbia Üniversitesi

Aşağıdaki biçimde tanımlanan Hermite polinomlarının

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2},$$

şu özelliği sağladığını ispatlayınız:

$$n! \sum_{p=0}^{n} \frac{H_p^2(x)}{p!} = H_{n+1}^2(x) - H_n(x) H_{n+2}(x).$$

İleri Düzey Problem 4679, American Mathematical Monthly, 63, (1956), 191.

4679. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye

$A_1A_2A_3A_4A_5$ bir kirişler beşgeni olsun. Ω_{ij}, A_iA_j doğrusunun, geriye kalan üç köşenin oluşturduğu üçgene göre ortopolu olsun. Bu durumda on Ω_{ij} noktasının aynı çember üzerinde bulunduğunu ispatlayınız.

İleri Düzey Problem 4695, American Mathematical Monthly, 63, (1956), 426.

4695. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye

Bir kirişler dörtgeninde, bir köşenin diğer üç köşenin oluşturduğu üçgene göre Simson doğrusu, bu üçgenin Euler doğrusuna dikse, aynı özelliğin dörtgenin diğer köşeleri için de geçerli olduğunu ispatlayınız.

İleri Düzey Problem 4710, American Mathematical Monthly, 63, (1956), 669.

4710. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye

Bir (O) çemberine çizilmiş tam dörtgenin karşılıklı kenar çiftlerinden biri, (O)'ya çizilmiş bir üçgene göre izotomik doğrulardan oluşuyorsa, geriye kalan karşılıklı kenar çiftlerinin de aynı üçgene göre izotomik doğrulardan oluştuğunu ispatlayınız.

İleri Düzey Problem 4735, American Mathematical Monthly, 64, (1957), 277.

4735. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye

$A_1A_2A_3A_4A_5$, düzlemde basit bir beş nokta şekli; d de bu düzlemde herhangi bir doğru olsun. d doğrusu ile A_i'nin karşısındaki a_i kenarının kesişimini B_i; A_iB_{i+1} ve B_iA_{i+1} doğrularının kesişimini ise C_{i+3} ile gösterelim. Bu durumda beş A_iC_i doğrusunun ortak bir D noktası vardır.

İleri Düzey Problem 4818, American Mathematical Monthly, 65, (1958), 779.

4818. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye

d_i'ler bir tam dörtkenarın kenarları, A_{ij} de d_i ve d_j üzerindeki köşe olsun. d_i dışındaki kenarların oluşturduğu üçgeni t_i, bu üçgenin çevrel çemberini (O_i) ile gösterelim. (O_i) üzerindeki bir S_i noktasının t_i'ye göre Simson doğrusunu D_i ile gösterelim.

Bütün i'ler için D_i ile d_i paralelse, (1) S_iO_p doğrusunun A_{qr} köşesinden geçtiğini $(i, p \neq q, r)$ ve (2) S_i noktalarının hepsinin (O) Miquel çemberi üzerinde bulunduğunu ispatlayınız.

---

2 MONTHLY'deki İleri Düzey Problemlerin Çözümleri

4102 Numaralı Problemin Çözümü:
American Mathematical Monthly, **52**, (1945), 103-104.

ÇÖZÜMLER
Üçgende Özel Bir Kesen
4102 [1943, 638]. Öneren: Hüseyin Demir, Columbia Üniversitesi

O ve I, verilen bir ABC üçgeninin sırasıyla çevrel çemberinin ve içteğet çemberinin merkezleri olsun. BC, CA, AB üzerinde sırasıyla A_0, B_0, C_0 noktaları, her birinin diğer iki kenara olan cebirsel uzaklıklarının toplamı verilen bir l uzunluğuna eşit olacak biçimde alınsın. Şunları sentetik yöntemle ispatlayınız: (1) A_0, B_0, C_0 noktaları doğrusaldır; (2) $A_0B_0C_0$ üzerindeki noktaların ABC'nin kenarlarına olan uzaklıklarının toplamı l sabitidir; (3) $A_0B_0C_0$ doğrusu OI doğrusuna diktir.

Problemi önerenin çözümü. (1) CA ve AB kenarlarına olan uzaklıklarının toplamı l olan noktaların geometrik yeri, A_0'dan geçen ve AI'ya dik bir doğrudur. Bu geometrik yerin CA ve AB'yi kestiği noktalar B_c, C_b olsun. Benzer biçimde, B_0, C_0'a karşılık gelen diğer iki geometrik yeri ele alalım. Bu üç geometrik yerin oluşturduğu üçgen $A'B'C'$ olsun. Bu son üçgenin ABC ile perspektif olduğunu ve perspektiflik merkezinin I olduğunu ispatlayacağız. Bu açıktır; çünkü A', iki geometrik yerin kesişimi olduğundan CA, AB'ye uzaklıkları eşittir, yani AI üzerindedir. Benzer biçimde B', C' de sırasıyla BI, CI üzerindedir. Böylece Desargues teoremi, A_0, B_0, C_0 noktalarının doğrusal olduğunu verir.

(2) M, $A_0B_0C_0$ üzerinde bir nokta; x, y, z de bu noktanın BC, CA, AB'ye uzaklıkları olsun. $x+y+z = l$ olduğunu ispatlayacağız. $y+z =$ sabit koşulunu sağlayan noktaların geometrik yerini ele alalım. Bu MQ geometrik yeri (şekle bakınız), B_cC_b'ye paraleldir ve $QQ_1 = y + z$'dir. C_b, A_b noktalarının CA'ya uzaklıkları aynı l değerine eşit olduğundan (bkz. (1)), ispatlamamız gereken $QQ_2 = x$ eşitliğidir. BC'ye paralel MP'yi çizelim; bu durumda $x = MX = PP_1$ olur. $A'A_b$, $A_0A_bC_b$ açısının açıortayı olduğundan $x = PP_1 = PP_2$'dir. Geriye $QP \parallel C_bA_b$ olduğunu ispatlamak kalır. Bu doğrudur; çünkü QMP ve $C_bA_0A_b$ üçgenlerinin QM, C_bA_0 ile MP, A_0A_b kenar çiftleri paraleldir ve bu üçgenler C_0 merkezine göre perspektiftir. Dolayısıyla üçüncü kenarları QP, C_bA_b de paralel olmalıdır; yani $x = PP_2 = QQ_2$'dir.
(3) İki şey ispatlayacağız: (a) $A_0B_0C_0$, (ABC) ve $(A'B'C')$ çemberlerinin kuvvet eksenidir. (b) $(A'B'C')$'nün merkezi O', OI üzerindedir; böylece (2) özelliği ispatlanmış olacaktır.
(a) $\overline{C_0A} \cdot \overline{C_0B} = \overline{C_0A'} \cdot \overline{C_0B'}$ bağıntısına dikkat edelim. $ABB'A'$ dörtgeni bir kirişler dörtgeni olduğundan bu bağıntı doğrudur. ($A_bB'B = A'AB = \frac{1}{2}A$ açı eşitliğine dikkat ediniz.) Böylece C_0'ın iki çembere göre kuvvetleri eşittir. Benzer özellik A_0, B_0 için de geçerlidir.

(b) O''nün OI üzerinde olduğunu ispatlamak için, kenarları AI, BI, CI'ya dik olan $A'B'C'$ değişirken O''nün geometrik yerinin bir doğru olduğunu belirtelim. $A'B'C'$ her zaman ABC ile I merkezine göre perspektif olduğundan, O' noktası I'dan geçen bir doğru çizer. Bu doğru O'dan da geçer. Gerçekten, A' noktası, AI'nın (ABC) çemberiyle kesiştiği noktada seçilsin. B', C''nün aynı çember üzerinde benzer noktalar olacağı kolayca görülür. Böylece $(A'B'C')$'nün merkezi O', (ABC)'nin merkezi O ile çakışır. Dolayısıyla (ABC) ve $(A'B'C')$'nün kuvvet ekseni $A_0B_0C_0$, O ve O' merkezlerinden geçen OI doğrusuna diktir.

Editörün notu. İlk iki teorem, benzer üçgenlerden elde edilir.

ABC'nin ikizkenar olduğu durum bir yana bırakılabilir. Çünkü örneğin AB, AC kenarlarının uzunlukları eşitse, AI'ya göre simetri nedeniyle, B_0, C_0 sırasıyla AC, AB üzerinde olmak üzere AB_0, AC_0 uzunlukları da eşittir. Buradan B_0C_0'ın OI'ya dik olduğu çıkar; bunun tersi ve (1), (2) de doğrudur, ancak A_0 özel bir konumdadır. A_0, B_0, C_0 noktaları verilen l sabitiyle tek türlü belirlenir. B_0'ın x_b, y_b, z_b uzaklıkları $y_b = 0$, $x_b + z_b = l$, vb. koşullarını sağlar. P, C_0B_0 doğrusu üzerinde, bu doğru parçasını $\lambda : 1$ oranında bölen bir nokta olsun. Bu durumda

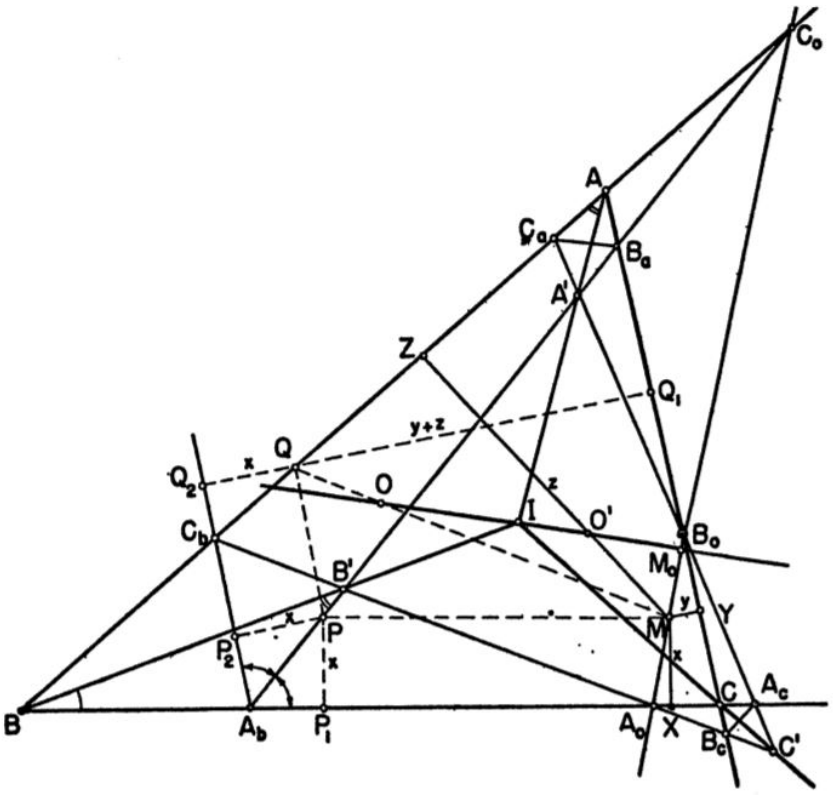
$$(\lambda + 1)x = x_c + \lambda x_b, \qquad (\lambda + 1)y = y_c, \qquad (\lambda + 1)z = \lambda z_b,$$

burada x, y, z, P'nin uzaklıklarıdır. Toplayınca

$$(\lambda + 1)(x + y + z) = (x_c + y_c) + \lambda(x_b + z_b) = (\lambda + 1)l;$$

elde edilir; P sonlu bir noktaysa $x + y + z = l$'dir. C_0B_0 doğrusu, BC'yi $x_a = 0$ ve $y_a + z_a = l$ koşullarını sağlayan sonlu bir noktada keser; dolayısıyla bu nokta A_0'dır. l'nin farklı değerlerine karşılık gelen iki $A_0B_0C_0$ doğrusu paraleldir; çünkü sonlu bir noktada kesişselerdi, bu noktanın uzaklıkları toplamının iki farklı değere eşit olması gerekirdi. P, B_0C_0 üzerinde olmayan bir noktaysa, P'den B_0C_0'a paralel çizilen doğru iki kenarı B_0, C_0'dan farklı noktalarda keser. Dolayısıyla uzaklıklarının toplamı l'den farklı olmalıdır. Bu da verilen bir l için noktaların geometrik yerinin, o l değerine karşılık gelen $A_0B_0C_0$ doğrusu olduğunu ispatlar.

$A'B'C''$'nün (O)'ya çizildiği özel durumda, C_0'ın kutup doğrusu $(AA', BB') = I$'dan geçer; benzer biçimde B_0'ın kutup doğrusu da I'dan geçer. O hâlde I'nın kutup doğrusu B_0C_0, OI'ya diktir.



4125 Numaralı Problemin Çözümü:
American Mathematical Monthly, **52**, (1945), 523.

Trigonometrik Determinantlar

4125 [1944, 352]. Öneren: Hüseyin Demir, Columbia Üniversitesi

Aşağıdaki eşitliği ispatlayınız:

$$\begin{vmatrix} \sin\theta_1 & -e^{-i\theta_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sin\theta_2 & e^{i\theta_2} & -e^{-i\theta_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sin\theta_3 & 0 & e^{i\theta_2} & -e^{-i\theta_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sin\theta_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{i\theta_n} \end{vmatrix} = \sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n).$$

Mary L. Boas'ın çözümü, Tufts College. Her $\sin\theta$ yerine $(e^{i\theta}-e^{-i\theta})/(2i)$ yazıp $1/(2i)$ çarpanını determinantın dışına alınız. Birinci sütunun her elemanından, bulunduğu satırın diğer elemanlarının toplamını çıkarınız. Böylece determinant şu biçimi alır:

$$\frac{1}{2i}\begin{vmatrix} e^{i\theta_1} & -e^{-i\theta_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & -e^{-i\theta_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{i\theta_{n-1}} & -e^{-i\theta_{n-1}} \\ -e^{-i\theta_n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{i\theta_n} \end{vmatrix}.$$

Birinci sütunun elemanlarına göre açınız. $e^{i\theta_1}$'in minörü $e^{i(\theta_2+\theta_3+\cdots+\theta_n)}$'dir; çünkü bu minörün ana köşegeninin altındaki bütün elemanları sıfırdır. $-e^{-i\theta_n}$'nin minörü ise $(-1)^{n-1}e^{-i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{n-1})}$'dir; çünkü ana köşegeninin üstündeki bütün elemanları sıfırdır. Dolayısıyla determinantın değeri

$$\frac{1}{2i}\left[e^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}-e^{-i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}\right]=\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n).$$

Diğer çözenler: E. F. Allen, Murray Barbour, C. B. Barker, Jr., Shepard Bartnoff, R. P. Boas, Jr., Mrs. R. C. Buck, Howard Eves, Clifford Gardner, P. C. Hammer, R. Hamming, J. F. Hofmann, L. M. Kelly, E. Lukacs, Norman Miller, Henry Nelson, Ivan Niven, H. N. Shapiro, Robert Steinberg, R. H. Wilson, Jr. ve problemi öneren.

Editörün notu. Çözümlerin yaklaşık yarısında tümevarım kullanılmış, yaklaşık aynı sayıdaki çözümde ise tümevarıma başvurulmadan basit determinant dönüşümleri uygulanmıştır. Hammer, θ_j yerine $\pi/2 - \theta_j$ yazarak determinantın ve değerinin dönüşümünü ele almıştır. Sadeleştirmeden sonra, birinci sütununda $a_{j1} = \cos\theta_j$, ana köşegeninde $\cos\theta_1, e^{-i\theta_2}, e^{-i\theta_3}, \ldots$, bunun üstündeki paralel köşegende $e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3}, \ldots$ bulunan, diğer elemanları sıfır olan bir determinant elde edilir. Determinantın değerini, n tekse $\cos\sum\theta_j$, çiftse $-i\sin\sum\theta_j$ olarak bulmuştur. Daha basit bir işlem, birinci sütunda aynı değişikliği yaparken ana köşegeni $\cos\theta_1, -e^{i\theta_2}, -e^{i\theta_3}, \ldots, -e^{i\theta_n}$ biçiminde değiştirmek ve özgün determinantın geri kalanını olduğu gibi bırakmaktır. Bu determinantın değeri Hammer'ın determinantının değeriyle aynıdır.

4134 Numaralı Problemin Çözümü:
American Mathematical Monthly, **52**, (1945), 587.

Açının Üç Eşit Parçaya Bölünmesi

4134 [1944, 475]. Öneren: Hüseyin Demir, Columbia Üniversitesi

$C_1^1C_2^1C_3^1$, $A_1A_2A_3$ referans üçgeninin içine çizilmiş üçgen; $C_1^2C_2^2C_3^2$ de $C_1^1C_2^1C_3^1$ üçgeninin içine çizilmiş üçgen olsun. Böyle sürdürülerek n adım sonunda $C_1^nC_2^nC_3^n$ üçgeni elde edilsin. n'inci üçgenin açılarını C_i^n ile göstererek şunları ispatlayınız:
1. $(C_i^n - \pi/3)/(A_i - \pi/3) = (-1)^n 2^{-n}$.
2. $n \to \infty$ iken $C_2^nC_3^n$ doğrusunun doğrultusunun limiti, $(A_2A_3, C_2^1C_3^1)$ açısını üç eşit parçaya bölen doğrulardan birinin doğrultusudur. Buradan, bir açıyı cetvel ve pergelle sonsuz sayıda adımda üç eşit parçaya ayıran bir yöntem elde ediniz.

Howard Eves'in çözümü, College of Puget Sound. 1. $A_1A_2A_3$'ün içteğet çemberinin merkezini I ile gösterirsek $C_2^1IC_3^1 = 2C_1^1$ olur. Dolayısıyla $A_1 + 2C_1^1 = \pi$'dir. Benzer biçimde $A_i + 2C_i^1 = \pi$, yani

$$(C_i^1 - \pi/3)/(A_i - \pi/3) = -2^{-1}.$$

Aynı işlemle

$$(C_i^j - \pi/3)/(C_i^{j-1} - \pi/3) = -2^{-1}, \qquad j = 2, \cdots, n.$$

Çarparak şu sonucu elde ederiz:

$$(C_i^n - \pi/3)/(A_i - \pi/3) = (-1)^n 2^{-n}.$$

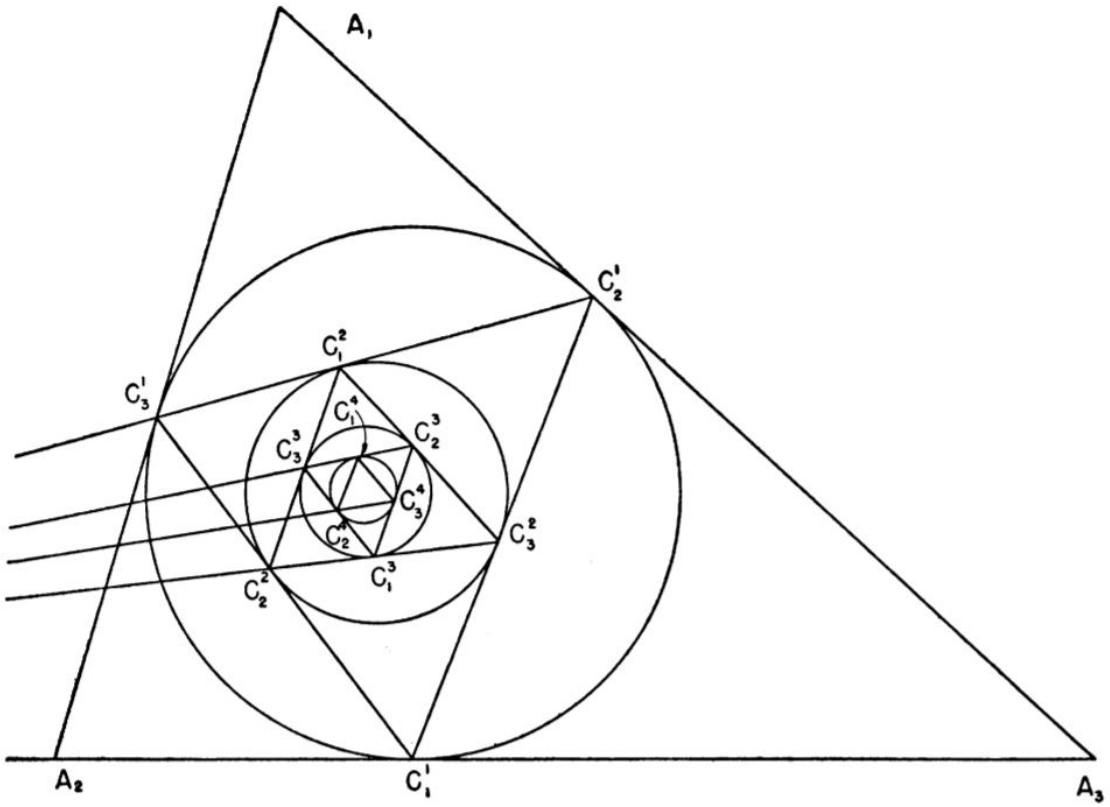
2. Şimdi

$$\lim_{n\to\infty}[\text{açı}(A_2A_3, C_2^nC_3^n)] = \sum_{n=1}^{\infty}\text{açı}(C_1^{2n-2}C_2^{2n-2}, C_1^{2n}C_2^{2n}), \quad \text{burada } C_i^0 = A_i$$

$$= \sum_1^\infty (C_3^{2n-1} - C_1^{2n})$$

$$= \sum_1^\infty [(C_3^{2n-1} - \pi/3) - (C_1^{2n} - \pi/3)]$$

$$= \sum_1^\infty [-2^{-2n+1}(A_3 - \pi/3) - 2^{-2n}(A_1 - \pi/3)],$$



yukarıdaki 1. kısımdaki bağıntılar kullanılmıştır. Sağdaki sonsuz toplam şu biçime indirgenir:

$$\sum_1^\infty [\pi - A_1 - 2A_3]2^{-2n} = (A_2 - A_3)\sum_1^\infty 2^{-2n} = \tfrac{1}{3}(A_2 - A_3) = \tfrac{2}{3}\left(\frac{A_2 - A_3}{2}\right);$$

$$= (\tfrac{2}{3})[\tfrac{1}{2}(A_2 - \pi/3) - \tfrac{1}{2}(A_3 - \pi/3)]$$
$$= (\tfrac{2}{3})[-(C_2^1 - \pi/3) + (C_3^1 - \pi/3)]$$
$$= \tfrac{2}{3}(C_3^1 - C_2^1) = \tfrac{2}{3}\text{açı}(A_2A_3, C_2^1C_3^1).$$

Böylece 2. kısım ispatlanmış olur. Verilen bir $(A_2A_3, C_2^1C_3^1)$ dar açısını üç eşit parçaya bölen doğrulardan birini asimptotik olarak elde etmek için burada önerilen yöntem açıktır. Bununla birlikte,

bir açıyı üç eşit parçaya bölmek için çok daha iyi Öklid geometrisine dayalı asimptotik çizimler bulunduğunu söylemeye gerek yoktur.

Problemi öneren de çözmüştür.

Editörün notu. Açının yaklaşık olarak üç eşit parçaya bölünmesine ilişkin, hata sınırlarını da içeren yöntemler için MONTHLY'deki bazı kaynaklar aşağıdadır:

1932, 478, E. C. Kennedy'nin *Angle Division* makalesi; 2972 [1925, 95]; 3114 [1925, 483]; 3522 [1933, 303]; 3563 [1934, 113]; Pappus'un konikleri kullanan yöntemi 3490 [1932, 243].

4193 Numaralı Problemin Çözümü:
American Mathematical Monthly, **54**, (1947), 349.

Beşgende Bir Noktada Kesişen Doğrular
4193 [1946, 160]. Öneren: Hüseyin Demir, Columbia Üniversitesi

İndisler 5 modülüne göre alınmak üzere, keyfî bir $A_1A_2A_3A_4A_5$ beşgeninin kenarları üzerinde $B_iA_{i+2}A_{i+3}$ üçgenleri, $B_iA_{i+2} \parallel A_iA_{i+1}$ ve $B_iA_{i+3} \parallel A_iA_{i+4}$ olacak biçimde kurulursa, A_iB_i doğruları bir C noktasında kesişir.

J. W. Clawson'ın çözümü, Ursinus College, Collegeville, Pennsylvania. Bir homojen üçdoğrusal koordinat sistemi için $A_1A_2A_4$'ü referans üçgeni alalım. $A_1 = (1,0,0)$, $A_2 = (0,1,0)$, $A_3 = (d,e,f)$, $A_4 = (0,0,1)$, $A_5 = (k,l,m)$ olsun.

O hâlde A_3'ten A_1A_2'ye paralel geçen doğru ile A_4'ten A_1A_5'e paralel geçen doğrunun denklemleri şöyledir:

$$afx + bfy - (ad + be)z = 0, \qquad alx + (bl + cm)y = 0.$$

Böylece B_1'in koordinatları

$$(bl + cm)(ad + be), \qquad -al(ad + be), \qquad acfm;$$

ve A_1B_1'in denklemi

$$cfmy + l(ad + be)z = 0.$$

Aynı biçimde, A_2B_2 ve A_4B_4'ün denklemleri şöyle bulunur:

$$cfmx + d(ak + bl)z = 0, \qquad l(ad + be)x - d(ak + bl)y = 0.$$

Bu üç doğrunun, koordinatları aşağıda verilen bir C noktasında kesiştiği kolayca görülür:

$$d(ak + bl), \qquad l(ad + be), \qquad -cfm.$$

$A_1A_3A_4$ ve $A_2A_4A_5$ üçgenleri kullanılarak, A_3B_3 ve A_5B_5'in de C'den geçtiği aynı biçimde ispatlanabilir.
Problemi öneren de çözmüştür.

Editörün notu. Clawson, Ceva teoreminin tersini kullanarak ikinci bir ispat vermiştir. Problemi öneren, diğer kenarlar sabit tutulurken A_4A_5 kenarı A_5 etrafında döndüğünde oluşan A_3B_3, A_4B_4 doğru demetlerini kullanmıştır. A_3B_3 ile A_4B_4 arasındaki eşleme homografik olduğundan, bu ışınların kesişim noktası C'nin geometrik yeri bir koniktir. Bu konik A_1B_1 ve A_3A_4 doğrularına ayrışır; böylece ispat elde edilir.

4215 Numaralı Problemin Çözümü:
American Mathematical Monthly, **55**, (1948), 34.

Hermite Polinomları

4215 [1946, 470]. Öneren: Hüseyin Demir, Columbia Üniversitesi

Aşağıdaki biçimde tanımlanan Hermite polinomlarının

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}$$

şu özelliği sağladığını ispatlayınız:

$$n! \sum_{p=0}^{n} \frac{H_p^2(x)}{p!} = H_{n+1}^2(x) - H_n(x) H_{n+2}(x).$$

Hsien-yü Hsü'nün çözümü, Yenching Üniversitesi, Peiping, Çin. Pólya–Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze II*, s. 294–295'te Hermite polinomları

aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$h_n(x) = \frac{1}{n!}\, e^{x^2/2}\, \frac{d^n}{dx^n}\, e^{-x^2/2},$$

ve şu fark denklemini sağlar:

$$nh_n(x) = -\, xh_{n-1}(x) - h_{n-2}(x), \qquad n = 2, 3, \cdots .$$

Şuna dikkat edelim:

$$H_n \equiv H_n(x) = (-1)^n n! h_n(x),$$

dolayısıyla fark denklemi şöyle olur:

$$H_n = xH_{n-1} - (n-1)H_{n-2}, \qquad n = 2, 3, \cdots . \tag{1}$$

Bu denklemden ve H_{n+1}, H_{n+2} için benzer denklemlerden x'i yok ederek hemen

$$\begin{aligned} H_{n+1}^2 - H_n H_{n+2} &= n(H_n^2 - H_{n+1}H_{n-1}) + H_n^2 \\ &= n(n-1)(H_{n-1}^2 - H_n H_{n-2}) + nH_{n-1}^2 + H_n^2 \\ &= \cdots \\ &= n!\left\{(H_1^2 - H_2H_0) + \frac{1}{1!}H_1^2 + \frac{1}{2!}H_2^2 + \cdots + \frac{1}{n!}H_n^2\right\} \\ &= n!\sum_{p=0}^{n} H_p^2/p!, \end{aligned}$$

elde ederiz; çünkü $H_1^2 - H_2H_0 = 1$'dir.

Diğer çözenler: F. E. Cothran, A. B. Farnell, L. M. Kelly, Norman Miller, S. T. Parker, W. A. Pierce, W. H. Spragens, M. S. Webster, M. Wyman, Profesör Otto Szász'ın sınıfı ve problemi öneren.

Editörün notu. Bazı çözenler, yukarıdaki çözümün (1) denkleminin Dunham Jackson'ın *Fourier Series and Orthogonal Polynomials* kitabında, s. 176 ve devamında bulunduğunu belirtmiştir. Profesör Szász'ın Ortogonal Açılımlar dersindeki öğrencilerinin çözümü, Christoffel formülü olarak anılan şu formülden hareket eder:

$$\sum_{p=0}^{n} \frac{H_p(x)H_p(y)}{p!} = \frac{H_{n+1}(x)H_n(y) - H_n(x)H_{n+1}(y)}{n!(x-y)}.$$

Bkz. Szegő, *Orthogonal Polynomials*, s. 102. Webster'ın çözümünde ise aşağıdaki bağıntı kullanılır:

$$H_m(x)H_n(x) = n!\sum_{r=0}^{n}\binom{m}{n-r}\frac{H_{m-n+2r}}{r!} \qquad (m \geqq n),$$

Bu bağıntı, E. Feldheim tarafından *Journal of the London Mathematical Society*, 1938, s. 22–29'da elde edilmiştir.

4679 Numaralı Problemin Çözümü:
American Mathematical Monthly, **63**, (1956), 191.

Aynı Çember Üzerindeki On Ortopol
4679 [1956, 191]. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye

$A_1A_2A_3A_4A_5$ bir kirişler beşgeni olsun. Ω_{ij}, A_iA_j doğrusunun, geriye kalan üç köşenin oluşturduğu üçgene göre ortopolu olsun. Bu durumda on Ω_{ij} noktasının aynı çember üzerinde bulunduğunu ispatlayınız.

Chih-yi Wang'ın çözümü, Minnesota Üniversitesi. Aşağıdaki bilinen teoremi kullanıyoruz:

Teorem. Bir doğru, bir üçgenin çevrel çemberini kesiyorsa, kesişim noktalarının Simson doğruları, bu doğrunun söz konusu üçgene göre ortopolunda kesişir. (Bkz. Court, *College Geometry*, 2. baskı, s. 289.)

$A_1A_2A_3A_4A_5$'in çevrel çemberi birim çember olsun; A_i'nin koordinatlarını $(\cos\theta_i, \sin\theta_i)$, $i = 1, 2, \ldots, 5$ alalım. Somut olarak Ω_{12}'nin koordinatlarını bulalım. A_1 ve A_2'nin Simson doğrularının denklemleri şöyledir:

$$y - \tfrac{1}{2}(\sin\theta_j + \sin\theta_3 + \sin\theta_4) = \tfrac{1}{2}\sin(\theta_3 + \theta_4 - \theta_j)$$
$$= \tan\tfrac{1}{2}(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_j)\left[x - \tfrac{1}{2}(\cos\theta_3 + \cos\theta_4 + \cos\theta_j) + \tfrac{1}{2}\cos(\theta_3 + \theta_4 - \theta_j)\right],$$

$j = 1, 2$ için. Denklem sistemi çözülerek

$$\Omega_{12} = \left(\alpha + \tfrac{1}{2}\cos(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_1 - \theta_2),\ \beta + \tfrac{1}{2}\sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_1 - \theta_2)\right),$$

elde edilir. Burada $\alpha = \frac{1}{2}\sum\cos\theta_k$, $\beta = \frac{1}{2}\sum\sin\theta_k$, $k = 1, 2, \ldots, 5$'tir. α ve β simetrik fonksiyonlar olduğundan, indisler yer değiştirilerek on Ω_{ij} noktasının hepsinin merkezi (α, β), yarıçapı $\frac{1}{2}$ olan çember üzerinde bulunduğu kolayca görülür.

Diğer çözenler: J. W. Clawson, R. Goormaghtigh, O. J. Ramler, Rahibe M. Stephanie ve problemi öneren.

Editörün notu. Goormaghtigh bu teoremi *Mathesis*, 1939, s. 312'de vermiştir. Ramler, kirişler yedigenine bir genelleme verir. Ω_{ijk}, $A_iA_jA_k$ üçgeninin, geriye kalan dört köşenin oluşturduğu dörtgene göre Kantor noktası olsun. O zaman otuz beş Ω_{ijk} noktasının hepsi, yedigenin çevrel çemberinin yarısı büyüklüğündeki bir çember üzerinde bulunur.

4695 Numaralı Problemin Çözümü:
American Mathematical Monthly, **64**, (1957), 437.

Simson Doğrusu ve Euler Doğrusu
4695 [1956, 426]. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye

Bir kirişler dörtgeninde, bir köşenin diğer üç köşenin oluşturduğu üçgene göre Simson doğrusu, bu üçgenin Euler doğrusuna dikse, aynı özelliğin dörtgenin diğer köşeleri için de geçerli olduğunu ispatlayınız.

Rahibe M. Stephanie'nin çözümü, Georgian Court College, Lakewood, N. J. Karmaşık koordinatları kullanıp çemberi birim çember alalım. Dörtgenin köşeleri t_1, t_2, t_3, t_4, $|t_i| = 1$ olsun. t_1'in, t_2, t_3, t_4'ün oluşturduğu üçgene göre Simson doğrusunun denklemi şöyledir:

$$2t_1^2 z - 2t_1 s_3 \bar{z} + s_3 + t_1 s_2 - t_1^3 - t_1^2 s_1 = 0,$$

Burada $s_1, s_2, s_3,\ t_2, t_3, t_4$'ün temel simetrik fonksiyonlarıdır. $t_2t_3t_4$ üçgeninin Euler doğrusunun denklemi $s_2 z - s_1 s_3 \bar{z} = 0$'dır. İki doğru dikse, birinin klinantı diğerinin negatifidir; dolayısıyla $s_3/t_1 = -s_1 s_3/s_2$ olur. Sadeleştirilince $t_1t_2+t_1t_3+t_1t_4+t_2t_3+t_2t_4+t_3t_4 = 0$ elde edilir. Bu sonucun simetrisi, özelliğin her köşe için aynı biçimde geçerli olduğunu gösterir.

Diğer çözenler: J. W. Clawson, G. W. Courter, R. Deaux, Beckham Martin, O. J. Ramler, Robert Sibson, Chih-yi Wang ve problemi öneren.

4710 Numaralı Problemin Çözümü:
American Mathematical Monthly, **64**, (1957), 601.

İzotomik Doğrular

4710 [1956, 669]. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye

Bir (O) çemberine çizilmiş tam dörtgenin karşılıklı kenar çiftlerinden biri, (O)'ya çizilmiş bir üçgene göre izotomik doğrulardan oluşuyorsa, geriye kalan karşılıklı kenar çiftlerinin de aynı üçgene göre izotomik doğrulardan oluştuğunu ispatlayınız.

I. O. J. Ramler'ın çözümü, Catholic University of America. Eşlenik koordinatlar sistemini kullanarak (O)'yu birim çember alalım. Üzerindeki vektörel koordinatları T_1, T_2, T_3 olan noktaları içe çizilmiş üçgen; t_1, t_2, t_3, t_4 olan noktaları da içe çizilmiş tam dörtgen olarak alalım. Bu durumda t_2t_3 doğrusu, üçgenin T_2T_3 kenarını, vektörel koordinatı aşağıda verilen bir noktada keser:

$$z = \frac{T_2T_3(t_2 + t_3) - (T_2 + T_3)t_2t_3}{T_2T_3 - t_2t_3}.$$

Benzer biçimde t_1t_4, T_2T_3'ü şu noktada keser:

$$z' = \frac{T_2T_3(t_4 + t_1) - (T_2 + T_3)t_1t_4}{T_2T_3 - t_1t_4}.$$

Varsayım $T_3 - z = z' - T_2$ eşitliğini verir. Gerekli ifadeler yerine konup sadeleştirilince

$$T_2^2T_3^2(T_2 + T_3 - s_1) + T_2T_3s_3 - (T_2 + T_3)s_4 = 0,$$

elde edilir; burada $s_1, s_3, s_4,\ t_1, t_2, t_3, t_4$'ün temel simetrik fonksiyonlarıdır. Bu sonucun simetrisi, önerilen teoremi ispatlar.

II. Roland Deaux'nun çözümü, Faculté Polytechnique, Mons, Belçika. (O) çemberi yerine herhangi bir Γ koniği alınabilir. ABC ve $PQRS$, Γ'ya çizilmiş üçgen ve dörtgen olsun. Desargues teoremine göre $\Gamma, (PQ, RS), (PR, QS), (PS, QR)$ konikleri, ABC'nin her kenarı üzerinde bir involüsyonun dört nokta çiftini belirler. Γ ile PQ, RS izotomik doğrularının belirlediği bu involüsyonun çift noktaları, kenarın orta noktası ve sonsuzdaki noktasıdır. İstenen özellik buradan çıkar.

Diğer çözenler: J. W. Clawson, N. A. Court, R. Goormaghtigh, Josef Langr ve problemi öneren.

4735 Numaralı Problemin Çözümü:
American Mathematical Monthly, **65**, (1958), 128.

Bir Noktada Kesişen Doğrular
4735 [1957, 277]. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye

$A_1A_2A_3A_4A_5$, düzlemde basit bir beş nokta şekli; d de bu düzlemde herhangi bir doğru olsun. d doğrusu ile A_i'nin karşısındaki a_i kenarının kesişimini B_i; A_iB_{i+1} ve B_iA_{i+1} doğrularının kesişimini ise C_{i+3} ile gösterelim. Bu durumda beş A_iC_i doğrusunun ortak bir D noktası vardır.

E. J. F. Primrose'un çözümü, The University, Leicester, İngiltere. Her A_i'nin, karşısındaki a_i kenarının kutbu olduğu tek bir P kutupluluğu vardır (Coxeter, *The Real Projective Plane*, 5.65). $A_1C_1B_3B_4$ dört noktasını ele alalım. A_1B_3'ün P'ye göre kutbu A_3 olduğundan, A_1B_3 ile C_1B_4 eşlenik doğrulardır; benzer biçimde A_1B_4 ile C_1B_3 de eşleniktir. Hesse teoreminin dualine göre (Coxeter, 5.55), A_1C_1 ve B_3B_4 eşlenik doğrulardır. Dolayısıyla A_1C_1, d'nin P'ye göre kutbu olan D'den geçer. Benzer bir akıl yürütmeyle bütün A_iC_i doğruları D'den geçer.

Diğer çözenler: W. B. Carver, J. W. Clawson, R. Deaux ve problemi öneren.

4818 Numaralı Problemin Çözümü:
American Mathematical Monthly, **66**, (1959), 732.

Tam Dörtkenarın Miquel Çemberinin Bir Özelliği
4818 [1958, 779]. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye

d_i'ler bir tam dörtkenarın kenarları, A_{ij} de d_i ve d_j üzerindeki köşe olsun. d_i dışındaki kenarların oluşturduğu üçgeni t_i, bu üçgenin çevrel çemberini (O_i) ile gösterelim. (O_i) üzerindeki bir S_i noktasının t_i'ye göre Simson doğrusunu D_i ile gösterelim.

Bütün i'ler için D_i ile d_i paralelse, (1) S_iO_p doğrusunun A_{qr} köşesinden geçtiğini $(i, p \neq q, r)$ ve (2) S_i noktalarının hepsinin (O) Miquel çemberi üzerinde bulunduğunu ispatlayınız.

Problemi önerenin çözümü. (1) S_i ve O_p'nin d_r üzerindeki izdüşümlerini U_{ir}, V_{pr} ile gösterelim. Yönlü açıları kullanarak

$$\begin{aligned} \measuredangle V_{pr}O_pA_{qr} &= \measuredangle A_{ir}A_{qi}A_{qr} && ((O_p) \text{ çemberinden}), \\ &= \measuredangle U_{ir}U_{iq}A_{qr} && (D_i \parallel d_i \text{ olduğundan}), \\ &= \measuredangle U_{ir}S_iA_{qr}. && (S_iU_{ir}A_{qr}U_{iq} \text{ çemberinden}). \end{aligned}$$

O_pV_{pr}, S_iU_{ir}'ye paralel olduğundan, S_i, O_p, A_{qr} noktalarının istenen doğrusallığı elde edilir.
(2) F Miquel noktası olmak üzere, O_pO_q merkezler doğrusu FA_{pq} kuvvet eksenine dik olduğundan sırasıyla

$$\begin{aligned}
\measuredangle\, O_pO_rO_q &= \measuredangle\, A_{qi}FA_{pi}, \\
&= \measuredangle\, A_{qr}A_{pq}A_{pi} && ((O_r) \text{ çemberinden}), \\
&= \measuredangle\, A_{qr}A_{pq}A_{pr}, \\
&= \measuredangle\, A_{qr}S_iA_{pr} && ((O_i) \text{ çemberinden}), \\
&= \measuredangle\, O_pS_iO_q, && ((1) \text{ özelliğinden}),
\end{aligned}$$

ve S_i, (O) Miquel çemberi üzerindedir.

A. E. Landry de çözmüştür.

3 MONTHLY için Temel Düzey Problemler

Temel Düzey Problemlerin Listesi:

[1] Temel Düzey Problem 1134, American Mathematical Monthly, 61, (1954), 568.
[2] Temel Düzey Problem 1160, American Mathematical Monthly, 62, (1955), 182.
[3] Temel Düzey Problem 1197, American Mathematical Monthly, 63, (1956), 39.
[4] Temel Düzey Problem 1209, American Mathematical Monthly, 63, (1956), 186.
[5] Temel Düzey Problem 1217, American Mathematical Monthly, 63, (1956), 342.
[6] Temel Düzey Problem 1778, American Mathematical Monthly, 72, (1965), 420.
[7] Temel Düzey Problem 1779, American Mathematical Monthly, 72, (1965), 420.
[8] Temel Düzey Problem 1877, American Mathematical Monthly, 73, (1966), 410.
[9] Temel Düzey Problem 1878, American Mathematical Monthly, 73, (1966), 410.
[10] Temel Düzey Problem 2100, American Mathematical Monthly, 75, (1968), 670.
[11] Temel Düzey Problem 2101, American Mathematical Monthly, 75, (1968), 670.
[12] Temel Düzey Problem 2109, American Mathematical Monthly, 75, (1968), 780.
[13] Temel Düzey Problem 2110, American Mathematical Monthly, 75, (1968), 780.
[14] Temel Düzey Problem 2124, American Mathematical Monthly, 75, (1968), 899.
[15] Temel Düzey Problem 2160, American Mathematical Monthly, 76, (1969), 300.
[16] Temel Düzey Problem 2213, American Mathematical Monthly, 77, (1970), 79.
[17] Temel Düzey Problem 2311, American Mathematical Monthly, 78, (1971), 793.
[18] Temel Düzey Problem 2312, American Mathematical Monthly, 78, (1971), 793.
[19] Temel Düzey Problem 2363, American Mathematical Monthly, 79, (1972), 662.
[20] Temel Düzey Problem 2462, American Mathematical Monthly, 81, (1974), 281.
[21] Temel Düzey Problem 2625, American Mathematical Monthly, 83, (1976), 812.
[22] Temel Düzey Problem 3135, American Mathematical Monthly, 93, (1986), 215.
[23] Temel Düzey Problem 3164, American Mathematical Monthly, 93, (1986), 566.
[24] Temel Düzey Problem 3422, American Mathematical Monthly, 98, (1991), 158.
[25] Temel Düzey Problem 3469, American Mathematical Monthly, 98, (1991), 955.

Temel Düzey Problem 1134, American Mathematical Monthly, 61, (1954), 568.

E 1134. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye

Bir tam sayının karesinin mükemmel sayı olamayacağını ispatlayınız.

Temel Düzey Problem 1160, American Mathematical Monthly, 62, (1955), 182.

E 1160. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye

Bir tam dörtkenarda, herhangi bir kenarın diğer üç kenarın oluşturduğu üçgene göre izotomik doğrusunun, dörtkenarın Newton doğrusuna paralel olduğunu ispatlayınız.

Temel Düzey Problem 1197, American Mathematical Monthly, 63, (1956), 39.

E 1197. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye

ABC bir dik üçgen, CH de AB hipotenüsüne ait yükseklik olsun. ABC, HCA, HCB üçgenlerinin içteğet çemberlerinin yarıçapları toplamının CH'ye eşit olduğunu gösteriniz.

Temel Düzey Problem 1209, American Mathematical Monthly, 63, (1956), 186.

E 1209. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye

ABC herhangi bir üçgen, (I) de içteğet çemberi olsun. (I), BC, CA, AB'ye sırasıyla D, E, F noktalarında teğet olsun; BE, CF cevianlarını da sırasıyla E', F' noktalarında kessin. $D(E, F, E', F')$ çift oranının bütün ABC üçgenleri için aynı olduğunu gösteriniz.

Temel Düzey Problem 1217, American Mathematical Monthly, 63, (1956), 342.

E 1217. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye

Aşağıdaki çarpımı hesaplayınız:

$$\prod_{d|n} d^{\phi(n/d)+\phi(d)}.$$

Temel Düzey Problem 1778, American Mathematical Monthly, 72, (1965), 420.

E 1778. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

R, r, r_1, r_2, r_3 bir üçgenin sırasıyla çevrel, içteğet ve dışteğet çemberlerinin yarıçapları ise, aşağıdaki eşitliği ispatlayınız:

$$\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_3^3} = \frac{12R}{r \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}.$$

Temel Düzey Problem 1779, American Mathematical Monthly, 72, (1965), 420.

E 1779. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

h_i ve r_i bir üçgenin yükseklikleri ve dışteğet çemberlerinin yarıçapları ise, aşağıdaki eşitsizliği ispatlayınız:

$$\frac{r_1}{h_1} + \frac{r_2}{h_2} + \frac{r_3}{h_3} \geqq 3.$$

Temel Düzey Problem 1877, American Mathematical Monthly, 73, (1966), 410.

E 1877. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara

$ABCDE$, AE çaplı birim çembere çizilmiş bir dışbükey beşgen ve $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DE = d$ olsun. Şu eşitsizliği ispatlayınız:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + abc + bcd < 4.$$

Temel Düzey Problem 1878, American Mathematical Monthly, 73, (1966), 410.

E 1878. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara

$A_1A_2 \cdots A_n$, yarıçapı R olan (O) çemberine çizilmiş bir düzgün çokgen olsun. $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ üçgeninin içteğet çemberinin merkezini I_i ile; A_iA_{i+2}, $A_{i+2}A_{i+1}$, $A_{i+1}A_{i+3}$ doğrularının oluşturduğu üçgeninkini de J_i ile gösterelim (indisler n modülüne göre alınmaktadır). $I_1, \ldots, I_n$ ve $J_1, \ldots, J_n$ noktalarının tümünün, yarıçapı $R' = R\cos(3\pi/2n)/\cos(\pi/2n)$ olan aynı çember üzerinde bulunduğunu gösteriniz.

Temel Düzey Problem 2100, American Mathematical Monthly, 75, (1968), 670.

E 2100. Öneren: H. Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Aşağıdaki

$$(1)\ \frac{x-a_1}{a_1-a_2}=\frac{a-b}{b-c}, \qquad (2)\ \frac{x-b_1}{b_1-b_2}=\frac{b-c}{c-a}, \qquad (3)\ \frac{x-c_1}{c_1-c_2}=\frac{c-a}{a-b},$$

$$(4)\ x+a=b_2+c_1, \qquad (5)\ x+b=c_2+a_1, \qquad (6)\ x+c=a_2+b_1$$

bağıntılarından herhangi beşinin altıncısını gerektirdiğini gösteriniz. a, b, c'yi karmaşık düzlemde bir ABC referans üçgeninin köşelerine, diğer sayıları da diğer noktalara karşılık gelen karmaşık sayılar alarak, bu tutarlı bağıntılar sistemini geometrik olarak yorumlayınız.

Temel Düzey Problem 2101, American Mathematical Monthly, 75, (1968), 670.

E 2101. Öneren: H. Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

ABC bir üçgen olsun. AB, AC kenarlarına sırasıyla B, C noktalarında teğet olan parabolü P_a ile gösterelim. P_b ve P_c parabolleri de benzer biçimde tanımlansın. Bu paraboller ABC'nin içinde A', B', C' noktalarında kesişsin. ABC, $A'B'C'$, $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$, $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$ (eğrisel) üçgensel bölgelerinin alanlarını sırasıyla $\Delta, \Delta_0, \Delta'_a, \Delta'_b, \Delta'_c, \Delta''_a, \Delta''_b, \Delta''_c$ ile gösterelim. Şunları ispatlayınız:

(1) $\triangle'_a = \triangle'_b = \triangle'_c = (\triangle_1)$, $\triangle''_a = \triangle''_b = \triangle''_c = (\triangle_2)$,
(2) $\triangle_0 : \triangle_1 : \triangle_2 : \triangle = 15:17:5:81.$

Temel Düzey Problem 2109, American Mathematical Monthly, 75, (1968), 780.

E 2109. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

ABC bir üçgen, A' de BC kenarı üzerinde sabit bir nokta olsun. Verilen bir XYZ üçgenine aynı yönlü benzer olan, ABC'ye içten çizilmiş $A'B'C'$ üçgenini kurunuz.

Temel Düzey Problem 2110, American Mathematical Monthly, 75, (1968), 780.

E 2110. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Bir düzlemdeki AUV, VBU, UVC üçgenleri verilen bir üçgene aynı yönlü benzer ise, ABC üçgeni de bu üçgene aynı yönlü benzerdir.

Temel Düzey Problem 2124, American Mathematical Monthly, 75, (1968), 899.

E 2124. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Bir ABC üçgeninin BC, CA, AB kenarları üzerine dışa doğru $BCDE$, $ACFG$, $BAHK$ karelerini çizip $FCDQ$, $EBKP$ paralelkenarlarını kurunuz. APQ'nun bir ikizkenar dik üçgen olduğunu gösteriniz.

Temel Düzey Problem 2160, American Mathematical Monthly, 76, (1969), 300.

E 2160. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

$A_1A_2A_3$ üçgeninin içinde veya sınırında bulunan bir P noktasının A_i köşesine ve bu köşenin karşısındaki kenara uzaklıkları sırasıyla p_i, x_i olsun $(i = 1, 2, 3)$. İçteğet çemberinin yarıçapını r ile göstererek şu eşitsizlikleri ispatlayınız:

(a) $$\sum_{i=1}^{3} p_i(\tfrac{1}{2}\sin A_i) \leqq \sum_{i=1}^{3} x_i \leqq \sum_{i=1}^{3} p_i \sin(\tfrac{1}{2}A_i).$$

(b) $$p_2p_3 + p_3p_1 + p_1p_2 \geqq 8x_1x_2x_3/r.$$

Temel Düzey Problem 2213, American Mathematical Monthly, 77, (1970), 79.

E 2213. Öneren: H. Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Bir (düzlemsel) çokgenin köşelerinden geçen ve çevresini iki eşit parçaya ayıran doğrular bir noktada kesişiyorsa, bu çokgenin *Nagel özelliğine* sahip olduğunu söyleyelim. Bütün üçgenlerin Nagel özelliğine sahip olduğu, ancak her dörtgenin bu özelliğe sahip olmadığı bilinmektedir. Nagel özelliğine sahip basit, dejenere olmayan dörtgenleri belirleyiniz.

Temel Düzey Problem 2311, American Mathematical Monthly, 78, (1971), 793.

E 2311. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Bir $A_1A_2A_3A_4$ dörtgeni bir çembere içten çizilebiliyorsa, A_pA_q'nun orta noktasından A_rA_s'ye dik çizilen (altı) doğrunun bir noktada kesiştiğini ispatlayınız $(p, q, r, s$ birbirinden farklıdır).

Temel Düzey Problem 2312, American Mathematical Monthly, 78, (1971), 793.

E 2312. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

D, pozitif yönlendirilmiş bir ABC üçgeninin düzleminde bir nokta olsun; AD, BD, CD, karşılarındaki kenarları sırasıyla A_1, B_1, C_1 noktalarında kessin. $\overline{BA_1}$, $\overline{CB_1}$, $\overline{AC_1}$ yönlü doğru parçaları eşitse $(= \delta)$, D tek olarak belirlenir ve ABC'nin içinde bulunur. (D ile Ω Brocard noktası arasındaki benzerliğe dikkat ediniz.)

Temel Düzey Problem 2363, American Mathematical Monthly, 79, (1972), 662.

E 2363. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

$A' = a$, $B' = b$, $C' = c$, $A = a'$, $B = b'$, $C = c'$ eşitliklerini sağlayan ABC ve $A'B'C'$ küresel üçgen çiftlerini karakterize ediniz.

Temel Düzey Problem 2462, American Mathematical Monthly, 81, (1974), 281.

E 2462. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

P, $A_1A_2A_3$ üçgeninin içinde bir nokta olsun. P'nin A_i köşesine uzaklığını R_i, A_i'nin karşısındaki a_i kenarına uzaklığını da r_i ile gösterelim. Erdős–Mordell eşitsizliği şöyledir:

$$R_1 + R_2 + R_3 \geqq 2(r_1 + r_2 + r_3).$$

$R_i \geq 0$ her zaman geçerli olmak ve r_i, P ile A_i noktaları a_i'nin aynı tarafında ya da karşı taraflarında bulunmasına göre sırasıyla pozitif veya negatif alınmak üzere, yukarıdaki eşitsizliğin $A_1A_2A_3$ düzlemindeki her P noktası için geçerli olduğunu ispatlayınız.

Temel Düzey Problem 2625, American Mathematical Monthly, 83, (1976), 812.

E 2625. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

A_i $(i = 0, 1, 2, 3$; indisler 4 modülüne göre), bir Γ çemberi üzerinde dört nokta olsun. Γ'nın A_i'deki teğetini t_i ile, A_{i-1} ve A_{i+1}'den geçen ve t_i'ye paralel olan doğruları da sırasıyla p_i ve q_i ile gösterelim. $B_i = t_i \cap t_{i+1}$, $C_i = p_i \cap q_{i+1}$ ise, dört B_iC_i doğrusunun ortak bir noktası olduğunu gösteriniz.

Temel Düzey Problem 3135, American Mathematical Monthly, 93, (1986), 215.

E 3135. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Bir çembere içten çizilmiş çeşitkenar bir ABC üçgeninde, köşelerden birinin karşısındaki çember yayı üzerinde, bu köşeye uzaklığı diğer iki köşeye uzaklıkları toplamına eşit olan bir D noktası bulunduğunu ispatlayınız.

D'nin cetvel ve pergelle nasıl kurulabileceğini gösteriniz.

Temel Düzey Problem 3164, American Mathematical Monthly, 93, (1986), 566.

E 3164. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

s, t, dışındaki bir noktadan bir elipse çizilen teğet parçalarının uzunlukları olsun. s/t oranının uç değerlerini bulunuz.

Temel Düzey Problem 3422, American Mathematical Monthly, 98, (1991), 158.

E 3422. Öneren: H. Demir ve C. Tezer, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

F ve F', verilen bir çemberin merkezine göre simetrik iki nokta; S de çember üzerinde, FF' doğrusunda bulunmayan bir nokta olsun. SF ve SF''nin çemberle ikinci kesişim noktaları sırasıyla P ve P' olsun. Çemberin P ve P''deki teğetleri T noktasında kesişiyorsa, FF''nin orta dikmesinin ST doğru parçasının orta noktasından geçtiğini ispatlayınız.

Temel Düzey Problem 3469, American Mathematical Monthly, 98, (1991), 955.

E 3469. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

P, ABC üçgeninin içinde bir nokta olsun; AP, BP, CP doğruları BC, CA, AB doğrularını sırasıyla D, E, F noktalarında kessin. Altı PBD, PDC, PCE, PEA, PAF, PFB üçgeninin ağırlık merkezlerinin bir konik üzerinde bulunması için gerek ve yeter koşulun, P'nin üçgenin üç kenarortayından en az biri üzerinde bulunması olduğunu ispatlayınız.

4 MONTHLY'deki Temel Düzey Problemlerin Çözümleri

1134 Numaralı Problemin Çözümü:
American Mathematical Monthly, **62**, (1955), 257.

Tam Kareler ve Mükemmel Sayılar
E 1134 [1954, 568]. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye

Bir tam sayının karesinin mükemmel sayı olamayacağını ispatlayınız.

I. C. F. Pinzka'nın çözümü, Princeton, N. J. $N = \prod p^{2a}$ ise, N'nin bölenleri toplamı

$$\prod \frac{p^{2a+1} - 1}{p - 1}.$$

olur. Bu sayı daima tek olduğundan, mükemmel sayı olması için gerekli olan $2N$ değerine eşit olamaz.

II. C. D. Olds'un çözümü, San Jose State College. Euler, bir tek mükemmel sayının $r^{4k+1}P^2$ biçiminde olması gerektiğini ispatlamıştır; burada r, $4n + 1$ biçiminde bir asal sayıdır. Bir çift mükemmel sayı ise Öklid tipinde, yani $2^p - 1$ asal olmak üzere $2^{p-1}(2^p - 1)$ biçiminde olmalıdır. Dolayısıyla bir tam kare mükemmel sayı olamaz.

1160 Numaralı Problemin Çözümü:
American Mathematical Monthly, **62**, (1955), 658.

Tam Dörtkenarın Newton Doğrusunun Bir Özelliği
E 1160 [1955, 182]. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye

Bir tam dörtkenarda, herhangi bir kenarın diğer üç kenarın oluşturduğu üçgene göre izotomik doğrusunun, dörtkenarın Newton doğrusuna paralel olduğunu ispatlayınız.

I. Problemi önerenin çözümü. d, dörtkenarın dört kenarından biri; ABC de buna karşılık gelen üçgen olsun. d'nin ABC üçgeninin BC, CA, AB kenarlarıyla kesişimlerini α, β, γ ile gösterelim. $\alpha\beta\gamma$'nın ABC üçgenine göre izotomik doğrusu IJK, α, β, γ noktalarının ABC üçgeninin BC, CA, AB kenarlarının A', B', C' orta noktalarına göre simetrikleri I, J, K alınarak elde edilir. $A\alpha, B\beta, C\gamma$'nın orta noktaları I', J', K' olsun. Dörtkenarın Newton doğrusu üzerindeki bu noktalar, açıkça ABC üçgeninin orta noktalar üçgeni $A'B'C'$'nin kenarları üzerindedir. ABC üçgeni ile IJK doğrusunun oluşturduğu tam dörtkenarın, $A'B'C'$ üçgeni ile $I'J'K'$ doğrusunun oluşturduğu tam dörtkenara benzer olduğu kolayca görülür. Çünkü birincisi, ABC ve $A'B'C'$ üçgenleri benzerdir ve benzerlik oranı $2:1$'dir; ikincisi,

$$BI = C\alpha = 2(B'I'), \qquad AJ = C\beta = 2(A'J'), \qquad AK = B\gamma = 2(A'K').$$

Bu, IJK ve $I'J'K'$ doğrularının paralel olduğunu ispatlar.

II. Rahibe M. Stephanie'nin çözümü, Georgian Court College, Lakewood, N. J. Dört doğruya teğet olan bir ve yalnız bir parabol bulunduğundan, tam dörtkenarı (dik koordinatlarda) $y^2 = 4ax$ parabolüne teğet olarak ele alalım. Bu durumda $y = m_i x + a/m_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, dörtkenarın $1, 2, 3, 4$ kenarlarının denklemleri olarak alınabilir. Koordinatları

$$(a/m_1m_2,\ a/m_1 + a/m_2)$$

olan nokta, 1 ve 2 kenarlarının kesişimidir; diğer kesişimler de benzer biçimde verilir. 123 üçgeninin 2 kenarının orta noktasının koordinatları

$$(a/2)\left[(m_1 + m_3)/m_1m_2m_2,\ 2/m_2 + 1/m_1 + 1/m_3\right].$$

olur. (x, y), 4 kenarının 2 kenarıyla kesişimine izotomik olan, 2 kenarı üzerindeki nokta ise,

$$y + a/m_2 + a/m_4 = 2a/m_2 + a/m_1 + a/m_3,$$

buradan

$$y = a(1/m_1 + 1/m_2 + 1/m_3 - 1/m_4),$$

elde edilir. Bu sonuç m_1, m_2, m_3'e göre simetriktir. Böylece 4 kenarının 123 üçgenine göre izotomik doğrusunun, parabolün eksenine paralel olduğu ispatlanır. Newton doğrusu da parabolün eksenine paraleldir; çünkü dörtkenara içten çizilmiş bütün koniklerin merkezlerinin geometrik yeridir ve bu geometrik yer parabolün merkezini de içerir.

1197 Numaralı Problemin Çözümü:

American Mathematical Monthly, **63**, (1956), 493.

Zengin Bir Konfigürasyon

E 1197 [1956, 39]. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye

ABC bir dik üçgen, CH de AB hipotenüsüne ait yükseklik olsun. ABC, HCA, HCB üçgenlerinin içteğet çemberlerinin yarıçapları toplamının CH'ye eşit olduğunu gösteriniz.

Leon Bankoff'un çözümü, Los Angeles, Kaliforniya. I. Bir dik üçgenin içteğet çemberinin çapı, dik kenarlar toplamından hipotenüsün çıkarılmasına eşittir. Bu bağıntıyı ABC, HCA, HCB üçgenlerine uygulayarak

$$\frac{(AC + CB - AB) + (AH + CH - AC) + (CH + HB - CB)}{2} = CH.$$

elde ederiz. II. Benzer dik üçgenlerde içteğet çemberinin yarıçapının hipotenüse oranı aynıdır. Dolayısıyla

$$r/c = r_1/b = r_2/a = (r + r_1 + r_2)/(a + b + c),$$

yazabiliriz; burada r, r_1, r_2, ABC, HCA, HCB üçgenlerinin içteğet çemberlerinin yarıçaplarıdır.

$$r/c = CH/(a + b + c)$$

olduğundan, $r + r_1 + r_2 = CH$ elde edilir.

Konfigürasyonun seçilmiş diğer özellikleri. R, S, T, sırasıyla AHC, CHB, ABC üçgenlerinin içteğet çemberlerinin merkezleri; H, R', S', T' de C, R, S, T'nin AB üzerindeki dik izdüşümleri olsun. r, r_1, r_2, sırasıyla ABC,

AHC, CHB üçgenlerinin içteğet çemberlerinin yarıçaplarını göstersin. P ve Q, CR ve CS cevianlarının ayaklarıdır. RS, AC'yi U'da, CB'yi V'de keser. K, PS ile RQ'nun kesişimidir.

(1) T', RST üçgeninin çevrel çemberinin merkezidir; Q, S, T, R, P aynı çember üzerindedir; $PT' = TT' = T'Q$.

(2) T, CRS üçgeninin diklik merkezi ve CPQ üçgeninin çevrel çemberinin merkezidir.

(3) $r_1^2 + r_2^2 = r^2$.

(4) $RS = CT = PT = QT = r\sqrt{2}$.

(5) HSR, ABC, AHC, HCB üçgenleri benzerdir.

(6) A, R, S, B aynı çember üzerindedir. RST ve ABT üçgenleri ters yönlü benzerdir.

(7) R, T', H, S aynı çember üzerindedir. (RS bu çemberin bir çapıdır.)

(8) $T'S$, AC'ye; RT', CB'ye paraleldir.

(9) $RR'T'$ ve $T'S'S$ üçgenleri eştir (ve ABC üçgenine benzerdir).

(10) ATB, BCS, ARC üçgenleri benzerdir.

(11) $\angle ATB = \angle BSC = \angle ARC = 135°$.

(12) $AC = AQ$; $PB = CB$.

(13) $CU = CV$; CT, UV'nin orta dikmesidir.

(14) PS, RQ, CH, CPQ üçgeninin diklik merkezi K'de kesişir.

(15) PS, AT'ye; RQ, TB'ye paraleldir. PBS ve CSB üçgenleri eştir; AQR ve ARC üçgenleri de eştir.

(16) RS'nin orta noktası, CPQ üçgeninin dokuz nokta çemberinin merkezidir.

(17) HSR üçgeninin çevrel çemberi, CPQ üçgeninin dokuz nokta çemberidir.

(18) ARC ve CSB üçgenlerinin çevrel çemberleri C'de teğettir; CT bunların ortak iç teğetidir.

(19) $RT = KS = SQ$; $RP = RK = TS$; PKR ve KQS üçgenleri ikizkenar dik üçgenlerdir. ($RT'S$ üçgeni de öyledir.)

(20) A, P, T, C aynı çember üzerindedir; B, Q, T, C aynı çember üzerindedir.

(21) $T'S'S$ üçgeninin çevresi = $RR'T$ üçgeninin çevresi = CH (çünkü $SS' = r_2$, $T'S' = r_1$, $T'S = r$).

(22) RST üçgeninin alanı = $(a + b - c)^3/8c = r^3/c$.

(23) $PQSTR$ beşgeninin alanı = $2r^3/c + r^2$.

(24) CPQ üçgeninin alanı = abr/c.

Diğer çözenler: W. A. Al-Salam, L. C. Barrett, Robert Bart, G. E. Bills, R. L. Caskey, G. B. Charlesworth, N. A. Childress, T. Y. Chow, Mary Constable, R. J. Cormier, K. W. Crain, A. E. Danese, D. E. D'Atri, G. W. Day, Hazel Evans, Herta Freitag, Michael Goldberg, A. J. Goldman, Peter Gould, Cornelius Groenewoud, D. J. Hansen, Vern Hoggatt, R. T. Hood, Roger Hou, J. P. Hoyt, Raymond Huck, Louise Hutchinson, A. R. Hyde, P. W. M. John, Edgar Karst, M. S. Klamkin, W. G. Koellner, Sam Kravitz, M. A. Laframboise, L. E. Laird, B. R. Leeds, L. I. Lokomowitz, Robert Lynch, D. C. B. Marsh, Beckham Martin, C. N. Mills, C. S. Ogilvy, Margaret Olmsted, M. J. Pascual, Walter Penney, L. L. Pennisi ve N. C. Scholomiti (birlikte), C. F. Pinzka, P. W. A. Raine, M. A. Rachid, L. A. Ringenberg, Azriel Rosenfeld, Donald Rubin, C. M.

Sandwick, Sr., E. D. Schell, G. J. Simmons, Bernard Smilowitz, Rahibe M. Stephanie, A. V. Sylwester, W. R. Talbot, Chih-yi Wang, R. M. Warten, Dale Woods, Roscoe Woods, André Yandl, David Zeitlin ve problemi öneren. Geç gelen

çözümler: Paul Herzberg ve Alan Wayne.
Bu problemin N. A. Court, *College Geometry*, 2. baskı, s. 93, alıştırma 19b'de ve *Scripta Mathematica*, cilt 16 (1950), s. 167'de yer aldığı belirtilmiştir.

1209 Numaralı Problemin Çözümü:
American Mathematical Monthly, **63**, (1956), 186.

Her Üçgenle İlişkili Bir Çift Oran
E 1209 [1956, 186]. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye

ABC herhangi bir üçgen, (I) de içteğet çemberi olsun. (I), BC, CA, AB'ye sırasıyla D, E, F noktalarında teğet olsun; BE, CF cevianlarını da sırasıyla E', F' noktalarında kessin. $D(E, F, E', F')$ çift oranının bütün ABC üçgenleri için aynı olduğunu gösteriniz.

I. W. B. Carver'ın çözümü, Cornell Üniversitesi. Bu, daha genel bir izdüşümsel teoremin metrik bakımdan özel bir durumudur. İçteğet çemberi yerine, kenarlara D, E, F noktalarında teğet olan ve BE, CF doğrularını sırasıyla E', F''de kesen herhangi bir konik alınabilir. Brianchon teoreminin sınır durumlarından birine göre AD, BE, CF doğruları bir G noktasında kesişir. A, B, C, G noktalarının sırasıyla $(1,0,0)$, $(0,1,0)$, $(0,0,1)$, $(1,1,1)$ olduğu bir homojen koordinat sistemi kuralım. Buradan D, E, F noktalarının sırasıyla $(0,1,1)$, $(1,0,1)$, $(1,1,0)$ olduğu kolayca çıkar; koniğin denklemi

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy = 0;$$

olur. E', F' noktaları $(1,4,1)$, $(1,1,4)$'tür. D'den geçen doğruların denklemleri $kx+y-z = 0$ olup DE, DF, DE', DF' için k sırasıyla $1, -1, -3, 3$'tür. Dolayısıyla istenen çift oran

$$(1 + 3)(-1 - 3)/(1 - 3)(-1 + 3) = 4.$$

olarak bulunur. *II. M. S. Klamkin'in çözümü, Polytechnic Institute of Brooklyn.* Merkezi bir izdüşümle, ABC üçgeni ve (I) içteğet çemberi, bir eşkenar üçgene ve onun içteğet çemberine dönüştürülebilir. $D(E, F, E', F')$ çift oranı bu dönüşüm altında değişmez; dolayısıyla bütün üçgenler için sabittir. $D(E, F, E', F') = 4$ olduğu kolayca gösterilir.

Diğer çözenler: N. A. Court, P. W. M. John, D. C. B. Marsh, O. J. Ramler, Roscoe Woods ve problemi öneren.

1217 Numaralı Problemin Çözümü:

American Mathematical Monthly, **64**, (1957), 45.

Euler Fonksiyonunun Bir Özelliği

E 1217 [1956, 342]. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye

Aşağıdaki çarpımı hesaplayınız:

$$\prod_{d|n} d^{\phi(n/d)+\phi(d)}.$$

J. B. Johnston'ın çözümü, Cornell Üniversitesi. f, tam sayılar üzerinde tanımlı herhangi bir fonksiyon olsun. O zaman

$$\begin{aligned}\prod_{d|n} d^{f(d)+f(n/d)} &= \prod_{d|n} d^{f(d)} \prod_{d|n} d^{f(n/d)} \\ &= \prod_{d|n} d^{f(d)} \prod_{d|n} (n/d)^{f(d)} \\ &= \prod_{d|n} n^{f(d)} = n^{\sum_{d|n} f(d)}.\end{aligned}$$

Ayrıca

$$\sum_{d|n} \phi(d) = n, \tag{1}$$

olduğundan, verilen problemin yanıtı n^n'dir.

Diğer çözenler: W. J. Buckingham, Leonard Carlitz, A. E. Danese, M. P. Drazin, L. T. Gardner, A. J. Goldman, D. S. Greenstein, Cornelius Groenewoud, Emil Grosswald, Virginia Hanly, A. R. Hyde, Richard Kelisky, Sidney Kravitz, R. G. McDermot, D. C. B. Marsh, Leo Moser, J. B. Muskat, F. R. Olson, Hiram Paly, M. Perisastri, Azriel Rosenfeld, A. V. Sylwester, Chih-yi Wang, David Zeitlin ve problemi öneren. Geç gelen çözüm: M. S. Klamkin.

Editörün notu. (1)'in bir ispatı için, örneğin Uspensky ve Heaslet, *Elementary Number Theory*, s. 113'e bakınız. Yukarıda elde edilen genel sonucun bir başka uygulaması da

$$\prod_{d|n} d^{(n/d)+d} = n^{\sigma(n)},$$

eşitliğidir; burada $\sigma(n)$, n'nin bölenleri toplamıdır.

1778 Numaralı Problemin Çözümü:

American Mathematical Monthly, **73**, (1966), 667.

Bir Üçgenin Yarıçapları

E 1778 [1965, 420]. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

R, r, r_1, r_2, r_3 bir üçgenin sırasıyla çevrel, içteğet ve dışteğet çemberlerinin yarıçapları ise, aşağıdaki eşitliği ispatlayınız:

$$\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_3^3} = \frac{12R}{r \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}.$$

Ralph Schreiber'ın çözümü, Warsaw Lisesi, Warsaw, Indiana. ABC üçgeninin alanını Δ, yarı çevresini s, a kenarına karşılık gelen dışteğet çemberinin yarıçapını r_a ile gösterelim; diğerlerini de benzer biçimde tanımlayalım. Bilinen özdeşlikleri hatırlayalım:

$$\triangle = rs = r_a(s-a) = r_b(s-b) = r_c(s-c) = \sqrt{rr_ar_br_c} = abc/4R.$$

Böylece

$$\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_a^3} - \frac{1}{r_b^3} - \frac{1}{r_c^3} = \frac{1}{\triangle^3}\left[s^3 - (s-a)^3 - (s-b)^3 - (s-c)^3\right]$$
$$= 3abc/\triangle^3 = 12R/\triangle^2 = 12R/rr_ar_br_c.$$

Diğer çözenler: A. N. Aheart, Leon Bankoff, W. J. Blundon, D. I. A. Cohen, Ragnar Dybvik (Norveç), Bayan A. C. Garstang, Michael Goldberg, Louise S. Grinstein, D. M. Hancasky, E. S. Langford, Ruth S. Lefkowitz, F. Leuenberger (İsviçre), Andrzej Makowski (Polonya), D. C. B. Marsh, F. R. Prieto, J. M. Quoniam (Fransa), S. Bhaskara Rao (Hindistan), Simeon Reich (İsrail), P. A. Scheinok, Klaus Schmitt, R. Sivaramakrishnan (Hindistan), Sidney Spital, Rahibe M. Stephanie, M. V. Tamhankar ve M. B. Suryanarayana (Hindistan), Simon Vatriquant (Belçika), C. S. Venkataraman (Hindistan), William Wernick ve problemi öneren.

1779 Numaralı Problemin Çözümü:
American Mathematical Monthly, **73**, (1966), 668.

Bir Üçgenin Yükseklikleri ve Dışteğet Çemberlerinin Yarıçapları

E 1779 [1965, 420]. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

h_i ve r_i bir üçgenin yükseklikleri ve dışteğet çemberlerinin yarıçapları ise, aşağıdaki eşitsizliği ispatlayınız:

$$\frac{r_1}{h_1}+\frac{r_2}{h_2}+\frac{r_3}{h_3}\geqq 3.$$

I. D. C. B. Marsh'ın çözümü, Colorado School of Mines. i,j,k, $1,2,3$'ün döngüsel bir permütasyonu olmak üzere $2/h_i = 1/r_j + 1/r_k$ olduğundan (R. A. Johnson, *Modern Geometry*, s. 189; ya da yukarıdaki E 1778'deki özdeşlikleri $1/r = 1/r_1 + 1/r_2 + 1/r_3$ ile birlikte kullanınız), hemen $\sum(r_i/h_i) = \frac{1}{2}\sum_{i\neq j}(r_i/r_j) \geq \frac{1}{2}(6) = 3$ elde edilir; çünkü pozitif x, y için $(x/y) + (y/x) \geq 2$'dir. Üstelik eşitlik ancak $r_1 = r_2 = r_3$, yani üçgen eşkenar olduğunda sağlanır.

II. H. Guggenheimer'ın çözümü, Minnesota Üniversitesi. $\sum(r_i/h_i)^n \geq 3$, $n \geq 1$, eşitsizliğini elde ederek bir genelleme yapabiliriz. Aslında daha fazlası doğrudur: Üçgenin açıortay uzunlukları t_i olsun. $t_i \geq h_i$ olduğundan, önerilen eşitsizlik

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{r_i}{t_i}\right)^m \geqq 3 \qquad m>0$$

eşitsizliğinden daha zayıftır. Şimdi bunu ispatlayalım.

s üçgenin yarı çevresi, a_i de kenarları olsun. Leuenberger, $t_i \leq [s(s-a_i)]^{1/2}$ olduğunu ispatlamıştır (*Elemente Math.*, 17 (1962), 45–46; ayrıca bkz. 16 (1961), s. 129). Böylece

$$\sum\left(\frac{r_i}{t_i}\right)^m \geqq \sum_{i\neq j\neq k}\left[\frac{s(s-a_j)(s-a_k)}{s(s-a_i)^2}\right]^{m/2}$$

$$=\frac{1}{[(s-a_1)(s-a_2)(s-a_3)]^m}\sum_{j\neq k}[(s-a_j)(s-a_k)]^{3m/2}.$$

İstenen sonuç, aritmetik–geometrik ortalama eşitsizliğinden elde edilir; yine eşitlik ancak eşkenar üçgen için sağlanır.

Diğer çözenler: A. N. Aheart, Leon Bankoff, W. J. Blundon, D. I. A. Cohen, Bayan A. C. Garstang, Michael Goldberg, H. Guggenheimer, D. M. Hancasky, E. S. Langford, F. Leuenberger (İsviçre), Andrzej Makowski (Polonya), F. R. Prieto, J. M. Quoniam (Fransa), S. Bhaskara Rao (Hindistan), Simeon Reich (İsrail), P. A. Scheinok, Ralph Schreiber, R. Sivaramakrishnan (Hindistan), Sidney Spital, Rahibe M. Stephanie, M. V. Tamhankar ve M. B. Suryanarayana (Hindistan), P. D. Thomas, Simon Vatriquant (Belçika), C. S. Venkataraman (Hindistan) ve problemi öneren.

Makowski'nin öğrencisi Tadeusz Figiel, istenen eşitsizliğin, bir ortik üçgenin alanının verilen (dar açılı) üçgenin alanının dörtte birinden büyük olamayacağı olgusuna denk olduğunu gözlemlemiştir. [*İspat:* ABC, $A_1B_1C_1$'in ortik üçgeni olsun. Bu durumda A_1, B_1, C_1, dışteğet çemberlerinin merkezleridir; ABC_1 ile ABC'nin alanlarının oranı, ortak AB kenarına ait yüksekliklerinin oranına, yani r_3/h_3'e eşittir.]

1877 Numaralı Problemin Çözümü:

American Mathematical Monthly, **74**, (1967), 869.

Bir Yarım Çembere Çizilmiş Dışbükey Beşgen

E 1877 [1966, 410]. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

$ABCDE$, AE çaplı birim çembere çizilmiş bir dışbükey beşgen ve $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DE = d$ olsun. Şu eşitsizliği ispatlayınız:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + abc + bcd < 4.$$

Allan Wachs'ın çözümü, Far Rockaway (N. Y.) Lisesi öğrencisi. AC ve CE'yi çizip $\theta = \angle CEA$ alalım. O zaman $\angle CAE = 90^\circ - \theta$, $\angle CBA = 180^\circ - \theta$, $\angle CDE = 180^\circ - (90^\circ - \theta) = 90^\circ + \theta$ olur. Kosinüs teoremine göre,

$$(1) \qquad AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^\circ - \theta) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta,$$

$$(2) \qquad CE^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos(90^\circ + \theta) = c^2 + d^2 + 2cd\sin\theta.$$

ACE dik üçgeninden $AC^2 + CE^2 = AE^2 = 4$ elde edilir; ayrıca (geniş açılardan dolayı) $AC = 2\sin\theta > b$ ve $CE = 2\cos\theta > c$'dir. Bu sonuçlar (1) ve (2)'nin toplamında yerine konursa hemen

$$4 > a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + abc + bcd.$$

Diğer çözenler: Leon Bankoff, W. J. Blundon, L. Carlitz, Mannis Charosh, M. A. Ettrick, Michael Goldberg, M. G. Greening (Avustralya), Ned Harrell, Donald Jeffords, Erwin Just, J. D. E. Konhauser, Dan Marcus, Lieselotte Miller, Norman Miller, C. B. A. Peck, Al Somoyajulu, J. L. Standig, C. S. Venkataraman (Hindistan), J. C. Williams, Dale Woods ve problemi öneren.

1878 Numaralı Problemin Çözümü:
American Mathematical Monthly, **74**, (1967), 869.

Bir Yarım Çembere Çizilmiş Dışbükey Beşgen

E 1877 [1966, 410]. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

$ABCDE$, AE çaplı birim çembere çizilmiş bir dışbükey beşgen ve $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DE = d$ olsun. Şu eşitsizliği ispatlayınız:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + abc + bcd < 4.$$

Allan Wachs'ın çözümü, Far Rockaway (N. Y.) Lisesi öğrencisi. AC ve CE'yi çizip $\theta = \angle CEA$ alalım. O zaman $\angle CAE = 90^\circ - \theta$, $\angle CBA = 180^\circ - \theta$, $\angle CDE = 180^\circ - (90^\circ - \theta) = 90^\circ + \theta$ olur. Kosinüs teoremine göre,

$$(1) \qquad AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(180^\circ - \theta) = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta,$$

$$(2) \qquad CE^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos(90^\circ + \theta) = c^2 + d^2 + 2cd\sin\theta.$$

ACE dik üçgeninden $AC^2 + CE^2 = AE^2 = 4$ elde edilir; ayrıca (geniş açılardan dolayı) $AC = 2\sin\theta > b$ ve $CE = 2\cos\theta > c$'dir. Bu sonuçlar (1) ve (2)'nin toplamında yerine konursa hemen

$$4 > a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + abc + bcd.$$

Diğer çözenler: Leon Bankoff, W. J. Blundon, L. Carlitz, Mannis Charosh, M. A. Ettrick, Michael Goldberg, M. G. Greening (Avustralya), Ned Harrell, Donald Jeffords, Erwin Just, J. D. E. Konhauser, Dan Marcus, Lieselotte Miller, Norman Miller, C. B. A. Peck, Al Somoyajulu, J. L. Standig, C. S. Venkataraman (Hindistan), J. C. Williams, Dale Woods ve problemi öneren.

2100 Numaralı Problemin Çözümü:

American Mathematical Monthly, **76**, (1969), 563.

Altı Bağıntı

E 2100 [1968, 670]. Öneren: H. Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

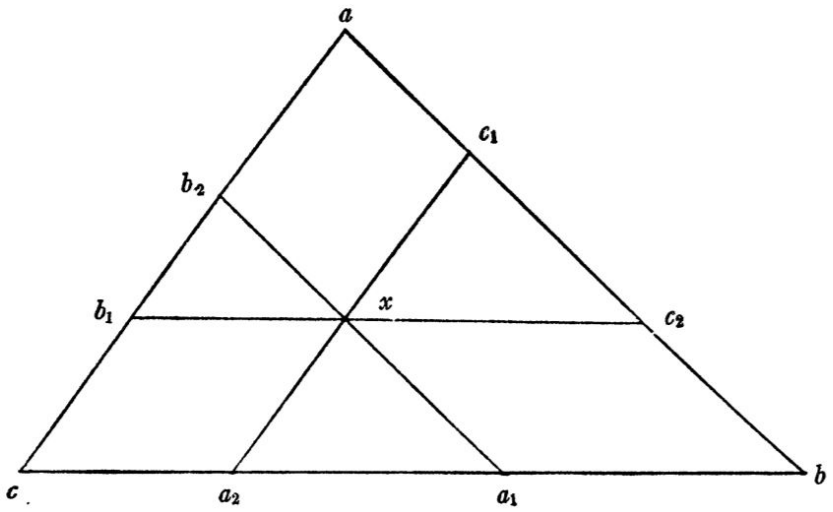
Aşağıdaki

$$(1)\ \frac{x-a_1}{a_1-a_2}=\frac{a-b}{b-c}, \qquad (2)\ \frac{x-b_1}{b_1-b_2}=\frac{b-c}{c-a}, \qquad (3)\ \frac{x-c_1}{c_1-c_2}=\frac{c-a}{a-b},$$

$$(4)\ x+a=b_2+c_1, \qquad (5)\ x+b=c_2+a_1, \qquad (6)\ x+c=a_2+b_1$$

bağıntılarından herhangi beşinin altıncısını gerektirdiğini gösteriniz. a, b, c'yi karmaşık düzlemde bir ABC referans üçgeninin köşelerine, diğer sayıları da diğer noktalara karşılık gelen karmaşık sayılar alarak, bu tutarlı bağıntılar sistemini geometrik olarak yorumlayınız.

Michael Goldberg'in çözümü, Washington, D. C. Köşeleri a, b, c ile gösterilen herhangi bir üçgen alalım. Üçgenin düzleminde herhangi bir x noktası seçelim. x noktasından üçgenin kenarlarına paraleller çizelim. Bu paralellerin kenarlarla kesişimleri, şekildeki gibi $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ olsun. O zaman verilen altı bağıntı sağlanır. Altı noktadan biri, örneğin c_2, verilmemişse, x



a_2c_1 ile b_2a_1'in kesişimi olarak bulunabilir; ardından c_2, b_1x ile ab'nin kesişimi olarak belirlenir.

Diğer çözenler: A. F. Gentzel, Jr., Simeon Reich (İsrail) ve problemi öneren.

2101 Numaralı Problemin Çözümü:

American Mathematical Monthly, **76**, (1969), 564.

Üç Parabol ve Bir Üçgen

E 2101 [1968, 670]. Öneren: H. Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

ABC bir üçgen olsun. AB, AC kenarlarına sırasıyla B, C noktalarında teğet olan parabolü P_a ile gösterelim. P_b ve P_c parabolleri de benzer biçimde tanımlansın. Bu paraboller ABC'nin içinde A', B', C' noktalarında kesişsin. ABC, $A'B'C'$, $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$, $A'BC$, $B'CA$, $C'AB$ (eğrisel) üçgensel bölgelerinin alanlarını sırasıyla $\Delta, \Delta_0, \Delta'_a, \Delta'_b, \Delta'_c, \Delta''_a, \Delta''_b, \Delta''_c$ ile gösterelim. Şunları ispatlayınız:

$$\Delta'_a = \Delta'_b = \Delta'_c (\equiv \Delta_1), \qquad \Delta''_a = \Delta''_b = \Delta''_c (\equiv \Delta_2), \tag{1}$$

$$\Delta_0 : \Delta_1 : \Delta_2 : \Delta = 15 : 17 : 5 : 81. \tag{2}$$

Problemi önerenin çözümü. Paralel izdüşümler altında koniklerin türü, teğetlik, doğru parçalarının oranları ve alan oranları değişmez; ayrıca her üçgen bir eşkenar üçgene dönüştürülebilir. Bu nedenle savı bir eşkenar üçgen için ispatlamak yeterlidir. Böylece (1) zaten ispatlanmış olur.

(2)'yi ispatlamak için, koordinat düzleminde $A = (1, \sqrt{3})$, $B = (0, 0)$, $C = (2, 0)$ olacak biçimde yerleştirilmiş bir ABC eşkenar üçgeni alalım. P_a ve P_c parabollerinin denklemleri

$$P_a\colon\ y = (x - \tfrac{1}{2}x^2)\sqrt{3}, \tag{1}$$

$$P_c\colon\ \sqrt{3}\,x^2 + 6xy + 3\sqrt{3}\,y^2 - 16y = 0. \tag{2}$$

olarak bulunur. (1) ve (2)'den

$$\Delta_0 + 2\Delta_1 + \Delta_2 = \sqrt{3}\int_0^2 (x - \tfrac{1}{2}x^2)\,dx = \tfrac{2}{3}\sqrt{3} = \tfrac{2}{3}\Delta, \tag{3}$$

$$y = \frac{8\sqrt{3}}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{4\sqrt{3}}{9}\sqrt{4 - 3x} \qquad (0 \leqq x \leqq \tfrac{4}{3}). \tag{4}$$

Dolayısıyla

$$\Delta_2 = 2\int_0^1 y\,dx = \frac{5\sqrt{3}}{81} = \frac{5}{81}\Delta, \tag{5}$$

elde edilir; ayrıca

$$\Delta_0 + 3\Delta_1 + 3\Delta_2 = \Delta. \tag{6}$$

(3), (5), (6) sistemini $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$ için çözerek istenen sonucu elde ederiz.

Diğer çözenler: Anders Bager (Danimarka), Jordi Dou (İspanya), Michael Goldberg, M. G. Greening (Avustralya), Norman Miller, J. M. Quoniam (Fransa) ve A. Zujus.

2109 Numaralı Problemin Çözümü:

American Mathematical Monthly, **76**, (1969), 698.

Üçgen Kurulması

E 2109 [1968, 780]. Öneren: H. Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

ABC bir üçgen, A' de BC kenarı üzerinde sabit bir nokta olsun. Verilen bir XYZ üçgenine aynı yönlü benzer olan, ABC'ye içten çizilmiş $A'B'C'$ üçgenini kurunuz.

A. W. Walker'ın notu, Toronto, Kanada. İstenen kuruluş, N. A. Court, *College Geometry*, 1. baskı, 1925, s. 47'de bulunabilir. Bu, s. 46'da ispatlanan şu teoremin basit bir uygulamasıdır: *Biçimi verilmiş, büyüklüğü değişen bir üçgenin bir köşesi sabit kalıp ikinci köşesi verilen bir doğru üzerinde hareket ederse, üçüncü köşesinin geometrik yeri de bir doğrudur.*

Diğer çözenler: Anders Bager (Danimarka), Walter Bluger, C. W. Eliason, Jr., Michael Goldberg, M. G. Greening (Avustralya), Beckham Martin, D. N. Page ve problemi öneren.

2110 Numaralı Problemin Çözümü:
American Mathematical Monthly, **76**, (1969), 698.

Benzer Üçgenler

E 2110 [1968, 780]. Öneren: H. Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Bir düzlemdeki AUV, VBU, UVC üçgenleri verilen bir üçgene aynı yönlü benzer ise, ABC üçgeni de bu üçgene aynı yönlü benzerdir.

M. G. Greening'in çözümü, New South Wales Üniversitesi, Avustralya. Noktaları, karşılık gelen küçük harfleri kullanarak karmaşık sayılarla gösterelim; verilen üçgeni de $Z_1Z_2Z_3$ alalım. Aynı yönlü benzerlikler $z \mapsto \alpha_i z + \beta_i$ $(i = 1, 2, 3)$ olsun. İndisleri 3 modülüne göre alırsak, $u = \alpha_i z_{i+1} + \beta_i$, $v = \alpha_i z_{i+2} + \beta_i$ $(i = 1, 2, 3)$ olur. Buradan $\alpha_i z_i(z_{i+1} - z_{i+2}) = z_i(u - v)$ ve

$$\beta_i(z_{i+1} - z_{i+2}) = z_{i+1}v - z_{i+2}u$$

dolayısıyla

$$\sum_{i=1}^{3} (\alpha_i z_i + \beta_i)(z_{i+1} - z_{i+2}) = 0.$$

$\sum_{i=1}^{3}(z_{i+1} - z_{i+2}) = 0$ ve $\sum_{i=1}^{3} z_i(z_{i+1} - z_{i+2}) = 0$ olduğundan

$$0 = \begin{vmatrix} \alpha_1 z_1 + \beta_1 & z_1 & 1 \\ \alpha_2 z_2 + \beta_2 & z_2 & 1 \\ \alpha_3 z_3 + \beta_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & z_1 & 1 \\ b & z_2 & 1 \\ c & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

elde edilir. Bu, $z_1 \mapsto a$, $z_2 \mapsto b$, $z_3 \mapsto c$ aynı yönlü benzerliğinin varlığı için yeterli koşuldur.

Diğer çözenler: Leon Bankoff, Jordi Dou (İspanya), C. W. Eliason, Jr., Michael Goldberg, Norman Miller, Simeon Reich (İsrail), A. W. Walker ve problemi öneren.

Walker, sonucun R. A. Johnson'ın *Modern Geometry* (1929) kitabının 289. sayfasında bulunabileceğini belirtmektedir.

2124 Numaralı Problemin Çözümü:

American Mathematical Monthly, **76**, (1969), 938.

Her Üçgen Dik Üçgenler Oluşturur

E 2124 [1968, 899]. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Bir ABC üçgeninin BC, CA, AB kenarları üzerine dışa doğru $BCDE$, $ACFG$, $BAHK$ karelerini çizip $FCDQ$, $EBKP$ paralelkenarlarını kurunuz. APQ'nun bir ikizkenar dik üçgen olduğunu gösteriniz.

W. E. Buker'ın çözümü, Pittsburgh Devlet Okulları. $A(0,0)$, $B(a,0)$, $C(b,c)$ koordinatlarını verelim. O zaman $F(b-c,b+c)$, $D(b+c,c+a-b)$, $Q(b,a+c)$, $K(a,-a)$, $E(a+c,a-b)$, $P(a+c,-b)$ koordinatları doğrudan bulunur. AQ ve AP eşit uzunlukta ve birbirine dik olduğundan teorem elde edilir.

Kırk başka okur da çözmüştür.
Not. $HAGR$ paralelkenarı kurulursa, BQR ve CRP'nin de ikizkenar dik üçgenler olduğu hemen çıkar. A. W. Walker, kenarlarına kareler çizilmiş üçgenler üzerine kapsamlı bir incelemenin Musselman'ın bu *Monthly*'deki bir makalesinde, 43 (1936), 539–548, bulunduğunu belirtmektedir.

2160 Numaralı Problemin Çözümü:
American Mathematical Monthly, **76**, (1969), 1146.

Bazı Yeni Üçgen Eşitsizlikleri

E 2160 [1969, 300]. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

$A_1A_2A_3$ üçgeninin içinde veya sınırında bulunan bir P noktasının A_i köşesine ve bu köşenin karşısındaki kenara uzaklıkları sırasıyla p_i, x_i olsun $(i = 1, 2, 3)$. İçteğet çemberinin yarıçapını r ile göstererek şu eşitsizlikleri ispatlayınız:

(a) $$\sum_{i=1}^{3} p_i(\tfrac{1}{2}\sin A_i) \leqq \sum_{i=1}^{3} x_i \leqq \sum_{i=1}^{3} p_i \sin(\tfrac{1}{2} A_i).$$

(b) $$p_2p_3 + p_3p_1 + p_1p_2 \geqq 8x_1x_2x_3/r.$$

M. G. Greening'in çözümü, New South Wales Üniversitesi, Avustralya. a_i, A_i'nin karşısındaki kenar; P_i, $A_{i-1}PA_{i+1}$ açısı; $B_{i,j}$ de A_i'de p_i ile a_j arasındaki açı olsun. Böylece $B_{i,i+1} + B_{i,i-1} = A_i$ olur. (İndislerdeki bütün toplamlar 3 modülüne göredir.) O zaman $x_i = p_{i+1}\sin B_{i+1,i} = p_{i-1}\sin B_{i-1,i}$ ve

$$\sum_i x_i = \tfrac{1}{2}\sum_j p_j(\sin B_{j,j+1} + \sin B_{j,j-1})$$

$$= \tfrac{1}{2}\sum_j p_j \cdot 2\sin(\tfrac{1}{2}A_j)\cos\tfrac{1}{2}(B_{j,j+1} - B_{j,j-1}).$$

$0 \leq |B_{j,j+1} - B_{j,j-1}| \leq A_j$ eşitsizliği (a)'yı verir.
$p_1p_2\sin P_3 = x_3a_3$ olduğundan,

$$\sum_i p_ip_{i+1} = \sum_i \frac{x_ia_i}{\sin P_i} \geqq \frac{3\left(\prod_i a_i \cdot \prod_i x_i\right)^{1/3}}{\left(\prod_i \sin P_i\right)^{1/3}}$$

$$\geqq 3\left(\prod_i a_i \prod_i x_i\right)^{1/3}\left(\prod_i \sin P_i\right)^{-1/3} \geqq 2\sqrt{3}\left(\prod_i a_i \cdot \prod_i x_i\right)^{1/3}.$$

Son ifade, $\sum_i P_i = 2\pi$ koşuluyla $\prod_i \sin P_i$ çarpımının en büyük değerini $P_1 = P_2 = P_3$ iken alması olgusundan çıkar.
(b) için şimdi

(i) $$2\sqrt{3}r\left(\prod_i a_i\right)^{1/3} \geqq 8\left(\prod_i x_i^2\right)^{1/3}.$$

eşitsizliğini gösterelim. $\sum_i x_i = 2\Delta$ olduğundan, $\prod_i x_i$ en büyük değerini $a_1x_1 = a_2x_2 = a_3x_3 = 2\Delta/3$ iken alır. Böylece $\max 8(\prod_i x_i^2)^{1/3} = 2^5\Delta^2 3^{-2}(\prod_i a_i)^{-2/3}$ olur. $3^{5/2}r \cdot \prod_i a_i^2 \geq 2^4\Delta^2$, yani

(ii) $$3^{5/2}R \geqq 4s,$$

sağlanırsa (i) elde edilir; çünkü R çevrel çemberin yarıçapı olmak üzere $\prod_i a_i = 4R\Delta$'dır. Oysa verilen bir çembere çizilebilecek en büyük çevreli üçgen eşkenardır ve (ii) eşitsizliği bu durumda kesinlikle doğrudur. Böylece (b) ispatlanır. Hatta (b)'deki 8 yerine 12 konulabilir.

Diğer çözenler: Simeon Reich (İsrail), T. Tamura (Japonya), C. S. Venkataraman (Hindistan), A. W. Walker ve problemi öneren.

(b) kısmındaki iyileştirilmiş eşitsizlik Walker tarafından ileri sürülmüş, Reich tarafından ispatlanmıştır. L. Carlitz'in (a) kısmına verdiği çözüm dışında, bütün çözenlerin ve problemi önerenin Amerika Birleşik Devletleri dışında yaşıyor olması ilginçtir.

2213 Numaralı Problemin Çözümü:

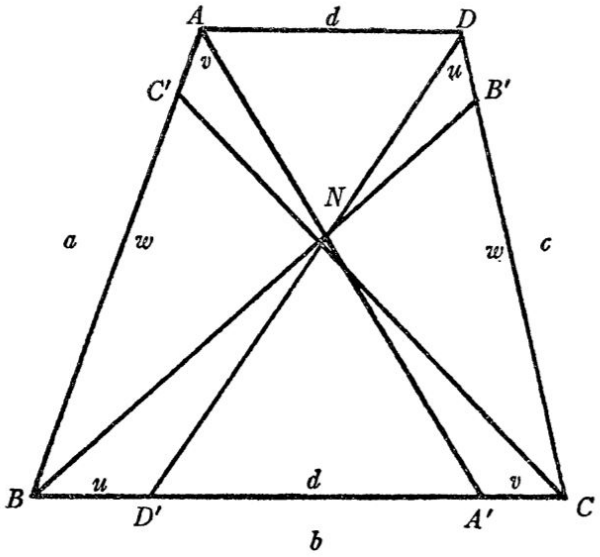
American Mathematical Monthly, **77**, (1970), 1109.

Nagel Özelliğine Sahip Dörtgenler

E 2213 [1970, 79]. Öneren: H. Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Türkiye

Bir (düzlemsel) çokgenin köşelerinden geçen ve çevresini iki eşit parçaya ayıran doğrular bir noktada kesişiyorsa, bu çokgenin *Nagel özelliğine* sahip olduğunu söyleyelim. Bütün üçgenlerin Nagel özelliğine sahip olduğu, ancak her dörtgenin bu özelliğe sahip olmadığı bilinmektedir. Nagel özelliğine sahip basit, dejenere olmayan dörtgenleri belirleyiniz.

Problemi önerenin çözümüne dayanan editör çözümü. $ABCD$, Nagel özelliğine sahip bir dörtgen olsun. AA', BB', CC', DD' doğrularının her biri çevreyi iki eşit parçaya ayırsın ve N Nagel noktasından geçsin. $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ alalım. $a+b \geq c+d$ ve $b + c \geq a + d$ varsayabiliriz. Buradan C''nün AB doğru parçası, B''nün CD, A' ve D''nün ise BC üzerinde bulunduğu çıkar (Şekil 1). $BD' = u$,



Şekil 1

$A'C = v$, $CB' = w$ ve $a+b+c+d = 2s$ alalım. $BC+CB' = s = D'C+CD$ olduğundan $DB' = u$ olur. Benzer biçimde $AC' = v$, $BC' = w$ ve $D'A' = d$'dir. Üç durumu ayırt edelim.

Durum 1. $u \neq 0$ ve $v \neq 0$. AA' ile DD''nün N'de kesiştiğini düşünürsek, CC'''nün N'den geçmesi için gerek ve yeter koşul

$$\frac{v}{w}\cdot\frac{b}{-v}\cdot\frac{A'N}{NA} = -1$$

olur; bu, CNC' doğrusunun kestiği ABA' üçgenine uygulanan Menelaus teoreminden çıkar. Benzer biçimde, BNB''nün kestiği $DD'C$ üçgeni kullanılarak, BB'''nün N'den geçmesi için gerek ve yeter koşulun

$$\frac{-u}{b}\cdot\frac{w}{u}\cdot\frac{DN}{ND'} = -1,$$

olduğu görülür. O zaman

$$\frac{DN}{ND'} = \frac{b}{w} = \frac{AN}{NA'}.$$

Dolayısıyla AD, $D'A''$ne paraleldir. Bu doğru parçaları aynı zamanda eşit olduğundan, $ADA'D'$ bir paralelkenardır. AA' ve DD' köşegenleri birbirini ortalar; böylece $AN = NA'$ ve $b = w$ olur. Ama $b + w = s$ olduğundan, $2w = a - b + c + d = 2b$'dir; buradan

$$b = \frac{a+c+d}{3}.$$

elde edilir. Demek ki $ABCD$, paralel iki tabanından uzun olanı, diğer üç kenarının aritmetik ortalamasına eşit olan bir yamuktur. Bu paragraftaki akıl yürütme tersine çevrildiğinde, bu tür her yamuğun Nagel özelliğine sahip olduğu görülür. Örneğin, köşeleri $(0,0)$, $(19,0)$, $(6,24)$, $(0,24)$ olan yamuk için $N = (7,12)$'dir.

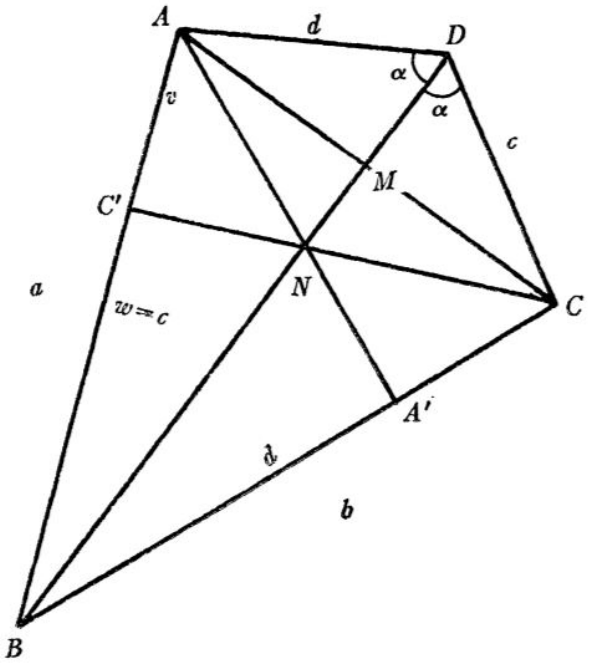
Durum 2. $u = v = 0$. O zaman $a + b = c + d = s$ ve $a + d = b + c = s$ olduğundan, $2a+b+d = 2c+b+d$ olur. Dolayısıyla $a = c$ ve $b = d$'dir; yani $ABCD$ bir paralelkenardır. Açıkça her paralelkenar Nagel özelliğine sahiptir.

Durum 3. $u = 0$ ve $v \neq 0$ (ya da tersi). AC ile BD, M'de kesişsin (Şekil 2). Şimdi $a + d = b + c = s$ olduğundan, $d + v + w = C'B + BC = CD + DA + AC' = c + d + v$; buradan da $c = w$ olur. CNC'''nün kestiği ABA' üçgenine ve BNM'nin kestiği $AA'C$ üçgenine Menelaus teoremini uygulayarak

$$\frac{b}{-v}\frac{A'N}{NA}\frac{v}{c} = -1, \qquad \text{yani } \frac{A'N}{NA} = \frac{c}{b},$$

$$\frac{AN}{NA'}\frac{-d}{b}\frac{CM}{MA} = -1, \qquad \text{yani } \frac{CM}{MA} = \frac{b}{d}\frac{A'N}{NA} = \frac{b}{d}\frac{c}{b} = \frac{c}{d}.$$

elde ederiz. M, DAC üçgeninin CA kenarını komşu kenarların c/d oranında böldüğünden, DM, D açısını ikiye böler. Dolayısıyla $\angle ADM = \angle MDC = \alpha$'dır. Kosinüs teoremini



Şekil 2

ABD ve CBD üçgenlerine uygulayıp $BD = f$ alarak

$$a^2 = d^2 + f^2 - 2df \cos \alpha,$$
$$b^2 = c^2 + f^2 - 2cf \cos \alpha,$$

ve dolayısıyla

$$a^2 - b^2 = d^2 - c^2 - 2f(d - c) \cos \alpha.$$

elde ederiz. $d \geq c$ varsayıp $d = c + e$ alalım; böylece $b = c + v + e$ ve $a = c + v$ olur. Şimdi $a^2 - (a + e)^2 = (c + e)^2 - c^2 - 2ef \cos \alpha$ eşitliği sadeleştirilerek

$$ef \cos \alpha = ce + ae + e^2.$$

bulunur. $e \neq 0$ ise, $\cos \alpha = (c + a + e)/f = (c + b)/f$ olur; bu ise $c + b > f$ olduğundan olanaksızdır. Dolayısıyla $e = 0$, yani $c = d$ ve $a = b$'dir. Şekil böylece bir deltoiddir. Simetriden, her deltoid Nagel özelliğine sahiptir.

Üç başka yazışmacı da deltoid ve paralelkenardan söz etmiştir.

2311 Numaralı Problemin Çözümü:
American Mathematical Monthly, **79**, (1972), 777.

Tam Kirişler Dörtgeni

E 2311 [1971, 793]. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Bir $A_1A_2A_3A_4$ dörtgeni bir çembere içten çizilebiliyorsa, A_pA_q'nun orta noktasından A_rA_s'ye dik çizilen (altı) doğrunun bir noktada kesiştiğini ispatlayınız (p, q, r, s birbirinden farklıdır).

Rahibe Stephanie Sloyan'ın çözümü, Georgian Court College, Lakewood, N. J. Çemberi birim çember kabul edip A_i noktasını alışıldığı biçimde a_i karmaşık sayısıyla özdeşleştirelim. O zaman A_pA_q doğru parçasının orta noktasından geçen ve A_rA_s'ye dik olan doğrunun denklemi

$$z - a_r a_s \bar{z} = \tfrac{1}{2}(a_p + a_q)\ \frac{a_p a_q - a_r a_s}{a_p a_q},$$

olur. Altı doğrunun da $\frac{1}{2}(a_1 + a_2 + a_3 + a_4)$ noktasından geçtiği kolayca hesaplanır. J. W. Clawson, *The complete quadrilateral*, Annals of Math. 20 (1918–1919), 232–261, bu noktaya dörtgenin *ortik merkezi* adını vermektedir.

Benzer biçimde, A_pA_q'nun orta noktasını A_rA_s'nin orta noktasına birleştiren üç doğru parçasının (p, q, r, s farklı), Clawson'ın dörtgenin *ortalama merkezi* adını verdiği bir nokta tarafından ortalandığı gösterilebilir. Ortalama merkez $\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3+a_4)$ ile verildiğinden, ortik merkez ile çevrel çember merkezinin tam ortasında bulunduğu çıkar.

Diğer çözenler: Michael Goldberg, Leonard Goldstone, M. G. Greening (Avustralya), N. G. Gunderson, V. F. Ivanoff, Lew Kowarski, Harry Lass, O. P. Lossers (Hollanda), Rick Troxel ve problemi öneren.

Editörün notu. Bu teorem ve çözümü, kirişler dörtgenlerinin, kirişler beşgenlerinin vb. birçok ilginç özelliğiyle birlikte Yaglom, *Complex Numbers in Geometry*, Academic Press, 1968, s. 59'da yer alır (bkz. s. 54–68). Bu problemdeki kesişim noktasına Lucien Droussent *karşı merkez* adını vermektedir (*On a theorem of J. Griffiths*, bu *Monthly*, 54 (1947), 538–540). N karşı merkezi, dörtgenin O çevrel çember merkezini, $A_iA_jA_k$ üçgenlerinin dört H_m diklik merkezinden geçen çemberin H merkezine birleştiren *Euler doğru parçasının* orta noktasıdır ($\{i,j,k,m\} = \{1,2,3,4\}$). Bu diklik merkezleri, verilen dörtgene eş ve N noktasına göre simetriği olan bir dörtgen oluşturur. Ayrıca sekiz A_i, H_i noktası, her bir çifti N simetri merkezine sahip olan dört farklı çember çifti üzerinde dörder dörder yer alır.

Dört $A_iA_jA_k$ ve dört $H_iH_jH_k$ üçgeninin birbirine eş sekiz dokuz nokta çemberinin hepsi N'den geçer; merkezleri de merkezi N olan, bunlara eş başka bir çember üzerindedir. Bu nedenle N'ye dörtgenin *sekiz çember noktası*, son çembere de *sekiz nokta çemberi* denilebilir.

Sekiz noktadan A_m'nin $A_iA_jA_k$ üçgenlerine ve H_m'nin $H_iH_jH_k$ üçgenlerine göre dört farklı Simson doğrusu vardır; bu doğruların hepsi N'den geçer. Aslında, bu sekiz noktadan herhangi biri ile diğer herhangi üçünün oluşturduğu üçgen alınarak 280 (180'i birbirinden farklı) pedal çemberi (ve doğru) oluşturulabilir; bunların hepsi N'den geçer.

Dört $A_iA_jA_k$ üçgeninin N_m dokuz nokta merkezleri, $H_1H_2H_3H_4$'ün O merkezli, $\frac{1}{2}$ oranlı homoteti altındaki görüntüsü olan bir dörtgen oluşturur. Dolayısıyla bu dörtgen, $A_1A_2A_3A_4$'ün, O'dan H'ye giden yolun 1/3'ünde bulunan G merkezli, $-\frac{1}{2}$ oranlı homoteti altındaki görüntüsüdür. Benzer biçimde, $H_iH_jH_k$ üçgenlerinin N'_m dokuz nokta merkezleri, $H_1H_2H_3H_4$'ün, O'dan H'ye giden yolun 2/3'ünde bulunan G' merkezli, $-\frac{1}{2}$ oranlı homoteti altındaki görüntüsüdür. Ortak çevrel çemberlerinin merkezi N, yarıçapı verilen dörtgenin çevrel çemberinin yarıçapının yarısıdır. Benzer biçimde (bkz. E 1740 [1965, 1026]), $A_iA_jA_k$ üçgenlerinin G_m ağırlık merkezleri, $H_1H_2H_3H_4$'ün O merkezli, 1/3 oranlı homoteti altındaki görüntüsü olan bir dörtgen oluşturur. Bu da $A_1A_2A_3A_4$'ün, O'dan H'ye giden yolun 1/4'ünde bulunan S (ortalama merkez) merkezli, $-\frac{1}{3}$ oranlı homoteti altındaki görüntüsüdür. Çevrel çemberinin merkezi G'dir. Benzer biçimde, $H_iH_jH_k$ üçgenlerinin G'_m ağırlık merkezleri (çevrel çemberlerinin merkezi G''dür), OH'nin öteki dörtte birleme noktası S''nü belirler. Ayrıca N, hem $N_1N_2N_3N_4$ ile $N'_1N'_2N'_3N'_4$ dörtgenleri, hem de $G_1G_2G_3G_4$ ile $G'_1G'_2G'_3G'_4$ dörtgenleri için simetri merkezidir.

G_iH_i ve $G'_iH'_i$ doğru parçalarını çap kabul eden sekiz ortosentroidal çember vardır (bkz. Droussent). Bunların çiftleri, hepsi N'den geçen 16 farklı kuvvet ekseni belirler. Dolayısıyla N, bu sekiz çemberin tümüne dik olan bir çemberin merkezidir.

Euler doğru parçasına *yedi nokta doğrusu* da denilebileceğini görüyoruz (O, S, G, N, G', S', H noktaları). Bu gösterimle, G ve N, OH'yi sırasıyla üçte birinden ve ortasından böldüğünden, bir üçgenin Euler doğrusuyla benzerlik çarpıcıdır.

Ayrıca bkz. H. G. Forder, *Higher Course Geometry*, Cambridge University Press, 1949, 232–235; R. A. Johnson, *Modern Geometry*, Houghton-Mifflin, 1929, s. 169, 207, 243 ve 251–253.

2312 Numaralı Problemin Çözümü:
American Mathematical Monthly, **79**, (1972), 778.

Ceva Teoreminin Bir Uygulaması

E 2312 [1971, 793]. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

D, pozitif yönlendirilmiş bir ABC üçgeninin düzleminde bir nokta olsun; AD, BD, CD, karşılarındaki kenarları sırasıyla A_1, B_1, C_1 noktalarında kessin. $\overline{BA_1}$, $\overline{CB_1}$, $\overline{AC_1}$ yönlü doğru parçaları eşitse ($= \delta$), D tek olarak belirlenir ve ABC'nin içinde bulunur. (D ile Ω Brocard noktası arasındaki benzerliğe dikkat ediniz.)

Michael Goldberg'in çözümü, Washington, D. C. Üçgenin kenar uzunlukları $a \leq b \leq c$ olmak üzere a, b, c olsun. Ceva teoremine göre

$$(*) \qquad (a-\delta)(b-\delta)(c-\delta) = \delta^3 .$$

denklemini elde ederiz. (*)'ın sol yanı, $\delta = 0$'da abc değerinden $\delta = a$'da sıfıra monoton azalan bir fonksiyondur; sağ yanı ise $\delta = 0$'da sıfırdan başlayarak monoton artan bir fonksiyondur. Dolayısıyla bu iki fonksiyon, $(0, a)$ aralığında bulunan tam bir gerçek δ değeri için eşittir. (*)'ın başka gerçek çözümü bulunmadığı da kolayca görülür.

Bunun yerine $\overline{CA_1}$, $\overline{BC_1}$, $\overline{AB_1}$ doğru parçaları eşit alınırsa, δ'nın değerinin aynı kaldığına, ancak kesenlerin başka bir E noktasında kesiştiğine dikkat ediniz. D ve E noktaları yalnızca eşkenar üçgende çakışır.

Diğer çözenler: Bernhard Andersen (Danimarka), Harold Donnelly, Jordi Dou (İspanya), M. G. Greening (Avustralya), V. F. Ivanoff ve problemi öneren.

Editörün yorumu. L. Goldstone, bu noktanın, izotomik eşleniğinin ve özelliklerinin kapsamlı bir incelemesini Peter Yff, *An analogue of the Brocard Points*, bu *Monthly*, 70 (1963), 495–501'de bulmuştur.

2363 Numaralı Problemin Çözümü:
American Mathematical Monthly, **80**, (1973), 694.

Küresel Üçgenler Üzerine

E 2363 [1972, 663]. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

$A' = a$, $B' = b$, $C' = c$, $A = a'$, $B = b'$, $C = c'$ eşitliklerini sağlayan ABC ve $A'B'C'$ küresel üçgen çiftlerini karakterize ediniz.

M. G. Greening'in çözümü, New South Wales Üniversitesi, Avustralya. Her $A'B'C'$ küresel üçgeni için

$$\cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A \tag{1}$$

ve (a, b, c), (a, c, b) permütasyonlarından gelen diğer iki eşitlik geçerlidir. Böylece

$$\cos A = \cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a, \tag{2}$$

ve benzerleri elde edilir. Öte yandan ABC'nin kutupsal üçgeni ele alınırsa,

$$\cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a. \tag{3}$$

bulunur. O zaman $\cos B \cos C = \cos C \cos A = \cos A \cos B = 0$ olur; örneğin $A = B = \pi/2$ alabiliriz. (2)'den $a = b = \pi/2$ çıkar. Ayrıca $\cos C = \cos c$ olup $c > 0$, $C < \pi$ olduğundan $C = c$ olmalıdır. Sonuç olarak

$$A' = B' = a' = b' = \pi/2 \text{ ve } c' = C' = c = C,$$

olur; dolayısıyla iki üçgen zorunlu olarak eştir.

Diğer çözenler: Michael Goldberg, Lew Kowarski, Clellie Oursler ve Eric Sturley, ayrıca problemi öneren.

2462 Numaralı Problemin Çözümü:
American Mathematical Monthly, **92**, (1985), 360.

Genişletilmiş Erdős–Mordell Eşitsizliği

E 2462 [1974, 281]. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

P, $A_1A_2A_3$ üçgeninin içinde bir nokta olsun. P'nin A_i köşesine uzaklığını R_i, A_i'nin karşısındaki a_i kenarına uzaklığını da r_i ile gösterelim. Erdős–Mordell eşitsizliği şöyledir:

$$R_1 + R_2 + R_3 \geqslant 2(r_1 + r_2 + r_3).$$

$R_i \geq 0$ her zaman geçerli olmak ve r_i, P ile A_i noktaları a_i'nin aynı tarafında ya da karşı taraflarında bulunmasına göre sırasıyla pozitif veya negatif alınmak üzere, yukarıdaki eşitsizliğin $A_1A_2A_3$ düzlemindeki her P noktası için geçerli olduğunu ispatlayınız.

Editörün notu: Maine Üniversitesi Matematik Bölümü'nden Profesör Clayton W. Dodge, 1974'te bu probleme gönderilen "çözümlerin" hakemliğini yapmış ve hiçbirinin çözüm olmadığını saptamıştır. O zamandan bu yana Profesör Dodge problemi kendisi çözmüştür. Çözümü *Crux Mathematicorum*, cilt 10, sayı 9, Kasım 1984, s. 274–281'de yayımlanmıştır.

- 274 -

GENİŞLETİLMİŞ ERDŐS--MORDELL EŞİTSİZLİĞİ

CLAYTON W. DODGE

On yıl önce The American Mathematical Monthly, Paul Erdős'ün önerdiği [42 (1935), 396] ve ilk kez L. J. Mordell'in çözdüğü [44 (1937), 252--254] önceki 3740 numaralı problemin bir genişletmesi olan şu E 2462 problemini [81 (1974), 281] yayımladı:

"E 2462. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

P, $A_1A_2A_3$ üçgeninin içinde bir nokta olsun. P'nin A_i köşesine uzaklığını R_i, A_i'nin karşısındaki a_i kenarına uzaklığını da r_i ile gösterelim. Erdős--Mordell eşitsizliği şöyledir:

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq 2(r_1 + r_2 + r_3).$$

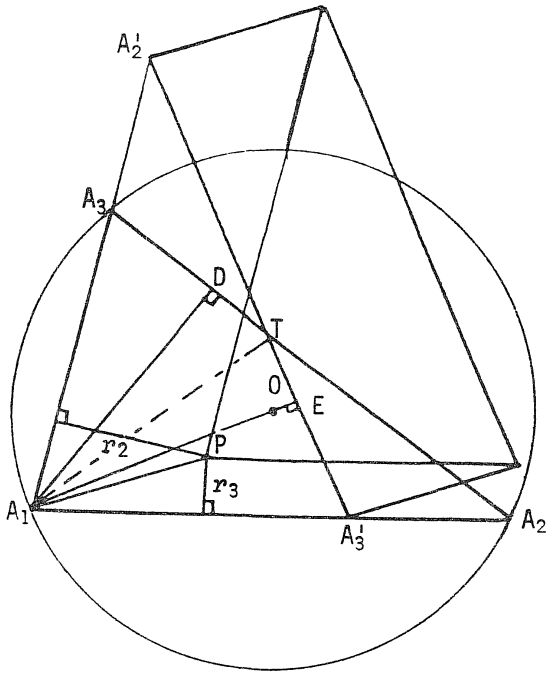
$R_i \geq 0$ her zaman geçerli olmak ve r_i, P ile A_i noktaları a_i'nin aynı tarafında ya da karşı taraflarında bulunmasına göre sırasıyla pozitif veya negatif alınmak üzere, yukarıdaki eşitsizliğin $A_1A_2A_3$ düzlemindeki her P noktası için geçerli olduğunu ispatlayınız."

1974'te bu probleme verilen çözümlerin hakemliğini yapmak bana nasip oldu. İlginçtir ki çözenlerin her biri, özgün Erdős eşitsizliği için Kazarinoff'un [1] verdiği çözümden başlayıp bunu r_1, r_2 ya da r_3'ün negatif olduğu duruma uyarlamıştı.

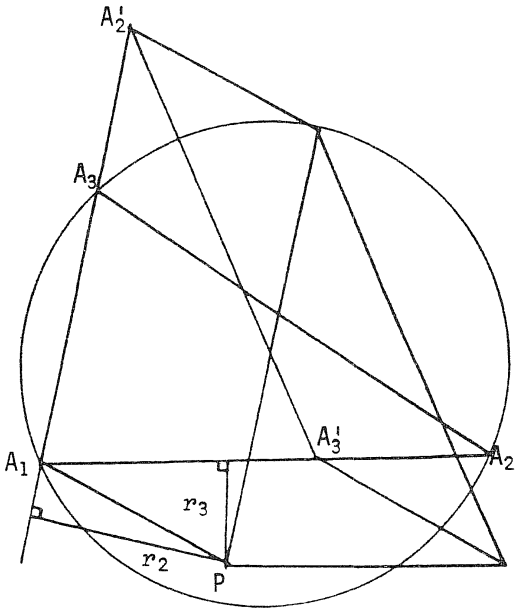
Her biri, ispatı geçersiz kılan aynı hatayı yapmıştı. İlginçtir ki Kazarinoff, ispatının "P üçgenin dışında olsa bile, çevrel çemberin içinde kalması koşuluyla geçerli" olduğunu belirtmişti. Ancak Temel Düzey Problemler bölümünün editörleri, diğer çözenlerin yaptığı aynı hataya düşmeden ispatın böyle genişletilebileceğini göremediler. Kazarinoff'un ispatını özetleyip hatayı açıklıyoruz. Bu ispattan yoğun biçimde yararlanacağımız için özetimiz oldukça kapsamlıdır. Kazarinoff'un ifadesi o zaman doğrulanabilseydi, 1975'te bir ispat yayımlanmış olacağını belirtmek ilginçtir.

Demir'in gösterimiyle Kazarinoff, P'yi A_1 açısının içinde alıp $A_1A_2A_3$ üçgenini, Şekil 1'deki gibi, A_1 açısının A_1T açıortayına göre yansıtarak $A_1A_2'A_3'$ üçgenini elde etti. A_1 açısının açıortayının, A_1D yüksekliği ile OA_1 çevrel yarıçapı arasındaki açıyı da ikiye böldüğünü göz önüne alarak, Pappus'un şu teoremini kullandı: Komşu kenarları A_1A_3' ve A_1P olan paralelkenarın alanı ile komşu kenarları A_1P ve A_1A_2' olan paralelkenarın alanının toplamı, $A_2'A_3'$ üzerine kurulan ve A_2', A_3''ten çıkan kenarları vektör olarak $\overrightarrow{A_1P}$'ye eşit olan paralelkenarın alanına eşittir. $A_1P = R_1$ olduğundan Kazarinoff, (1) eşitliklerinin ilkini elde etti; diğer ikisi de P, A_2 ve A_3 açılarının içinde bulunduğunda aynı biçimde elde edilir:

- 275 -



Şekil 1



Şekil 2

$$\begin{cases} a_1R_1\cos(OA_1P) = a_2r_3 + a_3r_2 \\ a_2R_2\cos(OA_2P) = a_3r_1 + a_1r_3 \\ a_3P_3\cos(OA_3P) = a_1r_2 + a_2r_1. \end{cases} \tag{1}$$

P üçgenin içinde bir nokta olduğunda, buradan

$$\begin{cases} R_1 + R_2 + R_3 \geq R_1\cos(OA_1P) + R_2\cos(OA_2P) + R_3\cos(OA_3P) \\ \qquad = \left(\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_2}\right)r_1 + \left(\frac{a_3}{a_1}+\frac{a_1}{a_3}\right)r_2 + \left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}\right)r_3 \\ \qquad \geq 2(r_1 + r_2 + r_3) \end{cases} \tag{2}$$

çünkü $x > 0$ iken $x + 1/x \geq 2$'dir.

Demir'in işaret kuralına uyulursa (1) denklemleri, P'nin bütün konumları için geçerlidir. Bu durumda (2)'nin ilk iki satırı da geçerlidir. Makalenin ilerleyen kısımlarındaki ispatlarda bundan yararlanacağımız için, bir ispatını sunuyoruz.

P, Şekil 2'deki gibi, A_1 ve A_2 açılarının dışında, ancak A_3 açısının ve $A_1A_2A_3$ üçgeninin çevrel çemberinin içinde olsun. Şekil 1'deki gösterimi kullanarak, $A'_2A'_3$ kenarı üzerindeki paralelkenarın şimdi $A_1A'_2$ ve $A_1A'_3$ kenarları üzerindekilerin farkı olduğunu görürüz. Buna göre,

- 276 -

$$a_1R_1 \cos(OA_1P) = -a_2r_3 + a_3r_2,$$

burada bütün r_i'ler negatif olmayan değerlerdir; benzer biçimde,

$$a_2R_2 \cos(OA_2P) = a_3r_1 - a_1r_3,$$

ve daha önce olduğu gibi

$$a_3R_3 \cos(OA_3P) = a_1r_2 + a_2r_1,$$

çünkü P, A_3 açısının içindedir. Böylece Demir'in işaret kuralına uyarsak, (1) denklemleri bu durum için doğrudur. Başka durumlarda da geçerli olmalarına burada gerek yoktur. P çevrel çemberin içinde olduğundan, OA_iP açılarının kosinüsleri hâlâ pozitiftir; dolayısıyla (2)'nin ilk iki satırı da geçerliliğini korur. Yalnızca (2)'nin üçüncü satırı kuşkuludur. Nitekim sonraki paragrafta açıklandığı gibi, Kazarinoff'un akıl yürütmesi bu noktada geçersiz kalır.

E 2462 problemine gönderilen çözümlerdeki hata, r_i'lerden biri, örneğin r_3, negatif olduğunda ortaya çıkıyordu. Bu durumda yine

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} \geq 2,$$

ama $r_3 < 0$ olduğundan eşitsizlik yön değiştirir ve

$$\left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1}\right)r_3 \leq 2r_3,$$

elde edilir; böylece akıl yürütme sonuçsuz kalır. Genişletilmiş teorem, r_i uzaklıklarından birinin ya da ikisinin negatif olmasını gerektirdiğinden, editörler bu kusura basit bir çözüm bulamadılar. Çözüm gönderenlere yazdık; Leon Bankoff ile ben, tatmin edici bir ispat oluşturmak için yaklaşık bir yıl yazıştık. Sonraki dokuz yıl boyunca, güçlüğünün büyüsüne kapılarak zaman zaman probleme geri döndüm.

İki durum hemen hemen ilk anda halledildi.

Durum 1. P noktası, bir köşe açısının ters açısının içindedir.

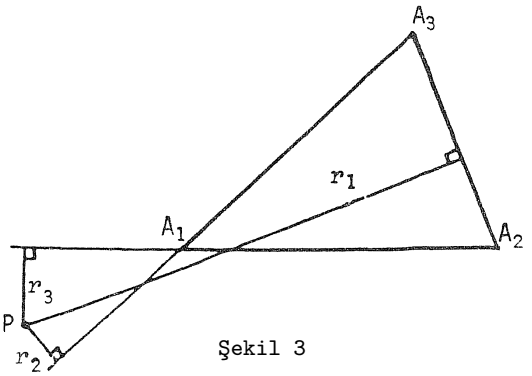
Örneğin P, Şekil 3'teki gibi, A_1'in ters açısının içinde olsun. O zaman r_2 ve r_3 negatif alınmalıdır; ispatlamamız gereken

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq 2(r_1 - r_2 - r_3),$$

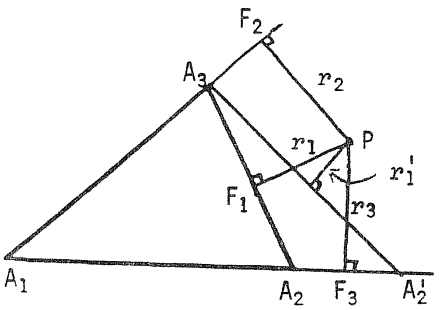
eşitsizliğidir. Burada r_i'lerin hepsi negatif olmayan değerler olarak alınmış ve uygun eksi işaretleri eklenmiştir. R_2 ile r_1, bir dik üçgenin hipotenüsü ve dik kenarı olduğundan,
$R_2 \geq r_1$ ve benzer biçimde $R_3 \geq r_1$ olur.
Dolayısıyla

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq R_2 + R_3 \geq r_1 + r_1 \geq 2(r_1 - r_2 - r_3). \quad \square$$

- 277 -



Şekil 3



Şekil 4

Durum 2. P noktası üçgenin bir açısının içinde, fakat üçgenin yeterince dışındadır; öyle ki bir r_i uzaklığının F_i ayağı üçgenin dışında kalır.

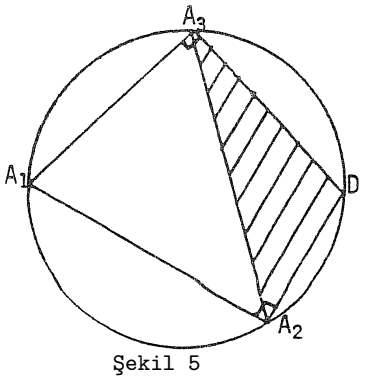
Şekil 4'teki gibi, P'yi A_1 açısının içinde ve üçgenin yeterince dışında alalım; öyle ki örneğin r_3 uzaklığının F_3 ayağı üçgenin dışında olsun. O zaman r_1 negatif alınır. A_2' noktasını, F_3, A_2A_2' doğru parçasının orta noktası olacak biçimde seçelim. O zaman $PA_2 = PA_2'$ olur; $A_1A_2A_3$ üçgeninin üç R_i uzaklığı, $A_1A_2'A_3$ üçgenininkilerle aynıdır. Ayrıca r_2 ve r_3 değişmez, yalnızca r_1, r_1''ne dönüşür. Şekildeki gibi P, $A_1A_2'A_3$ üçgeninin dışındaysa, $|r_1| > |r_1'|$ olur; ikisi de negatif alınacağından $-r_1 < -r_1'$'dür. P, $A_1A_2'A_3$ üçgeninin içindeyse,

$-r_1 < 0 < r_1'$ elde edilir. Böylece her iki durumda da uygun işaretle

$$\pm r_1' + r_2 + r_3 \geq -r_1 + r_2 + r_3.$$

Dolayısıyla genişletilmiş teoremi, r_i uzaklıklarının üç F_i ayağının da üçgenin kenarlarının içinde ya da köşelerinde bulunduğu durumda ispatlamak yeterlidir; bu durumda P çevrel çemberin içindedir. □

Kapsamlı bir bilgisayar taraması, teoremin çevrel çemberin içindeki bütün noktalar için doğru göründüğünü gösterdi. Böylece geriye, P üçgenin dışında ve çevrel çemberin içindeyken teoremi ispatlamak kaldı. Üstelik Durum 2, bu bölgenin bile bir kısmını eler (örneğin P, $A_1A_2'A_3$ üçgeninin içindeyken, çünkü özgün Erdős eşitsizliği bu üçgene uygulanır). Şekil 5'teki gibi, D, $A_1A_2A_3$ üçgeninin çevrel çemberi üzerinde A_1 köşesine çapın öteki ucunda karşılık gelen nokta olsun. Genelliği bozmadan, P noktası



Şekil 5

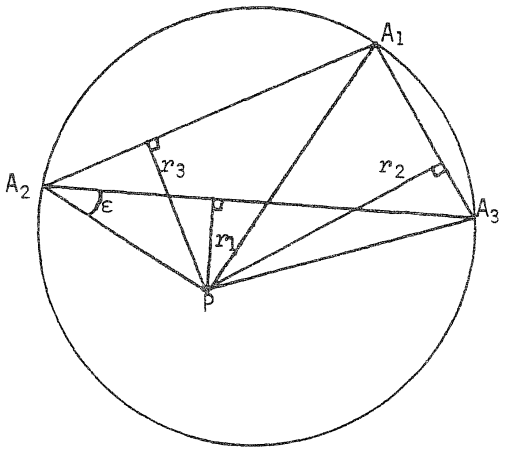
A_2A_3D üçgeninin içinde ya da üzerinde bulunduğunda teoremi ispatlamalıyız. $A_2 < 90°$ ve $A_3 < 90°$ varsayabiliriz; yoksa belirtilen

- 278 -

bölge boştur. Bu bölgede r_1'e eksi işareti verileceğinden, ispatlamamız gereken eşitsizlik

$$R_1 + R_2 + R_3 + 2r_1 \geq 2r_2 + r_3.$$

Kazarinoff'un ispatının P çevrel çemberin içinde bulunduğunda her zaman geçerli olduğu ifadesi doğrulanabilseydi, E 2462 probleminin ispatı bu noktada tamamlanmış olurdu. Tamamı geçen yıl geliştirilen aşağıdaki durumlar, istenen ispatı tamamlamaktadır.



Şekil 6

Durum 3. P, A_2A_3D üçgeninde bulunur ve A_2, A_3 açılarından en az biri $30°$'yi aşmaz.

Şekil 6'ya göre $A_2 \leq 30°$ olsun; böylece $\sin A_2 \leq 1/2$'dir. $\angle A_3A_2P = \varepsilon$ ise,

$$r_3 = R_2 \sin(A_2+\varepsilon), \qquad r_1 = R_2 \sin\varepsilon,$$

ve

$$\begin{aligned}\sin(A_2+\varepsilon) - \sin\varepsilon &= \sin A_2 \cos\varepsilon + \cos A_2 \sin\varepsilon - \sin\varepsilon \\ &= \sin A_2 \cos\varepsilon + \sin\varepsilon(\cos A_2 - 1) \\ &\leq \sin A_2 \leq \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Şimdi

$$R_2 = PA_2 > PA_2\{2\sin(A_2+\varepsilon) - 2\sin\varepsilon\} = 2r_3 - 2r_1.$$

Dolayısıyla

$$R_1 + R_2 + R_3 + 2r_1 \geq r_2 + (2r_3 - 2r_1) + r_2 + 2r_1 = 2r_2 + 2r_3. \quad \square$$

Durum 4. P noktası üçgenin en büyük açısının içindedir.
P, A_2A_3D üçgeninde bulunsun ve $A_1 \geq A_2 \geq A_3$ olsun. O zaman $a_1 \geq a_2 \geq a_3$ ve $r_1 \leq r_2$ olur; ayrıca

$$2 \leq U \equiv \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_2} \leq V \equiv \frac{a_3}{a_1} + \frac{a_1}{a_3}.$$

Böylece, bir N sayısı için $Ur_1 = Vr_2 + N$ ise,

$$Ur_1 \geq Ur_2 + N$$

ve ayrıca

$$(U-2)r_1 \leq (U-2)r_2,$$

olduğundan, çıkarma yaparak

$$2r_1 \geq 2r_2 + N.$$

Dolayısıyla, (2)'nin ilk iki satırına göre

$$R_1 + R_2 + R_3 + (\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_2})r_1 \geq (\frac{a_3}{a_1}+\frac{a_1}{a_3})r_2 + (\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1})r_3,$$

olduğundan, şu sonuç elde edilir:

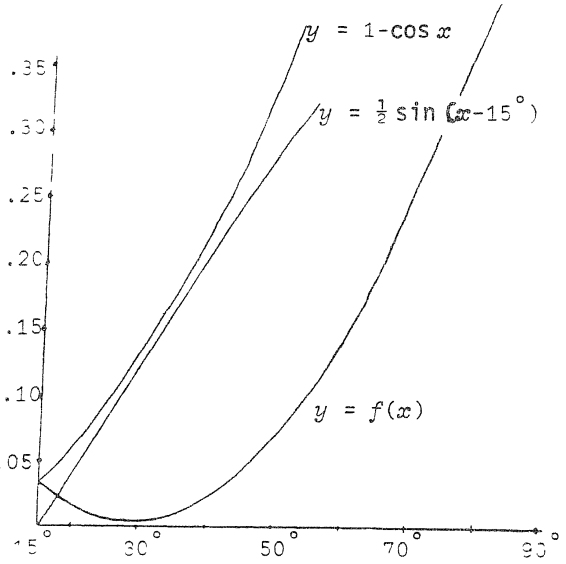
$$R_1 + R_2 + R_3 + 2r_1 \geq 2r_2 + (\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1})r_3 \geq 2r_2 + 2r_3. \quad \square$$

Artık yalnızca bir durum kaldı; ancak önce iki lemma ispatlayalım.

Lemma 1. Aşağıdaki fonksiyonun

$$f(x) = 1 - \cos x - \frac{1}{2}\sin(x - 15^\circ)$$

en küçük değeri yaklaşık olarak $(29^\circ, 0.044)$ noktasındadır; dolayısıyla $[15^\circ, 90^\circ]$ aralığındaki her x için $f(x) > 0$'dır. (Bkz. Şekil 7.)



Şekil 7

Türevi

$$f'(x) = \sin x - \frac{1}{2}\cos(x-15^\circ),$$

olup şu koşulda sıfırdır:

$$\tan x = \frac{\cos 15^\circ}{2 - \sin 15^\circ},$$

yani $x \approx 29.019466^\circ$ iken. Burada $f(x) \approx 0.004419 > 0$'dır. Ayrıca

$$f''(x) = \cos x + \frac{1}{2}\sin(x-15^\circ) > 0,$$

olduğundan, kritik nokta bir minimumdur. $\square$

Lemma 2. $1 \leq x \leq 2$ ise $g(x) = x + 1/x \leq 2.5$'tir.

Verilen aralıkta açıkça $g'(x) \geq 0$'dır; dolayısıyla $g(x) \leq g(2) = 2.5$. $\square$

Son durumda P'yi Şekil 5'teki A_2A_3D üçgeninin içinde alırız; burada (Durum 3 gereği) $A_2 > 30^\circ$, $A_3 > 30^\circ$'dir ve (Durum 4 gereği) A_1 üçgenin en büyük açısı değildir. Genelliği bozmadan, en büyük açının A_2 olduğunu varsayabiliriz. $A_2 \geq 90^\circ$ durumunu ele almamız gerekmediğinden (Şekil 5), şu durumu elde ederiz:

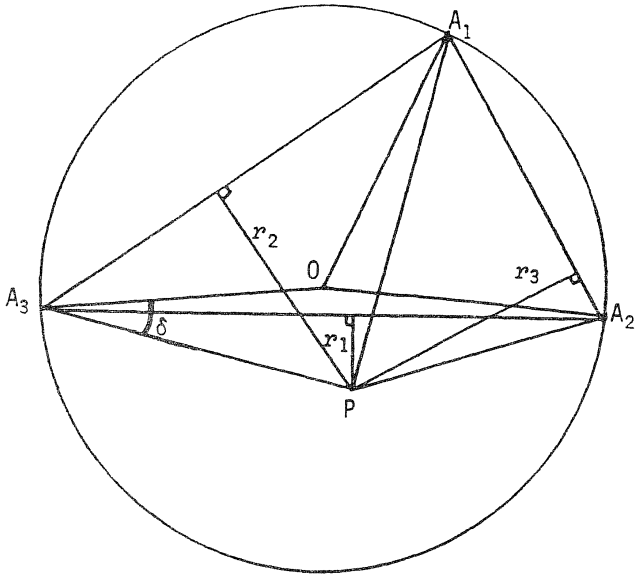
Durum 5. P, A_2A_3D üçgeninin içindedir; $30^\circ < A_3 \leq A_2$ ve $A_1 \leq A_2 < 90^\circ$'dir. (Bkz. Şekil 8.)

$\delta = \angle OA_3P$ olsun. $A_3 > 30^\circ$ olduğundan $A_1 + A_2 < 150^\circ$ ve $A_1 < 75^\circ$'dir. Böylece $\angle A_3OA_2 < 150^\circ$ ve $\angle OA_3A_2 > 15^\circ$ olur. Aşağıdaki bağıntılardan

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{\sin A_2}{\sin A_3} \quad \text{ve} \quad 30^\circ < A_3 \leq A_2 < 90^\circ,$$

şu sonuç çıkar:

- 280 -



Şekil 8

$$1 \le \frac{a_2}{a_3} < \frac{\sin 90^\circ}{\sin 30^\circ} = 2,$$

ve dolayısıyla Lemma 2'ye göre,

$$\frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_2} < 2.5.$$

Şimdi $r_1 \le R_3 \sin(\delta - 15^\circ)$ olduğundan, Lemma 1'e göre,

$$R_3(1 - \cos\delta) \ge \frac{1}{2}R_3 \sin(\delta - 15^\circ) \ge \frac{1}{2}r_1.$$

O zaman

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 + R_3 + 2r_1 &= R_1 + R_2 + R_3\cos\delta + R_3(1-\cos\delta) + 2r_1 \\ &\ge R_1 + R_2 + R_3\cos\delta + 2.5r_1 \\ &\ge R_1\cos(OA_1P) + R_2\cos(OA_2P) + R_3\cos\delta + \left(\frac{a_2}{a_3}+\frac{a_3}{a_2}\right)r_1 \\ &= \left(\frac{a_3}{a_1}+\frac{a_1}{a_3}\right)r_2 + \left(\frac{a_1}{a_2}+\frac{a_2}{a_1}\right)r_3 \qquad \text{((2) gereği)} \\ &\ge 2(r_2 + r_3), \end{aligned}$$

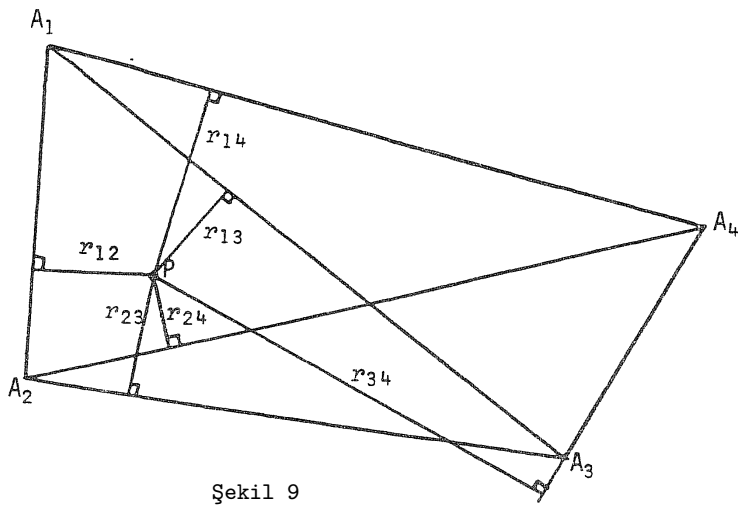
ve nihayet işimiz bitti. E 2462 probleminin ispatı tamamlanmıştır.

Son olarak, üçgenler için genişletilmiş Erdős--Mordell eşitsizliğini kullanarak, dışbükey dörtgenler için buna karşılık gelen bir sonucu bir sonuç teoremi olarak elde ediyoruz.

$A_1A_2A_3A_4$ bir dışbükey dörtgen, P de düzlemindeki herhangi bir nokta olsun.

- 281 -

$PA_i = R_i \geq 0$ alalım ve P ile A_iA_j doğrusu arasındaki işaretli uzaklığı r_{ij} ile gösterelim. İşaret, A_iA_j'nin bir kenarı olduğu herhangi bir üçgen için Demir'in kuralına göre belirlensin. Böylece (bkz. Şekil 9), r_{12}, $A_1A_2A_3$ ve $A_1A_2A_4$ üçgenleriyle ilişkilidir ve P'nin konumundan bağımsız olarak her iki üçgen için de aynı işarete sahiptir. r_{23}, r_{34}, r_{41} için de benzer ifadeler söylenebilir. Öte yandan,



Şekil 9

$|r_{13}|$ uzaklığı, $A_1A_2A_3$ ve $A_1A_3A_4$ üçgenleriyle ilişkilidir. r_{13}, $A_1A_2A_3$ üçgenine ilişkin işaretli uzaklıksa, $-r_{13}$ de $A_1A_3A_4$ üçgenine ilişkin işaretli uzaklıktır. Benzer biçimde, r_{24}, $A_1A_2A_4$ üçgenine karşılık geliyorsa, $-r_{24}$, $A_2A_3A_4$ üçgenine karşılık gelir. Dörtgenlere genişletilmiş eşitsizliğimiz şöyledir:

Sonuç. $A_1A_2A_3A_4$ bir dışbükey dörtgen, P düzlemindeki herhangi bir nokta ve R_i, r_{ij} uzaklıkları yukarıdaki gibi tanımlıysa,

$$3(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) \geq 4(r_{12} + r_{23} + r_{34} + r_{41}). \tag{3}$$

İspat. Genişletilmiş Erdős--Mordell eşitsizliğini sırasıyla $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_2A_3A_4$ üçgenlerine uygularız:

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq 2(r_{12} + r_{23} + r_{13}),$$

$$R_1 + R_2 + R_4 \geq 2(r_{12} + r_{24} + r_{41}),$$

$$R_1 + R_3 + R_4 \geq 2(r_{34} + r_{41} - r_{13}),$$

$$R_2 + R_3 + R_4 \geq 2(r_{23} + r_{34} - r_{24}),$$

Bu dört eşitsizliğin toplanmasıyla (3) elde edilir.

KAYNAK

1. D.K. Kazarinoff, "A Simple Proof of the Erdös-Mordell Inequality for Triangles", *Michigan Math. J.*, 4 (1957) 97-98.

Matematik Bölümü, Maine Üniversitesi, Orono, Maine 04469.

* * *

2625 Numaralı Problemin Çözümü:

American Mathematical Monthly, **85**, (1978), 121.

Koniklerin Bir Özelliği

E 2625 [1976, 812]. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

A_i ($i = 0, 1, 2, 3$; indisler 4 modülüne göre), bir Γ çemberi üzerinde dört nokta olsun. Γ'nın A_i'deki teğetini t_i ile, A_{i-1} ve A_{i+1}'den geçen ve t_i'ye paralel olan doğruları da sırasıyla p_i ve q_i ile gösterelim. $B_i = t_i \cap t_{i+1}$, $C_i = p_i \cap q_{i+1}$ ise, dört B_iC_i doğrusunun ortak bir noktası olduğunu gösteriniz.

Jordi Dou'nun çözümü, Barselona, İspanya. Daha genel bir sonuç ispatlayacağız.

Teorem. *K, gerçek bir izdüşümsel düzlemde dejenere olmayan bir konik; A_i ($0 \le i \le 3$), K üzerinde dört farklı nokta; r de $A_i \notin r$ olacak biçimde bir doğru olsun. K'nın A_i'deki teğeti t_i olsun; $B_i = t_i \cap t_{i+1}$, $T_i = t_i \cap r$, $p_i = T_iA_{i-1}$, $q_i = T_iA_{i+1}$ ve $C_i = p_i \cap q_{i+1}$ alalım. O zaman dört B_iC_i doğrusu bir noktada kesişir.*

İspat. π, K'ya göre kutupluluk ve $S = A_0A_2 \cap A_1A_3$ olsun. $s = \pi(S)$, $R = \pi(r)$ alalım. σ, merkezi S, ekseni s olan harmonik homoloji olsun. Böylece $\sigma^2 = 1$ ve $\sigma(A_i) = A_{i+2}$ olur. $Q = \sigma(R)$ noktasının B_iC_i doğrularının her biri üzerinde bulunduğunu ileri sürüyoruz.

π'nin S ile s'yi birbirine dönüştürdüğüne dikkat ediniz; bunun sonucunda σ ve π değişmelidir. Dolayısıyla $\tau = \sigma\pi = \pi\sigma$ da bir kutupluluktur. Şu eşitlikler geçerlidir:

$$\tau(t_i) = \sigma\pi(t_i) = \sigma(A_i) = A_{i+2},$$

$$\tau(t_{i+1}) = A_{i+3} = A_{i-1},$$

$$\tau(r) = \sigma\pi(r) = \sigma(R) = Q$$

Bunun sonucunda $T_{i+1}T_iB_i$ ve $A_{i+2}A_{i-1}Q$ üçgenleri K'ya göre birbirinin kutupsal üçgenleridir. Chasles teoremine göre (bkz. H. S. M. Coxeter, *The Real Projective Plane*, Cambridge University Press, 1961, s. 71), bunlar bir Desargues üçgen çifti oluşturur. Dolayısıyla $T_{i+1}A_{i+2} = q_{i+1}$, $T_iA_{i-1} = p_i$ ve B_iQ doğruları $C_i = p_i \cap q_{i+1}$'de kesişir. Böylece, ileri sürüldüğü gibi Q'nun B_iC_i doğruları üzerinde bulunduğu görülür.

Problemin ifadesi, $K = \Gamma$ ve $r =$ sonsuzdaki doğru seçilerek elde edilir.

L. Kuipers (İsviçre) ve problemi öneren de çözmüştür.

3135 Numaralı Problemin Çözümü:
American Mathematical Monthly, **95**, (1988), 764.

Köşelere Olan Uzaklıkların Eşleştirilmesi

E 3135 [1986, 215]. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Bir çembere içten çizilmiş çeşitkenar bir ABC üçgeninde, çember üzerinde, karşısındaki köşeye uzaklığı diğer iki köşeye uzaklıkları toplamına eşit olan bir D noktası bulunduğunu ispatlayınız ve D'yi cetvel ve pergelle kurunuz.

I. J. Leech'in çözümü, Stirling Üniversitesi, İskoçya. $BC > AC > AB$ olsun. BA ışını üzerinde X, BC üzerinde Y noktalarını $BX = BY = AC$ olacak biçimde belirleyerek, BAC'yi bir BXY ikizkenar üçgenine dönüştürelim. BXY'nin çevrel çemberi, BAC'nin çevrel çemberini aranan D noktasında keser. D'nin istenen özelliğe sahip olduğunu ispatlamak için AD'yi, $DZ = DC$ olacak biçimde bir Z noktasına uzatalım. O zaman DZC üçgeni BXY üçgenine benzerdir; çünkü D ve B açıları, ADC açısının bütünleridir. Bunun sonucunda DBY üçgeni ZAC üçgenine eştir; çünkü kuruluş gereği $AC = BY$'dir, A ile B açıları eşittir ve $\angle BDY = \angle BXY = \angle DZC$'dir. Dolayısıyla $DB = ZA = DA + DC$ olur.

II. P. Tzermias'ın çözümü (öğrenci), Patras Üniversitesi, Yunanistan. a, b, c, A, B, C'nin karşılarındaki kenarların; x, y, z de DA, DB, DC'nin uzunlukları olsun. $y = x + z$ olacak biçimde bir D noktası arıyoruz. Batlamyus teoremine göre $ax + cz = by$'dir. y yerine değeri konursa $x/z = (c - b)/(b - a)$ elde edilir. Böylece D, A ve C noktalarıyla $(c - b)/(b - a)$ oranı kullanılarak belirlenen "Apollonius çemberi" üzerindedir. Bu çemberin standart bir kuruluşu vardır (bkz. N. Altshiller-Court, *College Geometry*, 1952, s. 15).

Editörün yorumları. $c - b$ ile $b - a$ aynı işaretli olması gerektiğinden, D, uzunluğu ortada olan kenarın ayırdığı yay üzerinde bulunmalıdır. Dolayısıyla ABC ikizkenarsa, D ancak iki eşit kenarın ortak köşesi olabilir. Öte yandan ABC eşkenarsa, D çember üzerindeki herhangi bir nokta olabilir; bu durumda Leech'in iki çemberi çakışır.

Bazı çözenler, D'nin varlığının Ara Değer Teoremi'nden çıktığını belirtmiştir. B'nin karşısındaki yay üzerinde bulunan D, ABC'nin en kısa kenarına yakınsa, B'ye uzaklığı $DA + DC$'den küçüktür; en uzun kenara yakınsa $DB > DA + DC$ olur.

Batlamyus teoreminden bağımsız başka çözümler, J. Dou (İspanya), L. Kuipers (İsviçre) ve P. L. Hon (Hong Kong) tarafından gönderilmiştir.

E. Morgantini (İtalya), bu probleme atıf yapan "Una Quartica Bicircolare Della Geometria Del Triangolo" başlıklı bir makale göndermiştir.

Yukarıda anılanların yanı sıra S. Arslanagić (Yugoslavya), A. Bager, H. Eves, J. Fukuta (Japonya), H. Kappus (Batı Almanya), O. P. Lossers (Hollanda), J. P. Robertson, J. S. Robertson, V. Schindler (Doğu Almanya), R. A. Simon (Şili), B. A. Troesch, M. Vowe (İsviçre) ve problemi önerenden doğru çözümler alınmıştır.

3164 Numaralı Problemin Çözümü:
American Mathematical Monthly, **95**, (1988), 660.

Elipse Çizilen Teğetler

E 3164 [1986, 566]. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

s, t, dışındaki bir noktadan bir elipse çizilen teğet parçalarının uzunlukları olsun. s/t oranının uç değerlerini bulunuz.

Gene Arnold ve Vaclav Konecny'nin çözümü, Ferris State College, Big Rapids, Michigan. Bir elipsi, $\mathbb{R}^3$'te bir düzlemde bulunan bir çemberin başka bir düzleme dik izdüşümü olarak ele alalım. Açıkça teğetlerin izdüşümleri teğettir ve elipsin küçük ekseni iki düzlemin kesişimine diktir. Çembere çizilen, birbiriyle kesişen herhangi iki teğet parçasının oranı 1 olduğundan, elipse çizilen böyle iki teğetin uç oranları, çemberin bir teğet parçasının izdüşümüne oranı en küçükken diğer oranın en büyük olması durumunda elde edilir. Bu, izdüşürülen teğetler düzlemlerin kesişimine sırasıyla paralel ve dik olduğunda gerçekleşir. Böylece uç oranlar, büyük eksenin küçük eksene oranı ve bu oranın tersidir.

Editörün yorumu. M. S. Klamkin, daha zor olan $|s - t|$'nin uç değerleri probleminin incelenmesini önermiştir.

Diğer çözenler: M. Barr (Kanada), J. C. Binz (İsviçre), J. M. Cohen, J. Dou (İspanya), J. Fukuta (Japonya), P. L. Hon (Hong Kong), L. R. King, M. S. Klamkin (Kanada), K.-W. Lau (Hong Kong), O. P. Lossers (Hollanda), M. Pachter (Güney Afrika), K. Schilling, J. H. Steelman, P. Tracy, D. B. Tyler, C. Vandermee (Hollanda) ve problemi öneren. Bir yanlış çözüm alınmıştır.

3422 Numaralı Problemin Çözümü:
American Mathematical Monthly, **99**, (1992), 679.

Teğetler İnvolüsyon Ekseninde Kesişir

E 3422 [1991, 158]. Öneren: H. Demir ve C. Tezer, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

F ve F', verilen bir çemberin merkezine göre simetrik iki nokta; S de çember üzerinde, FF' doğrusunda bulunmayan bir nokta olsun. SF ve SF''nin çemberle ikinci kesişim noktaları sırasıyla P ve P' olsun. Çemberin P ve P''deki teğetleri T noktasında kesişiyorsa, FF''nin orta dikmesinin ST doğru parçasının orta noktasından geçtiğini ispatlayınız.

I. Jean-Pierre Grivaux'nun çözümü, Paris, Fransa. Karmaşık düzlemde çalışıyoruz; büyük harflerle gösterilen noktaların karmaşık gösterimlerini karşılık gelen küçük harflerle belirtiyoruz. Çemberin $\mathbf{U} = \{Z : |z| = 1\}$, F ve F' noktalarının da gerçek eksen üzerinde olduğunu varsayabiliriz.

$A, B \in \mathbf{U}$ ise, Z'nin A ve B'den geçen doğru üzerinde olması için gerek ve yeter koşul, $\mathcal{E}_{ab}$ diye anacağımız $z + ab\bar{z} = a + b$ denklemidir. Bunu elde etmek için,

doğrunun, r gerçek olmak üzere $z = a + r(b - a)$ eşitliğini sağlayan karmaşık gösterime sahip Z noktalarının kümesi olduğuna dikkat ediniz. Bunun eşleniğini alıp $\bar{a} = 1/a$, $\bar{b} = 1/b$ kullanarak $\bar{z} = \bar{a} + r(\bar{b} - \bar{a})$ elde ederiz. Bu eşitliği ab ile çarpıp ilk denkleme ekleyince $\mathcal{E}_{ab}$ bulunur. $\mathcal{E}_{ab}$'nin bu biçimi $a = b$ iken de geçerlidir.

$\mathcal{E}_{pp}$ ve $\mathcal{E}_{p'p'}$, $\mathbf{U}$'nun P ve P''deki teğetlerinin denklemleri olduğundan, $t + p^2\bar{t} = 2p$ ve $t + (p')^2\bar{t} = 2p'$ elde edilir. $\bar{t}$ yok edilerek ($p \neq p'$ iken) t için çözülürse $t = 2/(\bar{p} + \bar{p}')$ bulunur. s gerçek olmadığından $p + p' \neq 0$ olduğuna dikkat ediniz. ST'nin orta noktası Z olup

$$z = \frac{1}{2}(s + t) = \frac{1}{2}\left(s + \frac{2}{\bar{p} + \bar{p}'}\right),$$

ve ispatlamak istediğimiz sonuç $z + \bar{z} = 0$'dır; yukarıdakine göre bu,

$$\left(s + \frac{2}{1/p + 1/p'}\right) + \left(\frac{1}{s} + \frac{2}{p + p'}\right) = 0.$$

demektir. Cebirsel işlemlerle bu eşitlik şu eşitliğe denktir:

$$\left(-\frac{2s}{1 + s^2}\right)(1 + pp') = p + p'. \qquad (*)$$

F ve F' sırasıyla PS ve $P'S$ doğruları üzerinde olduğundan, f ve f' $(= -f)$ sırasıyla $\mathcal{E}_{ps}$ ve $\mathcal{E}_{p's}$ denklemlerini sağlar; yani $(f)(1+ps) = p+s$ ve $(-f)(1+p') = p'+s$ olur. Burada $\bar{f} = f$ olgusunu kullandık. Bu iki denklemden f'nin yok edilmesi, istenen (*) eşitliğini verir.

II. Problemi önerenlerin çözümü. F ve F''nün çakıştığı durumu dışarıda bırakalım. K, S'ye çapın öteki ucunda karşılık gelen nokta olsun. S'den FF''ne paralel çizilen doğrunun çemberle öteki kesişimi S' olsun (S', S ile çakışabilir). Çemberin merkezi FF''nü ortaladığından, SS', SP, SK, SP' doğruları harmonik bir demet oluşturur. Dolayısıyla çember üzerindeki her X noktası için XS', XP, XK, XP' doğruları da harmonik bir demet oluşturur. Özellikle $X = P$ veya $X = P'$ seçerek, PS', PT, PK, PP' ve $P'S', P'P, P'K, P'T$ demetlerinin harmonik olduğunu buluruz. PP' doğrusu her iki demette de ortak olduğundan, S', K, T noktaları, açıkça FF''ne dik olan bir doğru üzerindedir. Dolayısıyla FF''nün orta dikmesi ST'yi ortalar.

Editörün yorumu. Çözenlerin çoğu, sonucu ispatlamak için doğrudan analitik geometri ve uzun hesaplamalar kullanmıştır. Bazıları sentetik Öklid geometrisinden yararlanmıştır. H. Kappus, karmaşık sayılarla başka bir ispat; O. P. Lossers da izdüşümsel geometriyle başka bir ispat vermiştir. J. Dou'nun güzel bir yaklaşımı, bir koniğin izdüşümsel involüsyonlarının (koniği kendisine götüren ve çift oranları koruyan involüsyonların) klasik bir özelliğini kullanır. Bu yaklaşımı ve Grivaux'nun çözümüyle ilişkisini, o çözümün gösterimlerini kullanarak kısaca açıklıyoruz.

$\sigma(x) = -x$ ile verilen $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dönüşümü, gerçek doğrunun izdüşümsel bir involüsyonunu verir. $\sigma(\infty) = \infty$ tanımıyla bu, gerçek izdüşümsel doğru $\mathbf{P}$'nin izdüşümsel bir involüsyonuna genişletilir. Birim çember $\mathbf{U}$ üzerinde verilen S noktası için, $\pi : \mathbf{P} \to \mathbf{U}$ dönüşümünü, $\pi(X)$, S ile $X \in \mathbf{P}$'yi birleştiren doğrunun $\mathbf{U}$'yu yeniden kestiği nokta olacak biçimde tanımlayalım. Özellikle, sonsuzdaki noktanın π altındaki görüntüsü, S'den gerçek eksene paralel çizilen doğrunun $\mathbf{U}$ ile öteki kesişimidir. Buradan $g = \pi \circ \sigma \circ \pi^{-1}$ ile verilen $g : \mathbf{U} \to \mathbf{U}$ dönüşümünün $\mathbf{U}$'nun izdüşümsel bir involüsyonu olduğu çıkar.

σ, 0 ve ∞'yi sabit bıraktığından, g'nin sabit noktalarına karşılık gelen sayılar $-s$ ve $-\bar{s}$'dir. İzdüşümsel geometrinin klasik bir sonucu, her $P \in \mathbf{U}$ için $\mathbf{U}$'nun P ve $g(P)$'deki teğetlerinin, g'nin sabit noktalarından geçen $\mathbf{l}$ doğrusu üzerinde kesiştiğini söyler. T, P ve $P' = g(P)$'deki teğetlerin kesişimi olduğundan, T'nin $\mathbf{l}$ üzerinde bulunduğunu görürüz. Buradan ST'nin orta noktasının salt sanal eksen üzerinde olduğu açıktır; istenen de buydu.

$x \in \mathbb{R}$ için $\pi(X)$'in $(x-s)/(1-xs)$ ile; $p \in \mathbf{U}$ için $g(P)$'nin de $\lambda = -2s/(1+s^2)$ olmak üzere $(\lambda - p)/(1-\lambda p)$ ile gösterildiği kolayca hesaplanır. Aslında λ gerçektir (ya da ∞'dir) ve g'nin sabit noktalarındaki teğetlerin kesişimini gösterir. Nitekim Grivaux'nun çözümündeki (*) bağıntısı, λ'nın $\mathcal{E}_{pp'}$ denklemini sağladığını ifade eder; böylece P ile P''den geçen doğru daima Λ'dan geçer. Bu, g involüsyonunun, her $P \in \mathbf{U}$ noktasını Λ ile P'den geçen doğrunun $\mathbf{U}$ ile öteki kesişimine göndererek elde edildiğini gösterir. $\mathbf{l}$ doğrusu (g involüsyonunun "ekseni"), Λ'nın $\mathbf{U}$'ya göre kutup doğrusudur.

Koniklerin involüsyonlarının ayrıntılı bir incelemesi için bkz. H. F. Baker, *An Introduction to Plane Geometry* (Cambridge University Press, 1943), Bölüm IX; ya da M. Berger, *Geometry II* (Springer, 1987), Kısım 16.3. Berger'in kitabında yukarıdaki Λ noktasına, g involüsyonunun "Frégier noktası" adı verilir.

Adları anılanlar dahil 26 okur ve problemi önerenler çözmüştür.

3469 Numaralı Problemin Çözümü:
American Mathematical Monthly, **100**, (1993), 875.

Bir Konik Arayan Altı Ağırlık Merkezi

E 3469 [1991, 955]. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

P, ABC üçgeninin içinde bir nokta olsun; AP, BP, CP doğruları BC, CA, AB doğrularını sırasıyla D, E, F noktalarında kessin. Altı PBD, PDC, PCE, PEA, PAF, PFB üçgeninin ağırlık merkezlerinin bir konik üzerinde bulunması için gerek ve yeter koşulun, P'nin üçgenin üç kenarortayından en az biri üzerinde bulunması olduğunu ispatlayınız.

Problemin yeniden ifadesi ve gösterimlerin belirlenmesi. P merkezli, $3:2$ oranlı homoteti uygulanırsa, üçgenlerin ağırlık merkezlerinin bir konik üzerinde bulunması için gerek ve yeter koşulun, AF, FB, BD, DC, CE, EA'nın orta noktalarının aynı konik üzerinde bulunması olduğu görülür. x, y, z, u, v, w, sırasıyla AF, FB, BD, DC, CE, EA uzunluklarının yarılarını göstersin. AF, FB, BD, DC, CE, EA'nın orta noktaları sırasıyla $1, 2, 4, 5, 6$ ile gösterilsin.

I. Victor Prasolov'un çözümü, Moskova Bağımsız Üniversitesi, Moskova, Rusya.

Carnot teoremine göre (bkz. Howard W. Eves, *A survey of geometry*, gözden geçirilmiş baskı, Allyn and Bacon, 1972, s. 256 ve 262), altı ağırlık merkezinin bir konik üzerinde bulunması için gerek ve yeter koşul

$$x(2x+y)z(2z+u)v(2v+w) = w(2w+v)u(2u+z)y(2y+x). \quad (1)$$

eşitliğidir. Ceva teoremine göre $xzv = wuy$ olduğundan, (1) sadeleştirilerek $xzw+zvy+vxu-(wux+uyv+ywz) = 0$, yani $(x-y)(z-u)(w-v) = 0$ elde edilir. Bu koşul, P'nin bir kenarortay üzerinde bulunmasına karşılık gelir.

II. Albert Nijenhuis'un çözümü, Seattle, Washington. Pascal teoremine göre $1,2,3,4,5,6$ noktalarının bir konik üzerinde bulunması için gerek ve yeter koşul, $Q = AB \cap 45$, $R = BC \cap 61$, $S = CA \cap 23$ noktalarının doğrusal olmasıdır. (Bu noktalardan herhangi biri sonsuzdaysa, esaslı bir güçlük doğmaz. Örneğin $AB \parallel 45$ ise AQ/QB oranının yerine -1 alınır.)

Menelaus teoremine göre,

$$\frac{AQ}{QB}\cdot\frac{2z+u}{u}\cdot\frac{v}{2w+v}=-1,\qquad \frac{BR}{RC}\cdot\frac{2v+w}{w}\cdot\frac{x}{2y+x}=-1,$$

$$\frac{CS}{SA}\cdot\frac{2x+y}{y}\cdot\frac{z}{2u+z}=-1.$$

Bunları çarpıp I. çözümdeki gibi Ceva teoremini kullanırsak, $AQ/QB \cdot BR/RC \cdot CS/SA = -1$ olması için gerek ve yeter koşulun $(x-y)(z-u)(w-v)=0$ olduğunu görürüz. Dolayısıyla Q, R, S'nin doğrusal olması ve böylece $1,2,3,4,5,6$ noktalarının bir konik üzerinde bulunması için gerek ve yeter koşul, P'nin bir kenarortay üzerinde bulunmasıdır.

Neela Lakshmanan'ın yorumları, Scranton Üniversitesi, Scranton, Pensilvanya. P'nin üçgenin içinde olması koşulu gevşetilebilir: Yalnızca P'nin üçgenin hiçbir kenarı üzerinde bulunmaması gerekir.

Sonucun yalnızca orta noktalar için değil, bu altı doğru parçasının her birini sabit bir oranda bölen noktalar için de doğru olduğunu ispatlayabiliriz: $1,2,3,4,5,6$, üçgenin kenarları üzerinde $A1 : 1F = F2 : 2B = B3 : 3D = D4 : 4C = C5 : 5E = E6 : 6A$ eşitlikleriyle tanımlanan noktalarsa, altı noktanın bir konik üzerinde bulunması için gerek ve yeter koşul, P'nin bir kenarortay üzerinde bulunmasıdır. Ayrıca P bir iç nokta ise, $1,2,3,4,5,6$ altıgeni dışbükeydir ve en büyük alanına, P, $\triangle ABC$'nin ağırlık merkezi olduğunda ulaşır.

Editörün yorumu. Çözenlerin birçoğu, Carnot ya da Pascal teoreminin kullanımını homojen koordinatlar ve analitik yöntemlerle desteklemiştir. Bazıları ise doğrudan genel bir koniğin altı katsayısı üzerindeki koşullarla çalışmıştır.

Diğer çözenler: F. Bellot ve M. A. López (İspanya), R. J. Chapman (Birleşik Krallık), J. Fukuta (Japonya), H. Kappus (İsviçre), O. P. Lossers (Hollanda), I. A. Sakmar (Türkiye), Anchorage Math Solutions Group ve problemi öneren. Bir yanlış çözüm alınmıştır.

5 *MONTHLY* Problemlerine Sunulan Çözümler

Hüseyin Demir'in American Mathematical Monthly'deki problemlere sunduğu çözümlerin listesi:

[1] İleri Düzey Problem 4057, *American Mathematical Monthly*, 51, (1944), 168.
[2] Temel Düzey Problem 1107, *American Mathematical Monthly*, 61, (1954), 643.
[3] Temel Düzey Problem 1142, *American Mathematical Monthly*, 62, (1955), 444.
[4] Temel Düzey Problem 1148, *American Mathematical Monthly*, 62, (1955), 495.
[5] Temel Düzey Problem 1166, *American Mathematical Monthly*, 63, (1956), 42.
[6] Temel Düzey Problem 1687, *American Mathematical Monthly*, 72, (1965), 425.
[7] Temel Düzey Problem 2122, *American Mathematical Monthly*, 76, (1969), 833.
[8] Temel Düzey Problem 2398, *American Mathematical Monthly*, 81, (1974), 89.

4057 Numaralı Problemin Çözümü:
***American Mathematical Monthly*, 51, (1944), 168.**

Euler Doğrusu

4057 [1942, 616]. Öneren: J. R. Musselman, Western Reserve Üniversitesi

B_1, B_2, B_3, $A_1A_2A_3$ üçgeninin köşelerinin çevrel çemberin merkezi O'ya göre simetrikleri; C_1, C_2, C_3 de A_i'lerin $A_1A_2A_3$'ün kenarlarının orta dikmelerine göre yansımaları olsun. OB_1C_1, OB_2C_2, OB_3C_3 çemberlerinin bir P noktasında kesiştiği bilinmektedir. P'nin $A_1A_2A_3$'ün Euler doğrusu üzerinde olduğunu ve D, $A_1A_2A_3$'ün diklik merkezi H'nin çevrel çembere göre evirme görüntüsü olmak üzere, O'nun PD'nin orta noktası olduğunu gösteriniz.

Hüseyin Demir'in çözümü, Columbia Üniversitesi. A_iC_i doğrularının oluşturduğu üçgen $G_1G_2G_3$ olsun. Böylece $A_1A_2A_3$ onun orta üçgeni, bu son üçgenin çevrel çemberi (O) ise onun dokuz nokta çemberidir; G_iC_i'ler yüksekliklerdir, diklik merkezi H', H'nin O'ya göre simetriğidir ve C_iB_i doğruları H''de kesişir. (OB_1C_1) çemberinin OH', yani OH ile kesiştiği nokta P olsun. $H'O \cdot H'P = H'C_1 \cdot H'B_1 = H'C_i \cdot H'B_i$ olduğundan (OB_iC_i) çemberleri P'de yeniden kesişir. (OB_1C_1)'in (O)'ya göre evirme görüntüsü B_1C_1'dir; dolayısıyla $OH' \cdot OP = \overline{OC_1}^2 = R^2$ olur. $OH \cdot OD = R^2$ ve $OH = H'O$ olduğundan $OD = PO$ olmalıdır.

H. Eves de, O merkezli ve $-R^2$ kuvvetli evirmeyi kullanarak kısa bir ispat vermiştir.

1107 Numaralı Problemin Çözümü:
***American Mathematical Monthly*, 61, (1954), 643.**

Bir Dörtyüzlüye İlişkin Düzlem Demeti

E 1107 [1954, 194]. Öneren: Victor Thébault, Tennie, Sarthe, Fransa

$ABCD$ dörtyüzlüsünün AB, AC, AD ayrıtları üzerinde, $AB = nAM$, $AC = (n+1)AN$, $AD = (n+2)AP$ olacak biçimde M, N, P noktaları işaretlensin. n değişirken MNP düzleminin sabit bir doğruyu içerdiğini gösteriniz.

I. Hüseyin Demir'in çözümü, Zonguldak, Türkiye. Verilen bağıntılardan $[M]$ ve $[P]$ nokta dizilerinin projektif olduğu açıktır. Ancak A kendisine karşılık gelen bir eleman olduğundan, bu projektif eşleme bir perspektif eşlemedir. Dolayısıyla MP sabit bir P' noktasından geçer. Benzer biçimde MN, sabit bir N' noktasından geçer. O hâlde MNP düzlemi sabit $P'N'$ doğrusunu içerir.

1142 Numaralı Problemin Çözümü:
***American Mathematical Monthly*, 62, (1955), 444.**

Dik Dairesel Koninin Yarı Tepe Açısı

E 1142 [1954, 711]. Öneren: M. S. Klamkin, Brooklyn Politeknik Enstitüsü, N. Y.

Üç ana doğrusu birbiriyle $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ açılarını yapan bir dik dairesel koninin yarı tepe açısını bulunuz.

Demir, aşağıdaki eşdeğer yanıtı vermiştir:

$$\sin^2\phi = -\frac{16\sin^2\alpha\sin^2\beta\sin^2\gamma}{\begin{vmatrix} 0 & \sin\alpha & \sin\beta & \sin\gamma \\ \sin\alpha & 0 & \sin\gamma & \sin\beta \\ \sin\beta & \sin\gamma & 0 & \sin\alpha \\ \sin\gamma & \sin\beta & \sin\alpha & 0 \end{vmatrix}}.$$

1148 Numaralı Problemin Çözümü:
***American Mathematical Monthly*, 62, (1955), 495.**

Alanları Eşit İki Üçgen
E 1148 [1955, 40]. Öneren: Victor Thébault, Tennie, Sarthe, Fransa

a, b, c, ABC üçgeninin BC, CA, AB kenarları üzerinde keyfî noktalar; A', B', C' ise A, B, C'nin sırasıyla bc, ca, ab doğru parçalarının orta noktalarına göre yansımaları olsun. abc ve $A'B'C'$ üçgenlerinin alanlarının eşit olduğunu gösteriniz.

Hüseyin Demir'in çözümü, Zonguldak, Türkiye. a', b', c', sırasıyla a, b, c'nin BC, CA, AB'nin orta noktalarına göre yansımaları olsun. Bilinen bir özellik gereğince abc ile $a'b'c'$'nün alanları eşit olduğundan, $a'b'c'$ ile $A'B'C'$'nün alanlarının eşit olduğunu ispatlayacağız. $\overrightarrow{aB'} = \overrightarrow{Bc} = \overrightarrow{c'A}$, $\overrightarrow{aC'} = \overrightarrow{Cb} = \overrightarrow{b'A}$ bağıntılarından $b'c' = B'C'$ elde edilir. Benzer biçimde $c'a' = C'A'$, $a'b' = A'B'$'dir; dolayısıyla $a'b'c'$ ile $A'B'C'$ üçgenleri aslında eştir.

Diğer çözenler: W. B. Carver, A. R. Hyde, M. S. Klamkin, D. C. B. Marsh, C. S. Ogilvy, C. F. Pinzka, Roscoe Woods ve problemi öneren.

Pinzka, R. A. Johnson'ın *Modern Geometry* (1929), s. 80'deki iki benzer sonuca dikkat çekmiştir. Carver, Hyde, Ogilvy ve Woods, eğik koordinatlar kullanarak basit çözümler vermişlerdir.

Editörün notu. Yukarıdaki çözüm, $a'b'c'$, $A'B'C'$ üçgenlerinin eş olmalarının yanı sıra homotetik olduklarını da gösterir. Buradan, a, b, c noktaları bir L doğrusu üzerinde doğrusal ise, A', B', C''nün de L'nin ters kesenine paralel bir L' doğrusu üzerinde doğrusal oldukları çıkar. Dolayısıyla L, ABC üçgeninin bir Simson doğrusuysa L ile L' birbirine diktir.

1166 Numaralı Problemin Çözümü:
***American Mathematical Monthly*, 63, (1956), 42.**

Bir Daire Parçasındaki Çember Zinciri
E 1166 [1955, 364]. Öneren: Leon Bankoff, Los Angeles, Kaliforniya

DE, verilen bir (O) çemberinin AB çapına dik olan değişken bir kiriş olsun. Küçük DEB daire parçasına çizilebilen en büyük (ω_0) çemberi, DE kirişine C'de teğettir. (ω_1) çemberi (ω_0), (O) ve DC'ye; başka bir (ω_2) çemberi de (ω_1), (O) ve DC'ye teğettir. (ω_2) çemberinin yarıçapını en büyük yapan BC/CA oranını bulunuz.

Hüseyin Demir'in çözümü, Zonguldak, Türkiye. (O) ve (ω_i)'nin yarıçaplarını sırasıyla R ve r_i ile gösterelim. (ω_1), (ω_2), CD'ye C_1, C_2'de teğet olsun. Böylece kolayca

$$CC_1 = 2\sqrt{r_0 r_1}, \qquad C_1C_2 = 2\sqrt{r_1 r_2}.$$

Hipotenüsleri $O\omega_1 = R - r_1$, $O\omega_2 = R - r_2$ olan dik üçgenlerden

$$(1) \qquad (R - 2r_0 + r_1)^2 + 4r_0 r_1 = (R - r_1)^2,$$

$$(2) \qquad (R - 2r_0 + r_2)^2 + 4(\sqrt{r_0 r_1} + \sqrt{r_1 r_2})^2 = (R - r_2)^2.$$

(1)'den elde edilen

$$r_1 = r_0(R - r_0)/R,$$

değeri (2)'de yerine konursa

$$r_2 = (R - r_0)^2 r_0/(R + r_0)^2.$$

elde edilir. Şimdi $k = BC/CA = r_0/(R - r_0)$ koyup maksimum için türev testini uygulayarak

$$k = (\sqrt{5} - 1)/4.$$

Diğer çözenler: G. B. Charlesworth, Walter Guber, A. R. Hyde, R. B. Plymale ve problemi öneren. Bu çözümlerin bazıları, problemin şeklinin yanlış yorumlanmasına dayanıyordu.

Problemi öneren, sorunun (ω_2) çemberini bir çizimde en iyi biçimde gösterme çabasından doğduğunu belirtmiştir. Ayrıca konuyla bağlantılı şu ilginç olgulara dikkat çekmiştir:

1. C, O ile çakıştığında (ω_0) ve (ω_1) çemberleri en büyüktür; ancak (ω_2), $BC/CA = (\sqrt{5}-1)/4$ olduğunda en büyüktür. Bunun beklenmedik sonucu, CB'nin, çapı AC olan çembere çizilmiş bir düzgün ongenin kenarı olmasıdır.

2. $r_{2(\max)} = r_1/2$.

3. $r_n = 2AB\cos^2 u/[\tan^n(u/2) + \cot^n(u/2)]^2$; burada u, ABD açısıdır (Victor Thébault tarafından problemi önerene bildirilmiştir).

4. AC ve CB rasyonelse r_n de rasyoneldir.

1687 Numaralı Problemin Çözümü:
***American Mathematical Monthly*, 72, (1965), 425.**

Menelaus Teoreminin Bir Uygulaması

E 1687 [1964, 430]. Öneren: Daniel Pedoe, Purdue Üniversitesi

UVW bir eşkenar üçgen; A, B, C, sırasıyla VW, WU, UV kenarlarının orta noktaları; A', VW doğrusu üzerinde, B', WU doğrusu üzerinde, C' ise UV doğrusu üzerinde herhangi birer nokta olsun. P, BC ile $B'C'$'nün, Q, CA ile $C'A'$'nün, R de AB ile $A'B'$'nün kesişimiyse şunları ispatlayınız: (1) $A'P, B'Q, C'R$ doğruları bir noktada kesişir; (2) kesişim noktasının ABC üçgenine göre alan koordinatları, uygun bir işaret seçimiyle, $(AA')^{-1} : (BB')^{-1} : (CC')^{-1}$'dir.

Bir afin izdüşüm yoluyla hem (1)'i hem (2)'yi; genel bir izdüşüm yoluyla da (1)'i genelleyiniz.

I. Hüseyin Demir'in çözümü, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye. (1) Önce $BC = CA = AB = 1$ alalım ve VW, WU, UV; $AA' = a'$, $BB' = b'$, $CC' = c'$'yi yönlü doğru parçaları olarak ele alalım. P, Q, R'nin $A'B'C'$'nün kenarlarını böldüğü oranlar λ, μ, ν olsun. $UC'B'$, CB çiftine Menelaus teoremini uygulayınca $(PB'/PC') \cdot (CC'/CU) \cdot (BU/BB') = 1$, yani $\lambda(-c')(1/b') = 1$ elde edilir; buradan $\lambda = -b'/c'$ olur. Diğer iki çift de ele alınırsa $\mu = -c'/a'$ ve $\nu = -a'/b'$ bulunur. Bunlar $\lambda \cdot \mu \cdot \nu = -1$ verdiğinden, doğruların bir T noktasında kesiştiği ispatlanır.

(2) T'nin $A'B'C'$ ve ABC üçgenlerine göre alan koordinatlarını sırasıyla $(l'\ m'\ n')$ ve $(l\ m\ n)$ matrisleriyle gösterelim. $l' : n' = -\mu$, $m' : l' = -\nu$ bağıntılarından

$$(\alpha) \qquad l' : m' : n' = l' : \frac{a'}{b'}\ l' : \frac{a'}{c'}\ l' = \frac{1}{a'} : \frac{1}{b'} : \frac{1}{c'} \cdot$$

Şimdi $l : m : n = (l\ m\ n)$'yi bulmak için önce şu gösterimi tanımlayalım:

$$LMN/XYZ = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix}$$

Burada sütunlar, L, M, N'nin XYZ üçgenindeki alan koordinatlarıdır.
Şu bağıntılar geçerlidir:

$$(\beta) \quad A'B'C'/UVW = \begin{bmatrix} 0 & 1-a' & 1+a' \\ 1+b' & 0 & 1-b' \\ 1-c' & 1+c' & 0 \end{bmatrix}, \quad UVW/ABC = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

ve $T/A'B'C' = (1/a' \quad 1/b' \quad 1/c')$'dir. Şu genel özdeşliği görmek güç değildir:

$$(\gamma) \qquad T/ABC = (T/A'B'C') \cdot (A'B'C'/UVW) \cdot (UVW/ABC).$$

(α) ve (β), (γ)'da yerine konursa,

$$(l\ m\ n) = (l'\ m'\ n') \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1-a' & 1-a' \\ 1-b' & 0 & 1-b' \\ 1-c' & 1-c' & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= (1/a'\ 1/b'\ 1/c') \begin{bmatrix} 2 & 2a' & -2a' \\ -2b' & 2 & 2b' \\ 2c' & -2c' & 2 \end{bmatrix} = (2/a'\ 2/b'\ 2/c')$$

$$(\delta) \qquad T/ABC = l{:}m{:}n = 1/a'{:}1/b'{:}1/c' = AA'^{-1}{:}BB'^{-1}{:}CC'^{-1}.$$

(3) Bir afin izdüşüm, UVW'yi keyfî bir üçgene, ABC'yi ise bu üçgenin orta üçgenine dönüştürür; bir noktada kesişme özelliği bu üçgende de geçerlidir.

Bir afin dönüşümde doğru parçalarının oranı ve alanların oranı korunduğundan, $AA'/1, BB'/1, CC'/1$ yerine $AA'/VW, BB'/WU, CC'/UV$ yazıldığında (δ) şu biçimi alır:

$$T/ABC = \left(\frac{AA'}{VW}\right)^{-1} : \left(\frac{BB'}{WU}\right)^{-1} : \left(\frac{CC'}{UV}\right)^{-1}.$$

Genel bir izdüşüm, perspektif UVW ve ABC üçgenlerini yine perspektif üçgenlere dönüştürür. Böylece genelleme, herhangi bir UVW üçgeni ve onun içine çizilebilen, AU, BV, CW doğruları bir noktada kesişen herhangi ABC ve $A'B'C'$ üçgenleri için elde edilir. Ayrıca P noktasının ABC ve $A'B'C'$ içindeki alan koordinatları aynıdır.

Problemi öneren de çözmüş ve (1)'in genel izdüşümlere genellemesinin 1909 Mathematical Tripos, Bölüm I'de bir problem olarak yer aldığını belirtmiştir.

2122 Numaralı Problemin Çözümü:
American Mathematical Monthly, 76, (1969), 833.

Napolyon Teoreminin Bir Genişletmesi

E 2122 [1968, 898]. Öneren: Stanley Rabinowitz, Far Rockaway, N. Y.

D, E, F, eşkenar olmayan bir ABC üçgeninin düzleminde, BDC, CEA, AFB üçgenleri aynı yönlü benzer olacak biçimde alınmış noktalar olsun. DEF'nin eşkenar olması için gerek ve yeter koşulun, bu üç üçgenin (tabanları ABC üçgeninin birer kenarı olmak üzere) taban açıları 30° olan ikizkenar üçgenler olması olduğunu ispatlayınız. ("Yeter" kısmı, Napolyon teoremi, bilinmektedir. Bkz. *Mathematics Magazine*, 1966, s. 166.)

Hüseyin Demir'in çözümü, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye. Aşağıdaki yardımcı önerme kolayca ispatlanır:

Yardımcı önerme. Karmaşık düzlemde köşeleri a, b, c olan bir üçgenin eşkenar olması için gerek ve yeter koşul $a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab = 0$ olmasıdır.

a, b, c; d, e, f, ABC, DEF üçgenlerinin köşelerinin karmaşık koordinatları olsun. DBC, ECA, FAB üçgenleri aynı yönlü benzer olduğundan bir t için

$$d = b + (c - b)t, \qquad e = c + (a - c)t, \qquad f = a + (b - a)t.$$

$U = d^2 + e^2 + f^2 - ef - fd - de$ ifadesini oluşturursak

$$U = (a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab)(3t^2 - 3t + 1).$$

elde edilir. ABC eşkenarsa, yardımcı önermeye göre $U = 0$'dır ve yine yardımcı önermeden DEF eşkenardır. Şimdi DEF'nin eşkenar, yani yardımcı önermeye göre $U = 0$ olduğunu varsayalım. ABC eşkenar kabul edilmediğinden $3t^2 - 3t + 1 = 0$ olmalıdır. t için çözülürse $t = \frac{1}{3}\sqrt{3}\ \mathrm{cis}(\pm\pi/6)$ bulunur; bu da savı ispatlar.

Diğer çözenler: Walter Bluger, Slobodan Ćuk (Yugoslavya), M. G. Greening (Avustralya), L. Kuipers, C. F. Merrill ve problemi öneren. Jordi Dou (İspanya), çözümün tekliğini göstermiştir. A. W. Walker, Wong'un MONTHLY, **48** (1941), s. 530'daki bir makalesinde verilen daha zayıf bir sonuçtan söz etmiştir.

2398 Numaralı Problemin Çözümü:
American Mathematical Monthly, 81, (1974), 89.

Johnson'ın Bildiği Bir Sonuç

E 2398 [1973, 202]. Öneren: C. W. Dodge, Orono'daki Maine Üniversitesi

Bir paralelkenarın köşegenlerinin kesişim noktasının, herhangi bir köşenin diğer üç köşenin oluşturduğu üçgene göre pedal çemberi üzerinde bulunduğunu ispatlayınız.

I. Hüseyin Demir'in çözümü, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye. Merkezi I olan bir $ABCD$ paralelkenarı verilsin. D'nin ABC üçgeninin BC, CA, AB kenarları üzerindeki izdüşümleri sırasıyla A', B', C' olsun. $\angle D = \pi/2$ ise pedal üçgeni, I noktasını içeren AC Simson doğrusuna yozlaşır.

İspatı, $\angle D > \pi/2$, $A' \in BC$ ve $C' \in AB$ olduğu durumda verelim. Diğer durumlarda da benzer ispatlar yapılabilir. $\angle C'A'I = \angle AB'C'$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bu eşitliği elde ederken $AC'B'D$ ile $DC'BA'$'nün kirişler dörtgeni, DIA' üçgeninin ise ikizkenar oluşunu kullanırız. Şöyle ki:

$$\begin{aligned}\measuredangle C'A'I &= \measuredangle C'A'D - \measuredangle IA'D = \measuredangle C'BD - \measuredangle IDA' = \measuredangle A'DC \\ &= \pi/2 - \measuredangle C = \pi/2 - \measuredangle A = \measuredangle ADC' = \measuredangle AB'C'.\end{aligned}$$

II. A. W. Walker'ın çözümü, Toronto, Kanada. D, ABC üçgeninin A köşesinin BC kenarının orta noktası M'ye göre yansıması olsun. BAC bir dik üçgense, D'nin ABC üçgenine göre pedal "çemberi" BC doğrusudur; değilse E, ABC çemberine B ve C'de çizilen teğetlerin kesişimi olsun. O zaman BD ve BE, ABC açısında izogonal eşlenik doğrulardır; aynı durum BCA açısında CD ile CE için geçerlidir. Böylece D ve E, ABC üçgeninde izogonal eşlenik noktalardır ve dolayısıyla (R. A. Johnson, *Modern Geometry*, s. 155), E'nin BC üzerindeki izdüşümü M'den geçen ortak bir pedal çemberleri vardır.

Not. E 2398 şu teoremin özel bir durumudur: *Düzlemdeki, köşeleri bir diklik sistemi oluşturmayan bir $ABCD$ dörtgeni için, $ABCD$ dik hiperbolünün merkezinden geçen dört pedal çemberi (ve dört dokuz nokta çemberi) vardır* (Johnson, s. 242).

Diğer çözenler: Günter Bach (Almanya), Leon Bankoff, Howard Eves, Michael Goldberg, M. G. Greening (Avustralya), Lew Kowarski, L. Kuipers ve problemi öneren.

6 *Mathematics Magazine* için Önerilen Problemler

Hüseyin Demir'in Kurduğu Problemlerin Listesi

[1] Önerilen Problem 208, *Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 27.
[2] Önerilen Problem 217, *Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 103.
[3] Önerilen Problem 227, *Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 160.
[4] Önerilen Problem 234, *Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 234.
[5] Önerilen Problem 242, *Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 284.
[6] Önerilen Problem 248, *Mathematics Magazine*, 29, (1955-1956), 46.
[7] Önerilen Problem 258, *Mathematics Magazine*, 29, (1955-1956), 163.
[8] Önerilen Problem 266, *Mathematics Magazine*, 29, (1955-1956), 222.
[9] Önerilen Problem 298, *Mathematics Magazine*, 30, (1956-1957), 164.
[10] Önerilen Problem 304, *Mathematics Magazine*, 30, (1956-1957), 223.
[11] Önerilen Problem 334, *Mathematics Magazine*, 31, (1957-1958), 228.
[12] Önerilen Problem 349, *Mathematics Magazine*, 32, (1958-1959), 47.
[13] Önerilen Problem 372, *Mathematics Magazine*, 32, (1958-1959), 220.
[14] Önerilen Problem 380, *Mathematics Magazine*, 32, (1958-1959), 278.
[15] Önerilen Problem 384, *Mathematics Magazine*, 33, (1969-1960), 51.
[16] Önerilen Problem 398, *Mathematics Magazine*, 33, (1969-1960), 165.
[17] Önerilen Problem 407, *Mathematics Magazine*, 33, (1959-1960), 225.
[18] Önerilen Problem 415, *Mathematics Magazine*, 33, (1959-1960), 296.
[19] Önerilen Problem 419, *Mathematics Magazine*, 34, (1960-1961), 49.
[20] Önerilen Problem 425, *Mathematics Magazine*, 34, (1960-1961), 109.
[21] Önerilen Problem 437, *Mathematics Magazine*, 34, (1961), 174.
[22] Önerilen Problem 440, *Mathematics Magazine*, 34, (1961), 237.
[23] Önerilen Problem 458, *Mathematics Magazine*, 34, (1961), 364.
[24] Önerilen Problem 472, *Mathematics Magazine*, 35, (1962), 55.
[25] Önerilen Problem 487, *Mathematics Magazine*, 35, (1962), 186.
[26] Önerilen Problem 498, *Mathematics Magazine*, 35, (1962), 309.
[27] Önerilen Problem 509, *Mathematics Magazine*, 36, (1963), 133.
[28] Önerilen Problem 517, *Mathematics Magazine*, 36, (1963), 197.
[29] Önerilen Problem 529, *Mathematics Magazine*, 36, (1963), 264.
[30] Önerilen Problem 537, *Mathematics Magazine*, 37, (1964), 55.
[31] Önerilen Problem 544, *Mathematics Magazine*, 37, (1964), 119.
[32] Önerilen Problem 563, *Mathematics Magazine*, 37, (1964), 276.
[33] Önerilen Problem 572, *Mathematics Magazine*, 38, (1965), 52.
[34] Önerilen Problem 587, *Mathematics Magazine*, 38, (1965), 179.
[35] Önerilen Problem 599, *Mathematics Magazine*, 38, (1965), 241.

[36] Önerilen Problem 600, *Mathematics Magazine*, 38, (1965), 317.
[37] Önerilen Problem 609, *Mathematics Magazine*, 39, (1966), 69.
[38] Önerilen Problem 628, *Mathematics Magazine*, 39, (1966), 246.
[39] Önerilen Problem 639, *Mathematics Magazine*, 39, (1966), 306.
[40] Önerilen Problem 649, *Mathematics Magazine*, 40, (1967), 100.
[41] Önerilen Problem 680, *Mathematics Magazine*, 41, (1968), 42.
[42] Önerilen Problem 724, *Mathematics Magazine*, 42, (1969), 96.
[43] Önerilen Problem 738, *Mathematics Magazine*, 42, (1969), 214.
[44] Önerilen Problem 743, *Mathematics Magazine*, 42, (1969), 267.
[45] Önerilen Problem 756, *Mathematics Magazine*, 43l, (1970), 103.
[46] Önerilen Problem 763, *Mathematics Magazine*, 43, (1970), 166.
[47] Önerilen Problem 775, *Mathematics Magazine*, 43, (1970), 278.
[48] Önerilen Problem 806, *Mathematics Magazine*, 44, (1971), 228.
[49] Önerilen Problem 839, *Mathematics Magazine*, 45, (1972), 228.
[50] Önerilen Problem 859, *Mathematics Magazine*, 46, (1973), 103.
[51] Önerilen Problem 916, *Mathematics Magazine*, 47, (1974), 286.
[52] Önerilen Problem 963, *Mathematics Magazine*, 49, (1976), 43.
[53] Önerilen Problem 998, *Mathematics Magazine*, 49, (1976), 252.
[54] Önerilen Problem 1197, *Mathematics Magazine*, 57, (1984), 238.
[55] Önerilen Problem 1206, *Mathematics Magazine*, 58, (1985), 46.
[56] Önerilen Problem 1211, *Mathematics Magazine*, 58, (1985), 111.
[57] Önerilen Problem 1298, *Mathematics Magazine*, 61, (1988), 195.
[58] Önerilen Problem 1305, *Mathematics Magazine*, 61, (1988), 261.
[59] Önerilen Problem 1327, *Mathematics Magazine*, 62, (1989), 274.
[60] Önerilen Problem 1356, *Mathematics Magazine*, 63, (1990), 274.
[61] Önerilen Problem 1371, *Mathematics Magazine*, 64, (1991), 132.
[62] Önerilen Problem 1377, *Mathematics Magazine*, 64, (1991), 197.
[63] Önerilen Problem 1405, *Mathematics Magazine*, 65, (1992), 265.

Önerilen Problem 208, *Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 27.

208. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye.

Aşağıdaki trigonometrik ifadelerin değerlerini sayısal tablolar kullanmadan hesaplayınız:

$$A = \cos 5^\circ \cos 10^\circ \cos 15^\circ \cdots \cos 75^\circ \cos 80^\circ \cos 85^\circ,$$
$$B = \cos 1^\circ \cos 3^\circ \cos 5^\circ \cdots \cos 85^\circ \cos 87^\circ \cos 89^\circ,$$
$$C = \cos 4^\circ \cos 8^\circ \cos 12^\circ \cdots \cos 80^\circ \cos 84^\circ \cos 88^\circ.$$

Önerilen Problem 217, *Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 103.

217. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye.

$A_1A_2A_3A_4$ dışbükey çokgeninin bir çembere çizilebilmesi için gerek ve yeter koşulun aşağıdaki eşitlik olduğunu ispatlayınız:

$$D = \begin{vmatrix} A_1A_1 & A_1A_2 & A_1A_3 & A_1A_4 \\ A_2A_1 & A_2A_2 & A_2A_3 & A_2A_4 \\ A_3A_1 & A_3A_2 & A_3A_3 & A_3A_4 \\ A_4A_1 & A_4A_2 & A_4A_3 & A_4A_4 \end{vmatrix} = 0$$

Burada $j > i$ için A_{ij}, A_i ile A_j köşeleri arasındaki uzaklığı gösterir ve $A_jA_i = -A_iA_j$'dir.

Önerilen Problem 227, *Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 160.

227. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye.

A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, uzunlukları sırasıyla l_1, l_2, l_3, ağırlıkları W_1, W_2, W_3 olan üç çubuk olsun. B_1, B_2, B_3 uçları yatay bir yüzeye dayanırken, diğer uçları A_1, A_2, A_3 sırasıyla A_3B_3, A_1B_1, A_2B_2 çubukları tarafından desteklenmektedir. B_1, B_2, B_3'teki R_1, R_2, R_3 tepki kuvvetlerini bulunuz.

Önerilen Problem 234, *Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 234.

234. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye.

mn nokta içeren $m \times n$ boyutlu bir dikdörtgensel kafes verilmiş olsun. Köşeleri kafes noktalarında bulunan (a) karelerin, (b) dikdörtgenlerin toplam sayısını bulunuz. $m \geq n$ kabul ediniz.

Önerilen Problem 242, *Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 284.

242. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye.

A', B', C', ABC üçgeninin kenarlarını k oranında bölen noktalar; A'', B'', C'' ise $A'B'C'$ üçgeninin kenarlarını $1/k$ oranında bölen noktalar olsun. $A''B''C''$ üçgeninin başlangıçtaki ABC üçgeniyle homotetik olduğunu ispatlayınız.

Önerilen Problem 248, *Mathematics Magazine*, 29, (1955-1956), 46.

248. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye.

Γ_1, Γ_2 iki düzlem eğrisi olsun. t, bu eğrileri, eğrilere çizilen t_1, t_2 teğetlerinin birbirine paralel olduğu M_1, M_2 noktalarında kesen değişken bir doğru olsun. Γ_1, Γ_2'nin M_1, M_2'deki eğrilik merkezleri C_1, C_2 ile t doğrusunun karakteristik noktası C'nin doğrusal olduğunu ispatlayınız.

Önerilen Problem 258, *Mathematics Magazine*, 29, (1955-1956), 163.

258. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye.

Bir çembere çizilmiş ABC üçgeni, AB ve AC sabit doğrultularını koruyacak biçimde değişmektedir. Diklik merkezi H'nin geometrik yerini bulunuz.

Önerilen Problem 266, *Mathematics Magazine*, 29, (1955-1956), 222.

266. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye.

M ve M', ABC üçgeninin çevrel çemberine göre birbirinin evirme görüntüsü olan noktalarsa, aşağıdaki eşitlikleri ispatlayınız:

$$\angle BMC + \angle BM'C = 2\angle A$$
$$\angle CMA + \angle CM'A = 2\angle B$$
$$\angle AMB + \angle AM'B = 2\angle C$$

Önerilen Problem 298, *Mathematics Magazine*, 30, (1956-1957), 164.

298. Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli Bölgesi, Türkiye.

$y = f(x)$ aşağıdaki özellikleri taşıyan bir eğri olsun:

a) $f(x) = f(-x)$

b) $x > 0$ için $f'(x) > 0$

c) $f''(x) > 0$

Eğri, üzerindeki herhangi iki noktadan yerçekimi etkisi altında asıldığında başlangıçtaki şeklini koruyacak biçimde, (x, y) noktasındaki birim uzunluk başına $w(x)$ ağırlığını belirleyiniz.

Önerilen Problem 304, *Mathematics Magazine*, 30, (1956-1957), 223.

304. Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli Bölgesi, Türkiye.

$AB \neq AC$ olmak üzere, ABC, O çemberine çizilmiş bir üçgen; K de A dış açısının açıortayının O ile kesiştiği nokta olsun. Merkezi K olan değişken bir çember, AB ve AC'yi sırasıyla E, F'de, A noktası KEF'nin iç noktası olmayacak biçimde kessin. EF, BC'ye yaklaşırken EF ile BC'nin ortak noktası M'nin limit konumu m'yi bulunuz.

Önerilen Problem 334, *Mathematics Magazine*, 31, (1957-1958), 228.

334. Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Karadeniz Ereğli, Türkiye.

Bir sikloidin AM yayı, yuvarlanan $\Omega(a)$ çemberinin TM yayı ve taban doğrusu üzerindeki AT doğru parçası tarafından sınırlanan S alanı için en basit ifadeyi bulunuz.

Önerilen Problem 349, *Mathematics Magazine*, 32, (1958-1959), 47.

349. Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Karadeniz Ereğli, Türkiye.

$ABCD, AEBK, CEFG$ aynı yönelimli karelerse B'nin DF'yi ortaladığını ispatlayınız.

Önerilen Problem 372, *Mathematics Magazine*, 32, (1958-1959), 220.

372. Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Karadeniz Ereğli, Türkiye.
Aşağıdaki özdeşliği ispatlayınız:

$$\sin^2(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n) = \sin^2\theta_1+\cdots+\sin^2\theta_n+2\sum_{1\leqq i<j\leqq n}\sin\theta_i\sin\theta_j\cos(\theta_1+2\theta_{i+1}+\cdots+2\theta_{j-1}+\theta_j).$$

Önerilen Problem 380, *Mathematics Magazine*, 32, (1958-1959), 278.

380. Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Karadeniz Ereğli, Türkiye.
Aşağıdaki denklem sistemini çözünüz:

$$x(z-a)+u(x+u) = 0$$
$$y(x-b)+u(y+u) = 0$$
$$z(y-c)+u(z+u) = 0$$

Burada $abc \neq 0$ ve $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1} = u^{-1}$'dir.

Önerilen Problem 384, *Mathematics Magazine*, 33, (1969-1960), 51.

384. Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Karadeniz Ereğli, Türkiye.
(a_{ij}), her satırındaki elemanların toplamı 1 olan n'inci mertebeden bir matris olsun. Bu matrislerin tümünün $[(a_{ij})]$, sonsuz mertebeli bir grup oluşturduğunu ispatlayınız.

Önerilen Problem 398, *Mathematics Magazine*, 33, (1969-1960), 165.

398. Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Karadeniz Ereğli, Türkiye.

Birindeki (gerçek sayı olan) katsayılar diğerinin kökleri olmak üzere, $x^2+y_1x+y_2 = 0$, $y^2+x_1y+x_2 = 0$ denklemlerinin köklerini belirleyiniz.

Önerilen Problem 407, *Mathematics Magazine*, 33, (1959-1960), 225.

407. Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Karadeniz Ereğli, Türkiye.
Bir küpün on iki ayrıtı, her biri bir ohm dirence sahip tellerden yapılmıştır. Küp bir elektrik devresine şu noktalardan bağlanıyor:
a) iki komşu köşe,
b) bir yüzün karşılıklı iki köşesi,
c) küpün karşılıklı iki köşesi.
Hangi durumda direnç en küçüktür?

Önerilen Problem 415, *Mathematics Magazine*, 33, (1959-1960), 296.

415. Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Karadeniz Ereğli, Türkiye.
Aşağıdaki eşitliği ispatlayınız:

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \cos(p)x \sin(n-p)x = 2^{n-1} \sin nx \ .$$

Önerilen Problem 419, *Mathematics Magazine*, 34, (1960-1961), 49.

419. Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Karadeniz Ereğli, Türkiye.
Düşey bir düzlemde öyle bir yol belirleyiniz ki, bu yolun bir noktasından v_0 ilk hızıyla yerçekimi etkisi altında hareket eden bir parçacık, yol boyunca sabit süratini korusun. Sürtünme olmadığını varsayınız.

Önerilen Problem 425, *Mathematics Magazine*, 34, (1960-1961), 109.

425. Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Karadeniz Ereğli, Türkiye.
$n-1$ ve $n+1$ ikiz asal sayılarsa $3\phi(n) \leq n$ olduğunu ispatlayınız; burada ϕ, Euler'in ϕ fonksiyonudur.

Önerilen Problem 437, *Mathematics Magazine*, 34, (1961), 174.

437. Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Karadeniz Ereğli, Türkiye.
Şu önermeyi ispatlayınız veya çürütünüz: $(a+b)^{[n]}$ ifadesinin binom açılımındaki tek katsayıların sayısı, 2'nin bir kuvvetidir; $[n]$ üssü, n'nin ikili sayı sistemindeki gösteriminde bulunan 1'lerin sayısıdır.

Önerilen Problem 440, *Mathematics Magazine*, 34, (1961), 237.

440. Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Karadeniz Ereğli, Türkiye.

Yarıçapı r olan çemberlerin, her biri çevresindeki altı çembere teğet olacak biçimde yerleştirildiğini düşününüz. Küçük çemberlerden biriyle eş merkezli, yarıçapı R olan daha büyük bir çember çizilsin. N, büyük çemberin içinde kalan küçük çemberlerin sayısıysa, aşağıdaki eşitliği ispatlayınız:

$$N = 1 + 6n + 6\sum_{p=1}^{n} [\tfrac{1}{2}(\sqrt{4n^2 - 3p^2} - p)]$$

Burada $n = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r} - 1\right)\right]$ olup köşeli ayraçlar tam kısım fonksiyonunu göstermektedir.

Önerilen Problem 458, *Mathematics Magazine*, 34, (1961), 364.

458. Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Karadeniz Ereğli, Türkiye.

Bir öğrenci De Moivre teoremini yanlış biçimde şöyle kullanmıştır:

$$(\sin \propto + i \cos \propto)^n = \sin n\propto + i \cos n\propto .$$

α'nın hangi değerleri için bu eşitlik her n tamsayısında geçerlidir?

Önerilen Problem 472, *Mathematics Magazine*, 35, (1962), 55.

472. Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Karadeniz Ereğli, Türkiye.

(C) bir konik, M de onun üzerinde değişken bir nokta olsun. T, M'nin ana eksene göre simetriği; t ise T'deki teğet doğrusu olsun. M'den t'ye indirilen dikmenin, T'yi koniğin merkezine birleştiren doğruyla kesişimini I ile gösterelim. M', M'nin I'ya göre simetriğiyse şunları ispatlayınız:

1. M''nün geometrik yeri, (C) ile aynı türden başka bir (C') koniğidir.
2. (C) ve (C') konikleri eş odaklıdır.

Önerilen Problem 487, *Mathematics Magazine*, 35, (1962), 186.

487. Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Karadeniz Ereğli, Türkiye.

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisinin karekökünü bulunuz.

Önerilen Problem 498, *Mathematics Magazine*, 35, (1962), 309.

498. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

m, n tamsayılar, δ, D sırasıyla bunların en büyük ortak böleni ve en küçük ortak katı, $d(n)$, n'nin bölenlerinin sayısı ve $\phi(n)$ Euler fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki eşitlikleri ispatlayınız:

$$d(m)d(n) = d(\delta)d(D) \tag{1}$$

$$\phi(m)\phi(n) = \phi(\delta)\phi(D) \tag{2}$$

Önerilen Problem 509, *Mathematics Magazine*, 36, (1963), 133.

509. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Aşağıdaki harfli aritmetik bulmacasını

$$\begin{array}{r} U\ N\ I\ T\ E\ D \\ S\ T\ A\ T\ E\ S \\ \hline A\ M\ E\ R\ I\ C\ A \end{array}$$

α rakamını da kullanarak 11 tabanında çözünüz.

Önerilen Problem 517, *Mathematics Magazine*, 36, (1963), 197.

517. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

F ve d, bir parabolün odağı ve doğrultmanı olsun. M, N, parabol üzerinde herhangi iki nokta; M', N' ise bunların d üzerindeki izdüşümleri olmak üzere aşağıdaki oranın sabit olduğunu gösteriniz:

$$\frac{\text{Alan } FMN}{\text{Alan } N'M'MN} = \text{Sabit.}$$

Önerilen Problem 529, *Mathematics Magazine*, 36, (1963), 264.

529. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Bir sikloid (kardiyoid), bir doğru üzerinde kaymadan yuvarlanmaktadır. Eğrinin teğet noktasındaki eğrilik merkezinin geometrik yerinin bir çember (elips) olduğunu ispatlayınız.

Önerilen Problem 537, *Mathematics Magazine*, 37, (1964), 55.

537. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Aynı çembere çizilmiş bir eşkenar üçgen ile bir karenin ortak alanının bir ekstremum olması için, birbirlerine göre konumlarını belirleyiniz.

Önerilen Problem 544, *Mathematics Magazine*, 37, (1964), 119.

544. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Aşağıdaki harfli aritmetik bulmacasını (alfametik)

$$ONE+TWO+SIX=NINE$$

10 tabanında, şu koşullar altında çözünüz:
a) $ONE < TWO < SIX$
b) $2 \mid TWO$, $6 \mid SIX$, $9 \mid NINE$; burada $a \mid b$, "a, b'yi böler" demektir.

Önerilen Problem 563, *Mathematics Magazine*, 37, (1964), 276.

563. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

A, B', A', B, bir düzgün altıgenin ardışık dört köşesi olsun. M, çevrel çember üzerinde (özellikle $A'B'$ yayı üzerinde) keyfî bir nokta; MA, MB de BB' ile AA''nü sırasıyla E, F noktalarında kesmek üzere aşağıdaki eşitlikleri ispatlayınız:

$$\text{(a)} \quad \sphericalangle MEF = 3\sphericalangle MAF$$

$$\text{(b)} \quad \sphericalangle MFE = 3\sphericalangle MBE.$$

Önerilen Problem 572, *Mathematics Magazine*, 38, (1965), 52.

572. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Başkan Kennedy'nin anısına. Sayın J. F. Kennedy, 22 Kasım 1963'te, yani 11-22-1963 gününde öldürüldü. Aşağıdaki harfli aritmetik bulmacasını

$$JF\cdot(KEN + NEDY) = (11 + 22)\cdot 1963$$

onluk sayı sisteminde çözünüz.

Önerilen Problem 587, *Mathematics Magazine*, 38, (1965), 179.

587. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Aşağıdaki eşitsizliği ispatlayınız:

$$\left(\frac{\theta + \sin\theta}{\pi}\right)^2 + \cos^4\frac{1}{2}\theta < 1, \qquad (-\pi < \theta < +\pi).$$

Önerilen Problem 599, *Mathematics Magazine*, 38, (1965), 241.

599. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

a, b, c, üç boyutlu uzayda herhangi üç vektörse,

$$ax(bxc),\ bx(cxa),\ cx(axb)$$

vektörlerinin doğrusal bağımlı olduğunu gösteriniz.

Önerilen Problem 600, *Mathematics Magazine*, 38, (1965), 317.

600. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

ABC üçgeninin alanı S, içteğet ve dışteğet çemberlerinin değme noktalarının oluşturduğu üçgenlerin alanları T, T_a, T_b, T_c ise, aşağıdaki eşitlikleri gösteriniz:

(1) $$T_a + T_b + T_c - T = 2S$$

(2) $$T_a^{-1} + T_b^{-1} + T_c^{-1} - T^{-1} = 0.$$

Önerilen Problem 609, *Mathematics Magazine*, 39, (1966), 69.

609. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Aşağıdaki harfli aritmetik bulmacasını onluk sayı sisteminde çözünüz:

$$4 \cdot NINE = 9 \cdot FOUR$$

Önerilen Problem 628, *Mathematics Magazine*, 39, (1966), 246.

628. Öneren: B. Suer ve Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Aşağıdaki alfametiği

$$\mathrm{COS}^2 + \mathrm{SIN}^2 = \mathrm{UNO}^2$$

onluk sayı sisteminde çözünüz.

Önerilen Problem 639, *Mathematics Magazine*, 39, (1966), 306.

639. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

$ABCD$ bir dışbükey dörtgen; P ise AC ve BD köşegenlerinin kesişimi olsun. P'nin $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ kenarlarına uzaklıkları sırasıyla x, y, z, t olsun. Aşağıdaki eşitsizliği ispatlayınız:

$$x + y + z + t < \tfrac{3}{4}(a + b + c + d).$$

Önerilen Problem 649, *Mathematics Magazine*, 40, (1967), 100.

PROBLEMLER

649. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Şu harfli aritmetik bulmacasını

$$\begin{array}{r} THREE \\ +\quad FOUR \\ \hline SEVEN \end{array}$$

onluk sayı sisteminde, şu koşullarla çözünüz:

3, içinde 3 rakamı bulunmayan *THREE* sayısını bölmez;
4, içinde 4 rakamı bulunmayan *FOUR* sayısını bölmez;
7, içinde 7 rakamı bulunmayan *SEVEN* sayısını bölmez.

Önerilen Problem 680, *Mathematics Magazine*, 41, (1968), 42.

680. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

E bir elips; t', t'' ise ona çizilmiş, değişken iki paralel teğet olsun. t', t'''ye teğet olan ve E'ye dıştan teğet bir C çemberi ele alalım. C'nin merkezinin geometrik yerinin bir çember olduğunu gösteriniz.

Önerilen Problem 724, *Mathematics Magazine*, 42, (1969), 96.

724. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Bir ABC üçgeninin $(a \geq b \geq c)$ içinden rastgele seçilen P noktasının, ABC'nin kenarlarına uzaklıklarının bir üçgenin kenar uzunluklarını oluşturma olasılığını bulunuz.

Önerilen Problem 738, *Mathematics Magazine*, 42, (1969), 214.

738. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Düz ve paralel kıyıları olan bir nehirde A bir kıyıda, B diğer kıyıda ve $AB = 72$ mildir. Bir feribot doğrusal AB yolunu A'dan B'ye dört saatte, B'den A'ya dokuz saatte almaktadır. Feribotun durgun sudaki sürati $v = 13$ mil/saat ise akıntının hızı nedir?

Önerilen Problem 743, *Mathematics Magazine*, 42, (1969), 267.

743. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

P, düzgün $T \equiv A_1A_2A_3A_4$ dörtyüzlüsünün bir iç noktası; $p_i = PA_i$ ve x_{ij}, P'nin A_iA_j ayrıtına uzaklığı olsun. Aşağıdaki eşitsizliği ispatlayınız:

$$\sum_{i=1}^{4} p_i \geqq 2\sqrt{3}/3 \sum_{i<j} x_{ij},$$

Eşitlik ancak ve ancak P, T'nin merkezi O'da olduğunda sağlanır.

Önerilen Problem 756, *Mathematics Magazine*, 43, (1970), 103.

756. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Çemberler dışında, merkezden çıkan birbirine dik iki yarıçap vektörünün uzunluklarının çarpımı sabit olacak biçimde, kapalı ve merkezî simetrik C eğrilerini belirleyiniz.

Önerilen Problem 763, *Mathematics Magazine*, 43, (1970), 166.

763. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Aşağıdaki eşitliği ispatlayınız:

$$\left(1+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\cdots\right)=\left(1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}\cdots\right)\left(1-\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}-\frac{1}{4^6}+\cdots\right).$$

Önerilen Problem 775, *Mathematics Magazine*, 43, (1970), 278.

775. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

$p, q > 0$ için aşağıdaki eşitliği ispatlayınız:

$$\int_0^1 \sqrt[q]{1-x^p}\,dx = \int_0^1 \sqrt[p]{1-x^q}\,dx.$$

Önerilen Problem 806, *Mathematics Magazine*, 44, (1971), 228.

806. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

H, ikizkenar ABC üçgeninin diklik merkezi olsun; AH, BH, CH, karşılarındaki kenarları sırasıyla D, E, F'de kessin. $HBD, HDC, HCE, HEA, HAF, HFB$ dik üçgenlerinin içteğet çemberlerinin merkezlerinin bir konik üzerinde bulunduğunu ispatlayınız.

Önerilen Problem 839, *Mathematics Magazine*, 45, (1972), 228.

839. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Her biri aynı biçimde w beyaz top ve r kırmızı top içeren üç kutu verilmiş olsun. Birinci kutudan bir top alıp ikinciye, sonra ikinci kutudan bir top alıp üçüncüye, son olarak da üçüncü kutudan bir top alıp birinciye koyunuz. Kutuların renk bakımından başlangıçtaki içeriklerine sahip olma olasılığını bulunuz.

Önerilen Problem 859, *Mathematics Magazine*, 46, (1973), 103.

859. Öneren: B. Suer ve H. Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Aşağıdaki harfli aritmetik bulmacasını çözünüz:

$$THREE + NINE = EIGHT + FOUR.$$

Önerilen Problem 916, *Mathematics Magazine*, 47, (1974), 286.

916. Öneren: H. Demir, ODTÜ, Ankara, Türkiye.

XYZ, P noktasının ABC üçgenine göre pedal üçgeni olsun. P'nin, aşağıdaki koşulu sağlayan x, y, z üçdoğrusal koordinatlarını bulunuz:

$$YA + AZ = ZB + BX = XC + CY.$$

Önerilen Problem 963, *Mathematics Magazine*, 49, (1976), 43.

963. Kenarları a, b, c, d olan ve aşağıdaki eşitliği sağlayan dışbükey dörtgenleri karakterize ediniz:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix} = 0$$

[Hüseyin Demir, Ankara, Türkiye.]

Önerilen Problem 998, *Mathematics Magazine*, 49, (1976), 252.

998. İç açıortaylarının ayaklarının oluşturduğu üçgenin bir dik üçgen olduğu tüm üçgenleri karakterize ediniz. [Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.]

Önerilen Problem 1197, *Mathematics Magazine*, 57, (1984), 238.

1197. Yüksekliklerinin orta noktaları doğrusal olan üçgenleri karakterize ediniz. [Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.]

Önerilen Problem 1206, *Mathematics Magazine*, 58, (1985), 46.

1206. ABC, kenarları a, b, c ve yarı çevresi s olan bir üçgen olsun. BC kenarı, sırasıyla $B = P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n = C$ noktalarıyla bölünsün. $i = 1, \ldots, n$ için r_i, $AP_{i-1}P_i$ üçgeninin içteğet çemberinin yarıçapıysa, aşağıdaki eşitsizliği ispatlayınız:

$$r_1 + \cdots + r_n < \frac{1}{2} h_a \ln \frac{s}{s-a},$$

Burada h_a, A köşesinden inen yüksekliğin uzunluğudur. [Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.]

Önerilen Problem 1211, *Mathematics Magazine*, 58, (1985), 111.

1211. Bir elipsin sabit bir açı altında görüldüğü noktaların geometrik yerini bulunuz. [Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.]

Önerilen Problem 1298, *Mathematics Magazine*, 61, (1988), 195.

1298. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

$ABCD$ dörtgeni bir çembere dıştan çizilmiş; P, Q, R, S ise sırasıyla AB, BC, CD, DA kenarlarının değme noktaları olsun. $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$, $p = |QS|$, $q = |PR|$ olmak üzere aşağıdaki eşitliği gösteriniz:

$$\frac{ac}{p^2} = \frac{bd}{q^2}. \quad .$$

Önerilen Problem 1305, *Mathematics Magazine*, 61, (1988), 261.

1305. Öneren: H. Demir ve C. Tezer, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

$P_0 = B, P_1, P_2, \ldots, P_n = C$, ABC üçgeninin BC kenarı üzerinde bu sırayla alınan noktalar olsun. r, r_i, h sırasıyla ABC ve $AP_{i-1}P_i$ üçgenlerinin içteğet çemberlerinin yarıçaplarını ve ortak yüksekliği göstermek üzere, aşağıdaki eşitliği ispatlayınız:

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1 - \frac{2r_i}{h}\right) = 1 - \frac{2r}{h}.$$

Önerilen Problem 1327, *Mathematics Magazine*, 62, (1989), 274.

1327. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Dışbükey $PQRS$ dörtgeninin PQ, QR, RS, SP kenarları, içteğet çemberine A, B, C, D noktalarında değsin; AB, BC, CD, DA kenarlarının orta noktaları E, F, G, H olsun. PR, QS köşegenleri arasındaki açının, karşılıklı kenarların orta noktalarını birleştiren EG, FH doğruları arasındaki açıya eşit olduğunu gösteriniz.

Önerilen Problem 1356, *Mathematics Magazine*, 63, (1990), 274.

1356. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

P, Q, ABC üçgeninin BC kenarı üzerinde B, P, Q, C sırasıyla alınmış noktalar olsun. PAB, QAC'nin çevrel çemberleri $M \neq A$'da, PAC, QAB'ninkiler ise N'de kesişsin. A, M, N'nin doğrusal olması için gerek ve yeter koşulun, P ile Q'nun BC'nin orta noktası A''ya göre simetrik olması olduğunu gösteriniz.

Önerilen Problem 1371, *Mathematics Magazine*, 64, (1991), 132.

1371. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

A, B, C bir üçgenin köşeleri; D, E, F de sırasıyla BC, AC, AB kenarları üzerinde noktalar olsun. U, X, V, Y, W, Z, sırasıyla BD, DC, CE, EA, AF, FB'nin orta noktaları olsun. Aşağıdaki ifadenin

$$\text{Alan}(\triangle UVW) + \text{Alan}(\triangle XYZ) - \frac{1}{2}\text{Alan}(\triangle DEF)$$

D, E, F'den bağımsız bir sabit olduğunu ispatlayınız.

Önerilen Problem 1377, *Mathematics Magazine*, 64, (1991), 197.

1377. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

DEF, ABC üçgeninin içine çizilmiş değişken bir üçgen; U, X, V, Y, W, Z ise sırasıyla BD, DC, CE, EA, AF, FB doğru parçalarının orta noktaları olsun.

Alanlar için verilen

$$|UVW| + |XYZ| - \tfrac{1}{2}|DEF|$$

ifadesinin sabit olduğunu gösteriniz.

Önerilen Problem 1405, *Mathematics Magazine*, 65, (1992), 265.

1405. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Bir üçgenin farklı açıları içine çizilmiş iki çembere, üçüncü köşeden çizilen ve kenarlarla çakışmayan teğetler, üçüncü açının açıortayına göre simetrikse, bu iki çemberin *izogonal ilişkili* olduğu söylenir. Bir üçgenin farklı açıları içine çizilmiş üç çember verildiğinde, oluşan üç çember çiftinden herhangi ikisi izogonal ilişkiliyse, üçüncü çiftin de öyle olduğunu ispatlayınız.

7 Önerilen Problemlerin Çözümleri

208 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 27.**

I. E. P. Starke'ın çözümü, Rutgers Üniversitesi.

$$\sqrt{2}\,A = \cos 5^\circ \cos 10^\circ \cdots \cos 40^\circ \sin 40^\circ \cdots \sin 10^\circ \sin 5^\circ$$
$$= \sin 10^\circ \sin 20^\circ \cdots \sin 80^\circ / 2^8,$$

çift açı formülü kullanılmıştır. Aynı işlem yinelenirse

$2^{12}\sqrt{2}\,A = \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \sqrt{3}\,k/2$ olsun;

burada $k = \sin 20^\circ(\sin 40^\circ \sin 80^\circ) = \sin 20^\circ(\sin^2 60^\circ - \sin^2 20^\circ)$

$= \frac{1}{4}(3\sin 20^\circ - 4\sin^3 20^\circ) = \frac{1}{4}\sin 60^\circ = \sqrt{3}/8$. Böylece $A = 3 \cdot 2^{-33/2}$.

Benzer biçimde $B = \cos 1^\circ \sin 1^\circ \cos 3^\circ \sin 3^\circ \cdots$

$$\cos 43^\circ \sin 43^\circ \cos 45^\circ \cdot 2^{22}\sqrt{2}\,B = \sin 2^\circ \sin 6^\circ \sin 10^\circ \cdots \sin 86^\circ = C.$$

$x = \cos 2^\circ \cos 6^\circ \cos 10^\circ \cdots \cos 86^\circ$ olsun.

Böylece $2^{22} \cdot 2^{22}\sqrt{2}\,B \cdot x = \sin 4^\circ \sin 12^\circ \sin 20^\circ \cdots \sin 172^\circ$

$$= \sin 4^\circ \sin 8^\circ \sin 12^\circ \sin 16^\circ \cdots \sin 88^\circ = x,$$

buradan $B = 2^{-89/2}$ ve $C = 2^{-22}$ elde edilir.

II. H. M. Feldman'ın çözümü, Washington Üniversitesi, St. Louis, Missouri.

Şu özdeşliklerden

$$x^{2n}-1=(x^2-1)(x^{2n}+x^{2n-1}+\cdots+1)=(x^2-1)\prod_{k=1}^{n-1}\left(x^2-2x\cos\frac{k\pi}{n}+1\right)$$ ve

$$x^{2n+1}=(x+1)(x^{2n}-x^{2n-1}+\cdots+1)=(x+1)\prod_{k=1}^{n}\left(x^2-2x\cos\frac{2k-1}{2n+1}+1\right)$$

$x=\pm 1$ koyarak aşağıdaki bağıntıları elde ederiz:

$$\prod_{1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{2n}=\prod_{1}^{n-1}\cos\frac{k\pi}{n}=2^{-n+1}\sqrt{n}\ ;$$

$$\prod_{1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}\,2^{-n+1}n;\ \prod_{1}^{n}\sin\frac{2k-1}{2(2n+1)}\pi=2^{-n}$$

ve $$\prod_{1}^{n}\cos\frac{2k-1}{2(2n+1)}=\prod_{1}^{n}\sin\frac{2k-1}{2n+1}\pi=2^{-n}\sqrt{2n+1}.$$

Bu bağıntılar yardımıyla şu değerleri buluruz:

$$A=2^{-17}(3\sqrt{2})$$
$$B=2^{-45}\sqrt{2}$$
$$C=2^{-22}$$

Diğer çözenler: Leon Bankoff, Los Angeles, Kaliforniya; Kwan Moon (kısmen), Mississippi State College; George Mott, Republic Aviation Corp., New York; T. F. Mulcrone, St. Charles College, Louisiana; L. A. Ringenberg, Eastern Illinois State College; Chih-yi Wang, Minnesota Üniversitesi; Hazel S. Wilson, Jacksonville State College, Alabama ve problemi öneren.

217 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
Mathematics Magazine, 28, (1954-1955), 103.

H. M. Feldman'ın çözümü, St. Louis, Missouri.

A_iA_i'nin sıfır olması gerektiği açık olduğundan determinant ters simetriktir ve değeri

$$[(A_1A_2)(A_3A_4)+(A_1A_4)(A_2A_3)+(A_1A_3)(A_2A_4)]^2$$

Köşeli ayraç içindeki ifadenin sıfır olması, dörtgenin bir çembere çizilebilmesi için gerek ve yeter koşuldur (Batlamyus teoremi).

Diğer çözenler: Ben K. Gold, Los Angeles City College; M. S. Klamkin, Brooklyn Politeknik Enstitüsü; E. P. Starke, Rutgers Üniversitesi; Chih-yi Wang, Minnesota Üniversitesi ve problemi öneren.

227 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 160.**

Dengedeki Kuvvetler

227. [Ocak 1955] Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye.

A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, uzunlukları sırasıyla l_1, l_2, l_3, ağırlıkları W_1, W_2, W_3 olan üç çubuk olsun. B_1, B_2, B_3 uçları yatay bir yüzeye dayanırken, diğer uçları A_1, A_2, A_3 sırasıyla A_3B_3, A_1B_1, A_2B_2 çubukları tarafından desteklenmektedir. B_1, B_2, B_3'teki R_1, R_2, R_3 tepki kuvvetlerini bulunuz.

Problemi önerenin çözümü. Çubukların A_1, A_2, A_3 uçlarındaki tepki kuvvetlerini r_1, r_2, r_3; A_1A_2, A_2B_1; A_2A_3, A_3B_2; A_3A_1, A_1B_3 uzunluklarını da sırasıyla a_1, b_1; a_2, b_2; a_3, b_3 ile gösterelim.

Çubuklardan birinin, örneğin A_1B_1'in dengesini ele alıp r_1, r_2, W_1, R_1 kuvvetlerinin B_1 noktasına göre momentlerini alırsak:

$$\tfrac{1}{2}\, l_1 W_1 - l_1 r_1 + b_1 r_2 = 0.$$

$b_i = k_i l_i$ $(i = 1, 2, 3)$ koyup diğer iki çubuğa karşılık gelen denklemleri de ele alarak, bilinmeyenleri r_1, r_2, r_3 olan şu denklem sistemini elde ederiz:

$$\begin{aligned} r_1 - k_1 r_2 &= \tfrac{1}{2} W_1 \\ r_2 - k_2 r_3 &= \tfrac{1}{2} W_2 \\ r_3 - k_3 r_1 &= \tfrac{1}{2} W_3 \end{aligned}$$

Bu sistemin determinantı

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -k_1 & 0 \\ 0 & 1 & -k_2 \\ -k_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - k_1 k_2 k_3$$

olduğundan şu sonuçlar elde edilir:

$$\begin{aligned} r_1 &= (W_1 + k_1 W_2 + k_1 k_2 W_3)/2D \\ r_2 &= (W_2 + k_2 W_3 + k_2 k_3 W_1)/2D \\ r_3 &= (W_3 + k_3 W_1 + k_3 k_1 W_2)/2D \end{aligned}$$

ve

$$R_1 = W_1 - r_1 + r_2 = W_1 - (W_1 + k_1 W_2 + k_1 k_2 W_3)/2D + W_2 + k_2 W_3 + k_2 k_3 W_1)/2D$$

$$R_1 = [(1 + k_2 k_3 - 2k_1 k_2 k_3) W_1 + (k_1 - 1) W_2 + k_2 k_1 - 1) W_3]/2(1 - k_1 k_2 k_3)$$

$$R_2 = [k_3 (k_2 - 1) W_1 + (1 + k_3 k_1 - 2 k_1 k_2 k_3) W_2 + (k_2 - 1) W_3]/2(1 - k_1 k_2 k_3)$$

$$R_3 = [(k_3 - 1) W_1 + k_1 (k_3 - 1) W_2 + (1 + k_1 k_2 - 2 k_1 k_2 k_3) W_3]/2(1 - k_1 k_2 k_3)$$

George R. Mott, Republic Aviation Company de çözmüştür.

234 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
Mathematics Magazine, 28, (1954-1955), 234.

Problemi önerenin çözümü. İki tür kare ayırt edelim. Kenarları kafesin kenarlarına paralel olan kareye N-karesi, paralel olmayana L-karesi diyelim.

Her L-karesi, tek bir N-karesinin içine çizilidir. $p \times p$ boyutlu bir N-karesiyle, her kenarında p nokta bulunan bir kareyi kastediyoruz. Böyle bir karenin içine $p-2$ tane L-karesi çizildiği açıktır. N-karesinin kendisi de sayıldığında sayı $p-1$ olur.

$p \times p$ boyutlu N-karelerinin sayısının $(m-p+1)(n-p+1)$ olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla bu karelerin ve içlerine çizilmiş L-karelerinin toplam sayısı $(p-1)(m-p+1)(n-p+1)$'dir. Böylece istenen toplam kare sayısı

$$
\begin{aligned}
N &= \sum_{p=2}^{m} (p-1)(m-p+1)(n-p+1) \\
&= mn \sum (p-1) - (m+n) \sum (p-1)^2 + \sum (p-1)^3 \\
&= mn \frac{n(n-1)}{2} - (m+n) \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n^2(n-1)^2}{4} \\
&= \frac{n(n-1)}{12} \left[6mn - 2(m+n)(2n-1) + 3n(n-1) \right] \\
&= n(n^2-1)(2m-n)/12.
\end{aligned}
$$

Dikdörtgenler durumuna ilişkin bir çözüm alınmamıştır. Kare ve dikdörtgenleri, kenarları kafes noktalarının oluşturduğu doğrulara paralel olanlarla sınırlayan çözümler Julian H. Braun, White Sands Proving Ground ve E. P. Starke, Rutgers Üniversitesi tarafından gönderilmiştir.

Braun, bu sınırlı durumun *American Mathematical Monthly*'deki E 1127 numaralı problemin bir değişkesi olduğunu belirtmiştir.

242 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
Mathematics Magazine, 28, (1954-1955), 284.

P. W. Allen Raine'in çözümü, Newport News Lisesi, Newport News, Virginia. $A, B, C, A', B', C', A'', B'', C''$, karşılık gelen noktaların vektörel koordinatlarını; k de bir skaler niceliği göstersin.

Böylece

$$A' = \frac{kB + C}{k+1}, \quad B' = \frac{kC + A}{k+1}, \quad C' = \frac{kA + B}{k+1}$$

ve

$$A'' = \frac{B' + kC'}{1+k} = \frac{kC + A + k^2A + kB}{(1+k)^2},$$

$$B'' = \frac{B' + kA'}{1+k} = \frac{kA + B + k^2B + kC}{(1+k)^2},$$

$$C'' = \frac{A' + kB'}{1 + k} = \frac{kB + C + k^2C + kA}{(1 + k)^2}$$

Şimdi kolayca şu eşitlikler gösterilebilir:

$$A'' - B'' = \frac{1 - k + k^2}{(1 + k)^2}(A - B),$$

$$B'' - C'' = \frac{1 - k + k^2}{(1 + k)^2}(B - C),$$

$$C'' - A'' = \frac{1 - k + k^2}{(1 + k)^2}(C - A)$$

Bu, iki üçgenin kenarlarının paralel ve dolayısıyla üçgenlerin homotetik olduğunu gösterir; homoteti oranı

$$\frac{1 - k + k^2}{(1 + k)^2}$$

Diğer çözenler: Maimouna Edy, Hull, P. Q., Kanada; M. S. Klamkin, Brooklyn Politeknik Enstitüsü; Chih-yi Wang, Minnesota Üniversitesi ve problemi öneren.

248 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
Mathematics Magazine, 29, (1955-1956), 46.

Problemi önerenin çözümü. t'nin, t'ye çok yakın yeni bir t' konumunu ele alırsak $M_1M_1'/\sin\Delta\theta = C'M_1'/\sin\mu_1$ olur; burada M_1', Γ_1 üzerinde M_1'e yakın bir noktadır ve $\Delta\theta = (t,t')$, t ile t' arasındaki açıdır.

Sonsuz küçükler cinsinden

$$ds_1/d\theta = CM_1/\sin\mu_1, \qquad \mu_1 = (t,t_1) \pm \pi$$

ve benzer biçimde

$$ds_2/d\theta = CM_2/\sin\mu_2, \qquad \mu_2 = (t,t_2) \pm \pi$$

$t_1 \parallel t_2$ olduğundan $\sin\mu_1 = \sin\mu_2$'dir; böylece

$$ds_1/CM_1 = ds_2/CM_2$$

elde edilir. Buradan

$$(ds_1/d\alpha)CM_1 = (ds_2/d\alpha)CM_2$$

yani

$$R_1/CM_1 = R_2/CM_2$$

bulunur; burada $d\alpha$, M_1, M_2'deki paralel normallere ilişkin sonsuz küçük açı; R_1, R_2 ise karşılık gelen eğrilik yarıçaplarıdır. Son eşitlik savı ispatlar.

Richard K. Guy, Malaya Üniversitesi, Singapur ve Chih-yi Wang, Minnesota Üniversitesi de çözmüşlerdir.

258 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
Mathematics Magazine, 30, (1956-1957), 47.

Diklik Merkezinin Geometrik Yeri

258. [Ocak 1956] Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye.

Bir çembere çizilmiş ABC üçgeni, AB ve AC sabit doğrultularını koruyacak biçimde değişmektedir. Diklik merkezi H'nin geometrik yerini bulunuz.

1. Binbaşı H. S. Subba Rao'nun çözümü, Savunma Bilimi Kurumu, Yeni Delhi, Hindistan. Tepe açısı A'nın ve BC tabanının büyüklükleri sabittir. $A_1B_1C_1$, ABC için verilen koşulları sağlayan ikizkenar üçgen olsun. P, çevrel çemberin iki AC yayından küçüğünün orta noktası; benzer biçimde Q, AB yayının orta noktası olsun. Çemberin merkezi O olsun. P ve Q noktaları sabittir.

A_1'den geçen çapı y ekseni, ona dik çapı ise x ekseni alalım. Bu eksenlere göre ABC çemberinin herhangi bir noktası $a\cos t, a\sin t$ parametrik gösterimiyle verilebilir.

$B_1 = (t_2)$, $C_1 = (t_3)$, $P = (t_4)$ ve $Q = (t_5)$ olsun.

$\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1C_1B_1 = 90^\circ - A/2$ olduğuna dikkat edilirse, kolayca $t_2 = \frac{3\pi}{2} - A$, $t_3 = \frac{3\pi}{2} + A$, $t_4 = \frac{A}{2}$, $t_5 = 2\pi - \frac{A}{2}$ bulunur.

ABC üçgeninin herhangi bir konumunda $t = \angle B_1OB = \angle C_1OC$ olsun. O hâlde $B = (t_2 + t)$ ve $C = (t_3 + t)$'dir. Ayrıca BH, AC'ye dik olduğundan OP'ye paraleldir; benzer biçimde $CH \parallel OQ$'dur.

BH ve CH doğrularının denklemleri kolayca

$$x \operatorname{Sin} \frac{A}{2} - y \cos \frac{A}{2} = a \cos \left(t - \frac{3A}{2}\right)$$

ve

$$x \operatorname{Sin} \frac{A}{2} + y \cos \frac{A}{2} = a \cos \left(t + \frac{3A}{2}\right).$$

olarak bulunur. İki denklem arasında t yok edilirse H'nin geometrik yeri

$$\frac{x^2 \sin^2 \frac{A}{2}}{a^2 \cos^2 \frac{3A}{2}} + \frac{y^2 \cos^2 \frac{A}{2}}{a^2 \sin^2 \frac{3A}{2}} = 1.$$

elde edilir. Bu, merkezi O ve yarı eksenleri

$$\frac{a \operatorname{Cos} \frac{3A}{2}}{\operatorname{Sin} \frac{A}{2}} \quad \text{ve} \quad \frac{a \operatorname{Sin} \frac{3A}{2}}{\operatorname{Cos} \frac{A}{2}}$$

olan bir elipstir.

(İlginç bir sonuç olarak, ABC üçgeninin dokuz nokta merkezinin ve ağırlık merkezinin geometrik yerleri de elipstir.)

II. Problemi önerenin çözümü. OX, OY, sırasıyla A'nın dış ve iç açıortaylarına paralel doğrular olsun. AH yüksekliği bu sabit doğruları X, Y'de kessin. AO, AH, A'nın açıortaylarıyla eşit açılar yaptığından $AX = AO = AY$ olur. Dolayısıyla $XY = 2R =$ sabittir.

Böylece XY, uçları OX, OY üzerinde hareket eden, uzunluğu sabit bir çubuk olarak düşünülebilir. A açısı sabit olduğundan, BC bir çemberi zarflar; yani BC'nin orta noktası D, merkezi O olan bir çember çizer. Dolayısıyla $AH = 2OD = 2R\cos A =$ sabittir. Bu, H'nin hareketli XAY çubuğu üzerinde sabit bir nokta olduğunu ispatlar. O hâlde H bir elips çizer.

Elipsin yarı eksenleri kolayca belirlenir:

$$a = HY + AY = HA = R(1 + 2\cos A), \qquad b = HX = XA - HA = R(1 - 2\cos A).$$

Diğer çözenler: J. W. Clawson, Collegeville, Pennsylvania; R. K. Guy, Malaya Üniversitesi, Singapur; Rahibe M. Stephanie, Georgian Court College, New Jersey; Harry D. Ruderman, The Bronx, New York ve Chih-yi Wang, Minnesota Üniversitesi.

266 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
Mathematics Magazine, 30, (1956-1957), 105.

Çevrel Çembere Göre Birbirinin Evirme Görüntüsü Olan Noktalar

266. [Mart 1956] Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye.

M ve M', ABC üçgeninin çevrel çemberine göre birbirinin evirme görüntüsü olan noktalarsa, aşağıdaki eşitlikleri ispatlayınız:

$$\angle BMC + \angle BM'C = 2\angle A$$
$$\angle CMA + \angle CM'A = 2\angle B$$
$$\angle AMB + \angle AM'B = 2\angle C$$

I. Richard K. Guy'ın çözümü, Malaya Üniversitesi, Singapur. COM ve $M'OC$ üçgenlerinde O açısı ortaktır; $OM \cdot OM' = OC^2$ olduğundan $OC/OM = OM'/OC$'dir. Dolayısıyla üçgenler benzerdir ve $\angle OM'C = \angle OCM$ olur. Aynı biçimde $\angle OM'B = \angle OBM$'dir. Bunları $\angle OMC$ ve $\angle OMB$'ye ekleyerek $\angle BMC + \angle BM'C = \pi - \angle COM + \pi - \angle BOM = \angle BOC = 2\angle A$ elde edilir.

Benzer biçimde $\angle CMA + \angle CM'A = 2\angle B$ ve $\angle AMB = \angle AM'B = 2\angle C$ olur.

II. Maimouna Edy'nin çözümü, Hull, PQ, Kanada. A, B, C, M, M' noktalarını sırasıyla z_1, z_2, z_3, z, z' karmaşık sayılarıyla gösterelim. Ayraçlar çift oranı, üst çizgi karmaşık eşleniği göstersin. O zaman:

$$(1) \qquad (z_1, z_2, z_3, z) = \overline{(z_1, z_2, z_3, z')}$$

Bu, z_1, z_2, z_3'ü sırasıyla $1, 0, \infty$'ye gönderen homografik dönüşümün, yani verilen çemberi gerçek eksene dönüştüren dönüşümün, z ve z''nü eşlenik iki karmaşık noktaya gönderdiğini söyler.

Şimdi (1) denklemi açıkça şöyle yazılır:

Açıkça

$$\frac{z - z_2}{z - z_3} \cdot \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} = \frac{\overline{z' - z_2}}{\overline{z' - z_3}} \cdot \frac{\overline{z_1 - z_3}}{\overline{z_1 - z_2}}$$

$$\frac{z_2 - z}{z_3 - z} \div \frac{\overline{z_2 - z'}}{\overline{z_3 - z'}} = \frac{\overline{z_3 - z_1}}{\overline{z_2 - z_1}} \div \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Dolayısıyla

$$\arg\left(\frac{z_2 - z}{z_3 - z}\right) + \arg\left(\frac{z_2 - z'}{z_3 - z'}\right) = -2\arg\left(\frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}\right) = +2\arg\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right)$$

Bu, yönlü açılar için şu anlama gelir:

$$\text{açı}(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}) + \text{açı}(\overrightarrow{M'C}, \overrightarrow{M'B}) = 2\text{açı}(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}).$$

Yönlü açılar, birim çemberin çarpımsal grubuyla izomorf bir toplamsal grup oluşturur. Başka bir deyişle, açılarımızın keyfî ölçülerini alıp bunları 2π modülüne göre toplayabiliriz. Diğer iki bağıntı da benzer biçimde ispatlanır.

Bankoff'un çözümünde de açıların uygun biçimde yönlendirilmesi gerektiği belirtilmiştir.

Leon Bankoff, Los Angeles, Kaliforniya; J. W. Clawson, Collegeville, Pennsylvania ve problemi öneren de çözmüşlerdir.

298 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 31, (1957-1958), 56.**

Değişmez Bir Eğri

298. [Ocak 1957] Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli Bölgesi, Türkiye.

$y = f(x)$ aşağıdaki özellikleri taşıyan bir eğri olsun:

a) $f(x) = f(-x)$
b) $x > 0$ için $f'(x) > 0$
c) $f''(x) = 0$

Eğri, üzerindeki herhangi iki noktadan yerçekimi etkisi altında asıldığında başlangıçtaki şeklini koruyacak biçimde, (x, y) noktasındaki birim uzunluk başına $w(x)$ ağırlığını belirleyiniz.

K. L. Cappel'in çözümü, Philadelphia, Pennsylvania. Eğrinin keyfî iki A, B noktasından asıldığını varsayalım. A ile eğrinin y eksenini kestiği nokta arasındaki ağırlık W olsun. O zaman A'daki gerilme kuvveti düşey ve yatay bileşenlerine ayrılarak $W/H = \tan\theta$, yani $W = H\,dy/dx$ elde edilir.

Sağdaki destek noktasının A'dan A''ne taşındığını varsayalım. Eğri şeklini koruyacaksa, A'daki kuvvetlerde bir değişiklik olmamalıdır. Bu ancak H sabitse mümkündür. ds, AA' parçasının uzunluğu ve dW onun ağırlığıysa, birim uzunluk başına ağırlık

$$W_x = \frac{dW}{ds} = \frac{d\,W}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\,dx} \qquad \text{yani,} \qquad W_x = H \cdot \frac{d^2y/dx^2}{\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}$$

olur; bu bağıntı, verilen koşulları sağlayan her eğri için sağlanabilir. Bu problem, taşınacak tek yükün kemerin kendi malzemesi olduğu ve eğilme momentlerini ortadan kaldırmak için basınç kuvvetinin tarafsız eksen boyunca etkimesinin istendiği durumda, kâgir bir kemerin en uygun biçimini bulma problemine benzerdir.

Problemi öneren de çözmüştür.

304 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 31, (1957-1958), 117.**

Üçgene İlişkin Çemberler

304. [Mart 1957] Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli Bölgesi, Türkiye.

$AB \neq AC$ olmak üzere, ABC, (O) çemberine çizilmiş bir üçgen; K de A dış açısının açıortayının (O) ile kesiştiği nokta olsun. Merkezi K olan değişken bir çember, AB ve AC'yi sırasıyla E, F'de, A noktası KEF'nin iç noktası olmayacak biçimde kessin. EF, BC'ye yaklaşırken EF ile BC'nin ortak noktası M'nin limit konumu m'yi bulunuz.

Problemi önerenin çözümü. (K)'nın AB, AC ile E, F dışındaki kesişimleri E', F' olsun. BC ile $E'F'$'nün ortak noktası M' olsun.

$EFM, E'F'M'$ doğrularını kesen alarak, ABC'ye Menelaus teoremini uygularsak

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{FC}{FA} \cdot \frac{EA}{EB} = +1 \qquad \frac{M'B}{M'C} \cdot \frac{F'C}{F'A} \cdot \frac{E'A}{E'B} = +1$$

elde edilir. Bu eşitlikleri taraf tarafa çarpıp $EA = F'A$, $E'A = FA$ olduğuna dikkat edersek

$$\frac{MB}{MC} \cdot \frac{M'B}{M'C} = \frac{EB \cdot E'B}{FC \cdot F'C}$$

Son orandaki pay ve payda, B, C'nin (K) çemberine göre kuvvetleridir. Bu kuvvetler eşittir (K, B ve C'ye eşit uzaklıktadır); dolayısıyla $MB : MC = M'C : M'B$ olur. Böylece M, M', BC üzerinde simetrik noktalardır. M'nin limit konumu m de, M''nün limit konumu m''nün simetriği olacaktır. m''nün, A'nın dış açıortayı KA'nın ayağı olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla M'nin çizimi hemen elde edilir.

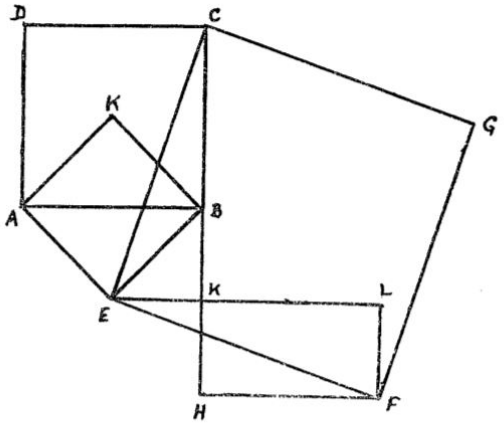
349 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 32, (1958-1959), 223.**

Bir Orta Nokta

349. [Eylül 1958] Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Karadeniz Ereğli, Türkiye.

$ABCD, AEBK, CEFG$ aynı yönelimli karelerse B'nin DF'yi ortaladığını ispatlayınız.

Leon Bankoff'un çözümü, Los Angeles, Kaliforniya. AEB, CEF dik açılarından CEB açısını çıkarınca BEF, AEC, DEB açılarının eşit olduğunu buluruz. Ancak $DE = EC = EF$'dir. Dolayısıyla BDE, FBE üçgenleri eştir ve $FB = BD$'dir. F, B, D'nin doğrusal olması, EBD açısının $90°$ olmasından çıkar.



Diğer çözenler: Norman Anning, Alhambra, Kaliforniya; D. A. Breault, Sylvania Electric Products, Inc., Waltham, Massachusetts; J. W. Clawson, Collegeville, Pennsylvania; Norbert Jay, New York, New York; Joseph D. E. Konhauser, Haller, Raymond and Brown, Inc., State College, Pennsylvania; Arne Pleijel, Trollhättan, İsveç; William Sanders, Mississippi Southern College; C. W. Trigg, Los Angeles City College; Dale Woods, Idaho State College ve problemi öneren.

334 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 32, (1958-1959), 106.**

Düzensiz Bir Bölgenin Alanı

334. [Mart 1958] Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Karadeniz Ereğli, Türkiye.

Bir sikloidin AM yayı, yuvarlanan $\Omega(a)$ çemberinin TM yayı ve taban doğrusu üzerindeki AT doğru parçası tarafından sınırlanan S alanı için en basit ifadeyi bulunuz.

J. W. Clawson'ın çözümü, Collegeville, Pennsylvania. MN ve CT'yi AT'ye dik çizelim. $\angle MCT = \theta$, $CT = a$ olsun. İstenen alan = AMN'nin alanı $+NMCT$ yamuğunun alanı $-MCT$ daire diliminin alanıdır.

M için $x = a(\theta - \sin\theta)$, $y = a(1 - \cos\theta)$ olur.

Böylece alan =
$$a^2\int_0^\theta (1-\cos\theta)^2\,d\theta + \frac{a^2\sin\theta}{2}(2-\cos\theta) - \frac{a^2\theta}{2}$$
$$= 3/2\,a^2\theta - 2a^2\sin\theta + (a^2/2)\sin\theta\cos\theta + a^2\sin\theta - (a^2/2)\sin\theta\cos\theta$$
$$= a^2(\theta - \sin\theta)$$
$$= ax.$$

Diğer çözenler: Stanley P. Franklin, Memphis State Üniversitesi; Joseph D. E. Konhauser, State College, Pennsylvania; Arne Pleijel, Trollhättan, İsveç ve problemi öneren.

372 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 33, (1959-1960), 112.**

Trigonometrik Bir Özdeşlik

372. [Mart 1959] Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Karadeniz Ereğli, Türkiye.

Aşağıdaki özdeşliği ispatlayınız:

$$\sin^2(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n) = \sin^2\theta_1 + \cdots + \sin^2\theta_n + 2\sum_{1\leqq i<j\leqq n} \sin\theta_i\sin\theta_j\cos(\theta_1+2\theta_{i+1}+\cdots+2\theta_{j-1}+\theta_j).$$

Problemi önerenin çözümü. Tümevarım kullanalım. Eşitlik $n = 1$ ve $n = 2$ için doğrudur. Özelliğin $n = p$ için doğru olduğunu varsayalım. O zaman

$$\theta = \theta_1 + \cdots + \theta_p$$

koyup çıkarma yoluyla elde edilen aşağıdaki eşitliği ispatlamak yeterlidir:

$$\sin^2(\theta+\theta_{p-1}) - \sin^2\theta = \sin^2\theta_{p-1} - 2\sum_{i=1}^{p} \sin\theta_1 \sin\theta_{p+1} \cdot \cos(\theta_i + 2\theta_{i+1} + \cdots + 2\theta_p + \theta_{p+1}).$$

Sol tarafın, A'nın, aşağıdaki ifadeye eşit olduğu görülür:

$$A = \sin\theta_{p+1} \sin(2\theta + \theta_{p+1})$$

Sağ taraf, B, şu ifadeye eşittir:

$$\begin{aligned} B &= \sin^2\theta_{p+1} + \sin\theta_{p+1} \sum_{i=1}^{p} 2\sin\theta_1 \cos(\theta_i + 2\theta_{i+1} + \cdots + 2\theta_p + \theta_{p+1}) \\ &= \sin^2\theta_{p+1} + \sin\theta_{p+1} \sum_{i=1}^{p} [\sin(2\theta_i + 2\theta_{i+1} + \cdots + 2\theta_p + \theta_{p+1}) \\ &\quad - \sin(2\theta_{i+1} + \cdots + 2\theta_p + \theta_{p+1})] \\ &= \sin^2\theta_{p+1} + \sin\theta_{p+1} [(\sin(2\theta_1 + 2\theta_2 + \cdots + 2\theta_p + \theta_{p+1}) - \sin\theta_{p+1}] \\ &= \sin\theta_{p-1} \cdot \sin(2\theta_1 + \cdots + 2\theta_p + \theta_{p+1}) = A \end{aligned}$$

$A = B$ eşitliği, özdeşliğin $n = p + 1$ için de doğru olduğunu ispatlar. Sonuç tümevarımla elde edilir.

380 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 33, (1959-1960), 172.**

Bir Denklem Sistemi

380. [Mayıs 1959] **Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Karadeniz Ereğli, Türkiye.**

Aşağıdaki denklem sistemini çözünüz:

$$x(z-a)+u(x+u)=0 \tag{1}$$

$$y(x-b)+u(y+u)=0 \tag{2}$$

$$z(y-c)+u(z+u)=0 \tag{3}$$

Burada $abc \neq 0$ ve $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1}=u^{-1}$'dir.

Chih-yi Wang'ın çözümü, Minnesota Üniversitesi. (1)'i y ile, (2)'yi z ile, (3)'ü x ile çarpıp sırasıyla (2), (3), (1)'i kullanırsak

$$xyz-aby+auy+au^2+buy-u^3=0 \tag{4}$$

$$xyz-bcz+buz+bu^2+cuz-u^3=0 \tag{5}$$

$$xyz-cax+cux+cu^2+aux-u^3=0 \tag{6}$$

(4) − (5), (5) − (6), (6) − (4) işlemlerini yaparak

$$(au+bu-ab)y+(bc-bu-cu)z=(b-a)u^2 \tag{7}$$

$$(ca-cu-au)x+(cu+bu-bc)z=(c-b)u^2 \tag{8}$$

$$(au+cu-ca)x+(ab-au-by)y=(a-c)u^2 \tag{9}$$

elde edilir. (7), (8), (9)'un genişletilmiş matrisinin rankı 2 olduğundan, iki değişkeni üçüncüsü cinsinden hesaplayabiliriz; böylece

$$y=\frac{c^2}{a^2}z-\frac{c(b-a)}{ab}u \tag{10}$$

$$x=\frac{b^2}{a^2}z+\frac{b(c-b)}{ca}u \tag{11}$$

(10)'u (3)'te yerine koyup sadeleştirince

$$\left(\frac{c}{a}z-u\right)^2=0$$

elde edilir. Buradan (10) ve (11) yardımıyla

$$x=(b/a)\,u, \quad y=(c/b)\,u, \quad z=(a/c)\,u.$$

Gerekli her yerde $abc \neq 0$, $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = u^{-1}$ bağıntılarının kullanıldığına dikkat ediniz.

Diğer çözenler: D. A. Breault, Sylvania Electric Products, Inc., Waltham, Massachusetts; Victor Ch'in, Kent State Üniversitesi, Kent, Ohio; Melvin Hochster, Stuyvesant Lisesi, New York ve problemi öneren.

384 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 33, (1959-1960), 230.**

Sonsuz Bir Grup

384. [Eylül 1959] Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Karadeniz Ereğli, Türkiye.

(a_{ij}), her satırındaki elemanların toplamı 1 olan n'inci mertebeden bir matris olsun. Bu matrislerin tümünün $[(a_{ij})]$, sonsuz mertebeli bir grup oluşturduğunu ispatlayınız.

D. A. Breault'nun çözümü, Sylvania Electric Products, Inc. Önerilen grup işleminin çarpma olduğunu ve toplam koşulunun aşağıdaki anlama geldiğini varsayıyoruz:

$$[1] \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \quad i = 1, 2, \ldots, n \text{ için}$$

Sistemin şu özellikleri vardır:
(1) *Kapalılık:* $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ ise

$$C_{ij} = (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} ;$$

olduğundan

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \left(\sum_{j=1}^{n} b_{kj} \right) = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} = 1$$

her i için elde edilir.

(2) *Birleşme özelliği:* Yukarıdakine benzer toplamlar kullanılarak gösterilebilir.

(3) *Birim eleman:* Alışılmış $I = \delta_{ij}$ birim matrisi burada da aynı işi görür.

(4) *Tersler:* [1]'i sağlayan bir A matrisi verildiğinde, A^{-1}'in de [1]'i sağladığı, *var olduğu sürece*, gösterilebilir! Dolayısıyla [1]'i sağlayan *tekil olmayan* matrislerin tümü bir grup oluşturur; fakat bu kısıtlama yapılmaksızın alınan küme oluşturmaz.
Problemi öneren de çözmüştür.

398 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
Mathematics Magazine, 34, (1960-1961), 51.

Birlikte Ele Alınan İkinci Derece Denklemler

398. [Ocak 1960] Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Karadeniz Ereğli, Türkiye.

Aşağıdaki denklemlerin köklerini belirleyiniz:

$$x^2 + y_1 x + y_2 = 0$$

$$y^2 + x_1 y + x_2 = 0$$

Burada bir denklemdeki (gerçek sayı olan) katsayılar diğerinin kökleridir.

Harry M. Gehman'ın çözümü, Buffalo Üniversitesi.
Köklerle katsayılar arasındaki bağıntılar şu dört denklemi verir:

$$x_1 + x_2 = -y_1$$

$$x_1 x_2 = y_2$$

$$y_1 + y_2 = -x_1$$

$$y_1 y_2 = x_2$$

Birinci ve üçüncü denklemlerden $x_2 = y_2$ olur.
Durum I. $x_2 = y_2 = 0$ ise, a keyfî olmak üzere $x_1 = -y_1 = a$'dır ve denklemler

$$x^2 - ax = 0 \quad \text{ve} \quad x^2 + ax = 0$$

olup kökleri sırasıyla $a, 0$ ve $-a, 0$'dır.
Durum II. $x_2 = y_2 \neq 0$ ise $x_1 = y_1 = 1$ ve $x_2 = y_2 = -2$ olur. Her iki denklem de

$$x^2 + x - 2 = 0$$

biçimini alır ve kökleri $1, -2$'dir. Katsayıların gerçek olması koşuluna gerek bulunmadığına dikkat ediniz.

Diğer çözenler: D. A. Breault, Sylvania Electric Products, Inc., Waltham, Massachusetts; Sidney Kravitz, Dover, New Jersey; A. J. Kokar, School of Mines, Adelaide, Avustralya; Rostyslaw Lewyckyj, Toronto Üniversitesi; Ernest E. Moyers, Mississippi Üniversitesi; F. D. Parker, Alaska Üniversitesi; Charles F. Pinzka, Cincinnati Üniversitesi; Arne Pleijel, Trollhättan, İsveç; Robert E. Shafer, Kaliforniya Üniversitesi Radyasyon Laboratuvarı; C. M. Sidlo, Framingham, Massachusetts; William Squire, Southwestern Research Institute, San Antonio, Teksas; Harvey Walden, Rensselaer Politeknik Enstitüsü; Chih-yi Wang, Minnesota Üniversitesi; Dale Woods, Northeastern Missouri State College ve problemi öneren.

407 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 34, (1960-1961), 115.**

Bir Küpte Direnç

407. [**Mart 1960**] **Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Karadeniz Ereğli, Türkiye.**

Bir küpün on iki ayrıtı, her biri bir ohm dirence sahip tellerden yapılmıştır. Küp bir elektrik devresine şu noktalardan bağlanıyor:
a) iki komşu köşe,
b) bir yüzün karşılıklı iki köşesi,
c) küpün karşılıklı iki köşesi.
Hangi durumda direnç en küçüktür?

C. W. Trigg'in çözümü, Los Angeles City College.

Uçlar arasında tek bir ayrıtla bağlantı bulunduğundan, en küçük direncin (a)'da olduğu düşünülebilir. Bunu doğrulamak için:

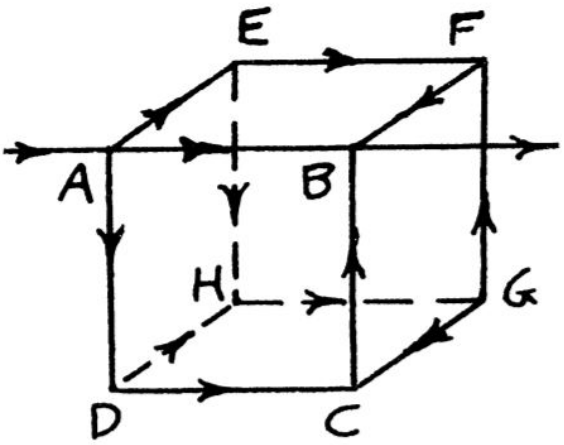
Şekillerde, her durum için akımın yönü gösterilmiştir. Her küpün altında bir şema verilmiş; simetriyle aynı potansiyelde olduğu belirlenen köşeler bu şemada aynı noktayla gösterilmiştir. Böylece her durum, paralel devre yasalarının tekrarlı uygulanmasına indirgenir. O hâlde:

A) $$1/R = 1/r + 1/\{r/2 + 1/[2/r + 1/(r/2 + r + r/2)] + r/2\}\ ,$$

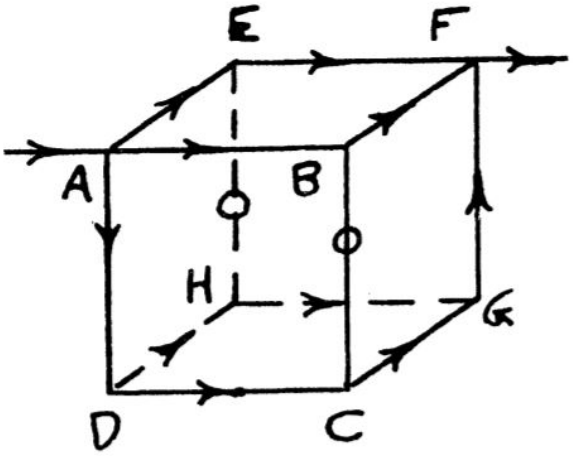
buradan $R = 7r/12$ bulunur; burada R küpün direnci, r ise 1 ohmdur.

B) E, B, H, C aynı potansiyeldedir; dolayısıyla

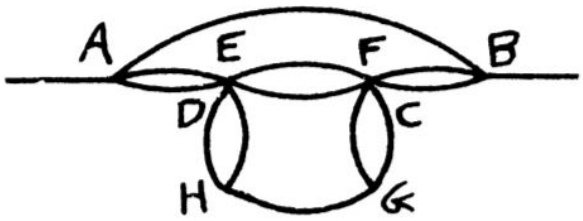
$$R = 2/\{1/r + 1/r + 1/[r + r/2]\} \quad \text{yani} \quad 3r/4\ .$$

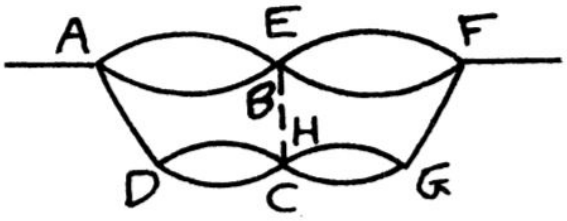


(a)



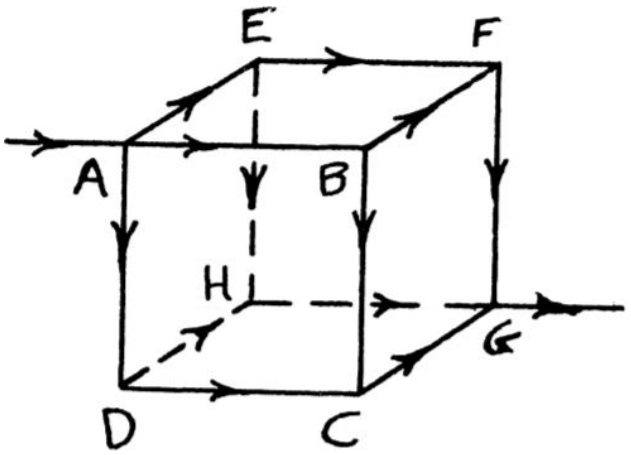
(b)





C) $R = r/3 + r/6 + r/3$
yani $5r/6$ olur.

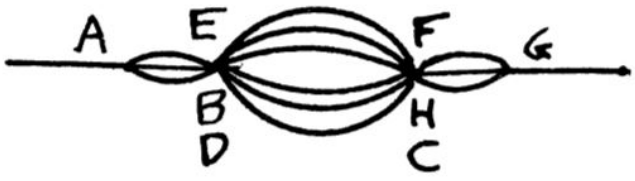
(a) ve (c) durumları, E. E. Brooks ile A. W. Poyser'ın *Magnetism and Electricity*, Longmans, Green and Co. (1920), s. 277–279'da çözülmüştür.



(c)

(c) durumu, *Mathematics Magazine*, Mart 1951 ve Kasım 1959'da yer alan 32 numaralı Kısa Problem'dir.

Charles F. Pinzka, Cincinnati Üniversitesi ve problemi öneren (kısmen) de çözmüşlerdir. Bir yanlış çözüm alınmıştır.



415 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
Mathematics Magazine, 34, (1961), 178.

Trigonometrik Bir Toplam

415. [Mayıs 1960] Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Karadeniz Ereğli, Türkiye.
Aşağıdaki eşitliği ispatlayınız:

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \cos(p)x \sin(n-p)x = 2^{n-1} \sin nx \ .$$

Josef Andersson'ın çözümü, Vaxholm, İsveç. (Editör tarafından çevrilmiş ve yeniden ifade edilmiştir.)
Aşağıdaki formüller kullanılırsa

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} = 2^n \qquad \text{ve} \qquad \binom{n}{n-p} = \binom{n}{p} \ ,$$

başlangıçtaki toplam şu biçimde yazılabilir:

$$\frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \sin nx + \frac{1}{2} \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \sin(n-2p)x = 2^{n-1} \sin nx + \frac{s}{2} \ .$$

Geriye $s = 0$ olduğunu ispatlamak kalır. $p = n - p'$ değişken değiştirmesinden

$$s = \sum_{p'=n}^{0} \binom{n}{n-p'} \sin(2p' - n) = -s \ .$$

elde edilir. Dolayısıyla $s = 0$'dır.

Diğer çözenler: J. L. Brown, Ordance Research Laboratory, Pennsylvania State Üniversitesi; L. Carlitz, Duke Üniversitesi; James C. Ferguson, Lynnwood, Washington; A. F. Hordam, New England Üniversitesi, Armidale, NSW, Avustralya; Joseph D. E. Konhauser, HRB-Singer, Inc., State College, Pennsylvania; William Squire, Southwest Research Institute, San Antonio, Teksas; Chih-Yi Wang, Minnesota Üniversitesi ve problemi öneren.

415 Numaralı Önerilen Problem Üzerine Not:
***Mathematics Magazine*, 34, (1961), 308.**

415 Numaralı Problem Üzerine Not

415. [Mayıs 1960, Ocak 1961] Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Karadeniz Ereğli, Türkiye.

Aşağıdaki eşitliği ispatlayınız:

$$\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \cos(p)x \sin(n-p)x = 2^{n-1} \sin nx \ .$$

Louis Brand'ın notu, Houston Üniversitesi.

Trigonometrik toplam problemine çok daha basit bir çözüm şöyledir: Toplama S diyelim ve $p = n - q$ indis değişikliğini yapalım. İki toplamı toplayınca

$$2S = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \sin nx = 2^n \sin nx \ .$$

419 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 34, (1961), 239.**

Sabit Sürat Eğrisi

419. [Eylül 1960] Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Karadeniz Ereğli, Türkiye.

Düşey bir düzlemde öyle bir yol belirleyiniz ki, bu yolun bir noktasından v_0 ilk hızıyla yerçekimi etkisi altında hareket eden bir parçacık, yol boyunca sabit süratini korusun. Sürtünme olmadığını varsayınız.

Problemi önerenin çözümü.

Düşey düzlemde Ox, Oy koordinat eksenlerini öyle alalım ki

Oy aşağıya, Ox ise sola yönelsin. Parçacık O'dan serbest bırakılsın. Oy üzerindeki, $y_0 = OA = v_0^2/(2g)$ olan A noktasında v_0 hızına ulaşır.

Sürtünme olmadığından, yol boyunca hız, $v = \sqrt{2gy}$ hızının izdüşümüdür; $v_0 = v\cos\alpha$ yazarız. Burada

$$v_0 = \sqrt{2gy_0}\,, \quad v = \sqrt{2gy}\,, \quad \cos^2\propto = \frac{1}{(1+tg^2\propto)} = \frac{1}{(1+y'^2)}$$

olduğundan $y_0 = y/(1+y'^2)$ elde edilir.

Değişkenler ayrılarak şu eşitlikler bulunur:

$$x = \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{(y-y_0)/y_0}} = \tfrac{1}{2}\sqrt{y_0}\,\sqrt{y-y_0}$$

$$y = \frac{4x^2}{y_0} + y_0$$

$$y = \frac{8g}{v_0^2}x^2 + \frac{v_0^2}{2g}\,.$$

Yol, A noktasında Oy'ye teğet bir paraboldür; Oy, tepe noktasındaki teğettir.

425 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
Mathematics Magazine, 34, (1961), 300.

Euler'in Fi Fonksiyonu

425. [Kasım 1960] Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Karadeniz Ereğli, Türkiye.

$n-1$ ve $n+1$ ikiz asal sayılarsa $3\phi(n) \le n$ olduğunu ispatlayınız; burada ϕ, Euler'in ϕ fonksiyonudur.

I. Dermott A. Breault'nun çözümü, Sylvania Electric Products, Inc., Waltham, Massachusetts.

$n+1$ ve $n-1$ asalsa, n hem çift hem de 3'ün katıdır. Dolayısıyla bir m için $n = 6m$ olur ve

$$\phi(n) = \phi(6)\,\phi(m) = 2\,\phi(m)\,,$$

elde edilir. Ayrıca

$$\phi(m) = m \prod_{p \mid m} (1 - \frac{1}{p})\,;$$

olduğundan

$$3\,\phi(n) = 6\,\phi(m) = 6m \prod_{p \mid m} (1 - \frac{1}{p})\,,$$

bulunur. Ancak $6m = n$ olduğundan

$$3\,\phi(n) = n \prod_{p \mid m} \left(1 - \frac{1}{p}\right) ;$$

buradan

$$3\,\phi(n) \leqq n ,$$

elde edilir; istenen de budur.

II. L. Carlitz'in çözümü, Duke Üniversitesi.

$n > 4$ varsaymak gerektiği açıktır. $n-1, n+1$ asal ve $n > 4$ olduğundan n, 3 ile bölünür. Ayrıca n çift olmalıdır; dolayısıyla 6 ile bölünür. Şimdi

$$n = 2^{\alpha}3^{\beta}m \quad (\alpha \geqq 1,\ \beta \geqq 1,\ (m, 6) = 1) , \tag{1}$$

ise şu eşitsizliğin sağlandığını göstereceğiz:

$$\phi(n) \leqq \frac{n}{3} .$$

Gerçekten, (1)'den

$$\phi(n) = 2^{\alpha}3^{\beta-1}\phi(m) \leqq 2^{\alpha}3^{\beta-1}m = \frac{1}{3n} . \tag{2}$$

Not: Aşağıdaki eşitliğin

$$\phi(n) = \frac{n}{3} \tag{3}$$

ancak ve ancak şu koşulda sağlandığını göstermek zor değildir:

$$n = 2^{\alpha}3^{\beta} , \quad (\alpha \geqq 1,\ \beta \geqq 1) . \tag{4}$$

Yukarıda (4)'ün (3)'ü gerektirdiğini gördük. Şimdi (3) sağlanıyorsa n'nin 3 ile bölündüğü açıktır. $\alpha \geq 1$ olmak üzere $n = 3^{\alpha}k$ koyalım; (3) şu hâli alır:

$$2 \cdot 3^{\alpha}\phi(k) = n ,$$

dolayısıyla n çifttir. Şimdi

$$n = 2^{\alpha}3^{\beta}m \quad (\alpha \geqq 1,\ \beta \geqq 1,\ (m, 6) = 1) .$$

koyalım. $m > 1$ ise (2)'den

$$\phi(n) < \frac{n}{3} .$$

elde edilir. Böylece (3) ve (4)'ün denkliğinin ispatı tamamlanır.

Diğer çözenler: Rahip Alfred, St. Mary's College, Kaliforniya; Leon Bankoff, Los Angeles, Kaliforniya; Maxey Brooke, Sweeney, Teksas; B. A. Hausman, S. J., West Baden College, Indiana; Vern Hoggatt, San Jose State College; Sidney Kravitz, Dover, New Jersey; D. L. Silverman, Fort Meade, Maryland; Dale Woods, Northeast Missouri State Teachers College ve problemi öneren.

425 Numaralı Önerilen Problem Üzerine Not:
***Mathematics Magazine*, 34, (1961), 433.**

425 Numaralı Problem Üzerine Not

425. [Kasım 1960 ve Mayıs 1961] Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Karadeniz Ereğli, Türkiye.

$n-1$ ve $n+1$ ikiz asal sayılarsa $3\phi(n) \leq n$ olduğunu ispatlayınız; burada ϕ, Euler'in ϕ fonksiyonudur.

David A. Klarner'ın notu, Napa, Kaliforniya.

Dermott A. Breault'nun verdiği çözümde bir hata vardır. İspatta şu ifade yer alır: "$n+1$ ve $n-1$ asalsa n çift ve 3'ün katıdır; dolayısıyla bir m için $n = 6m$ olur ve

$$\phi(n) = \phi(6)\phi(m) = 2\phi(m) \text{ ."}$$

elde edilir." Bu yalnızca $(6, m) = 1$ iken doğrudur. Nitekim $11, 13$ ikiz asalları

$$\phi(12) = \phi(6) \cdot \phi(2) = 2 \text{ ,}$$

sonucunu verir; oysa $\phi(12) = 4$'tür. Dolayısıyla verilen ispat yönteminin geçerli olması için değiştirilmesi gerekir.

437 Numaralı Önerilen Problem Üzerine Not:
***Mathematics Magazine*, 34, (1961), 371.**

İyi Bilinen Bir Problem

437. [Ocak 1961] Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Karadeniz Ereğli, Türkiye.

Şu önermeyi ispatlayınız veya çürütünüz: $(a+b)^{[n]}$ ifadesinin binom açılımındaki tek katsayıların sayısı, 2'nin bir kuvvetidir; 2'nin üssü, n'nin ikili sayı sistemindeki gösteriminde bulunan 1'lerin sayısıdır.

Editörün notu: Joseph D. E. Konhauser, HRB-Singer, Inc., State College, Pennsylvania, bu problemin daha basit bir biçiminin 1956 Putnam Yarışması'nın II. kısmında 7. problem olarak yer aldığını belirtmiştir. Verilen problem, Kasım 1957'de *American Mathematical Monthly*'de E1288 numarasıyla yayımlanmış; çözümü ve kaynakları Mayıs 1958 sayısında verilmiştir.

Temel Düzey Problem 1288, *American Mathematical Monthly*, 64, (1957), 671.

E 1288. Öneren: S. H. Kimball, Maine Üniversitesi.

Her sonlu binom açılımındaki tek binom katsayılarının sayısı 2'nin bir kuvvetidir (Putnam Matematik Yarışması, bu *Monthly* [1957, s. 24]). 2'nin üssünün, $(x+y)^n$'deki n sayısının ikili tabandaki gösteriminde bulunan 1'lerin sayısı olduğunu ispatlayınız.

1288 Numaralı Problemin Çözümü:
***American Mathematical Monthly*, 65, (1958), 368.**

Tek Binom Katsayıları

E 1288 [1957, 671]. Öneren: S. H. Kimball, Maine Üniversitesi.

Her sonlu binom açılımındaki tek binom katsayılarının sayısı 2'nin bir kuvvetidir (Putnam Matematik Yarışması, bu *Monthly* [1957, s. 24]). 2'nin üssünün, $(x+y)^n$'deki n sayısının ikili tabandaki gösteriminde bulunan 1'lerin sayısı olduğunu ispatlayınız.

I. T. R. Hatcher ve J. A. Riley'nin çözümü, Parke Matematik Laboratuvarları, Carlisle, Massachusetts.

h, n, $h < n$ olan pozitif tamsayılar olsun. n'nin *ikili uzunluğunu*, $L(n)$, n'nin ikili gösterimindeki birlerin sayısı; *ikili kapasitesini*, $C(n)$, n'yi bölen en büyük iki kuvvetinin üssü olarak tanımlayalım. h'nin ikili gösteriminde bir olan her basamakta n'nin de bir basamağı varsa "h, n'de içerilir" der ve $h \subset n$ yazarız. Başka bir deyişle, h'nin ikili gösterimi, n'nin gösterimindeki birler sıfıra çevrilerek elde edilebilir.

Aşağıdaki özellikler kolayca ispatlanır:

(1) $C(n)$, n'nin ikili gösteriminin sonundaki sıfırların sayısıdır.

(2) $C(n) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul n'nin tek olmasıdır.

(3) $\boldsymbol{C(ab) = C(a) + C(b),\ C(a/b) = C(a) - C(b).}$

(4) $L(n) = L(h) + L(n-h)$ olması için gerek ve yeter koşul $h \subset n$'dir.

(5) $\boldsymbol{C(n) = 1 + L(n-1) - L(n).}$

(6) $\boldsymbol{C(n!) = n - L(n).}$

(7) $\boldsymbol{C\binom{n}{h} = L(h) + L(n-h) - L(n).}$

Aşağıdaki teoremin sonucu, çözümü verir.

Teorem. $\binom{n}{h}$ ancak ve ancak $h \subset n$ ise tektir.

İspat. $\binom{n}{h}$ tekse $C\binom{n}{h} = 0$ ve (7)'den $L(n) = L(h) + L(n-h)$ olur. Böylece (4)'e göre $h \subset n$'dir. Tersine, $h \subset n$ ise $L(n) = L(h) + L(n-h)$ ve $C\binom{n}{h} = 0$ olur.

Sonuç. $\binom{n}{h}$ tek olacak biçimdeki h tamsayılarının sayısı $2^{L(n)}$'dir.

İspat. $h \subset n$ ve $L(h) = j$ olan h tamsayılarının sayısı $\binom{L(n)}{j}$'dir. Dolayısıyla $\binom{n}{h}$ tek olacak biçimdeki h tamsayılarının sayısı yalnızca

$$\sum_{j=0}^{L(n)} \binom{L(n)}{j} = 2^{L(n)}.$$

II. Leo Moser'ın açıklamaları, Alberta Üniversitesi. E 1288, 4723 [1957, 116] probleminin özel bir hâlidir. O problemin çözümü şöyledir:

$n = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots + a_k p^k$, $0 \le a_i < p$, $i = 0, 1, 2, \ldots, k$ ise, $r = 0, 1, \ldots, n$ için $\left(\binom{n}{r}, p\right) = 1$ eşitliğinin çözüm sayısı $\prod_{i=0}^{k}(a_i + 1)$'dir.
E 1288'deki sonuç, J. W. L. Glaisher'ın "On the residue of a binomial coefficient with respect to a prime modulus," *Quarterly Journal of Mathematics*, cilt 30, 1899, s. 150–156 yazısında bulunur. Daha yakın zamanda J. B. Roberts, "On binomial coefficient residues," *Canadian Journal of Mathematics*, cilt 9, 1957, s. 363–370'te bir ispat vermiştir.

D. R. Brillinger, Leonard Carlitz, Joe Lipman, D. C. B. Marsh, Paul Schillo ve problemi öneren de çözmüşlerdir.

440 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü: *Mathematics Magazine*, 34, (1961), 427.

Çember Yerleştirme

440. [Mart 1961] Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Karadeniz Ereğli, Türkiye.

Yarıçapı r olan çemberlerin, her biri çevresindeki altı çembere teğet olacak biçimde yerleştirildiğini düşününüz. Küçük çemberlerden biriyle eş merkezli, yarıçapı R olan daha büyük bir çember çizilsin. N, büyük çemberin içinde kalan küçük çemberlerin sayısıysa, aşağıdaki eşitliği ispatlayınız:

$$N = 1 + 6n + 6\sum_{p=1}^{n} [\tfrac{1}{2}(\sqrt{4n^2 - 3p^2} - p)]$$

Burada $n = \left[\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r} - 1\right)\right]$ olup köşeli ayraçlar tam kısım fonksiyonunu göstermektedir.

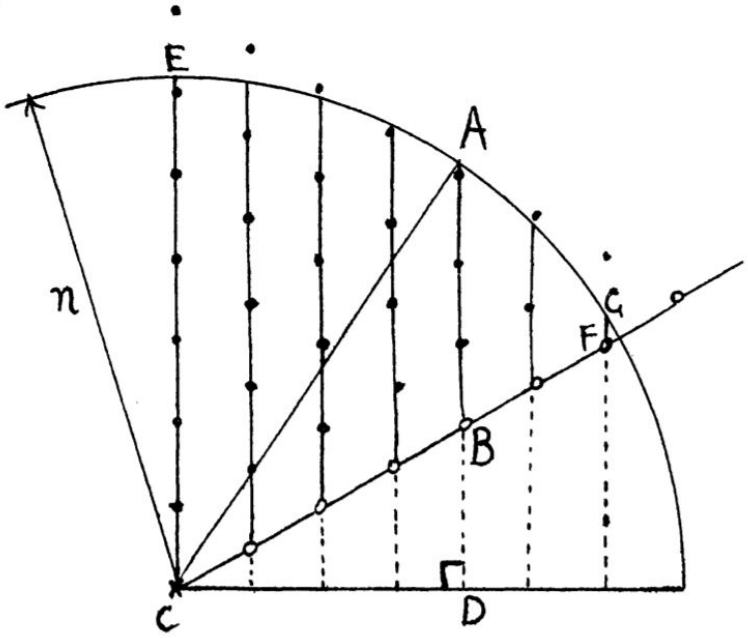
Alan Sutcliffe'in çözümü, Knottingley, Yorkshire, İngiltere.
İfade tam olarak doğru değildir. Örneğin $R/r = 2\sqrt{3} + 1$ iken $n = 1$ ve dolayısıyla $N = 7$ elde edilir; oysa doğru değer $N = 13$'tür. Doğru ifade şudur:

$$N = 1 + 6[n] + 6\sum_{p=1}^{[n]} [\tfrac{1}{2}(\sqrt{4n^2 - 3p^2} - p)] = 1 + 6\sum_{p=0}^{[n]} [\sqrt{n^2 - (3/5)p^2} - \frac{p}{2}],$$

burada $n = \frac{1}{2}(R/r - 1)$'dir.

Bunu ispatlamak için önce komşu merkezler arasındaki uzaklığı birim kabul edip yarıçapı n olan bir çemberin içindeki merkezleri sayalım. Merkezlerin üçgensel dizilişi nedeniyle, şekilde gösterildiği gibi çemberin altı benzer diliminden yalnızca birini ele almamız yeterlidir. Burada $\circ$ ile işaretlenen merkezler komşu dilimdedir; ortak merkez C ise

hiçbir dilimde değildir. Dilimin içerdiği merkezlerin sayısı açıkça



CE'den FG'ye kadar AB gibi uzunlukların tam kısımlarının toplamıdır. $CB = p$ olsun; bu bir tamsayıdır. BCD açısı $30°$ olduğundan $CD = (\sqrt{3}/2)p$ ve $BD = p/2$'dir. $AC^2 = AD^2 + CD^2$ olduğundan

$$n^2 = (AB + \frac{p}{2})^2 + \frac{3}{4}p^2 .$$

elde edilir. Buradan

$$AB = \sqrt{n^2 - (3/4)p^2} - \frac{p}{2} .$$

Dilimin içindeki merkezlerin sayısı, bu ifadenin tam kısmının $p = 0$'dan $[n]$'ye kadar toplamıdır. Altı dilim ve ortak merkez C bulunduğundan

$$N = 1 + 6 \sum_{p=0}^{[n]} [\sqrt{n^2 - (3/4)p^2} - \frac{p}{2}] .$$

Gerçekte merkezler arasındaki uzaklık birim değil $2r$'dir. Bu nedenle $R = 2rn$ yarıçaplı bir çember N merkez içerir. Dolayısıyla $R = 2rn + r$ yarıçaplı çember N çember içerir ve $n = \frac{1}{2}(R/r - 1)$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

440 Numaralı Önerilen Problem Üzerine Not:
Mathematics Magazine, 35, (1962), 316.

440. [**Mart ve Kasım 1961**]. *Hüseyin Demir'in notu, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.*

Problemde verilen N sayısı doğrudur. N, büyük çemberin tümüyle içerdiği küçük çemberlerin sayısını gösterir (teğetlik de buna dâhildir). A. Sutcliffe'in verdiği N sayısı, kısmen içerilen çemberleri de kapsar; dolayısıyla her iki sayı da doğrudur.

458 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
Mathematics Magazine, 35, (1962), 126.

De Moivre Teoremi

458. [Eylül 1961] Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Karadeniz Ereğli, Türkiye.

Bir öğrenci De Moivre teoremini yanlış biçimde şöyle kullanmıştır:

$$(\sin \alpha + i \cos \alpha)^n = \sin n\alpha + i \cos n\alpha .$$

α'nın hangi değerleri için bu eşitlik her n tamsayısında geçerlidir?

Dermott A. Breault'nun çözümü, Sylvania Uygulamalı Araştırma Laboratuvarı, Waltham, Massachusetts. Şöyle alalım:

$$z = \cos \theta + i \sin \theta .$$

De Moivre teoremini doğru kullanırsak

$$z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta .$$

elde edilir. Önerilen bağıntı $(i/z)^n = i/z^n$ olup bundan

$$(1/z^n)(i^n - i) = 0 .$$

elde edilir. Ancak $z^{-n} \neq 0$ olduğundan, önerilen eşitliği her n tamsayısı için sağlayan bir θ değeri yoktur; buna karşılık $n = 4k + 1$ biçimindeki tüm n'ler için bir özdeşliktir.

Diğer çözenler: Rahip U. Alfred, St. Mary's College, Kaliforniya; Leonard Carlitz, Duke Üniversitesi; Alan B. Delfino, St. Mary's College, Kaliforniya; P. D. Goodstein, Leicester Üniversitesi, İngiltere; Harvey H. Green, R. C. A. Ascension Adası (kısmen); Richard Levitt, Boston Latin School; David L. Silverman, Beverly Hills, Kaliforniya; Paul Stygar, Yale Üniversitesi; W. C. Waterhouse, Harvard Üniversitesi ve problemi öneren.

472 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 35, (1962), 255.**

Simetrik Konikler

472 [Ocak 1962]. Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Karadeniz Ereğli, Türkiye.

(C) bir konik, M de onun üzerinde değişken bir nokta olsun. T, M'nin ana eksene göre simetriği; t ise T'deki teğet doğrusu olsun. M'den t'ye indirilen dikmenin, T'yi koniğin merkezine birleştiren doğruyla kesişimini I ile gösterelim. M', M'nin I'ya göre simetriğiyse şunları ispatlayınız:
1. M''nün geometrik yeri, (C) ile aynı türden başka bir (C') koniğidir.
2. (C) ve (C') konikleri eş odaklıdır.

R. D. H. Jones'un çözümü, College of William and Mary, Virginia. Konik $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, M noktası $(a\cos\Delta, b\sin\Delta)$ olsun. Böylece $T = (a\cos\Delta, -b\sin\Delta)$ ve T'deki t teğeti $(x/a)\cos\Delta - (y/b)\sin\Delta = 1$ olur. MI, M'den geçen ve t'ye dik olan doğrudur; dolayısıyla:

$$(1) \qquad y - b\sin\Delta = \frac{-a\sin\Delta}{b\cos\Delta}\cdot(x - a\cos\Delta).$$

T'yi koniğin merkezine birleştiren doğru

$$(2) \qquad \frac{x}{a\cos\Delta} + \frac{y}{b\sin\Delta} = 0.$$

olur. I noktası (1) ve (2)'nin kesişimidir; koordinatları şöyle bulunur:

$$\frac{a(a^2+b^2)}{a^2-b^2}\cos\Delta, \qquad \frac{-b(a^2+b^2)}{a^2-b^2}\sin\Delta.$$

Varsayıma göre M', M'nin I'ya göre simetriğidir; dolayısıyla koordinatları

$$x_{M'} = 2x_I - x_M = \frac{a^3+3ab^2}{a^2-b^2}\cos\Delta$$

ve benzer biçimde

$$y_{M'} = 2y_I - y_M = \frac{-(3a^2, b+b^3)}{a^2-b^2}\sin\Delta.$$

olur. Şöyle alalım:

$$A = \frac{a(a^2+b^2)}{a^2-b^2} \quad \text{ve} \quad B = \frac{b(a^2+b^2)}{a^2-b^2}.$$

a, b gerçek ve $a > b$ ise A, B gerçek ve $A > B$ olur. Dolayısıyla C elipsse M''nün geometrik yeri de elipstir. Ancak b sanalsa B de sanaldır; böylece C hiperbolse M''nün geometrik yeri de hiperboldür. $A^2 - B^2 = a^2 - b^2$ olduğu kolayca gösterilir; dolayısıyla M''nün geometrik yeri C ile eş odaklıdır.

487 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 36, (1963), 76.**

Bir Matrisin Karekökü

487. Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Karadeniz Ereğli, Türkiye.

Aşağıdaki matrisin karekökünü bulunuz:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Maurice Brisebois'nın çözümü, Université de Sherbrooke, Kanada.

X, U keyfî n'inci mertebeden kare matrisler, A verilen tekil olmayan bir matris, $\widetilde{A}$, A'ya benzer bir matris, $X_{\widetilde{A}}$ ise $\widetilde{A}$ ile değişmeli olan keyfî tekil olmayan bir matris olsun. (λ_i), A'nın tüm özdeğerleri ($i = 1, \ldots, n$; hepsinin farklı olması gerekmez), E_{p_i}, $\sum_{i=1}^{n} p_i = n$ olmak üzere p_i'inci mertebeden birim matris, H_{p_i} ise üst yan köşegeni birlerden, diğer elemanları sıfırlardan oluşan matris olsun. $(\sqrt[n]{\lambda_1 E_{p_1} + H_{p_1}}, \ldots, \sqrt[n]{\lambda_n E_{p_n} + H_{p_n}})$, köşegeni boyunca aşağıdaki türden p_i'inci mertebeden kare matrislerden oluşan

$$\begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix} ; i = 1, \cdots, n$$

ve diğer yerlerde sıfır bulunan bir matris olsun. O zaman

$$X^m = A$$

matris denkleminin bütün çözümleri şu formülle verilir:

$$X = U X_{\widetilde{A}} (\sqrt[m]{\lambda_1 E_{p_1} + H_{p_1}}, \cdots, \sqrt[m]{\lambda_n E_{p_n} + H_{p_n}}) \cdot X_{\widetilde{A}}^{-1} U^{-1}.$$

$m = n = 2$ özel hâlinde şu sonuç elde edilir:

$$X = U X_{\widetilde{A}} \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} X_{\widetilde{A}}^{-1} U^{-1}.$$

A tekilse daha ayrıntılı bir inceleme gerekir. A'nın m'inci köklerinin varlığı, (X_1, X_2) matrisi X'e benzer olacak biçimdeki bir X_2 matrisi için kabul edilebilir bir elemanter bölenler sisteminin varlığına bağlıdır. (X_2'nin m'inci kuvveti alındığında bu elemanter bölenler ayrışıp A_2'nin elemanter bölenler sistemini üretiyorsa, X_2 için bu sisteme "kabul edilebilir" diyoruz; burada $A = (A_1, A_2)$ ve A_1, A_2 sırasıyla X_1, X_2'ye benzerdir.)

Açıklamalar. 1. Genel durumda $X^m = A$ ($|A| \neq 0$) denkleminin çözümleri, bütün λ_i'ler farklı olmadıkça A'nın polinomları olarak ifade edilemez.

2. $X^m = A$ denkleminin çözümleri parametrik niteliktedir. $X_{\widetilde{A}}$'daki parametre sayısı, A ile değişmeli olan doğrusal bağımsız matrislerin

N sayısıyla verilir. Burada $N = \sum_{i=1}^{t}(2i-1)n_i$ $(t \leq n)$ olup n_i'ler, A'nın sabit olmayan değişmez polinomlarının dereceleridir.

3. Bu doğrultudaki bazı sonuçlar için bkz. Lusternik–Sobolen, "Elem. of Functional Analysis," s. 283; Dunford–Schwartz, "Linear Operations" (Kısım I), s. 583, problem 31 ve Bellman, "Introd. to Matrix Analysis," s. 93, problemler 1–3.

Diğer çözenler: Rahip U. Alfred, St. Mary's College, Kaliforniya; J. A. H. Hunter, Toronto, Kanada; Francis D. Parker, Alaska Üniversitesi; Gilbert Labelle, Montreal Üniversitesi, Kanada; C. F. Pinzka, Cincinnati Üniversitesi; J. L. Stearn, Washington, D. C. ve problemi öneren.

498 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
Mathematics Magazine, 36, (1963), 201.

Çarpımsal Fonksiyonların Bir Özelliği

498. [Kasım 1962] Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

m, n tamsayılar, δ, D sırasıyla bunların en büyük ortak böleni ve en küçük ortak katı, $d(n)$, n'nin bölenlerinin sayısı ve $\phi(n)$ Euler fonksiyonu olmak üzere aşağıdaki eşitlikleri ispatlayınız:

$$d(m)d(n) = d(\delta)d(D) \tag{1}$$

$$\phi(m)\phi(n) = \phi(\delta)\phi(D) \tag{2}$$

L. Carlitz'in çözümü, Duke Üniversitesi.

Sonuç, aşağıdaki teoremin özel bir hâlidir. $f(n)$ keyfî bir çarpımsal fonksiyon olsun; yani $(m, n) = 1$ olan bütün m, n için

$$f(mn) = f(m)f(n)$$

olsun. O zaman

$$(*) \qquad f(m)f(n) = f(\delta)f(D),$$

olur; burada $\delta = (m, n)$ ve $D = [m, n]$, sırasıyla en büyük ortak bölen ve en küçük ortak kattır. (*)'ın ispatı doğrudandır. Şöyle yazarsak

$$m = \Pi p^r, \qquad n = \Pi p^s,$$

elde edilir:

$$\delta = \Pi p^{r'}, \qquad D = \Pi^{s'},$$

burada $r' = \min(r, s)$, $s' = \max(r, s)$'dir. $r' + s' = r + s$ olduğundan

$$f(\delta)f(D) = \Pi p^{r'+s'} = \Pi p^{r+s} = f(m)f(n).$$

Diğer çözenler: Stephen R. Cavior, Duke Üniversitesi; Daniel I. A. Cohen, Brooklyn, New York; George Diderick, Wisconsin Üniversitesi; Murray S. Klamkin, State University of New York at Buffalo; David A. Klarner, Humboldt State College, Kaliforniya; Gilbert Labelle, Université de Montréal; Jerry L. Pietenpol, Columbia Üniversitesi; Robert Prielipp, Wisconsin Üniversitesi; Sam Sesskin, Hempstead, New York; David L. Silverman, Beverly Hills, Kaliforniya; Irene Williams, Converse College, Güney Karolina ve problemi öneren.

509 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 36, (1963), 321.**

Bir Amerikan Alfametiği

509. [Mart 1963] Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Aşağıdaki harfli aritmetik bulmacasını

$$\begin{array}{r} U\ N\ I\ T\ E\ D \\ S\ T\ A\ T\ E\ S \\ \hline A\ M\ E\ R\ I\ C\ A \end{array}$$

α rakamını da kullanarak 11 tabanında çözünüz.

Anton Glaser'ın çözümü, Ogontz Kampüsü, Pennsylvania State Üniversitesi.
Çözümümü şu şekilde elde ettim:

(1) $A = 1$ [Her sayı sisteminde iki rakam toplanınca elde en çok bir olabilir.]

(2) $D \neq 0$ [$D = 0$ ise $S = A = 1$ olur; bu, $S \neq A$ ile çelişir.]
(3) $S \neq 0$ [(2)'ye benzer.]
(4) $E \neq 0$ [$E = 0$ ise $C = A = 1$ olur; bu, $C \neq A$ ile çelişir.]
(5) $T \neq 0$ [$T = 0$ ise ya $I = A = 1$ olup $I \neq A$ ile çelişir ya da $T = I = 0$ olup $T \neq I$ ile çelişir.]
(6) Bulmacaların alışılmış kuralları gereği $U \neq 0$ ve $S \neq 0$.
(7) $E \neq \alpha$ [$E = \alpha$ ise $C = E = \alpha$ olur; bu, $C \neq E$ ile çelişir.]
(8) $U+S>9$
(9) Önceki sütundan elde gelmiyorsa $U + S > \alpha$.
(10) $D + S = 11_{(\text{on bir})} = 12_{\text{on}} =$ on iki

D ve S için yalnızca sağdaki tabloda gösterilen rakamlar, yalnızca verilen birleşimlerde mümkündür.

[$A = 1$ olduğundan ne D ne de S, 1 olabilir.]

[Ne D ne de S, 6 olabilir; çünkü her iki durumda da $D = S = 6$ olur ve bu, $D \neq S$ ile çelişir.]

D	
2	α
3	9
4	8
5	7
7	5
8	4
9	3
α	2

(11) $T \neq 2$, $T \neq 3$, $T \neq 4$ ve $T \neq 5$ [$T = 2, 3, 4, 5$ için, bu dört T değerinin her birine karşılık gelen yedi olası E değeri de her durumda bir çelişkiye yol açmıştır.]

(12) $T = 6$ ve $E = 5$ için, kalan harflerle kalan rakamlar arasında bulmacayı sağlayan bire bir eşleme kurulabilir.

$$\begin{array}{r} 8\ \alpha\ 2\ 6\ 5\ 3 \\ 9\ 6\ 1\ 6\ 5\ 9 \\ \hline 1\ 7\ 5\ 4\ 2\ 0\ 1 \end{array}$$

Diğer çözenler: Josef Andersson, Vaxholm, İsveç; Merrill Barneby, Kuzey Dakota Üniversitesi; Maxey Brooke, Sweeny, Teksas; Harry M. Gehman, State University of New York at Buffalo; Wahin Ng, San Francisco, Kaliforniya; Norman Harelik, Mather Lisesi, Chicago, Illinois; J. A. H. Hunter, Toronto, Ontario, Kanada; Robert Sandling, Columbia Üniversitesi; Anita Skelton, Watervliet Arsenal, New York; David L. Silverman, Beverly Hills, Kaliforniya; Orvan Sommers, West Bend Lisesi, Wisconsin; C. W. Trigg, Los Angeles City College; Hazel S. Wilson, Jacksonville Üniversitesi, Florida; Rahip Louis F. Zirkel, Archbishop Molloy Lisesi, Jamaica, New York ve problemi öneren.

517 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü: *Mathematics Magazine*, 37, (1964), 56.

Parabol Alanları

517. [Mayıs 1963] **Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.**

F, d, bir parabolün odağı ve doğrultmanı olsun. M, N, parabol üzerinde herhangi iki nokta; M', N' ise sırasıyla bunların d üzerindeki izdüşümleri olsun. Aşağıdaki eşitliği gösteriniz:

$$\frac{FMN \text{ alanı}}{N'M'MN \text{ alanı}} = \text{sabit.}$$

I. Francis D. Parker'ın çözümü, Alaska Üniversitesi.
Odak uzaklığını F alıp doğrultmanı x eksenine, odağı y eksenine yerleştirirsek parabolün denklemi olarak $y = x^2/(4F)+F$ kullanabiliriz. M, N'nin apsisleri sırasıyla a, b ise doğrudan hesaplamalarla

$$\text{Alan } MM'N'N = \int_a^b y\,dx = \frac{b-a}{12F}\left[12F^2 + a^2 + ab + b^2\right]$$

ve

$$\text{Alan } FMN = \frac{b-a}{24F}\left[12F^2 + a^2 + ab + b^2\right].$$

elde edilir. Dolayısıyla alanların oranı F, a, b'den bağımsızdır ve 1/2'ye eşittir.

II. Joel Kugelmass'ın çözümü, Stanford Üniversitesi ve Ulusal Standartlar Bürosu.

Herhangi bir $f_1(x)$ parabolünün, bir P izdüşümsel dönüşümü, bir O ortogonal dönüşümü ve uygun dönme ve ötelemeler uygulanarak başka bir $f_2(x)$ parabolüne dönüştürülebileceği açıktır. Bu dönüşümlerin hepsi, üçgensel bölgenin alanının yamuksal bölgeninkine oranını korur. Dolayısıyla herhangi bir parabolü $y = x^2$'ye dönüştürebiliriz. Yeniden dönüştürüp $\lim M-N = 0$ olmasını sağlarsak alanlar açıkça yükseklerinin uzunluğuna, bu da odaktan merkeze uzaklık olan p'ye yaklaşır. Şimdi, bölen ve bölünenin bölgelerin alanları olduğu $z = (p+\epsilon_1)/(p+\epsilon_2)$ fonksiyonu, yeterince çok dönüşümden sonra $(\epsilon_1+\epsilon_2 < \delta)$ monotondur ve bu nedenle limite yaklaşır. Verilen dönüşümler altında bütün oranlar aynı kaldığından başlangıçtaki oran bir sabite eşittir; böylece teorem ispatlanmıştır.

Josef Andersson, Vaxholm, İsveç; Michael J. Pascual, Watervliet Arsenal, New York; Hazel S. Wilson, Jacksonville Üniversitesi, Florida ve problemi öneren de çözmüşlerdir.
Dermott A. Breault, Sylvania Electric Products, Inc., Waltham, Massachusetts; P. R. Nolan, Eğitim Bakanlığı, Dublin, İrlanda ve Rahip Louis F. Zirkel, Archbishop Molloy Lisesi, Jamaica, New York, FMN ve $N'M'MN$ şekilleri parabolün MN yayıyla sınırlanan alanlar yerine doğru parçalarıyla sınırlanan alanlar olarak alınırsa önermenin yanlış olduğunu ayrı ayrı belirtmişlerdir.

Bir yanlış çözüm alınmıştır.

517 Numaralı Önerilen Problem Üzerine Not: *Mathematics Magazine*, 37, (1964), 517.

517 Numaralı Problem Üzerine Not

517. [Mayıs 1963 ve Ocak 1964]. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Josef Andersson'ın notu, Vaxholm, İsveç.

Alanların bu özelliği bir bakıma parabolü karakterize eder. Gerçekten, $r = f(\phi)$, $X'OX, Y'OY$ ortonormal koordinatlarıyla ilişkili kutupsal koordinatlarda bir K eğrisinin denklemi olsun. K'nın her P noktasında $OQ(r, 0)$'a eşdeğer PP''nü çizersek P' noktası K' eğrisini çizer. A_1, A_2, sırasıyla

$X'OX, OP, K$ ile $K, PP', K', X'OX$ arasındaki alanları göstersin. Şu koşul

$$(1) \qquad \frac{1}{2}r^2 = \frac{dA_1}{d\phi} = \frac{1}{2}\cdot\frac{dA_2}{d\phi} = \frac{1}{2}\cdot\frac{dA_2}{d(r\sin\phi)}\cdot\frac{d(r\sin\phi)}{d\phi} = \frac{1}{2}r\frac{d(r\sin\phi)}{d\phi}$$

şu eşitlikleri verir:

$$\frac{d(r\sin\phi)}{r\sin\phi} + \frac{d\left(\cot\frac{\phi}{2}\right)}{\cot\frac{\phi}{2}} = 0, \qquad 2r\cos^2\frac{\phi}{2} = \text{sabit.}$$

Dolayısıyla K, odağı O ve ekseni $X'OX$ olan bir paraboldür; böylece K' de doğrultmandır. Başlangıçta noktalardan birini tepe noktasında alırsak varsayım ve $1/2$ oranı doğrudan (1)'den çıkar.

529 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 37, (1964), 124.**

Eğrilik Merkezi

529. [Eylül 1963] Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Bir sikloid (kardiyoid), bir doğru üzerinde kaymadan yuvarlanmaktadır. Eğrinin teğet noktasındaki eğrilik merkezinin geometrik yerinin bir çember (elips) olduğunu ispatlayınız.

P. R. Nolan'ın çözümü, Eğitim Bakanlığı, Dublin, İrlanda.

Sikloid. Standart durumu alıp $\omega t = \alpha$ koyarsak

$$x = a(\alpha - \sin\alpha), \qquad y = a(1 - \cos\alpha).$$

Alışılmış yöntemlerle, başlangıç noktasından itibaren yay uzunluğu

$$(i) \qquad S_\alpha = 4a(1 - \cos\alpha/2)$$

ve eğrilik yarıçapı

$$(ii) \qquad P_\alpha = 4a\sin\alpha/2 \cdot$$

Şimdi sikloidin bir kemeri y ekseni boyunca bir kez yuvarlanırsa, teğet noktasındaki eğrilik merkezinin koordinatları (P_α, S_α) olur. Dolayısıyla (i) ve (ii)'den geometrik yeri

$$x^2 + (y - 4a)^2 = (4a)^2$$

olan bir yarım çember elde edilir. Sonraki kemerin y ekseni boyunca geriye yuvarlanarak çemberi tamamladığını düşünmedikçe $x(P)$'nin negatif değerleri kabul edilemez.

Kardiyoid. Kutupsal koordinatlarda

$$r = a(1 - \cos\theta).$$

Önceki gibi şu eşitlikler elde edilir:

(i) $$S_\theta = 4a(1 - \cos\theta/2)$$

ve

(ii) $$P_\theta = (4a/3)\sin\theta/2.$$

Kardiyoid, x ekseninin üst tarafı boyunca bir kez yuvarlanırsa, teğet noktasındaki eğrilik merkezinin koordinatları (S_θ, P_θ) olur. Dolayısıyla (i) ve (ii)'den geometrik yeri

$$(x - 4a)^2 + 9y^2 = (4a)^2$$

olan bir elipsin üst yarısı elde edilir. Aynı kardiyoid eksenin alt tarafı boyunca da yuvarlanmadıkça $y(P)$'nin negatif değerleri kabul edilemez.

Problemi öneren de çözmüştür.

537 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 37, (1964), 277.**

Ortak Alanın Ekstremumları

537. [Ocak 1964]. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Aynı çembere çizilmiş bir eşkenar üçgen ile bir karenin ortak alanının bir ekstremum olması için, birbirlerine göre konumlarını belirleyiniz.

Michael Goldberg'in çözümü, Washington, D. C.

Ekstremumlar, kare ve üçgenin birbirlerine göre simetrik konumlarında elde edilir.

En küçük ortak alan, Şekil 1'deki gibi karenin bir kenarı üçgenin bir kenarına paralel olduğunda elde edilir. Üçgenin dışarı taşan parçaları A, B ile gösterilmiştir. Bu konumdan sonsuz küçük bir dönmede, B alanlarından birindeki artış diğerindeki azalmayla dengelenirken A alanı küçülür.

En büyük ortak alan, Şekil 2'deki gibi karenin bir köşesi üçgenin bir köşesiyle çakıştığında elde edilir. Üçgenin dışarı taşan eş parçaları C ile gösterilmiştir. Sonsuz küçük bir dönmede, bir C'deki artış diğerindeki azalmayla dengelenirken üçüncü köşedeki bir üçgen parçası dışarı taşmaya başlar.

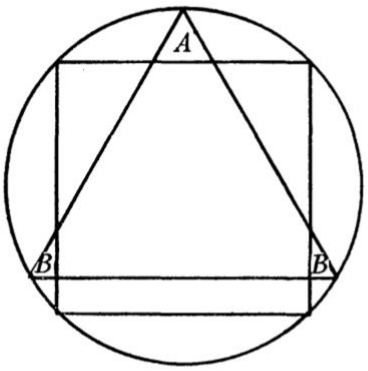
Çemberin yarıçapı birimse alanlar şöyle verilir:

$$A = (2 - \sqrt{2})/2$$
$$2B = \sqrt{3}(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2/2$$
$$2C = (9 - 5\sqrt{3})/4.$$

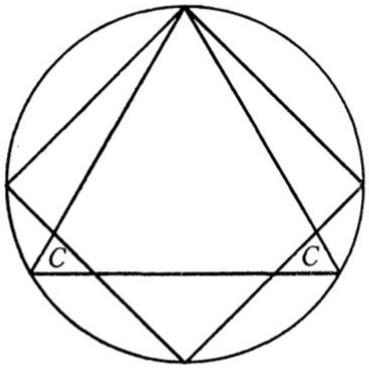
Böylece,

$A + 2B = 0.0933$, en büyük taşan alan, en küçük ortak alan;

$2C = 0.0849$, en küçük taşan alan, en büyük ortak alan.



Şekil 1.



Şekil 2.

544 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 37, (1964), 354.**

Koşullu Bir Alfametik

544. [Mart 1964] Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Aşağıdaki harfli aritmetik bulmacasını (alfametiği)

$$ONE + TWO + SIX = NINE$$

10 tabanında, şu koşullar altında çözünüz:
a) $ONE < TWO < SIX$
b) $2 \mid TWO$, $6 \mid SIX$, $9 \mid NINE$; burada $a \mid b$, "a, b'yi böler" demektir.

Rahibe Mary Joy'un çözümü, Notre Dame College, St. Louis, Missouri.

Her harf farklı bir rakam gösterdiğinden, (a) koşulundan $O < T < S$, $S \geq O + 2$, $T \geq O + 1$; (b) koşulundan ise TWO ve SIX'in ikisinin de çift olduğu kolayca görülür.

Toplamın birler basamağında E olduğuna dikkat ediniz. Dolayısıyla $O + X$, 10 olmalıdır. X, O tek rakamlıdır; hiçbiri sıfır olamaz ve toplam $1E$'den büyük olamaz. Toplamın onlar basamağında N bulunduğundan $W + I = 9$ çıkar. Ayrıca birler sütunundan elde 1 geldiği için $W + I \neq 10$'dur.

Böylece X, O için dört olası sıralı ikili vardır: $(8, 2), (2, 8), (6, 4), (4, 6)$. Şimdi W, I için, önceden kullanılan hiçbir rakamı tekrar etmeyen toplanan çiftleri seçilir. Ardından $S \geq O + 2$ ve $6 \mid SIX$ olacak biçimde olası S değerleri seçilir. Buraya kadar tekrar yoksa $O + T + S = NI$ olacak biçimde T seçilir. Yine rakam tekrarı olmaksızın $9 \mid NINE$ olacak biçimde E belirlenir.

Sonuç olarak çözüm şöyle bulunur:

ONE	217
TWO	392
SIX	408
NINE	1017

Diğer çözenler: Josef Andersson, Vaxholm, İsveç; Merrill Barneby, Kuzey Dakota Üniversitesi; Maxey Brooke, Sweeny, Teksas; J. L. Brown, Jr., Ordnance Research Laboratory, State College, Pennsylvania; David M. Cohen, East Midwood Day School, Brooklyn, New York; Martin J. Cohen, Beverly Hills, Kaliforniya; Michael P. Cozmanoff, Lew Wallace Lisesi, Gary, Indiana; John A. Dossy, Illinois State Üniversitesi, Normal, Illinois; Joseph M. Fine, Massachusetts Teknoloji Enstitüsü; C. E. Franti, Berkeley, Kaliforniya; Philip Fung, Fenn College, Ohio; Harry M. Gehman, SUNY at Buffalo, New York; Murray Geller, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, Kaliforniya; Anton Glasser, Pennsylvania State Üniversitesi, Abington, Pennsylvania; Garold F. Gregory, Orman Hastalıkları Araştırma Laboratuvarı, Delaware, Ohio; C. T. Haskell, California State Polytechnic College, San Luis Obispo, Kaliforniya; Burton S. Holland, Harpur College, New York; William R. Holt, Delaware, Ohio; J. A. H. Hunter, Toronto, Ontario, Kanada; Joseph D. E. Konhauser, HRB-Singer, Inc., State College, Pennsylvania; Janice Langan, Lew Wallace Lisesi, Gary, Indiana; John W. Milsom, Texas A and I, Kingsville, Teksas; Wa Hin Ng, San Francisco, Kaliforniya; C. C. Rice, IBM, Endicott, New York; Perry A. Scheinok, Hahnemann Tıp Koleji, Philadelphia, Pennsylvania; C. W. Trigg, San Diego, Kaliforniya; A. M. Vaidya, Pennsylvania State Üniversitesi; J. S. Vigder, Ottawa, Kanada; Thomas Wojtan, Lew Wallace Lisesi, Gary, Indiana; Dale Woods, Northeast Missouri State Teachers College; Charles Ziegenfus, Madison College, Virginia ve problemi öneren.

563 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 38, (1965), 122.**

Bir Altıgende Açılar

563. [Eylül 1964] Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

A, B', A', B, bir düzgün altıgenin ardışık dört köşesi olsun. M, çevrel çember üzerinde (özellikle $A'B'$ yayı üzerinde) keyfî bir nokta; MA, MB de BB' ile AA''nü sırasıyla E, F noktalarında kesmek üzere aşağıdaki eşitlikleri ispatlayınız:

$$\text{(a)} \quad \sphericalangle MEF = 3\sphericalangle MAF$$
$$\text{(b)} \quad \sphericalangle MFE = 3\sphericalangle MBE.$$

Richard A. Jacobson'ın çözümü, Güney Dakota State Üniversitesi.

$AB' = x$ ve $\angle MAF = a$ olsun. $\angle AB'B = \angle AA'B = \angle AMB = 90°$ olduğuna dikkat ederek $AMB, AB'E, AA'B$ üçgenlerinden $AM = 2x\cos(30+a)$, $BM = 2x\sin(30+a)$, $AE = x/\cos(30-a)$ ve $BF = x/\cos a$ elde ederiz. Böylece EMF üçgeninde

$$\tan(\sphericalangle MEF) = \frac{MF}{ME} = \frac{BM - BF}{AM - AE} = \frac{2x\sin(30+a) - \dfrac{x}{\cos(a)}}{2x\cos(30+a) - \dfrac{x}{\cos(30-a)}}$$

$$= \frac{\dfrac{2\sin(30+a)\cos(a) - 1}{\cos a}}{\dfrac{2\cos(30+a)\cos(30-a) - 1}{\cos(30-a)}}$$

$$= \frac{2\sin(30+2a) - 1}{\cos(a)} \cdot \frac{\cos(30-a)}{2\cos(2a) - 1}$$

$$= \frac{2\sin(30+2a)\cos(30-a) - \cos(30-a)}{2\cos(2a)\cos(a) - \cos(a)}$$

$$= \frac{\sin(60+a) + \sin(3a) - \cos(30-a)}{\cos(3a) + \cos(a) - \cos(a)}$$

$$= \frac{\sin(3a)}{\cos(3a)} = \tan(3a).$$

$a \le 30°$ olduğundan $\angle MEF = 3\angle MAF$ olur. (b) kısmı benzer biçimde yapılır.

Diğer çözenler: Leon Bankoff, Los Angeles, Kaliforniya; J. D. E. Konhauser, HRB-Singer, State College, Pennsylvania; Stanley Rabinowitz, Far Rockaway, New York; Sidney Spital, California State Polytechnic College ve problemi öneren.

572 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 38, (1965), 242.**

Bir Anma Bulmacası

572. [Ocak 1965] Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Başkan Kennedy'nin anısına. Sayın J. F. Kennedy, 22 Kasım 1963'te, yani 11-22-1963 gününde öldürüldü. Aşağıdaki harfli aritmetik bulmacasını

$$JF \cdot (KEN + NEDY) = (11 + 22) \cdot 1963$$

onluk sayı sisteminde çözünüz.

Harry M. Gehman'ın çözümü, SUNY at Buffalo, New York.
$(11 + 22) \cdot 1963$, $3, 11, 13, 151$ asal sayılarının çarpımı olduğundan, JF'nin olası değerleri yalnızca 13 ve 39'dur. İkinci durum bir çelişkiye yol açar; dolayısıyla $J = 1$, $F = 3$ olur. Buradan $KEN + NEDY = 4983$ elde edilir; bu da $N = 4$, $Y = 9$ ve ya $K = 2, E = 7, D = 0$ ya da $K = 7, E = 2, D = 5$ verir. Böylece

$$\begin{aligned}(11 + 22) \cdot 1963 &= 13 \cdot (274 + 4709) \\ &= 13 \cdot (724 + 4259).\end{aligned}$$

Bu problemin iki çözümünün bulunması (bir Cumhuriyetçiye göre), JFK'nin biricik olmadığı anlamına gelir.

Diğer çözenler: Robert H. Anglin, Danville, Virginia; Merrill Barneby, Kuzey Dakota Üniversitesi; Murray Berg, Standard Oil Company, San Francisco, Kaliforniya; Charles R. Berndtson, Deniz Araştırmaları Enstitüsü, Cambridge, Massachusetts; Dermott A. Breault, Sylvania A.R.L., Waltham, Massachusetts; Robert Brodeur, Lachine, Kanada; Maxey Brooke, Sweeny, Teksas; Allan Chuck, San Francisco, Kaliforniya; R. J. Cormier, Northern Illinois Üniversitesi; Monte Dernham, San Francisco, Kaliforniya; Herta T. Freitag, Roanoke, Virginia; Philip Fung, Fenn College, Ohio; Anton Glaser, Pennsylvania State Üniversitesi, Ogonts Kampüsü; Elmer E. Hunt, Jr., Boise Junior College, Boise, Idaho; J. A. H. Hunter, Toronto, Kanada; Joel V. Kamer, Cambridge, Massachusetts; John Koelzer, Iowa Üniversitesi; Wahin Ng, San Francisco, Kaliforniya; C. C. Oursler, Southern Illinois Üniversitesi (Edwardsville); Harry Panish, Pomona, Kaliforniya; Lawrence A. Ringenberg, Eastern Illinois Üniversitesi; Sidney Spital, California State Polytechnic College; P. K. Subramanian, Miami Üniversitesi, Ohio; Charles W. Trigg, San Diego, Kaliforniya; William K. Viertel, State University Agricultural and Technical College, Canton, New York; Dale Woods, Northeast Missouri State Teachers College; Charles Ziegenfus, Madison College, Virginia ve problemi öneren.

587 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 39, (1966), 127.**

Trigonometrik Bir Eşitsizlik

587. [Mayıs 1965] **Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.**

Aşağıdaki eşitsizliği ispatlayınız:

$$\left(\frac{\theta + \sin\theta}{\pi}\right)^2 + \cos^4\frac{1}{2}\theta < 1, \qquad (-\pi < \theta < +\pi).$$

Samuel Wolf'un çözümü, Linthicum Heights, Maryland.

$$\left(\frac{\theta + \sin\theta}{\pi}\right)^2 + \cos^4\frac{\theta}{2} = \left(\frac{\theta + \sin\theta}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos\theta}{2}\right)^2 = F$$

Türev alıp sıfıra eşitleyerek:

$$\frac{2}{\pi^2}(\theta + \sin\theta)(1 + \cos\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos\theta)(\sin\theta)$$

$$\frac{4}{\pi^2}(\theta + \sin\theta) = \sin\theta \qquad [\cos\theta \neq -1]$$

$$\frac{4}{\pi^2}\theta + \sin\theta\left(\frac{4}{\pi^2} - 1\right) = 0. \qquad \theta = 0 \text{ bir çözümdür.}$$

$$\frac{\sin\theta}{\theta} = \frac{4}{\pi^2 - 4} = \frac{4}{9.8696 - 4} = \frac{4}{5.8696}$$

$$\frac{\sin\theta}{\theta} = .6815$$

$\theta = \pm 1.46$ (Jahnke ve Emde, ek, s. 33)

$$F_0 = 1; \qquad F_{\pm 1.46} = \left(\frac{1.46 + .99}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{1 + .11}{2}\right)^2 = .92.$$

İkinci türev alınırsa:

$$G = \frac{2}{\pi^2}[(1 + \cos\theta)^2 + (\theta + \sin\theta)(-\sin\theta)] - \frac{1}{2}[-\sin^2\theta + (1 + \cos\theta)\cos\theta].$$

$\theta = 0$ için $G < 0$; dolayısıyla $\theta = 0$ bir maksimumdur.
$\theta = \pm 1.46$ için $G > 0$ ve $\theta = \pm 1.46$ noktaları minimumdur.
Böylece $F \leq 1$ olur.

(Not: "=" işareti gereklidir.)

Diğer çözenler: Murray S. Klamkin, Ford Bilimsel Laboratuvarı, Dearborn, Michigan; C. B. A. Peck, State College, Pennsylvania; Simeon Reich, Hayfa, İsrail; Sidney Spital, California State Polytechnic College; K. L. Yocom, Güney Dakota State Üniversitesi ve problemi öneren.

Raymond E. Whitney, Lock Haven State College, Pennsylvania, eşitsizlikle birlikte eşitlik işaretinin de bulunması gerektiğini belirtmiştir.

587 Numaralı Önerilen Problem Üzerine Not:
***Mathematics Magazine*, 39, (1966), 188.**

587 Numaralı Problem Üzerine Not

587. [Mayıs 1965 ve Ocak 1966] Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Aşağıdaki eşitsizliği ispatlayınız:

$$\left(\frac{\theta + \sin\theta}{\pi}\right)^2 + \cos^4\frac{1}{2}\theta < 1, \qquad (-\pi < \theta < +\pi).$$

Problemi önerenin notu.
Verilen eşitsizlik şuna denktir:

$$\left(\frac{\theta + \sin\theta}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos\theta}{2}\right)^2 < 1.$$

Şimdi aşağıdaki sikloidi

$$x = \theta + \sin\theta$$
$$y = 1 + \cos\theta$$

ve elipsi ele alalım:

$$\frac{x^2}{\pi} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

Başlangıç noktaları ortak, çapları eşittir. İki eğrinin üç tepe noktasında ortak noktaları vardır. Bu noktaların komşuluklarında sikloidin elipsin içinde kaldığını ispatlayabiliriz. İkisinin de içbükeyliği aynı yönde olduğundan, sikloid bu üç nokta dışında bütünüyle elipsin içinde kalır. Yukarıdaki eşitsizlik, az önce belirtilen özelliğin analitik ifadesidir.

599 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 39, (1966), 134.**

Doğrusal Bağımlı Vektörler

599. [Eylül 1965] Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

a, b, c, üç boyutlu uzayda herhangi üç vektörse,

$$a\times(b\times c),\ b\times(c\times a),\ c\times(a\times b)$$

vektörlerinin doğrusal bağımlı olduğunu gösteriniz.

Carl G. Wagner'ın çözümü, Duke Üniversitesi.

Vektör analizinin iyi bilinen bir teoremine göre (vektörel çarpım aksiyomlarına dayanan bir ispat için bkz. Nickerson, Steenrod ve Spencer, *Advanced Calculus*, s. 90):

$$A \times (B \times C) = (A\cdot C)B - (A\cdot B)C.$$

Diğer vektörel çarpımları da yazarsak,

$$B \times (C \times A) = (B\cdot A)C - (B\cdot C)A = (A\cdot B)C - (B\cdot C)A$$
$$C \times (A \times B) = (C\cdot B)A - (C\cdot A)B = (B\cdot C)A - (A\cdot C)B.$$

Böylece,

$$A \times (B \times C) + B \times (C \times A) + C \times (A \times B) = 0$$

(Bu, Jacobi özdeşliği olarak bilinir.)

Diğer çözenler: Joseph B. Bohac, St. Louis, Missouri; Dermott A. Breault, Sylvania Uygulamalı Araştırma Laboratuvarı, Waltham, Massachusetts; Dewey C. Duncan, Los Angeles, Kaliforniya; Philip Fung, Cleveland State Üniversitesi, Ohio; Bayan A. C. Garstang, Boulder, Colorado; Carl Harris, Western Electric Company, Princeton, New Jersey; Stephen Hoffman, Trinity College, Connecticut; John E. Homer, Jr., St. Procopius College, Illinois; Murray S. Klamkin, Ford Bilimsel Laboratuvarı, Dearborn, Michigan; John Kieffer, Missouri Üniversitesi, Rolla; E. S. Langford, ABD Deniz Kuvvetleri Lisansüstü Okulu; Lieselotte Miller, Georgia Teknoloji Enstitüsü; Stanley Rabinowitz, Far Rockaway, New York; Kenneth A. Ribet, Brown Üniversitesi; Richard Riggs, Jersey City State College; Howard L. Walton, Yorktown Lisesi, Arlington, Virginia; K. L. Yocum, Güney Dakota State Üniversitesi ve problemi öneren.

600 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 39, (1966), 189.**

Birbiriyle İlişkili Üçgenler

600. [Kasım 1965] Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

ABC üçgeninin alanı S, içteğet ve dışteğet çemberlerinin değme noktalarının oluşturduğu üçgenlerin alanları T, T_a, T_b, T_c ise, aşağıdaki eşitlikleri gösteriniz:

(1) $$T_a + T_b + T_c - T = 2S$$

(2) $$T_a^{-1} + T_b^{-1} + T_c^{-1} - T^{-1} = 0.$$

Problemi önerenin çözümü.

I, ABC'nin içteğet çemberinin merkezi; DEF, içteğet çemberinin değme noktaları üçgeni; R, r ise sırasıyla çevrel ve içteğet çemberlerinin yarıçapları olsun. O zaman

$$\begin{aligned} IEF/S &= \tfrac{1}{2}r^2 \sin(\pi - A)/(\tfrac{1}{2}bc \sin A) \\ &= r^2/bc = ar^2/abc = ar^2/4RS \end{aligned}$$

yani

$$IEF = ar^2/4R$$

ve benzer biçimde

$$IFD = br^2/4R$$
$$IDE = cr^2/4R.$$

Böylece

$$T = IEF + IFD + IDE = (a + b + c)r^2/4R = 2ur \cdot r/4R = S/2R$$

ve benzer biçimde

$$T_a = Sr_a/2R, \qquad T_b = Sr_b/2R, \qquad T_c = Sr_c/2R.$$

olur. O hâlde

(1) $$\begin{aligned} T_a + T_b + T_c - T &= S(r_a + r_b + r_c)/2R - Sr/2R \\ &= S(4R + r - r)/2R = 2S \end{aligned}$$

(2) $$T_a^{-1} + T_b^{-1} + T_c^{-1} - T^{-1} = 2R(1/r_a + 1/r_b + 1/r_c - 1/r)/S = 0.$$

P. N. Bajaj, Western Reserve Üniversitesi; Stanley Rabinowitz, Far Rockaway, New York ve G. L. N. Rao, J. C. College, Jamshedpur, Hindistan da çözmüşlerdir.

609 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 39, (1966), 248.**

Harfli Aritmetikte Eşdeğerlik

609. [Ocak 1966] Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Aşağıdaki harfli aritmetik bulmacasını onluk sayı sisteminde çözünüz:

$$4 \cdot NINE = 9 \cdot FOUR$$

J. D. E. Konhauser'ın çözümü, Minnesota Üniversitesi.

$4 \cdot E$ ve $9 \cdot R$ çarpımlarının birler basamakları aynı olmalıdır. Dolayısıyla

olası (E, R) ikilileri yalnızca $(1,6), (3,8), (5,0), (7,2), (9,4)$'tür. 4 ve 9 aralarında asal olduğundan 9, $2N + I + E$'yi bölmelidir.

$(1,6)$ durumu: $E = 1$ ise 9, $2N + I + 1$'i bölmelidir; buradan şu (N, I) ikilileri elde edilir: $(4,0), (3,2), (7,3), (2,4), (5,7), (9,8), (4,9)$. Karşılık gelen $FOUR$ değerleri $1796, 1436, 3276, 1076, 2556, 4396, 2196$'dır. $E = 1$ olduğundan ilk ikisi, dördüncüsü ve sonuncusu elenmelidir. Üçüncüsü $N = 7$ olduğundan, beşincisi 5 tekrar ettiğinden, altıncısı ise $N = 9$ olduğundan elenir.

Diğer durumlara benzer bir inceleme uygulanarak aşağıdaki çözümler elde edilir:

$(3,8)$ durumu: $4 \cdot 4743 = 9 \cdot 2108$.
$(5,0)$ durumu: $4 \cdot 6165 = 9 \cdot 2740$.
$(7,2)$ durumu: $4 \cdot 6867 = 9 \cdot 3052$.
$(9,4)$ durumu: $4 \cdot 5859 = 9 \cdot 2604$.

Diğer çözenler: Monte Dernham, San Francisco, Kaliforniya; Samuel P. Hoyle, Jr., Virginia Üniversitesi; Sidney Kravitz, Dover, New Jersey; C. C. Oursler, Southern Illinois Üniversitesi (Edwardsville); Richard Riggs, Jersey City State College, New Jersey; Jerome J. Schneider, Chicago, Illinois ve Charles W. Trigg, San Diego, Kaliforniya.

Kısmi çözüm gönderenler: Merrill Barneby, Wisconsin State Üniversitesi (La Crosse); Charles R. Berndtson, Massachusetts Teknoloji Enstitüsü; Lindley J. Burton, Lake Forest College, Illinois; Anton Glaser, Pennsylvania State Üniversitesi (Ogonts); J. A. H. Hunter, Toronto, Kanada; Beatriz Margolis, Maryland Üniversitesi; John W. Milsom, Slippery Rock State College, Pennsylvania; William L. Mrozek, Wyandotte, Michigan; Sam Newman, Atlantic City, New Jersey; C. R. J. Singleton, Petersham, Surrey, İngiltere; Lowell Van Tassel, San Diego City College; Gary B. Weiss, New York Üniversitesi Tıp Fakültesi; Donald R. Wilder, Rochester, New York; Dale Woods, Missouri State Teachers College ve problemi öneren.

628 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
Mathematics Magazine, 40, (1967), 102.

Pisagor Alfametiği

628. [Eylül 1966] Önerenler: B. Suer ve Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Aşağıdaki alfametiği

$$COS^2 + SIN^2 = UNO^2$$

onluk sayı sisteminde çözünüz.

J. A. H. Hunter'ın çözümü, Toronto, Ontario, Kanada.

$S^2+N^2 \equiv O^2 \pmod{10}$ ve açıkça $S \neq 0$'dır. $N = 0, 1, \ldots, 9$ için, kare sayıların son basamaklarını göz önünde tutarak her N'ye ait olası S ve karşılık gelen O değerlerini tabloya yazarız.

$U > S$ olduğundan, bunun mümkün olabilmesi için gereken koşulları göz önünde tutarak, her olası UNO değerinin iki karenin toplamı olarak gösterimlerini (varsa) araştırırız. İki karenin toplamı olarak gösterim mümkün olduğunda, karşılık gelen SIN ve COS değerlerini şu iyi bilinen çözümden belirleyebiliriz:

$$(x^2 + y^2)^2k^2 = (x^2 - y^2)^2k^2 + (2xy)^2k^2.$$

Hesaplar biraz zahmetlidir, fakat aşırı ölçüde değil. Tek çözümün aşağıdaki olduğu bulunur:

$$391^2 + 120^2 = 409^2.$$

Diğer çözenler: R. H. Anglin, Danville, Virginia; Merrill Barnebey, Wisconsin State Üniversitesi, LaCrosse; Sarah Brooks, Utica Free Academy, New York; Jack Dix, Rutgers Üniversitesi; Charles R. Fleenor, Ball State Üniversitesi, Indiana; Michael Goldberg, Washington, D. C.; Jerome J. Schneider, Chicago, Illinois; Charles W. Trigg, San Diego, Kaliforniya ve problemi önerenler.

639 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 40, (1967), 166.**

Dışbükey Dörtgen İçin Bir Eşitsizlik

639. [Kasım 1966] Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

$ABCD$ bir dışbükey dörtgen; P ise AC ve BD köşegenlerinin kesişimi olsun. P'nin $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ kenarlarına uzaklıkları sırasıyla x, y, z, t olsun. Aşağıdaki eşitsizliği ispatlayınız:

$$x + y + z + t < \tfrac{3}{4}(a + b + c + d).$$

Leon Bankoff'un çözümü, Los Angeles, Kaliforniya.

AC, BD köşegenleri arasındaki açıların açıortayları AB, BC, CD, DA'yı R, S, T, U'da kessin. Erdős–Mordell teoreminin bir sonucu gereğince,

$$\begin{aligned} 2(PS + PT) &< PB + PC + PD \\ 2(PT + PU) &< PC + PD + PA \\ 2(PU + PR) &< PD + PA + PB \\ 2(PR + PS) &< PA + PB + PC \end{aligned}$$

yani $4(PR + PS + PT + PU) < 3(PA + PB + PC + PD)$ olur.

Bu eşitsizlik önerilenden daha güçlüdür; çünkü

$$x + y + z + t \leqq PR + PS + PT + PU$$

ve $PA + PB + PC + PD < a + b + c + d$'dir.

Diğer çözenler: Leon Bankoff, Los Angeles, Kaliforniya (ikinci çözüm); Murray S. Klamkin, Ford Bilimsel Laboratuvarı, Dearborn, Michigan; C. B. A. Peck, Ordnance Research Laboratory, State College, Pennsylvania; Stanley Rubinowitz, Far Rockaway, New York ve problemi öneren.

649 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 40, (1967), 279.**

Bir Alfametik

649. [Mart 1967] Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Aşağıdaki harfli aritmetik bulmacasını

$$\begin{array}{r} THREE \\ +\ \ FOUR \\ \hline SEVEN \end{array}$$

onluk sayı sisteminde, şu koşullarla çözünüz:

3, içinde 3 rakamı bulunmayan *THREE* sayısını bölmez;
4, içinde 4 rakamı bulunmayan *FOUR* sayısını bölmez;
7, içinde 7 rakamı bulunmayan *SEVEN* sayısını bölmez.

Harry M. Gehman'ın çözümü, SUNY at Buffalo, New York.

Önce bulmacayı yalnızca şu koşullarla çözelim:
(a) *THREE* içinde 3 rakamı yoktur;
(b) *FOUR* içinde 4 rakamı yoktur;
(c) *SEVEN* içinde 7 rakamı yoktur.
Problemin yedi çözümü vardır:

(1)	16544 7805 24349	(2)	47266 9102 56368
(3)	75244 9102 84346	(4)	79244 5102 84346
(5)	17544 6805 24349	(6)	49266 7102 56368
(7)	24811 6708 31519		

3'ün *THREE*'yi bölmemesi koşulu (d), (5) ve (6) çözümlerini eler. 4'ün *FOUR*'u bölmemesi koşulu (e), (7)'yi eler. 7'nin *SEVEN*'ı bölmemesi koşulu (f) ise hiçbir çözümü elemez.

Dolayısıyla önerildiği biçimiyle problemin dört çözümü vardır: (1)–(4).
(d), (e), (f) koşullarını kaldırıp (a), (b), (c)'yi korur ve belirtilen ek koşulu getirirsek aşağıdaki tek çözümleri elde ederiz:

(g) *THREE*, 8 rakamını içerir. Çözüm (7).
(h) *SEVEN*, 1 rakamını içerir. Çözüm (7).
(i) *FOUR*, hem 5 hem 6 rakamını içerir. Çözüm (5).
(j) *THREE*, ne 6 ne 7 içerir. Çözüm (7).
(k) *THREE*, hem 6 hem 7 içerir. Çözüm (2).
(l) *THREE*, hem 1 hem 2 içerir. Çözüm (7).
(m) *THREE*, $5, 6, 7$ rakamlarının hiçbirini içermez. Çözüm (7).
(n) *THREE*, $5, 7, 9$ rakamlarının hiçbirini içermez. Çözüm (7).

ve benzerleri.
(7) çözümünün bu listede bu kadar sık görülmesi, rakam örüntüsünün diğer altı çözümden esaslı biçimde farklı olduğuna işaret ediyor. Bunun numeroloji açısından derin bir anlamı olduğundan eminim.

680 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
Mathematics Magazine, 41, (1968), 219.

Çember Olan Bir Geometrik Yer

680. [Ocak 1968] Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

E bir elips; t', t'' ise ona çizilmiş, değişken iki paralel teğet olsun. t', t'''ye teğet olan ve E'ye dıştan teğet bir C çemberi ele alalım. C'nin merkezinin geometrik yerinin bir çember olduğunu gösteriniz.

Problemi önerenin çözümü.
Elips aşağıdaki denklemle verilmiş olsun:

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1 \tag{1}$$

(C)'nin merkezini (α, β), yarıçapını r ile gösterirsek, $r = (0, t')$'nden

$$r^2 = (a^2\beta^2 + b^2\alpha^2)/(\alpha^2 + \beta^2); \tag{2}$$

elde edilir. r ayrıca

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2 \tag{3}$$

ile verilir; burada (E)'nin $T(x, y)$ noktasındaki normali C merkezinden geçer.
CT, $C(\alpha, \beta)$'nın (E)'ye uzaklığının bir ekstremumudur. Bunu belirlemek için Lagrange çarpanları yöntemini kullanalım. Şöyle alalım:

$$F(x, y) = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + \lambda\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\right)$$

burada λ, aşağıdaki denklemlerle

$$\begin{aligned} 1/2F_x &= x - \alpha + \lambda x/a^2 = 0, \\ 1/2F_y &= y - \beta + \lambda y/b^2 = 0 \end{aligned} \tag{4}$$

ve (1) ile belirlenir. x, y, α, β'yı yok edince λ için dördüncü dereceden bir denklem elde edilir. Bu yüzden başka bir yol izleyelim. Önermenin doğru olduğunu varsayarsak

$$OC^2 = \alpha^2 + \beta^2 = (a + b)^2 \tag{5}$$

elde edilir. (4)'ten α, β'yı çözüp (5)'te yerine koyar ve sonucu (1) ile karşılaştırırsak $\lambda = ab$ buluruz.

$\lambda = ab$ seçildiğinde (1), (2), (3) denklemlerinin tutarlı olduğunu görürüz. Bu tutarlılık $\alpha^2 + \beta^2 = (a + b)^2$ verir; böylece $C(\alpha, \beta)$'nın geometrik yerinin çember olduğu ispatlanır.

Michael James Smithson, Bellevue, Washington da çözmüştür.

680 Numaralı Önerilen Problem Üzerine Not:
***Mathematics Magazine*, 42, (1969), 162.**

680 Numaralı Problem Üzerine Not

680. [Ocak ve Eylül 1968] Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

E bir elips; t', t'' ise ona çizilmiş, değişken iki paralel teğet olsun. t', t''''ye teğet olan ve E'ye dıştan teğet bir C çemberi ele alalım. C'nin merkezinin geometrik yerinin bir çember olduğunu gösteriniz.

A. W. Walker'ın notu, Toronto, Kanada.

Bir elipsin birçok ilginç özelliği, elipsle eş merkezli ve yarıçapları $a \pm b$ olan, Chasles çemberleri denen çemberlerle ilişkilidir. Değişken C çemberinin merkezi içe yönelen normal üzerinde bulunursa geometrik yeri iç Chasles çemberidir. 680 numaralı problemdeki sonuç Mannheim tarafından *Nouvelles Annales de Math.*, 4, 3, (1903), 483'te elde edilmiştir ve şu eski Japon teoremine denktir (Iwata, 1862):

Bir elips, iç bölgeleri örtüşmeyen iki eş sabit çembere dıştan ve bunların paralel ortak teğetlerine teğetse, büyük ve küçük eksenlerinin toplamı çemberlerin merkezleri arasındaki uzaklığa eşittir.

Bkz. *Tohoku Math. J.*, (1), 11, (1917), 65; burada oldukça belirsiz bir gerekçeyle teoremin yanlış olduğu ileri sürülmektedir!

724 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 42, (1969), 274.**

Üçgen Olasılığı

724. [Mart 1969] Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Bir ABC üçgeninin $(a \geq b \geq c)$ içinden rastgele seçilen P noktasının, ABC'nin kenarlarına uzaklıklarının bir üçgenin kenar uzunluklarını oluşturma olasılığını bulunuz.

L. Carlitz'in çözümü, Duke Üniversitesi.

İç açıortaylar BC, CA, AB kenarlarını sırasıyla L, M, N'de kessin. P'nin BC, CA, AB kenarlarına uzaklıklarını x, y, z ile gösterelim. $x = y + z$ denklemi bir doğruyu, yani MN'yi gösterir. Benzer biçimde $y = z + x$, NL'yi; $z = x + y$, LM'yi gösterir. İçteğet çemberinin merkezi I, LMN üçgeninin içindedir; dolayısıyla süreklilik gereği P noktası LMN'nin içiyle sınırlı kalmalıdır. Böylece istenen olasılık

$$p = \frac{LMN \text{ alanı}}{ABC \text{ alanı}} = \frac{\Delta_0}{\Delta}.$$

Şimdi

$$CL = \frac{ab}{b+c}, \qquad CM = \frac{ab}{a+c},$$

olduğundan

$$\text{alan } CLM = \frac{1}{2}\,\frac{a^2b^2 \sin \gamma}{(a+c)(b+c)} = \frac{ab\Delta}{(a+c)(b+c)}.$$

Simetriden

$$\text{alan } AMN = \frac{bc\Delta}{(b+a)(c+a)}, \qquad \text{alan } BLN = \frac{ac\Delta}{(a+b)(c+b)}.$$

Böylece

$$\begin{aligned}\Delta_0 = {}^{\text{alan}}\ LMN &= \Delta - \sum \frac{bc\Delta}{(b+a)(c+a)} \\ &= \Delta\left\{1 - \frac{\sum bc(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)}\right\} \\ &= \Delta\,\frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}\end{aligned}$$

ve dolayısıyla

$$p = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)}.$$

$a+b \geq 2\sqrt{ab}$ olduğundan

$$p \leqq \tfrac{1}{4}$$

olur; eşitlik yalnızca $a = b = c$ iken sağlanır.

Michael Goldberg, Washington, D. C.; C. B. A. Peck, Ordnance Research Laboratory, State College, Pennsylvania; F. G. Schmitt, Jr., Berkeley, Kaliforniya (kısmen); Paul J. Zwier, Palo Alto, Kaliforniya ve problemi öneren de çözmüşlerdir.

738 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü: *Mathematics Magazine*, 43, (1970), 109.

738. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Düz ve paralel kıyıları olan bir nehirde A bir kıyıda, B diğer kıyıda ve $AB = 72$ mildir. Bir feribot doğrusal AB yolunu A'dan B'ye dört saatte, B'den A'ya dokuz saatte almaktadır. Feribotun durgun sudaki sürati $v = 13$ mil/saat ise akıntının hızı nedir?

$$13 \text{ mil/saat} + s \geq 18 \text{ mil/saat, dolayısıyla}$$
$$s \geq 5 \text{ mil/saat}$$

B'den A'ya dönüşte vektörel toplamın mümkün olan en büyük büyüklüğü 13 mil/saat$-s$'dir. Böylece,

$$13 \text{ mil/saat} - s \geq 8 \text{ mil/saat}$$
$$s \leq 5 \text{ mil/saat.}$$

$s \geq 5$ mil/saat ve $s \leq 5$ mil/saat olduğundan $s = 5$ mil/saattir.
Başka bir yöntem, nehrin genişliğini m mil alıp herhangi bir m için s'yi bulmaktır. Bu yöntemle m de bulunabilir. Bunun için şu denklem çözülür:

$$13\sqrt{5184 - m^2} = 4\sqrt{13689 - m^2} + 9\sqrt{2704 - m^2}.$$

Tek çözüm $m = 0$ mil/saattir. m'nin bu değeri için $s = 5$ mil/saat bulunur.

Diğer çözenler: Richard L. Breisch, Colorado Üniversitesi; Bruce A. Broemser, El Sobrante, Kaliforniya; Raphael T. Coffman, Richland, Washington; George F. Corliss, Michigan State Üniversitesi; Mickey Dargitz, Ferris State College, Michigan; Gerald C. Dodds, HRB-Singer, Inc., State College, Pennsylvania; Frank Eccles, Phillips Academy, Massachusetts; W. W. Funkenbusch, Michigan Teknoloji Üniversitesi; Michael Goldberg, Washington, D. C.; John M. Howell, Littlerock, Kaliforniya; Alfred Kohler, Long Island Üniversitesi, New York; Lew Kowarski, Morgan State College, Maryland; J. R. Kuttler, Johns Hopkins Üniversitesi; Joseph O'Rourke, St. Joseph's College, Pennsylvania; C. D. O'Shaughnessy, Saskatchewan Üniversitesi; John E. Prussing, Illinois Üniversitesi; John R. Ray, Clemson Üniversitesi; Simeon Reich, İsrail Teknoloji Enstitüsü, Hayfa, İsrail; Ray B. Robinson, Butler, Tennessee; Steve Rohde, Lehigh Üniversitesi; E. F. Schmeichel, College of Wooster, Ohio; W. A. Schmidt, Texas A and M Üniversitesi; E. P. Starke, Plainfield, New Jersey; Charles W. Trigg, San Diego, Kaliforniya; A. W. Walker, Toronto, Kanada; Sam Zaslavsky, City University of New York ve problemi öneren.

743 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 43, (1970), 169.**

Dörtyüzlüde Bir Eşitsizlik

743. [Kasım 1969] Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

P, düzgün $T \equiv A_1A_2A_3A_4$ dörtyüzlüsünün bir iç noktası; $p_i = PA_i$ ve x_{ij}, P'nin A_iA_j ayrıtına uzaklığı olsun. Aşağıdaki eşitsizliği ispatlayınız:

$$\sum_{i=1}^{4} p_i \geqq 2\sqrt{3}/3 \sum_{i<j} x_{ij},$$

Eşitlik ancak ve ancak P, T'nin merkezi O'da olduğunda sağlanır.

Michael Goldberg'in çözümü, Washington, D. C.

Uzunluğu sabit bir taban ve diğer iki kenarın uzunlukları toplamı verildiğinde, yüksekliği en büyük üçgen, ikizkenar üçgendir. Benzer biçimde, aynı taban ve üç başka uzunluğun toplamı verilsin; bu üç kenarın ikili eşleşmeleri kullanılarak üç üçgen oluşturulsun. Yükseklikler toplamı, üçgenler eş ikizkenar üçgenler olduğunda en büyüktür. Bu, n üçgene genellenebilir. Dolayısıyla, düzgün bir dörtyüzlüde P'nin ayrıtlara uzaklıkları toplamının köşelere uzaklıkları toplamına oranı, P dörtyüzlünün merkezindeyken en büyüktür.

Dörtyüzlünün ayrıt uzunluğu e ise karşıt ayrıtlar arasındaki h uzaklığı

$$h^2 + (e/2)^2 + (e/2)^2 = e^2, \text{ yani } h = e/\sqrt{2} \text{ ile verilir.}$$

Merkezden bir köşeye olan R uzaklığı

$$R^2 = (e/2)^2 + (h/2)^2 = e^2/4 + e^2/8, \text{ yani } R = \sqrt{3}e/(2\sqrt{2}).$$

Dolayısıyla P merkezdeyken toplamların oranı

$$4R/3h = (2e\sqrt{3}/\sqrt{2})/(3e/\sqrt{2}) = 2\sqrt{3}/3.$$

Düzgün çokyüzlülerin ve düzgün çokgenlerin her biri için benzer bir ekstremum elde edilir. Elbette iki toplamın oranı, ele alınan şekle bağlıdır.

Problemi öneren de çözmüştür. Bir yanlış çözüm alınmıştır.

743 Numaralı Önerilen Problem Üzerine Not:
***Mathematics Magazine*, 44, (1971), 44.**

743 Numaralı Problem Üzerine Not

743. [Kasım 1969 ve Mayıs 1970] Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

P, düzgün $T \equiv A_1A_2A_3A_4$ dörtyüzlüsünün bir iç noktası; $p_i = PA_i$ ve x_{ij}, P'nin A_iA_j ayrıtına uzaklığı olsun. Aşağıdaki eşitsizliği ispatlayınız:

$$\sum_{i=1}^{4} p_i \geqq 2\sqrt{3}/3 \sum_{i<j} x_{ij},$$

Eşitlik ancak ve ancak P, T'nin merkezi O'da olduğunda sağlanır.

E. F. Schmeichel'ın notu, College of Wooster, Ohio.

Eşitsizlik şöyle olmalıdır:

$$\sum_{i=1}^{4} p_i \geqq \frac{2\sqrt{2}}{3} \sum_{i<j} x_{ij}.$$

Görünüşe göre yukarıdaki $\sqrt{2}$ yerine yanlışlıkla $\sqrt{3}$ basılmıştır. Basılan eşitsizliğin yanlış olduğunu göstermek için ayrıt uzunluğu 1 olan düzgün bir dörtyüzlü alalım. P, A_1A_2 ayrıtının orta noktası olsun. O zaman $p_1 = p_2 = 1/2$, $p_3 = p_4 = \sqrt{3}/2$, $x_{12} = 0$, $x_{13} = x_{14} = x_{23} = x_{24} = \sqrt{3}/4$ ve $x_{34} = \sqrt{2}/2$ olur.

Böylece

$$\sum_i p_i = 1 + \sqrt{3} < 2.8 \quad \text{ve} \quad \sum_{i<j} x_{ij} = \sqrt{3} + \sqrt{2}/2$$

$\sqrt{6} > 2.4$ olduğundan

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \sum_{i<j} x_{ij} = 2 + \sqrt{6}/3 > 2.8$$

elde edilir; dolayısıyla söz konusu nokta için

$$\sum_i p_i < \frac{2\sqrt{3}}{3} \sum_{i<j} x_{ij}.$$

Söz konusu uzaklıkların sürekliliği nedeniyle, bu eşitsizlik dörtyüzlünün P'ye yeterince yakın iç noktaları için de geçerli kalır.

756 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
Mathematics Magazine, 43, (1970), 283.

Merkezî Simetrik Eğriler

756. [Mart 1970] Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Çemberler dışında, merkezden çıkan birbirine dik iki yarıçap vektörünün uzunluklarının çarpımı sabit olacak biçimde, kapalı ve merkezî simetrik C eğrilerini belirleyiniz.

Harry W. Hickey'nin çözümü, Arlington, Virginia.

Problemin genelleştirilmiş biçimini ele alalım: "N herhangi bir pozitif çift tamsayı olmak üzere, merkezden çıkan ve aralarındaki açı π/N olan iki yarıçap vektörünün uzunlukları çarpımı sabit kalacak biçimde, çemberlerden başka kapalı ve merkezî simetrik C eğrilerini belirleyiniz." Merkeze O, sabit çarpıma R^2 diyelim. Merkezi O, yarıçapı R olan K çemberini çizelim. C'nin çemberin içindeki her noktasına karşılık, dışında öyle bir nokta vardır ki bu iki noktanın O'ya uzaklıkları çarpımı R^2'dir. Dolayısıyla C, K'yı bir A noktasında ve $\angle AOB = \pi/N$ olan bir B noktasında daha keser. A'dan B'ye, O'dan geçmeyen ve O'dan geçen hiçbir doğruyu birden fazla kesmeyen bir yay çizelim; bu kısıtlamalar dışında yayın biçimi keyfîdir. Yayın kutupsal denklemi $\rho = f(\theta)$ olsun. Yayın biçimine getirdiğimiz kısıtlamalar, f'nin çarpmaya göre tersinin daima sonlu ve f'nin tek değerli olmasını sağlar; çok değerli bir f, yarıçap vektörünün uzunluğunu belirsiz kılar. Şimdilik f, θ'nın uzunluğu π/N olan bir aralıktaki değerleri için tanımlıdır. Bunu diğer θ değerlerine şöyle genişletebiliriz:

$$\text{Her } \theta \text{ için } f(\theta + \pi/N) = R^2/f(\theta),$$

ve artık C eğrisi tanımlanmıştır! f artık $2\pi/N$ periyotlu olduğundan ve N çift olduğundan $f(\theta + \pi) = f(\theta)$ olur; bu da C'yi merkezî simetrik kılar (simetri koşulu kaldırılırsa N tek de olabilir).

Diğer çözenler: Michael Goldberg, Washington, D. C.; Murray S. Klamkin, Ford Bilimsel Laboratuvarı, Dearborn, Michigan; Lew Kowarski, Morgan State College, Maryland; John Oman, Wisconsin State Üniversitesi, Oshkosh; E. F. Schmeichel, College of Wooster, Ohio ve problemi öneren.

763 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 44, (1971), 108.**

Zeta Benzeri Fonksiyonlar

763. [Mayıs 1970] **Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.**

İspatlayınız:

$$\left(1+\frac{1}{3^{10}}+\frac{1}{5^{10}}+\cdots\right)=\left(1+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}\cdots\right)\left(1-\frac{1}{2^6}+\frac{1}{3^6}-\frac{1}{4^6}+\cdots\right).$$

M. G. Greening'in çözümü, New South Wales Üniversitesi, Avustralya.

$\zeta(s)=\sum_{s=1}^{\infty} n^{-s}$, $|s|>1$ için yakınsaktır.

$$1+3^{-4}+5^{-4}+\cdots=\zeta(4)-\frac{1}{2^4}\zeta(4)=15\zeta(4)/2^4$$

$$1-2^{-6}+3^{-6}-4^{-6}+\cdots=\zeta(6)-2\left(\frac{1}{2^6}\zeta(6)\right)=(1-2^{-5})\zeta(6)$$

$$1+3^{-10}+5^{-10}+\cdots=\zeta(10)-\frac{1}{2^{10}}\zeta(10)=(1-2^{-5})\frac{33}{22}\zeta(10).$$

B_n, n'inci Bernoulli sayısı olmak üzere $\zeta(2n)=2^{2n-1}B_n\pi^{2n}/(2n)!$ ve $B_2=1/30$, $B_3=1/42$, $B_5=5/66$ olduğundan, sadeleştirmeden sonra sonuç elde edilir.

Diğer çözenler: Bernard August, Glassboro State College, New Jersey; Miguel Bamberger, Monterey, Kaliforniya; Walter Blumberg, New Hyde Park, New York; Wray G. Brady, Slippery Rock State College, Pennsylvania; Richard L. Breisch, Pennsylvania State Üniversitesi; Donald R. Childs, Denizaltı Silahları Araştırma ve Mühendislik İstasyonu, Rhode Island; Gerald C. Dodds, HRB-Singer, Inc., State College, Pennsylvania; D. Dummit, San Mateo Lisesi, Kaliforniya; Louise Grinstein, New York, New York; Jeffrey Hoffstein, Bronx Fen Lisesi, New York; Robert F. Jackson, Toledo Üniversitesi, Ohio; Shiv Kumar, Panjabi Üniversitesi ve Bayan Nirmal, Devlet Kız Lisesi, Panipat, Hindistan (birlikte); J. R. Kuttler, Johns Hopkins Uygulamalı Fizik Laboratuvarı, Maryland; Herbert R. Leifer, Pittsburgh, Pennsylvania; Michael J. Martino, IBM, Poughkeepsie, New York; Kenneth Rosen, Michigan Üniversitesi; L. E. Schaefer, General Motors Enstitüsü, Flint, Michigan; E. F. Schmeichel, College of Wooster, Ohio; E. P. Starke, Plainfield, New Jersey; Paul D. Thomas, Deniz Araştırmaları Laboratuvarı, Washington, D. C.; Graham C. Thompson, Binghamton, New York; Michael R. Wise, Colorado Üniversitesi; Gregory Wulczyn, Bucknell Üniversitesi; K. L. Yocom, Wyoming Üniversitesi ve problemi öneren.

775 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 44, (1971), 230.**

Ters Fonksiyonlar

775. [Kasım 1970] Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

$p, q > 0$ için $\int_0^1 \sqrt[q]{1-x^p}\,dx = \int_0^1 \sqrt[p]{1-x^q}\,dx$ olduğunu ispatlayınız.

I. J. C. Binz'in çözümü, Bern, İsviçre.

Daha genel olarak f, $[a,b]$'de azalan sürekli bir fonksiyon olsun. O zaman ters fonksiyon g, $[f(b), f(a)]$'da vardır; o da azalan ve süreklidir. Şu hesabı yapalım:

$$\int_{f(b)}^{f(a)} g(y)dy = \int_b^a g[f(t)]f'(t)dt = \int_b^a tf'(t)dt = af(a) - bf(b) + \int_a^b f(t)dt.$$

Dolayısıyla ayrıca $f(a) = b$, $f(b) = a$ ise $\int_a^b g(t)\,dt = \int_a^b f(t)\,dt$ olur.

$f : x \mapsto \sqrt[p]{1-x^q}$ ve $g : x \mapsto \sqrt[q]{1-x^p}$ fonksiyonları, $[0,1]$'de yukarıdaki durumun özel bir hâlini verir; bu da önermeyi ispatlar.

II. Václav Konečný'nin çözümü, Jarvis Christian College, Hawkins, Teksas.

$$\int_0^1 \sqrt[q]{1-x^p}\,dx = \frac{1}{p}\int_0^1 z^{-1+1/p}(1-z)^{1/q}dz$$
$$= \frac{1}{p}B(1/p, 1+1/q) = \frac{1}{pq}B(1/p, 1/q)$$

Burada gerçek değer elde etmek için $p, q > 0$'dır. $x^p = z$ değişken değiştirmesini kullandık. B, beta fonksiyonudur ve $B(x,y) = B(y,x)$ olduğundan p ile q'nun yerini değiştirirsek integralin değeri değişmez.

Diğer çözenler: Joseph Beer ve Bernard August (birlikte), Glassboro State College, New Jersey; Walter Blumberg, Flushing Lisesi, New York; Dermott A. Breault, Cyber, Inc., Cambridge, Massachusetts; Robert X. Brennan, Dover, New Jersey; Robert J. Bridgman, Mansfield State College, Pennsylvania; David C. Brooks, Seattle Pacific College, Washington; G. R. Desai, St. Louis Üniversitesi; Robert Desko, Davenport, Iowa; Ellis Detwiler, Adams, New York; Santo M. Diano, Havertown, Pennsylvania; Fred Dodd, Güney Alabama Üniversitesi; M. G. Greening, New South Wales Üniversitesi, Avustralya; Robert G. Griswold, Hawaii Üniversitesi, Hilo College; Philip Haverstick, Fort Belvoir, Virginia; Harry W. Hickey, Arlington, Virginia; John E. Homer, Lisle, Illinois; N. J. Kuenzi, Oshkosh, Wisconsin; David E. Mannes, SUNY, Oneonta, New York; Stephen B. Maurer, Phillips Exeter Academy; Edward Moylan, Ford Motor Company, Dearborn, Michigan; Albert J. Patsche, Rock Island Arsenal, Illinois; V. V. Ramana Rao, Andhra Üniversitesi, Güney Hindistan; B. E. Rhoades, Indiana Üniversitesi; Steve M. Rohde, General Motors Araştırma Laboratuvarları, Warren, Michigan; E. F. Schmeichel, College of Wooster, Ohio; Harry Siller, Hofstra Üniversitesi; A. Swyanavayanamuti, Andhra Üniversitesi, Waltair, Güney Hindistan; R. A. Struble, North Carolina State Üniversitesi; Philip Tracy, APO San Francisco; C. S. Venkataraman, Sree Kerala Varma College, Trichur, Güney Hindistan; John R. Ventura, Jr., Denizaltı Sistemleri Merkezi, Newport, Rhode Island; R. L. Woodriff, Menlo College, Menlo Park, Kaliforniya; Thomas Wray, Enerji, Maden ve Kaynaklar Bakanlığı, Ottawa, Kanada; Robert L. Young, Cape Cod Community College, Massachusetts; Paul Zwier, Calvin College, Michigan ve problemi öneren.

775 Numaralı Önerilen Problem Üzerine Not:
***Mathematics Magazine*, 45, (1972), 293.**

775 Numaralı Problem Üzerine Not

775. [Kasım 1970 ve Eylül 1971] Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

$p, q > 0$ için $\displaystyle\int_0^1 \sqrt[q]{1-x^p}\,dx = \int_0^1 \sqrt[p]{1-x^q}\,dx$ olduğunu ispatlayınız.

Ralph Leung'un notu, Berkeley, Kaliforniya.

Yukarıdaki eşitliği şöyle yazarsak çözüm hemen görülür:

$$\int_0^1 \sqrt[q]{1-x^p}\,dx = \int_0^1 \sqrt[p]{1-y^q}\,dy.$$

Her iki taraf da birinci bölgede x ekseni, y ekseni ve $x^p + y^q = 1$ grafiğiyle sınırlanan bölgenin alanını verir: sol taraf x'e, sağ taraf y'ye göre integralle elde edilir.

806 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 45, (1972), 171.**

Bir Doğruya Göre Simetri

806. [Eylül 1971] Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

H, ikizkenar ABC üçgeninin diklik merkezi olsun; AH, BH, CH, karşılarındaki kenarları sırasıyla D, E, F'de kessin. $HBD, HDC, HCE, HEA, HAF, HFB$ dik üçgenlerinin içteğet çemberlerinin merkezlerinin bir konik üzerinde bulunduğunu ispatlayınız.

Vladimir F. Ivanoff'un çözümü, San Carlos, Kaliforniya.

Problem, aşağıdaki teoremin özel bir hâlidir:

Altı nokta bir doğruya göre simetrikse, bir konik üzerinde bulunurlar.

Bu, Pascal teoreminin karşıtı kullanılarak veya analitik yöntemle kolayca ispatlanabilir.

Teorem, altı nokta bir noktaya göre simetrik olduğunda da geçerlidir. Simetri noktasını başlangıç noktası seçersek altı noktanın koordinatları şöyledir:

$$(x_1, y_1), \quad (x_2, y_2), \quad (x_3, y_3),$$
$$(-x_1, -y_1), (-x_2, -y_2), (-x_3, -y_3,),$$

ve koniğin denklemi

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & xy & 1 \\ x_1^2 & y_1^2 & x_1y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & x_2y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3^2 & x_3y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Leon Bankoff, Los Angeles, Kaliforniya (üç çözüm); Ragnar Dybvik, Tingvoll, Norveç; Michael Goldberg, Washington, D. C.; M. G. Greening, New South Wales Üniversitesi, Avustralya ve problemi öneren de çözmüşlerdir.

839 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
Mathematics Magazine, 46, (1973), 169.

Değişmeme Olasılığı

839. [Eylül 1972] Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Her biri aynı biçimde w beyaz top ve r kırmızı top içeren üç kutu verilmiş olsun. Birinci kutudan bir top alıp ikinciye, sonra ikinci kutudan bir top alıp üçüncüye, son olarak da üçüncü kutudan bir top alıp birinciye koyunuz. Kutuların renk bakımından başlangıçtaki içeriklerine sahip olma olasılığını bulunuz.

Thomas Spencer'ın çözümü, Trenton State College, New Jersey.

Kısa bir düşünmeyle, üç kutunun da renk bileşimini değiştirmeyen yegâne olayların beyaz, beyaz, beyaz veya kırmızı, kırmızı, kırmızı seçimleri olduğu görülür. Çarpma kuralına göre bunların olasılıkları sırasıyla

$$\left(\frac{w}{w+r}\right)\left(\frac{w+1}{w+r+1}\right)\left(\frac{w+1}{w+r+1}\right) = \frac{w(w+1)^2}{(w+r)(w+r+1)^2}$$

ve

$$\left(\frac{r}{w+r}\right)\left(\frac{r+1}{w+r+1}\right)\left(\frac{r+1}{w+r+1}\right) = \frac{r(r+1)^2}{(w+r)(w+r+1)^2}$$

olur. Bu olaylar ayrıktır; dolayısıyla istenen olasılık bunların toplamıdır:

$$\frac{w(w+1)^2 + r(r+1)^2}{(w+r)(w+r+1)^2}.$$

Not: N kutu bulunması durumunda çözüm şöyle olurdu:

$$\frac{w(w+1)^{N-1} + r(r+1)^{N-1}}{(w+r)(w+r+1)^{N-1}}.$$

Diğer çözenler: Gladwin Bartel, La Junta, Colorado; Melvin Billick, Midland Lisesi, Michigan; J. L. Brown, Jr., Pennsylvania State Üniversitesi; Joseph B. Browne, Oklahoma State Üniversitesi; Daniel L. Calloway, Ashville, Kuzey Karolina; Abraham L. Epstein, Hanscom Field, Massachusetts; George Fabian, Park Forest, Illinois; Michael Goldberg, Washington, D. C.; Kathleen Harris, New Hampton, Iowa; Karl Heuer, Moorhead, Minnesota; John M. Howell, Littlerock, Kaliforniya; Vaclav Konecny, Jarvis Christian College, Teksas; Lew Kowarski, Morgan State College, Maryland; Michael W. O'Donnell, Carnegie-Mellon Üniversitesi; George Pfeiffer, Old Dominion Üniversitesi, Virginia; Louisa Russo, Michigan Teknoloji Üniversitesi; R. Shantaram, Michigan-Flint Üniversitesi ve problemi öneren.

859 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 47, (1974), 49.**

Çözümü Tek Olmayan Bir Bulmaca

859. [Mart 1973] **Önerenler: B. Suer ve H. Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.**

$THREE + NINE = EIGHT + FOUR$ harfli bulmacasını çözünüz.

I. Harry L. Nelson'ın çözümü, Livermore, Kaliforniya.

Onluk tabanda 12 çözüm vardır. Bunlar şöyledir:

THREE	+	*NINE*	=	*EIGHT*	+	*FOUR*		
30122	+	4542	=	25703	+	8961		
29433	+	7073	=	30692	+	5814		
40233	+	5653	=	36104	+	9782		
59766	+	4346	=	63295	+	0817		
70566	+	2926	=	69107	+	4385		
69877	+	5457	=	74096	+	1238		

Bunların her birinde G ve O'nun değerlerini değiştirerek başka bir çözüm elde edilir; böylece toplam 12 çözüm bulunur.

"*THREE* asaldır" koşulu eklenirse, yalnızca $69877 + 5457 = 74096 + 1238 = 74296 + 1038$ çifti uygun olur. Buna ek olarak "*FOUR*, 3 ile bölünmesin" istersek çözüm tek olur (10 tabanında).

II. John Tabor ve John Beidler'ın ortak çözümü, Scranton Üniversitesi, Pennsylvania.

TABOR-AUTOMATIC CRYPTARITHM SOLVER ile toplamsal harfli aritmetik bulmacalarını çözmek artık kolaydır. Bu program, birkaç toplama ve bir eşitlik işareti içeren her bulmacayı kabul eder ve istenen tabanda çözer.

Program, VERİ YAPILARI dersinde dönem projesi olarak yazılmıştır. Şu bulmaca

$$THREE + NINE = FOUR + EIGHT$$

10 çözümü olduğu için ilginç çıkmamıştır. Bu çözümleri elde etmek için kullanılacak değerler şunlardır:

E	*T*	*R*	*N*	*H*	*U*	*F*	*G*	*O*	*F*
2	3	1	4	0	6	5	7	9	8
2	3	1	4	0	6	5	9	7	8
3	2	4	7	9	1	0	6	8	5
3	2	4	7	9	1	0	8	6	5
3	4	2	5	0	8	6	1	7	9
3	4	2	5	0	8	6	7	1	9
6	7	5	2	0	8	9	1	3	4
6	7	5	2	0	8	9	3	1	4
7	6	8	5	9	3	4	0	2	1
7	6	8	5	9	3	4	2	0	1

XDS Sigma 5'te toplam işlemci süresi 20 saniyeydi. Program FORTRAN dilindedir.

Diğer çözenler: Merrill Barnebey, Wisconsin Üniversitesi, La Crosse; Harold Biller, Brooklyn, New York; Dorothy Brunet, Sherman Oaks, Kaliforniya; Robert Copus, Rose Hulman Teknoloji Enstitüsü; H. Marlon Hewit, Reedley Lisesi, Kaliforniya; J. A. H. Hunter, Toronto, Kanada; Janice A. McGoldrick, Cranston Lisesi, Rhode Island; Sam Newman, Atlantic City, New Jersey; Erwin Schmidt, Washington, D. C.; S. O. Shachter, Philadelphia, Pennsylvania; Mary F. Turner, Glen Allen, Virginia; C. S. Venkataraman, Trichur, Hindistan ve problemi önerenler.

916 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
Mathematics Magazine, 48, (1975), 296.

Üçdoğrusal Koordinatlar

916. [Kasım 1974] Öneren: H. Demir, ODTÜ, Ankara, Türkiye.

XYZ, P noktasının ABC üçgenine göre pedal üçgeni olsun. P'nin, aşağıdaki koşulu sağlayan x, y, z üçdoğrusal koordinatlarını bulunuz:

$$YA + AZ = ZB + BX = XC + CY.$$

M. S. Klamkin'in çözümü, Waterloo Üniversitesi.

P'den sırasıyla AB, AC'ye paralel ve BC üzerinde sonlanan doğru parçaları çizilerek

$$BX = x\cot B + z\csc B, \qquad CX = x\cot C + y\csc C.$$

elde edilir. Diğer CY, AY, AZ, BZ uzaklıkları çevrimsel yer değiştirmeyle bulunur. Varsayımdan,

$$(y+z)(\cot A + \csc A) = (z+x)(\cot B + \csc B) = (x+y)(\cot C + \csc C) = \frac{2s}{3}$$

burada s yarı çevredir. Çözersek:

$$x = \frac{s}{3}\left(\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2} - \tan\frac{A}{2}\right),$$

$$y = \frac{s}{3}\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{C}{2} - \tan\frac{B}{2}\right),$$

ve

$$z = \frac{s}{3}\left(\tan\frac{A}{2} + \tan\frac{B}{2} - \tan\frac{C}{2}\right).$$

D. M. Bailey, Gordon Bennett, Alfred Brousseau, Michael Goldberg, J. M. Stark ve problemi öneren de çözmüşlerdir.

963 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü: *Mathematics Magazine*, 50, (1977), 53.

Dışbükey Dörtgenler **Ocak 1976**

963. Kenarları a, b, c, d olup aşağıdaki koşulu sağlayan dışbükey dörtgenleri karakterize ediniz:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix} = 0.$$

[*Hüseyin Demir, Ankara, Türkiye.*]

Çözüm: Satır ve sütunları toplayıp çıkararak verilen determinant denkleminin aşağıdaki denkleme denk olduğu kolayca gösterilir:

$$(a+c+b+d)(a+c-b-d)[(a-c)^2+(b-d)^2] = 0.$$

a, b, c, d'nin hepsi pozitif olduğundan, ya

$$a + c = b + d, \text{ ya da } a = c \text{ ve } b = d \text{ olur.}$$

İlk durumda dörtgenin içine bir çember çizilebilir; ikinci durumda dörtgen bir paralelkenardır. Akıl yürütme tersine çevrilerek, dörtgen bir paralelkenarsa veya içine bir çember çizilebiliyorsa determinantın sıfır olduğu görülür.

Clayton W. Dodge
Maine Üniversitesi, Orono

Gerald Bergum, M. G. Greening (Avustralya), Daniel Mark Rosenblum, J. M. Stark ve problemi öneren de çözmüşlerdir.

998 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü: *Mathematics Magazine*, 51, (1978), 199.

120° **Açılı Bir Üçgen** **Kasım 1976**

998. İç açıortaylarının ayaklarının oluşturduğu üçgenin bir dik üçgen olduğu tüm üçgenleri karakterize ediniz. [*Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.*]

Çözüm: A', B', C', sırasıyla A, B, C açılarının açıortaylarının ayakları olsun. O zaman $A'C'B'$ açısı ancak ve ancak ACB açısı 120 dereceyse diktir.

a, b, c (a', b', c'), sırasıyla A, B, C (A', B', C') karşısındaki kenarların uzunlukları olsun. Kosinüs teoremi ve açıortayın karşı kenarı komşu kenarların oranında bölmesi kullanılarak şu eşitlikler elde edilir:

$$(c')^2=\left(\frac{ab}{a+c}\right)^2+\left(\frac{ab}{b+c}\right)^2-2\left(\frac{ab}{a+c}\right)\left(\frac{ab}{b+c}\right)\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)$$

$$(b')^2=\left(\frac{ac}{b+c}\right)^2+\left(\frac{ac}{a+b}\right)^2-2\left(\frac{ac}{b+c}\right)\left(\frac{ac}{a+b}\right)\left(\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\right)$$

$$(a')^2=\left(\frac{bc}{a+c}\right)^2+\left(\frac{bc}{a+b}\right)^2-2\left(\frac{bc}{a+c}\right)\left(\frac{bc}{a+b}\right)\left(\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\right)$$

$A'C'B'$ açısı ancak ve ancak $(a')^2 + (b')^2 - (c')^2 = 0$ ise diktir. Fakat bu denklem (uzunca bir cebirsel işlemden sonra) şu hâle sadeleşir:

$$\frac{2abc^2(a^2+b^2-c^2+ab)}{(a+b)^2(a+c)(b+c)}=0.$$

Dolayısıyla $A'C'B'$ açısı ancak ve ancak $a^2 + b^2 - c^2 + ab = 0$ ise diktir. Kosinüs teoremine göre ise $a^2 + b^2 - c^2 + ab = 0$ olması, ACB açısının 120° olmasına denktir.

John Oman
Wisconsin-Oshkosh Üniversitesi

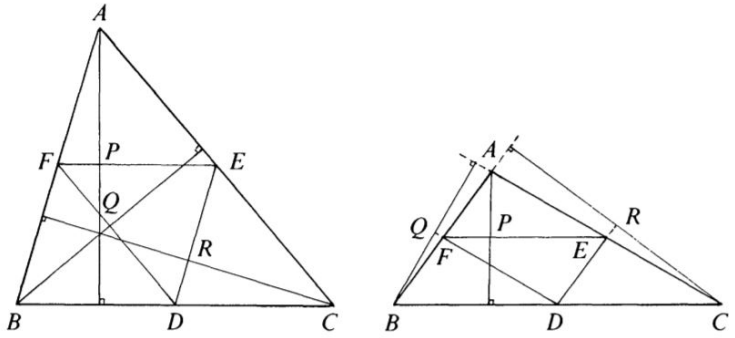
Diğer çözenler: Gordon Bennett, Howard Eves, Michael Goldberg, Leonard D. Goldstone, M. G. Greening (Avustralya), Hubert J. Ludwig, J. M. Stark, Pambuccian Victor (Romanya), Robert L. Young ve problemi öneren.

1197 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü: *Mathematics Magazine*, 58, (1985), 240.

Yüksekliklerin Doğrusal Orta Noktaları **Eylül 1984**

1197. Yüksekliklerinin orta noktaları doğrusal olan üçgenleri karakterize ediniz. [*Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.*]

Çözüm I: Bir üçgenin yüksekliklerinin orta noktaları ancak ve ancak üçgen dik açılıysa doğrusaldır.



İspat. Önce, dar açılı bir üçgenin bütün yüksekliklerinin üçgenin içinde, geniş açılı bir üçgenin ise iki yüksekliğinin üçgenin dışında kaldığını gözlemleyelim.
P, Q, R, ABC üçgeninin sırasıyla A, B, C köşelerinden inen yüksekliklerinin orta noktaları olsun. D, E, F, BC, CA, AB kenarlarının orta noktalarıysa P, Q, R, gerektiğinde uzatılan EF, FD, DE doğruları üzerinde bulunur. Pasch aksiyomu DEF üçgenine uygulandığında, P, Q, R'nin doğrusal olması için gerek ve yeter koşulun, bunlardan ikisinin D, E, F'den ikisiyle çakışması, yani ABC üçgeninin kenarları üzerinde bulunması olduğu görülür. Bu da ancak ve ancak ABC dik açılıysa gerçekleşir.

J. H. Webb
Cape Town Üniversitesi
Güney Afrika

Çözüm II: Üçgenin yükseklikleri diklik merkezinde kesişir. Yüksekliklerin kullanacağımız tek özelliği budur; problemin yanıtı, aşağıdaki daha genel sonucun özel bir hâlidir.

D, E, F, ABC üçgeninin sırasıyla BC, CA, AB kenar doğruları (yani kenarları içeren doğrular) üzerinde, AD, BE, CF bir P noktasında kesişecek biçimde noktalar olsun. O zaman AD, BE, CF'nin orta noktaları ancak ve ancak P, ABC'nin bir köşesiyle çakışıyorsa veya kenar doğrularından biri üzerinde bulunuyorsa doğrusaldır.

İspat. P bir köşeyle çakışıyorsa, genelliği bozmadan $P = A$ olsun. O zaman $E = F = A$ ve D, BC kenar doğrusunun herhangi bir noktasıdır; AD, BE, CF'nin orta noktaları BC'ye paralel bir doğru üzerinde bulunur.
P bir köşe değilse, AB, AC eğik koordinat eksenlerini ve bu eksenler üzerinde uygun birimleri kullanarak A, B, C'nin koordinatlarını sırasıyla $(0,0), (2,0), (0,2)$ alalım. $P = (p, q)$ olsun. O zaman D, E, F'nin koordinatları $(2p/(p+q), 2q/(p+q))$, $(0, 2q/(2-p))$, $(2p/(2-q), 0)$ olur. $p+q \neq 0$, $2-p \neq 0$, $2-q \neq 0$ gerekir; aksi hâlde D, E, F'den en az biri tanımsızdır (örneğin $p+q=0$ ise $AP \parallel BC$ olur). Üç orta noktanın koordinatları $(p/(p+q), q/(p+q))$, $(1, q/(2-p))$, $(p/(2-q), 1)$'dir. Bunlar ancak ve ancak şu koşulda doğrusaldır:

$$\begin{vmatrix} p/(p+q) & q/(p+q) & 1 \\ 1 & q/(2-p) & 1 \\ p/(2-q) & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2pq(2-p-q)}{(p+q)(2-p)(2-q)} = 0.$$

Bu, ancak ve ancak $p = 0$ veya $q = 0$ veya $p + q = 2$ ise, yani P üçgenin bir kenar doğrusu üzerindeyse gerçekleşir (bu durumda orta noktalardan ikisi çakışır).
Bir üçgenin diklik merkezi, bir köşeyle çakışmadıkça, yani üçgen dik açılı olmadıkça, bir kenar doğrusu üzerinde bulunamaz. Dolayısıyla yüksekliklerin orta noktaları ancak ve ancak üçgen dik açılıysa doğrusaldır.

J. F. Rigby
University College
Cardiff, Galler

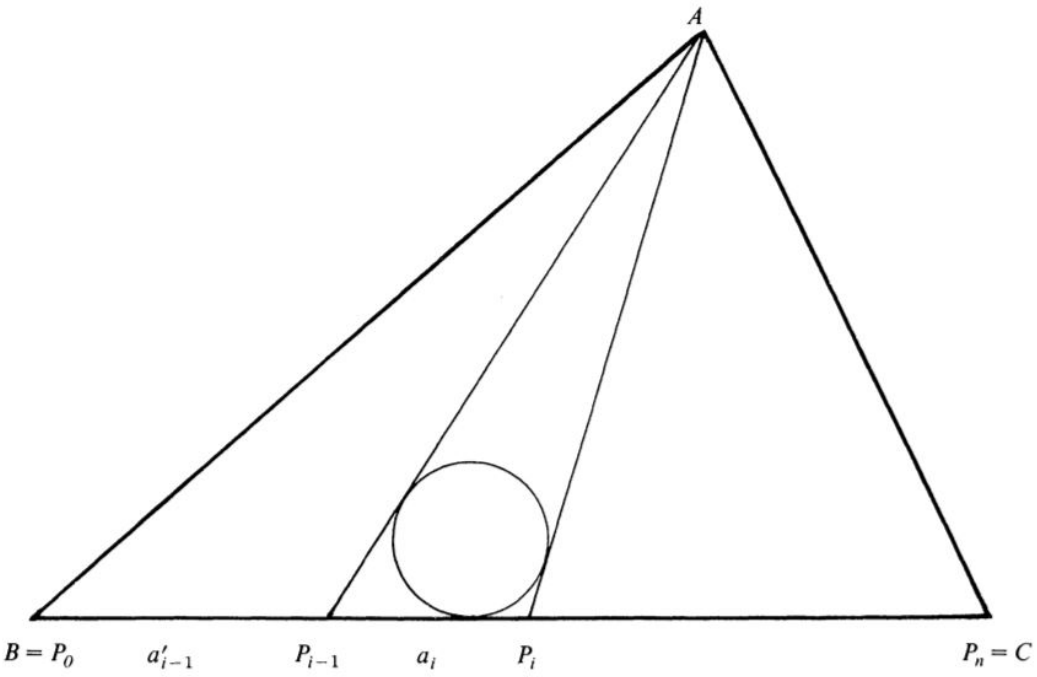
I. çözümdeki gibi çözenler: Jordi Dou (İspanya), Howard Eves, Syrous Marivani, Mike Molloy (öğrenci, Kanada), Richard Parris, Cem Tezer (Türkiye) ve Michael Woltermann; genelleştirilmiş II. çözümdeki gibi (ancak Ceva ve Menelaus teoremlerini kullanarak) çözen: Cem Tezer (Türkiye, ikinci çözüm); analitik geometriyle çözenler: S. F. Barger, Kenneth Bernstein, Ragnar Dybvik (Norveç), Cornelius Groenewoud, Boulkhodra Hacene, L. Kuipers (İsviçre), Hubert J. Ludwig, Bill Olk (öğrenci), John Oman, Harry Sedinger, Robert S. Stacy (Batı Almanya), John S. Sumner, Michael Vowe (İsviçre), Jihad Yamout (öğrenci) ve Robert L. Young; barisentrik veya benzer koordinat sistemleriyle çözenler: O. Bottema (Hollanda), J. T. Groenman (Hollanda, iki çözüm), J. C. Linders (Hollanda) ve problemi öneren; eşlenik karmaşık koordinatlarla çözenler: Howard Eves (ikinci çözüm) ve Stephanie Sloyan; vektör analiziyle çözenler: Leonard D. Goldstone ve Harry D. Ruderman.

1206 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
Mathematics Magazine, 59, (1986), 46.

Bölünmüş Üçgende İçteğet Yarıçaplarının Toplamı **Ocak 1985**

1206. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

ABC, kenarları a, b, c, yarı çevresi s olan bir üçgen olsun. BC kenarı, sırasıyla $B = P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}, P_n = C$ noktalarıyla bölünsün.



Şekil 1

r_i, $i = 1, \ldots, n$ için $AP_{i-1}P_i$ üçgeninin içteğet çemberi yarıçapıysa, şu eşitsizliği ispatlayınız:

$$r_1 + \cdots + r_n < \frac{1}{2} h_a \ln \frac{s}{s-a},$$

burada h_a, A köşesinden inen yüksekliğin uzunluğudur.

Vania D. Mascioni'nin çözümü, öğrenci, ETH Zürich, İsviçre.
$i = 1, 2, \ldots, n$ için a_i, $P_{i-1}P_i$ tabanı; s_i, $AP_{i-1}P_i$ üçgeninin yarı çevresi; a_i', s_i' ise ABP_i üçgeninin karşılık gelen nicelikleri olsun. Aşağıda şu eşitsizliği göstereceğiz:

$$\frac{s_{i-1}' - a_{i-1}'}{s_{i-1}'} \cdot \frac{s_i - a_i}{s_i} = \frac{s_i' - a_i'}{s_i'} \quad 2 \le i \le n \text{ için} \tag{1}$$

Kolay bir tümevarımla

$$\frac{s-a}{s} = \prod_{i=1}^{n} \frac{s_i - a_i}{s_i}.$$

Aritmetik ve geometrik ortalama eşitsizliğinden ve $r_i s_i = \frac{1}{2} a_i h_a$ eşitliğinden

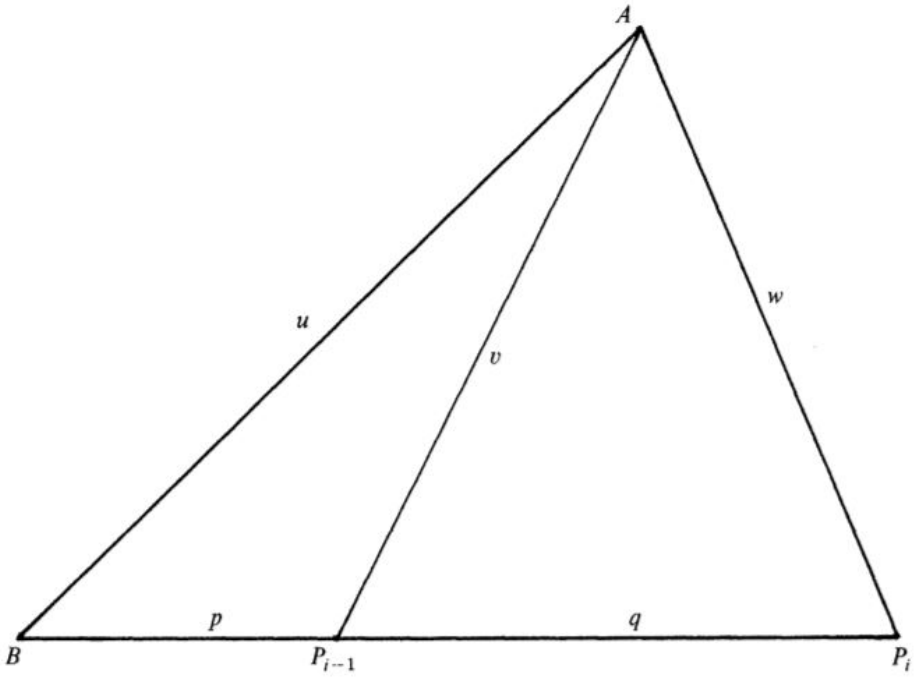
$$\left(\frac{s-a}{s}\right)^{1/n} \le \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i - a_i}{s_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(1 - \frac{a_i}{s_i}\right) = 1 - \frac{2}{n h_a} \sum_{i=1}^{n} r_i,$$

dolayısıyla

$$\sum_{i=1}^{n} r_i \leqq \frac{nh_a}{2}\left(1-\left(\frac{s-a}{s}\right)^{1/n}\right),$$

elde edilir. Bu, önerilen eşitsizlikten daha güçlüdür. Önerilen eşitsizlik, $x = (s/(s-a))^{1/n}$ için $x > 1$ iken $1 - 1/x < \ln x$ kullanılarak elde edilir.

(1)'in ispatı. Gösterimi sadeleştirmek için ABP_{i-1} ve $AP_{i-1}P_i$ üçgenlerinin kenarlarını Şekil 2'deki gibi yeniden adlandıralım. O zaman (1) şu biçimi alır:



Şekil 2. Stewart teoremi.

$$\frac{u+v-p}{u+v+p}\cdot\frac{v+w-q}{v+w+q}=\frac{u+w-p-q}{u+w+p+q},$$

Kolay (ama sıkıcı) bir cebirsel işlem, bunun aşağıdaki eşitliğe denk olduğunu gösterir:

$$\left(v^2+p^2-u^2\right)q+\left(v^2+q^2-w^2\right)p=0.$$

Kosinüs teoremine göre bu da şu eşitliğe denktir:

$$2pqv\left(\cos\angle AP_{i-1}B+\cos\angle AP_{i-1}P_i\right)=0,$$

Bu açıktır; çünkü $\angle AP_{i-1}B+\angle AP_{i-1}P_i=\pi$'dir. Ayrıca Coxeter ve Greitzer, *Geometry Revisited*, s. 6'daki Stewart teoremiyle karşılaştırınız.

Jordi Dou (İspanya), Václav Konečný ve Ronald Shepler, L. Kuipers (İsviçre), Syrous Marivani, William A. Newcomb, Bjorn Poonen (öğrenci), J. M. Stark, Paul J. Zwier ve problemi öneren de çözmüşlerdir.

Çözenlerin çoğu aşağıdaki gibi bir tahmin kullanmıştır:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i < \sum_{j=1}^{m} r'_j = \sum_{j=1}^{m} \frac{h_a\left(x'_j-x'_{j-1}\right)}{x'_j-x'_{j-1}+\sqrt{\left(x'_{j-1}\right)^2+\left(h_a\right)^2}+\sqrt{\left(x'_j\right)^2+\left(h_a\right)^2}} \approx \int_z^{z+a}\frac{h_a\,dx}{2\sqrt{x^2+h_a^2}},$$

Burada $A=(0,h_a)$, $B=(z,0)$, $C=(z+a,0)$, $P'_j=(x'_j,0)$'dır. $[P'_0,\ldots,P'_m]$, BC'nin $[P_0,\ldots,P_n]$ bölüntüsünün kesin bir inceltmesidir (yani her P_i, bir P'_j'dür ve $m>n$); r'_j, $AP'_{j-1}P'_j$ üçgeninin içteğet çemberi yarıçapıdır.

1211 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 59, (1986), 113.**

Bir Elipsin İzoptiği **Mart 1985**

1211. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.
Bir elipsin sabit bir açı altında görüldüğü noktaların geometrik yerini bulunuz.

Volkhard Schindler'in çözümü, Berlin, Doğu Almanya.
Dik bir (x, y) koordinat sisteminde $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ elipsini ele alalım. Elipsin (x_1, y_1) noktasındaki teğetinin denkleminin $x_1x/a^2 + y_1y/b^2 = 1$ olduğu iyi bilinir. Teğetin x eksenini kestiği noktanın apsisi a^2/x_1, y eksenini kestiği noktanın ordinatı b^2/y_1 olduğundan, elips dışındaki bir (x, y) noktasından çizilen teğetin m eğimi

$$m = \frac{y}{x - a^2/x_1} = \frac{y - b^2/y_1}{x},$$

dolayısıyla

$$\frac{x_1}{a} = \frac{ma}{mx - y} \quad \text{ve} \quad \frac{y_1}{b} = \frac{b}{y - mx}. \tag{1}$$

(x_1, y_1) elips üzerinde olduğundan $[ma/(mx - y)]^2 + [b/(y - mx)]^2 = 1$ olur. Sadeleştirilince

$$(x^2 - a^2)m^2 - 2xym + (y^2 - b^2) = 0. \tag{2}$$

Elipsin görüldüğü sabit açı α ise (2)'nin m_1, m_2 köklerini, $\tan\alpha = (m_1 - m_2)/(1 + m_1m_2)$ olacak biçimde numaralandırabiliriz. Böylece

$$\tan^2\alpha = \frac{(m_1 - m_2)^2}{(1 + m_1m_2)^2} = \frac{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1m_2}{(1 + m_1m_2)^2},$$

elde edilir; bu, α yerine $180° - \alpha$ konduğunda da geçerlidir. $m_1 + m_2 = 2xy/(x^2 - a^2)$ ve $m_1m_2 = (y^2 - b^2)/(x^2 - a^2)$ olduğundan

$$\tan^2\alpha = 4\frac{b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2}{(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2}. \tag{3}$$

Özellikle $\alpha = 180°$ ise (3), olması gerektiği gibi başlangıçtaki elipsin denklemine indirgenir. $\alpha = 90°$ ise (3), yarıçapı $\sqrt{a^2 + b^2}$ olan çemberin denklemi $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$'ye indirgenir. (3) çizim için elverişli olmadığından kutupsal koordinatlara geçelim: $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. O zaman (3), $r^4 - 2Ar^2 + B = 0$ biçimini alır; burada

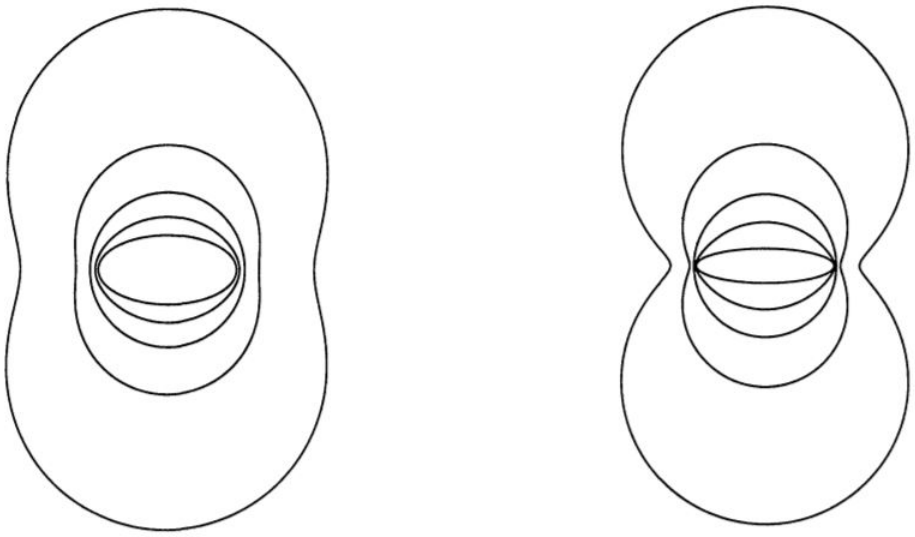
$$A = a^2 + b^2 + 2(b^2\cos^2\theta + a^2\sin^2\theta)\cot^2\alpha,$$
$$B = (a^2 + b^2)^2 + 4a^2b^2\cot^2\alpha,$$

buradan

$$r^2 = A \pm \sqrt{A^2 - B}. \tag{4}$$

θ sabitken α arttıkça r^2 azaldığından, (4)'te artı işareti

$0° < \alpha \leq 90°$ iken, eksi işareti ise $90° \leq \alpha < 180°$ iken kullanılır. Şekillerden görüldüğü gibi geometrik yerler, $90° < \alpha < 180°$ iken elipse, $0° < \alpha < 90°$ iken Cassini ovallerine veya Booth lemniskatlarına yakındır. Elbette $a = b$ ise bütün geometrik yerler çemberdir.



$a/b = 2.$ $a/b = 4.$

Her şekilde, en dıştakinden başlayarak beş eğri için α değerleri $30°, 60°, 90°, 120°, 180°$'dir.

Michael V. Finn, J. T. Groenman (Hollanda), L. Kuipers (İsviçre), Vania Mascioni (öğrenci, İsviçre), William A. Newcomb, Richard Parris, Stephanie Sloyan ve Robert L. Young da çözmüşlerdir. Zachary Franco (öğrenci) ve problemi öneren kısmen çözmüşlerdir.

M. S. Klamkin (Kanada), sonucu R. C. Yates'in *A Handbook on Curves and their Properties*, J. W. Edwards, Ann Arbor, 1947 (*Curves and their Properties*, NCTM, 1974 adıyla yeniden basılmıştır), s. 138–140'ta bulmuştur; burada izoptik ve ortoptik terimleri tanımlanır. Çözenlerin hiçbiri, örneğin (1)'de x, x_1, y, y_1 veya m sıfır olduğunda ya da m sonsuz olduğunda ortaya çıkan istisnai durumları ele almamıştır.

1298 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü: *Mathematics Magazine*, 62, (1989), 200.

İçine Çember Çizilebilen Dörtgen **Haziran 1988**

1298. *Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.*

$ABCD$ dörtgeni bir çembere dıştan çizilmiş; P, Q, R, S ise sırasıyla AB, BC, CD, DA kenarlarının değme noktaları olsun. $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$, $p = |QS|$, $q = |PR|$ olmak üzere aşağıdaki eşitliği gösteriniz:

$$\frac{ac}{p^2} = \frac{bd}{q^2}.$$

I. J. M. Stark'ın çözümü, Lamar Üniversitesi, Teksas.
$ABCD$'nin kenarlarına teğet olan çemberin yarıçapını r ile; sırasıyla SP, PQ, QR, RS kirişlerinin çember merkezinde gördükleri açıları $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ile gösterelim.

$a = |AP| + |PB|$, $b = |BQ| + |QC|$, $c = |CR| + |RD|$, $d = |DS| + |SA|$'dır. Dik üçgen geometrisiyle $|AP| = |SA| = r\tan(\alpha/2)$, $|BQ| = |PB| = r\tan(\beta/2)$, $|CR| = |QC| = r\tan(\gamma/2)$, $|RD| = |DS| = r\tan(\delta/2)$ elde edilir. Dolayısıyla

$$ac = r^2(\tan(\alpha/2) + \tan(\beta/2))(\tan(\gamma/2) + \tan(\delta/2)),$$

ve

$$bd = r^2(\tan(\beta/2) + \tan(\gamma/2))(\tan(\delta/2) + \tan(\alpha/2)). \tag{1}$$

$\tan x + \tan y = \sin(x+y)/(\cos x \cos y)$ özdeşliği (1)'e uygulanırsa

$$\frac{ac}{bd} = \frac{\sin((\alpha+\beta)/2)\sin((\gamma+\delta)/2)}{\sin((\beta+\gamma)/2)\sin((\alpha+\delta)/2)}. \tag{2}$$

$\alpha+\beta+\gamma+\delta = 2\pi$ olduğundan $\sin((\gamma+\delta)/2) = \sin((\alpha+\beta)/2)$ ve $\sin((\alpha+\delta)/2) = \sin((\beta+\gamma)/2)$ elde edilir. Bunlar (2) ile birleştirilince

$$\frac{ac}{bd} = \frac{\sin^2((\alpha+\beta)/2)}{\sin^2((\beta+\gamma)/2)}. \tag{3}$$

$p^2 = (2r\sin((\alpha+\beta)/2))^2$ ve $q^2 = (2r\sin((\beta+\delta)/2))^2$ olduğundan, (3)'ten $ac/bd = p^2/q^2$ sonucu çıkar.

II. O. Nouhaud'nun çözümü, Limoges Fen Fakültesi, Fransa.

A', B', C', D', sırasıyla A, B, C, D'nin, merkezi O, yarıçapı r olan içteğet çemberine göre inversiyon altındaki görüntüleri olsun. Bilindiği üzere

$$|A'B'| = r^2\frac{|AB|}{|OA||OB|}$$

(örneğin bkz. Howard Eves, *A Survey of Geometry*, Allyn and Bacon, Boston, 1963, Teorem 3.4.20, s. 153). Döngüsel permütasyonla benzer üç bağıntı daha elde edilir. Ayrıca A', SP'yi; B' de PQ'yu ortaladığından $2|A'B'| = |SQ|$'dur. Benzer biçimde $2|C'D'| = |SQ|$ ve $2|A'D'| = 2|B'C'| = |RP|$ olur. İstenen sonuç bu bağıntılardan çıkar.

Mangho Ahuja, Wadie A. Bassali (Kuveyt), J.-M. Becker (Fransa), Bilkent Üniversitesi Problem Çözme Grubu (Türkiye), J. C. Binz (İsviçre), Duane M. Broline, Brown Üniversitesi Sinek Balıkçılığı Kulübü, Onn Chan (öğrenci), Gang Chang (öğrenci), Chico Problem Grubu, Timothy Chow, Ragnar Dybvik (Norveç), E. C. Friedman, Francis M. Henderson, J. Heuver (Kanada), Geoffrey A. Kandall, Hans Kappus (İsviçre), Václav Konečný, L. Kuipers (İsviçre), Helen M. Marston, Richard E. Pfiefer, James S. Robertson, Harry D. Ruderman, Raul A. Simon (Şili), László Szücs, R. S. Tiberio, George Vakanas (öğrenci) ve problemi öneren de çözmüşlerdir.

1305 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü: *Mathematics Magazine*, 62, (1989), 278.

İçteğet Yarıçapları İçin Bir Özdeşlik — Ekim 1988

1305. *Önerenler: H. Demir ve C. Tezer, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.*

$P_0 = B, P_1, P_2, \ldots, P_n = C$, ABC üçgeninin BC kenarı üzerinde bu sırayla alınan noktalar olsun. r, r_i, h sırasıyla ABC ve $AP_{i-1}P_i$ üçgenlerinin içteğet çemberlerinin yarıçaplarını ve ortak yüksekliği göstermek üzere, aşağıdaki eşitliği ispatlayınız:

$$\prod_{i=1}^{n}\left(1-\frac{2r_i}{h}\right)=1-\frac{2r}{h}.$$

Jim Francis'in çözümü, Washington Üniversitesi, Seattle, Washington.
$n = 2$ durumunu ispatlamak yeterlidir; çünkü formül daha sonra tümevarımla elde edilir.

Öklid geometrisinden, bir üçgenin içteğet çemberi yarıçapının, alanının yarı çevresine bölümü olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $x_1 = BP_1$, $x_2 = P_1C$, $a_1 = AB$, $a_2 = AP_1$, $a_3 = AC$ dersek

$$r_1 = \frac{\frac{1}{2}x_1 h}{\frac{1}{2}(x_1 + a_1 + a_2)} = \frac{x_1 h}{x_1 + a_1 + a_2}$$

$$r_2 = \frac{x_2 h}{x_2 + a_2 + a_3},$$

ve

$$r = \frac{(x_1 + x_2)h}{x_1 + x_2 + a_1 + a_3}.$$

Buradan

$$\left(1 - \frac{2r_1}{h}\right)\left(1 - \frac{2r_2}{h}\right) = \left(1 - \frac{2x_1 h}{h(x_1 + a_1 + a_2)}\right)\left(1 - \frac{2x_2 h}{h(x_2 + a_2 + a_3)}\right)$$

$$= \frac{(a_1 + a_2 - x_1)(a_2 + a_3 - x_2)}{(a_1 + a_2 + x_1)(a_2 + a_3 + x_2)}.$$

Benzer biçimde

$$\left(1 - \frac{2r}{h}\right) = \frac{a_1 + a_3 - x_1 - x_2}{a_1 + a_3 + x_1 + x_2}.$$

Yukarıdaki iki denklemin sağ taraflarının eşit olduğunu, buna denk olarak da aşağıdaki eşitliği göstermek kalır:

$$(a_1 + a_2 + x_1)(a_2 + a_3 + x_2)(a_1 + a_3 - x_1 - x_2)$$

$$= (a_1 + a_2 - x_1)(a_2 + a_3 - x_2)(a_1 + a_3 + x_1 + x_2).$$

Açılımları yapıp her iki tarafta ortak olan terimleri yok edince, sağ taraf

$$\left(-a_1^2 + a_2^2 + x_1^2\right)x_2 + \left(-a_3^2 + a_2^2 + x_2^2\right)x_1,$$

ifadesine, sol taraf ise bu ifadenin toplamsal tersine indirgenir. Dolayısıyla yukarıdaki ifadenin sıfır olduğunu göstermek kalır. Bu, kosinüs teoreminden şöyle çıkar. $\alpha = \angle AP_1B$ olsun. O zaman

$$-a_1^2 + a_2^2 + x_1^2 = 2a_2 x_1 \cos\alpha$$

öte yandan

$$-a_3^2 + a_2^2 + x_2^2 = 2a_2 x_2 \cos(\pi - \alpha) = -2a_2 x_2 \cos\alpha,$$

olur; böylece ispat tamamlanır.

S. Belbas, Francisco Bellot-Rosado (İspanya), Anna Boettcher ve Václav Konečný, Duane M. Broline, Michael V. Finn, John F. Goehl, Jr., Francis M. Henderson, J. Heuver (Kanada), Hans Kappus (İsviçre), L. Kuipers (İsviçre), Lamar Üniversitesi Problem Çözme Grubu, J. C. Linders (Hollanda), Vania Mascioni (İsviçre), Oxford Koşu Kulübü, Werner Raffke (Batı Almanya), John P. Robertson, Hyman Rosen, Volkhard Schindler (Doğu Almanya), Michael Vowe (İsviçre), A. Zulauf (Yeni Zelanda) ve problemi öneren de çözmüşlerdir.

1327 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
Mathematics Magazine, 63, (1990), 275.

Çembere Dıştan Çizilen Dörtgenlerin Köşegenleri **Ekim 1989**

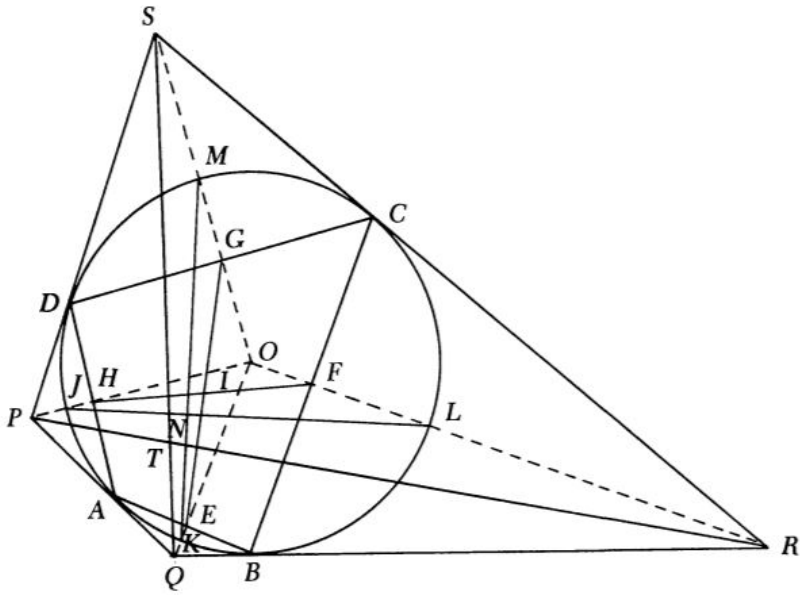
1327. *Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.*

Dışbükey $PQRS$ dörtgeninin PQ, QR, RS, SP kenarları, içteğet çemberine A, B, C, D noktalarında değsin; AB, BC, CD, DA kenarlarının orta noktaları E, F, G, H olsun. PR, QS köşegenleri arasındaki açının, karşılıklı kenarların orta noktalarını birleştiren EG, FH doğruları arasındaki açıya eşit olduğunu gösteriniz.

I. Jordi Dou'nun çözümü, Barselona, İspanya.

İçteğet çemberinin yarıçapı r, merkezi O olsun. J, K, L, M, sırasıyla çemberin OHP, OEQ, OFR, OGS doğrularıyla kesiştiği noktalar olsun.

$N = JL \cap KM$, $T = PR \cap QS$, $I = EG \cap FH$ olsun. JL ile KM diktir [JAK ve LCM yayları birlikte çemberin çevresinin yarısını oluşturduğundan]; dolayısıyla [JOL üçgeni ikizkenar olduğundan] KM, $\angle JOL$'nin açıortayına paraleldir. Ayrıca $OH \cdot OP = OF \cdot OR = r^2$ olduğundan OHF ve ORP üçgenleri benzerdir [$OH/OF = OR/OP$]; bu nedenle PR, HF doğruları, $\angle JOL$'nin kenarlarına göre antiparaleldir [yani $\angle OHF = \angle ORP$ ve $\angle OFH = \angle OPR$]. Bu, [JOL üçgeninin ikizkenar olmasıyla birlikte] PR, HF doğrularının JL ile eşit açılar (diyelim α) oluşturduğunu gösterir. Benzer biçimde QS, EG doğruları KM ile eşit açılar (diyelim β) oluşturur. Böylece $\angle GIF = 90^\circ - (\alpha + \beta)$, $\angle RTS = 90^\circ + (\alpha + \beta)$ olur ve ispat biter.



II. Jiro Fukuta'nın çözümü, Motosu-gun, Gifu-ken, Japonya.

O, $PQRS$ dörtgeninin içteğet çemberinin merkezi, r de yarıçapının uzunluğu olsun. Başlangıç noktası O olan karmaşık düzlemde P, Q, R, S'yi sırasıyla $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ karmaşık sayılarıyla gösterelim. O zaman E, F, G, H, sırasıyla $r^2/\overline{\beta}, r^2/\overline{\gamma}, r^2/\overline{\delta}, r^2/\overline{\alpha}$ sayılarına karşılık gelir.

Sonucu elde etmek için

$$F \equiv \left(\frac{\alpha - \gamma}{\beta - \delta}\right) \div \left(\frac{r^2/\overline{\beta} - r^2/\overline{\delta}}{r^2/\overline{\alpha} - r^2/\overline{\gamma}}\right)$$

ifadesinin gerçel olduğunu ispatlamak yeterlidir. Şimdi

$$F = \frac{\alpha-\gamma}{\beta-\delta}\cdot\frac{\dfrac{r^2\overline{\gamma}-r^2\overline{\alpha}}{\overline{\alpha}\,\overline{\gamma}}}{\dfrac{r^2\overline{\delta}-r^2\overline{\beta}}{\overline{\beta}\,\overline{\delta}}}$$

$$= \frac{\alpha-\gamma}{\beta-\delta}\cdot\frac{\overline{\alpha}-\overline{\gamma}}{\overline{\beta}-\overline{\delta}}\cdot\frac{\overline{\beta}\,\overline{\delta}}{\overline{\alpha}\,\overline{\gamma}}$$

$$= \frac{|\alpha-\gamma|^2}{|\beta-\delta|^2}\overline{\left(\frac{\delta}{\alpha}\cdot\frac{\beta}{\gamma}\right)}.$$

Fakat $(\delta/\alpha)(\beta/\gamma)$ gerçeldir; çünkü $\arg(\delta/\alpha)+\arg(\beta/\gamma) = \arg POS + \arg ROQ = \pi$'dir. Böylece ispat tamamlanır.

Duane M. Broline, Timothy V. Craine, John F. Goehl, Jr., Francis M. Henderson, Paul Martin ve problemi öneren de çözmüşlerdir.

1356 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü: *Mathematics Magazine*, 64, (1991), 278.

Doğrusallık ve Simetri **Ekim 1990**

1356. *Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.*

P, Q, ABC üçgeninin BC kenarı üzerinde B, P, Q, C sırasıyla alınmış noktalar olsun. PAB, QAC'nin çevrel çemberleri $M \neq A$'da, PAC, QAB'ninkiler ise N'de kesişsin. A, M, N'nin doğrusal olması için gerek ve yeter koşulun, P ile Q'nun BC'nin orta noktası A''ya göre simetrik olması olduğunu gösteriniz.

Christos Athanasiadis'in çözümü, öğrenci, Massachusetts Teknoloji Enstitüsü, Cambridge, Massachusetts.

K ve L, BC doğrusunun sırasıyla AM ve AN doğrularıyla kesiştiği noktalar olsun. BC doğrusu, başlangıç noktası B olan bir koordinat sisteminin x ekseni olsun; C, P, Q, K, L'nin x koordinatlarını sırasıyla a, p, q, k, l ile gösterelim. K noktası, PAB ve QAC'nin çevrel çemberlerinin kuvvet ekseni üzerindedir; dolayısıyla bu çemberlere göre kuvvetleri $k(k-p)$ ve $(k-q)(k-a)$ eşittir. Buradan $k = aq/(a+q-p)$ elde edilir. Benzer biçimde p ile q'nun rollerini değiştirerek $l = ap/(a+p-q)$ buluruz. $l = k$ olması için gerek ve yeter koşulun $p+q = a$ olduğu kolayca görülür ve sonuç elde edilir.

Raúl Marín Carrera (öğrenci, Meksika), Jordi Dou (İspanya), Jiro Fukuta (Japonya), Václav Konečný, Alvaro Avila Márquez (öğrenci, Meksika), Richard E. Pfiefer, Ioan Sadoveanu, Jyotirmoy Sarkar (öğrenci), Seshadri Sivakumar (Kanada), John S. Sumner ve problemi öneren de çözmüşlerdir.

Pfiefer, şekle merkezi A olan bir çembere göre inversiyon uygulayarak çözümü elde etmiştir.

1371 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 65, (1992), 133.**

Bir Üçgen Değişmezi **Nisan 1991**

1371. *Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.*

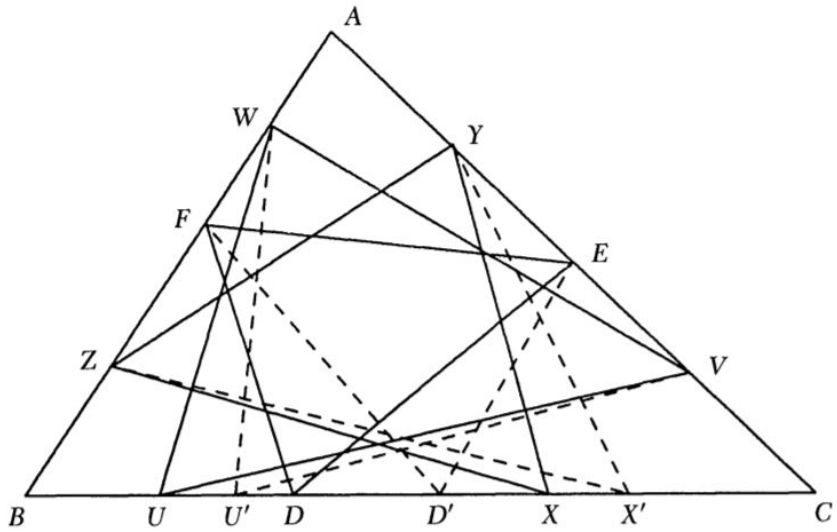
A, B, C bir üçgenin köşeleri; D, E, F de sırasıyla BC, AC, AB kenarları üzerinde noktalar olsun. U, X, V, Y, W, Z, sırasıyla BD, DC, CE, EA, AF, FB'nin orta noktaları olsun. Aşağıdaki ifadenin

$$\text{Alan}(\triangle UVW) + \text{Alan}(\triangle XYZ) - \tfrac{1}{2}\,\text{Alan}(\triangle DEF)$$

D, E, F'den bağımsız bir sabit olduğunu ispatlayınız.

I. Jordi Dou'nun çözümü, Barselona, İspanya; 80. doğum günü vesilesiyle gönderilmiştir.

Önce D', C ile D arasında herhangi bir nokta; U', X' de $BD', D'C$'nin orta noktaları olsun. O zaman $XX' = UU' = \frac{1}{2}DD'$ olur.



$h_F, h_A, h_W, \ldots$, sırasıyla $F, A, W, \ldots$ noktalarının BC'ye uzaklıklarını göstersin. Açıkça $h_Z = \frac{1}{2}h_F$ ve $h_W = \frac{1}{2}(h_F + h_A)$ olduğundan, toplayarak $h_Z + h_W - h_F = \frac{1}{2}h_A = h_Y + h_V - h_E$ elde edilir. PQR üçgeninin alanını $[PQR]$ ile gösterelim ve $S = [ABC]$, $\sigma = [DEF]$, $\sigma_1 = [XYZ]$, $\sigma_2 = [UVW]$, $\sigma' = [D'EF]$, $\sigma_1' = [X'YZ]$, $\sigma_2' = [U'VW]$ alalım.

Bu özdeşlikleri kullanarak

$$\sigma' - \sigma = \tfrac{1}{2}DD'(h_E - h_F),$$
$$\sigma_1' - \sigma_1 = \tfrac{1}{2}XX'(h_Y - h_Z) = \tfrac{1}{4}DD'(h_Y - h_Z)$$

ve

$$\sigma_2' - \sigma_2 = \tfrac{1}{4}DD'(h_V - h_W).$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\left(\sigma_1' + \sigma_2' - \tfrac{1}{2}\sigma'\right) - \left(\sigma_1 + \sigma_2 - \tfrac{1}{2}\sigma\right) &= \tfrac{1}{4}DD'(h_Y - h_Z + h_V - h_W - h_E + h_F)\\ &= \tfrac{1}{4}DD'((h_Y + h_V - h_E) - (h_Z + h_W - h_F))\\ &= \tfrac{1}{4}DD'\left(\tfrac{1}{2}h_A - \tfrac{1}{2}h_A\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

Simetriden, D' noktası B ile D arasında olduğunda da yukarıdaki ifadenin sıfır olduğu açıktır. Aynı yolla, F yerine AB üzerinde F' ve $D'EF$ yerine $D'EF'$ üçgenini; sonra E yerine AC üzerinde E' ve $D'EF'$ yerine $D'E'F'$ üçgenini alırsak, $\sigma_1+\sigma_2-\frac{1}{2}\sigma$'nın DEF'ye göre değişmez olduğunu buluruz.
$\sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{2}\sigma$'nın değerini $E = A$, $F = B$, $D = C$ alarak elde ederiz. O zaman $X = C$, $Y = A$, $Z = B$ olur; U, V, W, sırasıyla BC, CA, AB'nin orta noktalarıdır. Ayrıca $\sigma = S$, $\sigma_1 = S$, $\sigma_2 = \frac{1}{4}S$ olduğundan $\sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{2}\sigma = \frac{3}{4}S$ olur.

II. László Szücs'ün çözümü, Fort Lewis College, Durango, Colorado.
$[ABC] = \text{Alan}(\triangle ABC)$ gösterimini kullanacağız. Verilen ifade şöyle yazılabilir:

$$\begin{aligned}&([ABC] - ([AWV] + [BUW] + [CVU]))\\ &\quad + ([ABC] - ([AZY] + [BXZ] + [CYX]))\\ &\quad - (1/2)([ABC] - ([AFE] + [BDF] + [CED])).\end{aligned}$$

$[AFE] = 4[AWY]$, $[BDF] = 4[BUZ]$, $[CED] = 4[CVX]$ bağıntıları kullanılırsa ifade

$$\begin{aligned}\tfrac{3}{2}[ABC] - ([AWV] - [AWY] + [AZY] - [AWY]\\ + [BUW] - [BUZ] + [BXZ] - [BUZ]\\ + [CVU] - [CVX] + [CYX] - [CVX]).\end{aligned}$$

Şimdi $[AWV] - [AWY] = [VYW] = \frac{1}{4}[CAF]$ bağıntısını ve bunun beş benzerini kullanarak

$$\tfrac{3}{2}[ABC] - \tfrac{1}{4}([CAF] + [EAB] + [ABD] + [FBC] + [BCE] + [DCA]),$$

elde ederiz. Bunun aşağıdaki değere eşit olduğu kolayca görülür:

$$\tfrac{3}{2}[ABC] - \tfrac{3}{4}[ABC] = \tfrac{3}{4}[ABC].$$

Larry E. Askins, Eynshteyn Averbukh, Seung-Jin Bang (Kore), Karen Benbury, Francisco Bellot Rosado (İspanya), Scott D. Cohen (öğrenci), C. Patrick Collier, Miquel Amengual Covas (İspanya), Jordi Dou (İspanya), Ragnar Dybvik (Norveç), Kao H. ve Irene C. Sze, Milton P. Eisner, Jiro Fukuta (Japonya), Thomas E. Gantner, John F. Goehl, Jr., Cornelius Groenewoud, H. Guggenheimer, Francis M. Henderson, Ralph P. Grimaldi, Russell Jay Hendel, Paul Irwin, Geoffrey A. Kandall, Václav Konečný, Philip Lau, Eugene Lee, Peter W. Lindstrom, James Pfaendtner, Richard E. Pfiefer, Rolf Rosenkranz (Almanya), Ioan Sadoveanu, Jyotirmoy Sarkar, Volkhard Schindler (Almanya), Mohammad Parvez Shaikh (öğrenci), Ching-Kuang Shene, John S. Sumner, Jordan Tabov (Bulgaristan), Michael Vowe ve problemi öneren de çözmüşlerdir.

Tabov daha genel şu sonucu ispatlamıştır. $A_1A_2A_3$ üçgenini, 0 ve 1'den farklı bir α gerçel sayısını ve λ, μ gerçel sayılarını ele alalım. Sırasıyla A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 doğruları üzerindeki keyfî X_1, X_2, X_3 noktaları için C_{ij} $(i, j = 1, 2, 3;\ i \neq j)$ noktalarını $\overrightarrow{OC_{ij}} = \alpha\overrightarrow{OA_i} + \beta\overrightarrow{OX_j}$ ile tanımlayalım; burada O, $A_1A_2A_3$ üçgeninin düzlemi dışında herhangi bir nokta ve $\beta = 1 - \alpha$'dır. $F(X_1, X_2, X_3) = \lambda[C_{23}C_{31}C_{12}] + \mu[C_{13}C_{21}C_{32}] - [X_1X_2X_3]$ olsun; köşeli parantezler işaretli alanı göstersin ve X_1, X_2, X_3, sırasıyla A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 doğrularını birbirinden bağımsız olarak tarasın. O zaman $F(X_1, X_2, X_3)$ fonksiyonu ancak ve ancak $\lambda = \mu = \frac{1}{2}(1-\alpha)^{-2}$ ise sabittir. (Verilen problem $\alpha = 1/2$ durumuna karşılık gelir.)

1377 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü:
Mathematics Magazine, 65, (1992), 199.

Bir Üçgen Değişmezi **Haziran 1991**

1377. *Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.*

DEF, ABC üçgeninin içine çizilmiş değişken bir üçgen; U, X, V, Y, W, Z ise sırasıyla BD, DC, CE, EA, AF, FB doğru parçalarının orta noktaları olsun. Aşağıdaki alan ifadesinin

$$|UVW| + |XYZ| - \tfrac{1}{2}|DEF|$$

sabit olduğunu gösteriniz.

Hans Kappus'un çözümü, Basel Üniversitesi Matematik Enstitüsü, İsviçre.
Söz konusu ifadeyi S ile gösterelim. $S = \frac{3}{4}\,\text{Alan}(ABC)$ olduğunu göstereceğiz.

$S/\,\text{Alan}(ABC)$ afin dönüşümler altında değişmediğinden, afin koordinat sistemini $A = (0,0)$, $B = (1,0)$, $C = (0,1)$ olacak biçimde seçebiliriz. Şimdi

$$D = (1-r, r), \qquad E = (0, s), \qquad F = (t, 0); \qquad 0 \le r, s, t, \le 1.$$

alalım. O zaman

$$U = (1 - r/2, r/2), \qquad V = (0, (1+s)/2), \qquad W = (t/2, 0),$$
$$X = ((1-r)/2, (1+r)/2), \qquad Y = (0, s/2), \qquad Z = ((1+t)/2, 0).$$

Bu koordinatlar kullanılarak aşağıdaki alanlar doğrudan hesaplanabilir:

$$\text{Alan}(UVW) = \tfrac{1}{8}(2 - r + 2s - t - rs + rt - st)$$

$$\text{Alan}(XYZ) = \tfrac{1}{8}(1 + r + t - rs + rt - st)$$

$$\text{Alan}(DEF) = \tfrac{1}{2}(s - rs + rt - st).$$

Buradan $S = 3/8 = \frac{3}{4}\,\text{Alan}(ABC)$ elde edilir.

Beno Arbel (İsrail), H. Guggenheimer, Francis M. Henderson, John G. Heuver (Kanada), Thomas Jager, Václav Konečný, Helen M. Marston, Ralph Merrill, José Heber Nieto (Venezuela), Chrysostom G. Petalas (Yunanistan), F. C. Rembis, Robert L. Young, Paul J. Zwier, imzasız bir çözüm gönderen kişi ve problemi öneren de çözmüşlerdir.

Birçok kişi problemin verildiği biçimiyle yanlış olduğunu belirtmiştir. Problemde amaçlanan, D, E, F'nin sırasıyla BC, CA, AB doğru parçaları üzerinde bulunmasıydı. Bu problemin düzeltilmiş biçimi Nisan 1991'de 1371 numarasıyla yayımlanmış, Nisan 1992 sayısında da birkaç çözüm verilmiştir. Her nasılsa düzeltilmemiş sürüm kabul edilmiş öneriler dosyasından çıkarılmamış ve böylece yanlışlıkla yeniden yayımlanmıştır. Özür dileriz.

1405 Numaralı Önerilen Problemin Çözümü: *Mathematics Magazine*, 66, (1993), 269.

İzogonal İlişkili Çemberler — Ekim 1992

1405. *Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.*

Bir üçgenin farklı açıları içine çizilmiş iki çembere, üçüncü köşeden çizilen ve kenarlarla çakışmayan teğetler, üçüncü açının açıortayına göre simetrikse, bu iki çemberin *izogonal ilişkili* olduğu söylenir. Bir üçgenin farklı açıları içine çizilmiş üç çember verildiğinde, oluşan üç çember çiftinden herhangi ikisi izogonal ilişkiliyse, üçüncü çiftin de öyle olduğunu ispatlayınız.

Problemi önerenin çözümü.
$\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$, verilen ABC üçgeninin sırasıyla BAC, CBA, ACB açıları içine çizilmiş çemberler olsun. $i = 1, 2, 3$ için I_i, r_i, Γ_i'nin merkezi ve yarıçapı olsun. E, F, AB kenarı üzerinde, $E, F \notin \{A, B\}$ ve CE, CF sırasıyla Γ_1, Γ_2'ye teğet olacak biçimde noktalar olsun. $\gamma = \angle ACE$ ve $\mu = \angle FCB$ olsun. Her zamanki gibi a, b, c, sırasıyla BC, CA, AB kenarlarının uzunluklarını göstersin.

Sırasıyla AI_1C ve I_2BC üçgenleri ele alınırsa

$$b = \left(\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{\gamma}{2}\right) r_1$$
$$a = \left(\cot\frac{B}{2} + \cot\frac{\mu}{2}\right) r_2.$$

Γ_1 ile Γ_2, ancak ve ancak $\gamma = \mu$ ise izogonal ilişkilidir. Yukarıdaki denklemlere göre bu, ancak ve ancak

$$\frac{b}{r_1} - \cot\frac{A}{2} = \frac{a}{r_2} - \cot\frac{B}{2},$$

veya buna denk olarak

$$\frac{b}{r_1} - \frac{s-a}{r} = \frac{a}{r_2} - \frac{s-b}{r},$$

ise gerçekleşir; burada $2s = a+b+c$ ve r, ABC üçgeninin içteğet çemberi yarıçapıdır. Bu eşitlik yeniden düzenlenerek

$$\frac{a}{(1/r_1 - 1/r)} = \frac{b}{(1/r_2 - 1/r)}. \tag{1}$$

biçimine getirilir. Benzer biçimde Γ_2 ile Γ_3, ancak ve ancak

$$\frac{b}{(1/r_2 - 1/r)} = \frac{c}{(1/r_3 - 1/r)}. \tag{2}$$

ise izogonal ilişkilidir. (1) ve (2) birleştirilince

$$\frac{a}{(1/r_1 - 1/r)} = \frac{c}{(1/r_3 - 1/r)},$$

elde edilir; bu da ancak ve ancak Γ_1 ile Γ_3 izogonal ilişkiliyse gerçekleşir.

Richard Holzsager, Jiro Fukuta (Japonya) ve Francisco Bellot Rosado ile María Ascensión López (İspanya) da çözmüşlerdir.

8 *Mathematics Magazine* için Kısa Problemler

Hüseyin Demir'in Kurduğu Kısa Problemlerin Listesi
[1] Kısa Problem 117, *Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 37.
[2] Kısa Problem 138, *Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 241.
[3] Kısa Problem 141, *Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 292.
[4] Kısa Problem 166, *Mathematics Magazine*, 29, (1955-1956), 229.
[5] Kısa Problem 188, *Mathematics Magazine*, 30, (1956-1957), 172.
[6] Kısa Problem 227, *Mathematics Magazine*, 32, (1958-1959), 32.
[7] Kısa Problem 234, *Mathematics Magazine*, 32, (1958-1959), 113.
[8] Kısa Problem 242, *Mathematics Magazine*, 32, (1958-1959), 229.
[9] Kısa Problem 266, *Mathematics Magazine*, 33, (1959-1960), 302.
[10] Kısa Problem 281, *Mathematics Magazine*, 34, (1961), 303.
[11] Kısa Problem 284, *Mathematics Magazine*, 34, (1961), 303.
[12] Kısa Problem 341, *Mathematics Magazine*, 37, (1964), 251.
[13] Kısa Problem 343, *Mathematics Magazine*, 37, (1964), 251.
[14] Kısa Problem 710, *Mathematics Magazine*, 59, (1986), 112.

Kısa Problem 117, *Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 37.

Q 117. Bir satranç tahtasında kaç kare vardır? [*Gönderen: Hüseyin Demir.*]

Kısa Problem 138, *Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 241.

Q 138. $S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n!$ toplamını bulunuz. [*Gönderen: Hüseyin Demir.*]

Kısa Problem 141, *Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 292.

Q 141. Yılın on iki ayı $5n + 2 \pmod{12}$, $n = 1, 2, 3, \ldots, 12$ sırasına göre yazılırsa ilk yedi, sonraki dört ve son ayın özellikleri hakkında ne söylenebilir? [*Gönderen: Hüseyin Demir.*]

Kısa Problem 166, *Mathematics Magazine*, 29, (1955-1956), 229.

Q 166. İlk m ardışık tamsayının küpleri toplamı, sonraki n ardışık tamsayının küpleri toplamına eşit olabilir mi? [*Gönderen: Hüseyin Demir.*]

Kısa Problem 188, *Mathematics Magazine*, 30, (1956-1957), 172.

Q 188. Bir saatin akrep ve yelkovanı hangi zamanlarda yer değiştirdiğinde yine doğru bir saat gösterimi elde edilir? [*Gönderen: Hüseyin Demir.*]

Kısa Problem 227, *Mathematics Magazine*, 32, (1958-1959), 32.

Q 227. $f(1), f(2), f(3), \ldots, f(13), f(14)$ değerlerinin hepsi asal sayı, ancak ne hepsi eşit ne de hepsi birbirinden farklı olacak biçimde bir *f(n)* fonksiyonu bulunuz. [*Gönderen: Hüseyin Demir.*]

Kısa Problem 234, *Mathematics Magazine*, 32, (1958-1959), 113.

Q 234. $A(x)B(x)$'in katsayıları toplamı sıfırsa, polinomlardan birinin katsayıları toplamı zorunlu olarak sıfırdır. [*Gönderen: Hüseyin Demir.*]

Kısa Problem 242, *Mathematics Magazine*, 32, (1958-1959), 229.

Q 242. $f(\text{çift}) = \frac{1}{2}$ ve $f(\text{tek}) = 1$ olacak biçimde bir $f(n)$ bulunuz. [*Gönderen: Hüseyin Demir.*]

Kısa Problem 266, *Mathematics Magazine*, 33, (1959-1960), 302.

Q 266. p, 3'ten büyük bir asal sayıysa $p^2 + 2$ bileşik sayıdır. [*Gönderen: Hüseyin Demir.*]

Kısa Problem 281, *Mathematics Magazine*, 34, (1961), 303.

Q 281. Bir üçgenin dışteğet çemberlerinin üçüne de teğet olan içteki çemberin yarıçapını hesaplayınız. [*Gönderen: Hüseyin Demir.*]

Kısa Problem 284, *Mathematics Magazine*, 34, (1961), 303.

Q 284. Bir üçgenin kenarlarına izdüşümleri doğrusal olan noktaların geometrik yeri nedir? [*Gönderen: Hüseyin Demir.*]

Kısa Problem 341, *Mathematics Magazine*, 37, (1964), 251.

Q 341. n sonsuza giderken aşağıdaki kesrin limitini bulunuz:

$$\frac{\phi(1) + \phi(2) + \phi(3) + \cdots + \phi(n)}{1 + 2 + 3 + \cdots + n}$$

burada $\phi(n)$, Euler'in fi fonksiyonudur.

[*Gönderen: Hüseyin Demir.*]

Kısa Problem 343, *Mathematics Magazine*, 37, (1964), 251.

Q 343. Aşağıdaki eşitliği sağlayan θ açısını bulunuz:

$$\frac{\sin(1\cdot\theta + 15°)}{\sqrt{1}} = \frac{\sin(2\cdot\theta + 15°)}{\sqrt{2}} = \frac{\sin(3\cdot\theta + 15°)}{\sqrt{3}}.$$

[*Gönderen: Hüseyin Demir.*]

Kısa Problem 710, *Mathematics Magazine*, 59, (1986), 112.

Q 710. *Gönderen: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.*
n herhangi bir pozitif tamsayıysa $T = \frac{1}{8}n(n+1)(n+2)(n+3)$ sayısının bir üçgensel sayı olduğunu gösteriniz.

9 Kısa Problemlerin Çözümleri

---

117 Numaralı Kısa Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 37.**

A 117. 64 değil, $1^2 + 2^2 + \cdots + 8^2 + \dfrac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} = 204$'tür.

---

138 Numaralı Kısa Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 241.**

A 138.

$$S = \sum_{p=1}^{n} p \cdot p! = \sum_{p=1}^{n} (p + 1 - 1) \cdot p!$$

$$= \sum_{p=1}^{n} (p + 1)! - \sum_{p=1}^{n} p!$$

$$= (n + 1)! - 1$$

---

141 Numaralı Kısa Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 292.**

A 141. Listelenen ilk yedi ay 31 gün, sonraki dört ay 30 gün, son ay ise 29 veya 28 gün sürer.

---

166 Numaralı Kısa Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 29, (1955-1956), 29.**

A 166. Eğer

$$1^3 + 2^3 + \ldots + m^3 = (m + 1)^3 + \ldots + (m + n)^3$$

ise

$$2(1^3 + 2^3 + \ldots + m^3) = 1^3 + 2^3 + \ldots + (m + n)^3$$

yani

$$2[\tfrac{1}{2}m(m + 1)]^2 = [\tfrac{1}{2}(m + n)(m + n + 1)]^2$$

ya da

$$\tfrac{1}{2}\, m(m + 1)\sqrt{2} = \tfrac{1}{2}(m + n)(m + n + 1)$$

Fakat bu son denklem olanaksızdır. Dolayısıyla yanıt hayırdır.

---

188 Numaralı Kısa Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 30, (1956-1957), 172.**

A 188. T anındaki saat sayısını p, bir saatin kesrini a ile gösterelim. Akrep ve yelkovan yer değiştirdiğinde, karşılık gelen sayılar p', a' olmak üzere yeni bir t' zamanı elde ederiz ($p' \geq p$ varsayabiliriz). t anında yelkovanın saat birimiyle açısı $p' + a'$, a'nın 12 katıdır:

$$p' + a' = 12, \quad 0 \leq p' < 12, \quad a' < 1.$$
$$p + a = 12\,a', \quad 0 \leq p < 12, \quad a < 1.$$

Buradan

$$a = (12p' + p)/143$$
$$a' = (p' + 12p)/143\ .$$

Böylece 12'den küçük herhangi iki pozitif tamsayı p, p' verildiğinde a ve a', dolayısıyla istenen zamanlar elde edilir.

---

227 Numaralı Kısa Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 32, (1958-1959), 32.**

A 227. $f(n) = 1 - \phi(n)$

---

234 Numaralı Kısa Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 32, (1958-1959), 113.**

A 234. $x = 1$ için $\sum a_i \cdot \sum b_i = \sum c_i$ olur ve sonuç çıkar.

---

242 Numaralı Kısa Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 32, (1958-1959), 229.**

A 242. $f(n) = \frac{1}{2}(n + 1 - 2[n/2])$ alınır; burada $[n/2]$, $n/2$'yi aşmayan en büyük tamsayıdır.

---

266 Numaralı Kısa Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 33, (1959-1960), 302.**

A 266. p, 3'ten büyük bir asal sayıysa $p^2 + 2 = (6m \pm 1)^2 + 2 \equiv 0 \pmod 3$ olur.

281 Numaralı Kısa Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 34, (1961), 303.**

A 281. Bu çember, üçgenin dokuz nokta çemberi olduğundan yarıçapı $\frac{1}{2}R$'dir.

284 Numaralı Kısa Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 34, (1961), 303.**

A 284. Noktaların üçgenin düzleminde bulunması şart koşulursa geometrik yer üçgenin çevrel çemberidir. Böyle bir kısıtlama yapılmadığından, geometrik yer bu çevrel çemberi dik kesit olarak alan dik silindirdir.

341 Numaralı Kısa Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 37, (1964), 251.**

A 341. $\phi(k)$, k'den küçük ve onunla aralarında asal olan tamsayıların sayısını gösterir. Dolayısıyla

$$\sum_{1}^{n} \phi(k)$$

ilk n tamsayı arasındaki aralarında asal çiftlerin toplam sayısıdır; bütün çiftlerin sayısı ise $\binom{n}{2}$'dir. Verilen kesrin limiti

$$\sum_{1}^{n} \phi(k) \Big/ \binom{n}{2}$$

ifadesinin limiti olduğundan, rastgele seçilen herhangi iki tamsayının aralarında asal olma olasılığına eşittir. Bu olasılığın $6/\pi^2$ olduğu bilinir. Dolayısıyla verilen kesrin limiti $6/\pi^2$'dir.

343 Numaralı Kısa Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 37, (1964), 251.**

A 343. θ açısı açıkça 15°'dir.

710 Numaralı Kısa Problemin Çözümü:
***Mathematics Magazine*, 59, (1986), 112.**

A 710. Bir pozitif tamsayı k için $\frac{1}{8}n(n+1)(n+2)(n+3) = \frac{1}{2}k(k+1)$ ise T üçgensel sayıdır. Teklik ve çiftlik durumları dikkate alınıp $n(n+3) < (n+1)(n+2)$ olduğu gözlemlenince, $k = n(n+3)/2$ denenir. O zaman

$$k+1 = \frac{n(n+3)}{2} + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

olur ve sonuç elde edilir.

10 *Mathematics Magazine* Problemlerine Sunulan Çözümler

Hüseyin Demir'in Önerilen Problemlere Sunduğu Çözümlerin Listesi

[1] Önerilen Problem 192, *Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 36.
[2] Önerilen Problem 203, *Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 163.
[3] Önerilen Problem 204, *Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 165.
[4] Önerilen Problem 221, *Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 291.
[5] Önerilen Problem 226, *Mathematics Magazine*, 29, (1955-1956), 488.
[6] Önerilen Problem 270, *Mathematics Magazine*, 30, (1956-1957), 108.
[7] Önerilen Problem 272, *Mathematics Magazine*, 30, (1956-1957), 166.
[8] Önerilen Problem 332, *Mathematics Magazine*, 32, (1958-1959), 52.
[9] Önerilen Problem 353, *Mathematics Magazine*, 32, (1958-1959), 226.
[10] Önerilen Problem 374, *Mathematics Magazine*, 33, (1959-1960), 113.
[11] Önerilen Problem 383, *Mathematics Magazine*, 33, (1959-1960), 228.
[12] Önerilen Problem 387, *Mathematics Magazine*, 33, (1959-1960), 233.
[13] Önerilen Problem 400, *Mathematics Magazine*, 34, (1960-1961), 53.
[14] Önerilen Problem 401, *Mathematics Magazine*, 34, (1960-1961), 55.
[15] Önerilen Problem 646, *Mathematics Magazine*, 40, (1967), 226.
[16] Önerilen Problem 653, *Mathematics Magazine*, 42, (1969), 283.
[17] Önerilen Problem 1199, *Mathematics Magazine*, 58, (1985), 243.
[18] Önerilen Problem 1256, *Mathematics Magazine*, 61, (1988), 54.

---

192 Numaralı Önerilen Probleme Sunulan Çözüm: *Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 36.

192. [Ocak 1954] *Öneren: V. Thebault, Tennie, Sarthe, Fransa.*

A', B', C', ABC üçgeninin köşelerinin sabit bir noktaya göre simetrikleri olsun. $AB'C', BC'A', CA'B'$ üçgenlerinin çevrel çemberleri, ABC üçgeninin çevrel çemberi üzerinde bulunan ortak bir noktadan geçer.

Hüseyin Demir'in çözümü, Zonguldak, Türkiye. Çevrel çemberlerden herhangi ikisinin, ABC'nin çevrel çemberi (O) üzerinde kesiştiğini ispatlamak yeterlidir. I, $BC'A'$ ve $CA'B'$ çemberlerinin kesişim noktası olsun. I'nın (O) üzerinde olduğunu ispatlamak için $\angle BIC = \angle BAC = \angle A$ olduğunu gösterelim: $\angle BIC = \angle BIA' + \angle A'IC = \angle BC'A' + \angle A'B'C = \angle B'CA + \angle KB'C = \angle B'CK + \angle KB'C = \angle A'KC = \angle BAC = \angle A$.

İlk eşitlik, bir yanda B, I, C', A',

diğer yanda B, B', C, A' noktalarının ilgili çevrel çemberler üzerinde bulunmasından; diğer eşitlikler ise aşağıdaki paralelliklerden çıkar:

$$BC' \parallel CB', A'C' \parallel AC, A'B' \parallel AB.$$

H. E. Fettis, Dayton, Ohio; O. J. Ramler, Amerika Katolik Üniversitesi ve problemi öneren de çözmüşlerdir.

---

203 Numaralı Önerilen Probleme Sunulan Çözüm: *Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 163.

203. [Mayıs 1954] *Öneren: Norman Anning, Alhambra, Kaliforniya.*

$x^2 - y^2 + ax + by = 0$ ile $x^2 + y^2 - a^2 - b^2 = 0$ eğrilerinin kesişim noktalarından üçünün, bu üç noktadan geçen çemberi üç eşit parçaya böldüğünü ispatlayınız.

II. Hüseyin Demir'in çözümü, Zonguldak, Türkiye. $r^2 = a^2 + b^2$ alalım ve iki denklemi toplayarak elde edilen y değerini ilk denklemde yerine koyalım. Böylece

$$4x^4 + 4ax^3 - 3r^2x^2 - 2ar^2x + a^2r^2 = 0,$$

x'e göre, kökleri x_1, x_2, x_3, x_4 olan dördüncü dereceden bir denklem elde ederiz.

x_1, x_2, x_3'e karşılık gelen $A_1A_2A_3$ üçgeni eşkenarsa $x_1 + x_2 + x_3$ sıfır olur (çünkü $A_1A_2A_3$, merkezi 0 olan $x^2 + y^2 - r^2 = 0$ çemberi içindedir); ikinci katsayıdan $(x_1 + x_2 + x_3) + x_4 = x_4 = -a$ bulunur.

Dolayısıyla iddiayı ispatlamak için yukarıdaki denklemin $x + a$ ile bölünebildiğini ve elde edilen bölümde x^2 teriminin bulunmadığını göstermek yeterlidir.

Bölme işlemiyle

$$4x^4 + 4ax^3 - 3r^2x^2 - 2ar^2x + a^2r^2 = (x + a)(4x^3 - 3r^2x + ar^2),$$

elde edilir; bu da yukarıdaki söylediklerimizle uyumludur. Dolayısıyla $A_1A_2A_3$ bir eşkenar üçgendir.

204 Numaralı Önerilen Probleme Sunulan Çözüm: *Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 165.

204. [Mayıs 1954] *Öneren: C. W. Trigg, Los Angeles City College.*

ABC üçgeninde a kenarına ait kenarortayın (m_a), iç açıortayın (t_a), içteğet çemberinin a ile değme noktasına çizilen cevianın (p_a) ve A'ya karşılık gelen dışteğet çemberinin a ile değme noktasına çizilen cevianın (q_a) ayakları sırasıyla A_m, A_t, A_p, A_q olsun. b ve c'ye ait karşılık gelen doğrular için benzer gösterimler kullanılsın.

1) Şu üçlülerin belirtilen noktalarda kesişmesi için üçgenin kenarları arasındaki bağıntıyı belirleyiniz: p_a, m_b, t_c, S'de; p_z, q_b, m_c, R'de; m_a, p_b, t_c, T'de; q_a, p_b, m_c, V'de.
2) A_pB_q ile A_qB_p'nin AB'ye; C_tB_p ile SV'nin BC'ye; C_tA_p ile RT'nin AC'ye paralel olduğunu gösteriniz.

Hüseyin Demir'in çözümü, Zonguldak, Türkiye. 1) u_a, v_b, w_c cevianlarının, ya da sırasıyla BC, CA, AB üzerindeki ayakları A_u, B_v, C_w'nin konumlarını şu oranlarla belirleyelim:

$$k(A_u) = A_uB/A_uC, \quad k(B_v) = B_vC/B_vA, \quad k(C_w) = C_wA/C_wB$$

Bu noktalar kenarların iç noktaları olduğundan bütün bu oranlar negatiftir. Değerleri aşağıdaki tabloda verilmiştir:

$$k(A_m) = -1,\ k(A_t) = -c/b,\ k(A_p) = -(s-b)/(s-c),\ k(A_q) = -(s-c)/(s-b)$$

$$k(B_m) = -1,\ k(B_t) = -a/c,\ k(B_p) = -(s-c)/(s-a),\ k(B_q) = -(s-a)/(s-c)$$

$$k(C_m) = -1,\ k(C_t) = -b/a,\ k(C_p) = -(s-a)/(s-b),\ k(C_q) = -(s-b)/(s-a)$$

Şimdi cevian üçlülerine Ceva teoremi uygulanarak istenen ortak koşul elde edilir:

ÜÇLÜLER:	NOKTALAR:	CEVA TEOREMİ:	KOŞULLAR:
$p_a,\ m_b,\ t_c$	S	$[-(s-b)/(s-c)][-1][-b/a]=-1$	$(s-b)/(s-c)=a/b$
$p_a,\ q_b,\ m_c$	R	$[-(s-b)/(s-c)][-(s-a)/(s-c)][-1]=-1$	$(s-a)(s-b)=(s-c)^2$
$m_a,\ p_b,\ t_c$	T	$[-1][-(s-c)/(s-a)][-b/a]=-1$	$(s-c)/(s-a)=a/b$
$q_a,\ p_b,\ m_c$	V	$[-(s-c)/(s-b)][-(s-c)/(s-a)][-1]=-1$	$(s-c)^2=(s-a)(s-b)$

Elde edilen bu dört koşulun, aşağıdaki tek koşulla aynı olduğu kolayca görülür:

$$c = (a^2 + b^2)/(a + b) .$$

2) (a) $A_pB_q \parallel A_qB_p \parallel AB$'yi ispatlamak için $k(A_p) = 1/k(B_q)$, $k(A_q) = 1/k(b_p)$ olduğunu gözlemleyelim.
(b) $C_tB_p \parallel BC$'yi ispatlamak için benzer biçimde $k(B_p) = 1/k(C_t)$ olduğunu gözlemleyelim (bkz. koşul (3)).

Şimdi $SV \parallel BC$'yi ispatlamak için, sırasıyla ASA_p, AVA_q doğrularıyla kesilen BCB_m, BCC_m üçgenlerine Menelaus teoremini uygulayalım:

$$(A_pB/A_pC)(AC/AB_m)(SB_m/SB) = 1, \quad \text{ise} \quad SB/SB_m = 2k(A_p) .$$

$$(A_qB/A_qC)(VC/VC_m)(AC_m/AB) = 1, \quad \text{ise} \quad VC/VC_m = 2/k(A_q).$$

Dolayısıyla

$$SB/SB_m = 2k(A_p) = 2/k(A_q) = VC/VC_m .$$

Bu, S, V noktalarının BB_m, CC_m'yi aynı oranda böldüğünü ispatlar. $B_mC_m \parallel BC$ olduğundan sonuç çıkar.
(c) $C_tA_p \parallel AC$'yi ispatlamak için $k(C_t) = 1/k(A_p)$ olduğunu gözlemleyelim.

Son olarak $RT \parallel AC$'yi göstermek için, sırasıyla BRB_q, BTB_p doğrularıyla kesilen CAC_m, CAA_m üçgenlerine yeniden Menelaus teoremini uygulayalım:

$$k(B_q)\ (BA/BC_m)(RC_m/RC) = 1 \quad \text{ise} \quad RC/RC_m = 2k(B_q) ,$$

$$k(B_p)\ (TA/TA_m)(BA_m/BC) = 1 \quad \text{ise} \quad TA/TA_m = 2/k(B_p),$$

ve

$$RC/RC_m = 2k(B_q) = 2/k(B_p) = TA/TA_m .$$

Dolayısıyla R, T, CC_m, AA_m'yi aynı oranda böler. $C_mA_m \parallel CA$ olduğundan $RT \parallel CA$ da elde edilir. İspat tamamlanmıştır.

Rahibe M. Stephanie, Georgian Court College, New Jersey ve problemi öneren de çözmüşlerdir.

---

221 Numaralı Önerilen Probleme Sunulan Çözüm: *Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 291.

221. [Kasım 1954] *Öneren: E. P. Starke, Rutgers Üniversitesi.*

Bir konik yüzey üzerinde, her ana doğruyu sabit bir ψ açısıyla kesen bir spiral çizilmiştir. Bu spiralin herhangi iki noktası arasındaki uzunluğu için basit bir ifade bulunuz.

Hüseyin Demir'in çözümü, Zonguldak, Türkiye.

Koni açılabilir bir yüzeydir. Açıldığında, koni üzerindeki ψ spirali, düzlem üzerinde kutupsal denklemi aşağıdaki gibi olan bir ψ logaritmik spiraline dönüşür:

$$r = a\, e^{(\cot\psi)\theta}$$

O zaman $$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = \frac{a}{\sin\psi}\, e^{(\cot\psi)\theta}\, d\theta.$$

Spiral üzerindeki iki nokta arasında

$$s = \frac{a}{\sin\psi}\int_a^b e^{(\cot\psi)\theta} d\theta = \frac{a}{\cos\psi}\left| e^{(\cot\psi)\theta}\right|_a^b = \frac{|r|_a^b}{\cos\psi}$$

$s = (b-a)/\cos\psi$ olur; burada a, b, noktaların koninin tepesine uzaklıklarını gösterir.

Walter B. Carver, Cornell Üniversitesi; M. S. Klamkin, Brooklyn Politeknik Enstitüsü; S. H. Sesskin, Hofstra College, New York; A. Sisk, Maryville College, Tennessee ve problemi öneren de çözmüşlerdir.

---

226 Numaralı Önerilen Probleme Sunulan Çözüm: *Mathematics Magazine*, 29, (1955-1956), 48.

226. [Ocak 1955] *Öneren: P. D. Thomas, Eglin Hava Üssü, Florida.*

Bir P noktasından bir elipse teğetler çiziliyor. R, Q değme noktaları, O da elipsin merkezi olsun. $PQOR$ dörtgeninin alanı sabit kaldığında P'nin geometrik yerini bulunuz.

II. Hüseyin Demir'in çözümü, Zonguldak, Türkiye. Elips bir çemberin dik izdüşümüdür. Karşılık gelen dörtgen $P'Q'OR'$ olsun. İki dörtgenin alanları oranı sabit olduğundan P''nün geometrik yeri eş merkezli bir çemberdir. Dolayısıyla P''nün izdüşümü P'nin geometrik yeri, başlangıçtaki elipsle homotetik bir elipstir.

M. S. Klamkin, Brooklyn Politeknik Enstitüsü; S. H. Sesskin, Hofstra College; E. P. Starke, Rutgers Üniversitesi; Chih-yi Wang, Minnesota Üniversitesi ve problemi öneren de çözmüşlerdir.

---

270 Numaralı Önerilen Probleme Sunulan Çözüm:
***Mathematics Magazine*, 30, (1956-1957), 108.**

Hilal İçindeki Çemberler

270. [Mart 1956] *Öneren: Leon Bankoff, Los Angeles, Kaliforniya.*

Bir yarım çember ile bir çemberin dörtte birinden oluşan hilalin içine mümkün olan en büyük çember çiziliyor. Hilalin sınırlarına teğet olan ve ilki en büyük çembere,

ikincisi ilkine ve böylece her biri bir öncekine teğet olan ardışık çemberlerin yarıçapları için genel bir ifade bulunuz.

Hüseyin Demir'in çözümü, Kandilli Bölgesi, Türkiye. Verilen $(O), (O')$ çemberleri A, B'de kesişsin; n. çemberin merkezini ve yarıçapını sırasıyla $(O_n), r_n$ ile gösterelim.

Şekle merkezi A, kuvveti $k^2 = AB^2 = 4R^2$ olan inversiyonu uygulayalım. Bu inversiyonda (O), kendi BH_0 teğetine; (O') ise bu doğruyla $2\alpha = 45^\circ$ açı oluşturan BO' doğrusuna dönüşür. (O_i)'lerin görüntüleri (Ω_i) çemberleri, bu açının içine çizilmiş, birbirine teğet bir çemberler dizisi oluşturur. (Ω_n), BH_0'a H_n'de değsin. O zaman (Ω_n)'nin yarıçapı $\rho_n = \Omega_n H_n$ için kolayca

$$\rho_n = \left(\frac{1 - \sin\alpha}{1 + \sin\alpha}\right)^n \rho_0$$

bulunur;
burada

$$\rho_0 = \Omega_0 H_0 = BH_0 \tan\alpha = 2R \tan\alpha.$$

İnversiyonla birbirine dönüşen $(O_n), (\Omega_n)$ çemberlerine ortak AT_nT_n' teğetini çizerek

$$r_n = AT_n \rho_n / AT_n' = AT_n \cdot AT_n' \rho_n / AT_n'^2 = k^2 \rho_n / (A\Omega_n^2 - n^2)$$

yazabiliriz. Ω_n'nin AB'ye izdüşümünü K_n ile gösterirsek

$$\begin{aligned} A\Omega_n^2 - \rho_n^2 &= AK_n^2 + K_n\Omega_n^2 - \rho_n^2 \\ &= (2R + \rho_n)^2 + BH_n^2 - \rho_n^2 \\ &= 4R^2 + 4R\rho_n + (\rho_n \cot\alpha)^2 \end{aligned}$$

$$r_n = \frac{R^2 \rho_n \tan\alpha}{4R^2 + 4R\rho_n + \rho_n^2 \cot^2\alpha}$$

Yukarıdaki ifadede ρ_n'nin değeri yerine konduğunda istenen sonuca, yani

$$r_n = \frac{R}{1 + \frac{1}{2}\left[(1 + \sin\pi/8)^{2n} + (1 - \sin\pi/8)^{2n}\right] \sec^{2n}\pi/8 \cot\pi/8}$$

J. W. Clawson, Collegeville, Pennsylvania ve problemi öneren de çözmüşlerdir.

272 Numaralı Önerilen Probleme Sunulan Çözüm: *Mathematics Magazine*, 30, (1956-1957), 166.

273. [Mayıs 1956] *Öneren: N. A. Court, Oklahoma Üniversitesi.*

Bir üçgenin çevrel çemberine bir kenarın uç noktalarında çizilen teğetlerin kesişim noktası; karşı köşeden çıkan kenarortayın ve bu köşeden söz konusu kenara çizilen paralelin çemberi kestiği iki noktayla doğrusaldır.

II. Hüseyin Demir'in çözümü, Kandilli Bölgesi, Türkiye. A köşesine ait kenarortay ve dış kenarortay, çevrel çemberi sırasıyla E, F'de kessin; diğer köşeler B, C'deki teğetlerin kesişimi K_a olsun. Harmonik oranlardan

$$A\,(B,\ C,\ E,\ F) = (AB,\ AC,\ AE,\ AF) = -1$$

332 Numaralı Önerilen Probleme Sunulan Çözüm: *Mathematics Magazine*, 32, (1958-1959), 52.

332. [Ocak 1958] *Öneren: Norman Anning, Alhambra, Kaliforniya.*
$x^{45} + 1$'i tam bölen 22. dereceden bir polinom bulunmadığını ispatlayınız.

II. Hüseyin Demir'in çözümü, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye. Kökleri birbirinden farklı olan verilen denklemin bir tam çarpanının en büyük derecesi, zorunlu olarak ilkel olmayan köklerinin sayısıdır. İlkel olmayan köklerin sayısı $45 - \phi(45) = 45 - 24 = 21$, 22'den küçük olduğundan böyle bir çarpan yoktur.

D. A. Breault, İstasyon Hastanesi, Fort Monmouth, New Jersey; C. F. Pinzka, Cincinnati Üniversitesi; Norman Anning, Alhambra, Kaliforniya ve problemi öneren de çözmüşlerdir. Bir yanlış çözüm alınmıştır.

353 Numaralı Önerilen Probleme Sunulan Çözüm:
***Mathematics Magazine*, 32, (1958-1959), 226.**

Teğet Çemberler

353. [Eylül 1958] *Öneren: Karl M. Herstein, New York.*

Bir doğru ve bu doğru üzerinde bulunmayan iki nokta veriliyor. Merkezleri verilen doğru üzerinde olan, verilen noktalardan geçen ve birbirine teğet iki eş çember çiziniz.

Hüseyin Demir'in çözümü, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye. Verilen noktalar A, B, doğru d olsun. İki durumu ayıralım:

(1) Çemberler birbirine dıştan teğettir. Yarıçaplar eşit olduğundan yalnızca şu durumlarda çözüm vardır:

(a) Çemberler çakışır. Çakışık çemberler hem A'yı hem B'yi içerir; merkez, d ile AB'nin orta dikmesinin kesişimidir.

(b) L değme noktası sonsuzdadır. Bu durumda çözüm, A ve B'den d'ye inilen diklerden oluşur.

(2) Çemberler birbirine içten teğettir. Çözümler varsa, (1a) ve (1b)'dekilerden farklı olmalıdır.

d'yi x ekseni alalım; $A = (-u, a)$, $B = (u, b)$, $L = (\lambda, 0)$ olsun. Çemberler A, B'nin d'ye göre yansımalarını da içerdiğinden $a \geq b \geq 0$ varsayabiliriz.

Çemberler d'yi $A' = (\alpha, 0)$, $L = (\lambda, 0)$ ve L, $B' = (\beta, 0)$ noktalarında kessin. $A'AL, LBB'$ dik üçgenlerinden

$$a^2 = (\lambda+u)(-u-\alpha) \qquad b^2 = (\beta-u)(u-\lambda)$$

$$\alpha = -\frac{a^2}{\lambda+u} - u \qquad \beta = -\frac{b^2}{\lambda-u} + u$$

$(\lambda - \alpha)$ ve $(\beta - \lambda)$ çaplarını eşitleyerek kübik bir denklem elde ederiz:

$$2\lambda^3 + (a^2+b^2-2u^2)\lambda - u(a^2-b^2) = 0$$

$a^2 - b^2 = 2c^2$ konduğunda denklem

$$\lambda^3 + (b^2+c^2-u^2)\lambda - uc^2 = 0$$

biçimine indirgenir. Δ diskriminantının pozitif, sıfır veya negatif olmasına göre bir, iki (eşit) veya üç çözüm vardır. Şimdi aşağıdaki koşulun sağlandığı bağıntıyı bulalım:

$$\Delta = 4p^3 + 27q^2 = 4(b^2+c^2-u^2)^3 + 27u^2c^4 \leqq 0$$

Burada $p = b^2 + c^2 - u^2$ zorunlu olarak pozitif değildir. Dolayısıyla

$$b^2 + c^2 \leqq u^2 \quad \text{veya} \quad b^2 + c^2 = u^2\cos^2 t \qquad 0 \leq t < \tfrac{1}{2}\pi \text{ için}$$

$$\Delta = 4(u^2\cos^2 t - u^2)^3 + 27u^2c^4 \leqq 0$$

$$-4u^6\sin^6 t + 27u^2c^4 \leqq 0$$

$$27c^4 \leqq 4u^4\sin^6 t$$

Nicelikler negatif olmadığından

$$\sqrt{27}\,c^2 \leqq 2u^2\sin^3 t \leqq 2u^2$$

Son olarak

$$\sqrt{27}\sqrt{a^2-b^2} \begin{cases} > 2u & \text{bir gerçel kök} \\ = 2u & \text{çift veya üç katlı kök} \\ < 2u & \text{üç gerçel kök} \end{cases}$$

Sam Kravitz, East Cleveland, Ohio da çözmüştür.

---

374 Numaralı Önerilen Probleme Sunulan Çözüm:
***Mathematics Magazine*, 33, (1959-1960), 113.**

Eş Alanlı Üçgenler

374. [Mart 1959] *Öneren: Victor Thebault, Tennie, Sarthe, Fransa.*

ABC üçgeninin düzlemindeki herhangi bir P noktasından geçen keyfî bir d doğrusu, BC, CA, AB doğrularını sırasıyla A_1, B_1, C_1 noktalarında kessin. A_1P, B_1P, C_1P doğru parçalarını uzunluklarının üç katı kadar uzatmakla elde edilen noktalar A_1', B_1', C_1' olsun. O zaman AA_1', BB_1', CC_1''nün orta noktaları A_2, B_2, C_2, alanı ABC üçgeninin alanına eşit olan bir üçgenin köşeleridir.

II. Hüseyin Demir'in çözümü, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye. Noktalar arasındaki bağıntıları vektörel eşitliklerle ifade edip vektörel çarpımla istenen sonuca ulaşabiliriz. Önce P noktasının d üzerinde bulunmasının zorunlu olmadığını belirtelim. Verilen gösterimle

$$\vec{PA}_1' = -3\vec{PA}_1 \quad \text{ve} \quad 2\vec{PA}_2 = \vec{PA} + \vec{PA}_1' = \vec{PA} - 3\vec{PA}_1$$

Şimdi

$$2\vec{A_2B_2} = 2(\vec{PB}_2 - \vec{PA}_2) = (\vec{PB} - 3\vec{PB}_1 - \vec{PA} + 3\vec{PA}_1)$$

$$2\vec{A_2B_2} = \vec{AB} - 3\vec{A_1B_1}$$

ve benzer biçimde

$$2\vec{A_2C_2} = \vec{AC} - 3\vec{A_1C_1} \ .$$

Son iki eşitliği taraf tarafa çarparak ve yönlendirilmiş ABC üçgeninin alanını $\overline{ABC}$ ile göstererek

$$\begin{aligned} 4\overline{A_2B_2C_2} &= (\vec{AB} - 3\vec{A_1B_1}) \times (\vec{AC} - 3\vec{A_1C_1}) \\ &= \vec{AB} \times \vec{AC} - 3(\vec{AB} \times \vec{A_1C_1} + \vec{A_1B_1} \times \vec{AC}) + 9\vec{A_1B_1} \times \vec{A_1C_1} \end{aligned}$$

elde ederiz. Son terim sıfır olduğundan

$$\begin{aligned} 4\overline{A_2B_2C_2} &= \overline{ABC} - 3(\vec{AB} \times \vec{A_1A} + \vec{A_1A} \times \vec{AC}) \\ &= \overline{ABC} - 3(\vec{AB} - \vec{AC}) \times \vec{A_1A} \\ &= \overline{ABC} + 3\vec{BC} \times \vec{CA} = 4\overline{ABC} \end{aligned}$$

İspat tamamlandı.

Bu problem şöyle genelleştirilebilir: $A_1B_1C_1$, ABC'nin içine çizilmiş bir üçgen; $\overrightarrow{PA_1'} = -n\overrightarrow{PA_1}$ (bu durumda $n = 3$) ve $\overrightarrow{AA_2} = m\overrightarrow{AA_1'}$ (bu durumda $m = \frac{1}{2}$) olsun. O zaman

$$\overline{A_2B_2C_2} = (1-m)(1-2m+mn)\overline{ABC} + m^2(1-m)^2\overline{A_1B_1C_1}$$

Christopher Henrich (kısmen) ve problemi öneren de çözmüşlerdir.

383 Numaralı Önerilen Probleme Sunulan Çözüm:
***Mathematics Magazine*, 33, (1959-1960), 228.**

Bir Karenin Parçalanması

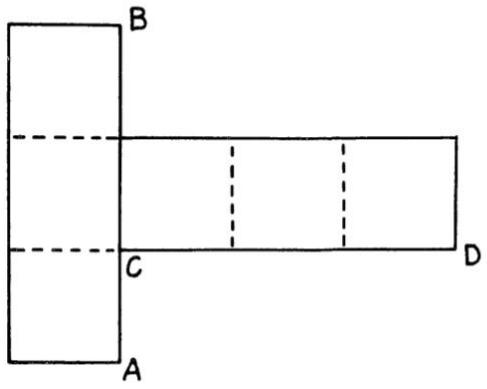
383. [Eylül 1959] *Öneren: Raphael T. Coffman, Richland, Washington.*

Herhangi bir kareyi en fazla altı parçaya ayırınız; bu parçalar yeniden birleştirildiğinde, yüzey alanı karenin alanına eşit olan bir küp oluştursun. Parçalar bükülebilir.

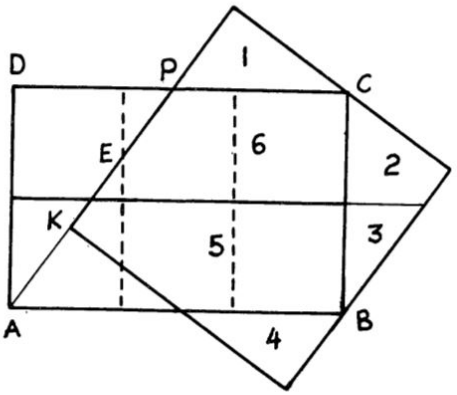
I. Hüseyin Demir'in çözümü, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye. Karenin kenarı a olsun. Küpün ayrıtı u için $6u^2 = a^2$'den $u = a\sqrt{6}/6$ elde edilir. Küpü (1)'deki gibi açıp dikdörtgenleri birleştirerek (2)'deki $ABCD$ dikdörtgenini oluşturalım. $AP = \sqrt{AB \cdot AD} = \sqrt{3u \cdot 2u} = u\sqrt{6}$ alalım. BE, AB'ye dik olsun. Benzer ABE, APD üçgenlerinden

$$BE : AB = AD : AP \quad \text{ve} \quad BE = AB \cdot AD/AP = AP^2/AP = AP\,,$$

olduğundan (2)'deki kareyi çizebiliriz. (2) ile (3)'ü karşılaştırarak $ABCD$ ile karenin eş alanlı olduğunu görürüz; karenin kenarı açıkça a'dır. Parça sayısı 6'dır ve 7'den küçüktür.



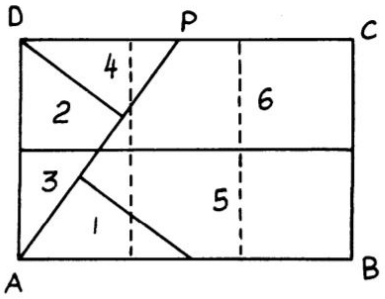
(1)



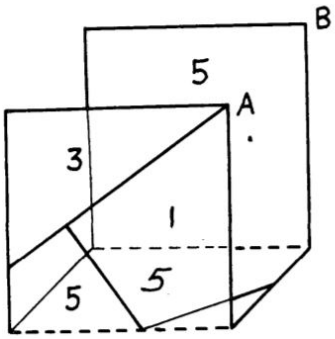
(2)

Küpün nasıl elde edildiği (3a), (3b)

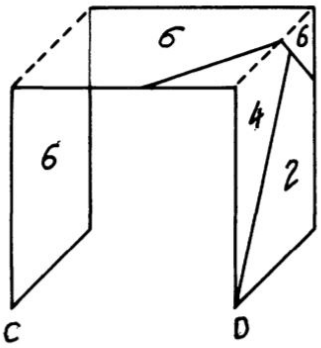
ve (4) çizimlerinde gösterilmiştir. Böylece çözüm tamamlanır. Kare, (2)'deki $ABCD$ dikdörtgeni kullanılmadan parçalara ayrılmak istenirse (5)'teki boyutlara bakılmalıdır.



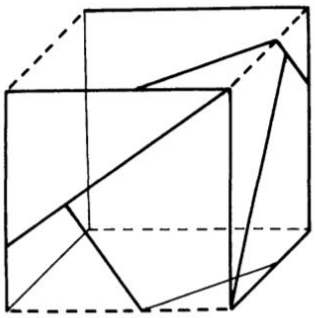
(3)



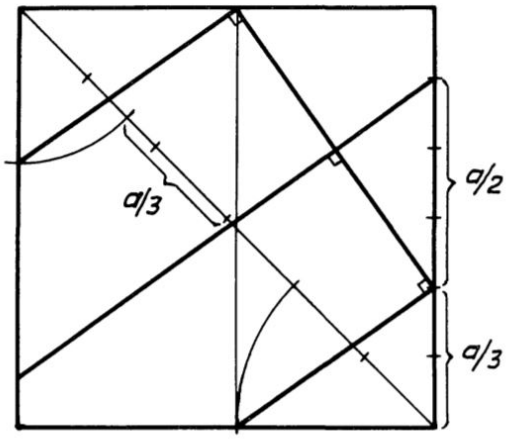
(3a)



(3b)



(4)



(5)

387 Numaralı Önerilen Probleme Sunulan Çözüm: *Mathematics Magazine*, 33, (1959-1960), 233.

Tümevarımla Bir İspat

387. [Eylül 1959] *Öneren: D. S. Mitrinovitch, Belgrad Üniversitesi, Yugoslavya.*

Aşağıdaki bağıntıyı,

$$\left[\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left(\frac{1}{1-t}\,e^{\frac{-xt}{1-t}}\right)\right]_{t=0} = e^x \frac{d^n}{dt^n}(x^n e^{-x})$$

n bir doğal sayı olmak üzere, tümevarımla ispatlayınız.
Hüseyin Demir'in çözümü, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye. Eşitlik $n = 0$ için açıkça doğrudur. $n = p$ için doğru olduğunu varsayarak $n = p+1$ için ispatlayalım. Varsayıma göre

$$(1) \qquad \left[\frac{\partial^p}{\partial t^p}\left(\frac{1}{1-t}\,e^{-\frac{xt}{1-t}}\right)\right]_{t=0} = e^x \frac{d^p}{dx^p}(x^p e^{-x})$$

(1)'in sağ tarafı Leibniz formülünden elde edilebilir (D, d/dx'i gösterir):

$$e^x \frac{d^p}{dx^p}(x^p e^{-x}) = e^x \sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} D^k x^p \cdot D^{p-k} e^{-x} = e^x \sum_{k=0}^{p} (-1)^{p-k} \binom{p}{k} \frac{p!}{(p-k)!}\, x^{p-k} e^{-x}$$

$$= e^x \sum_{\lambda=0}^{p} (-1)^{\lambda} \binom{p}{\lambda} \frac{p!}{\lambda!}\, x^{\lambda} e^{-x}$$

(1)'in sol tarafına gelince,

$$\frac{\partial^p}{\partial t^p}\left(\frac{1}{1-t}e^{-\frac{xt}{1-t}}\right)=\frac{\partial^p}{\partial t^p}\left(\frac{1}{1-t}e^{x-\frac{x}{1-t}}\right)=e^x\frac{\partial^p}{\partial t^p}\left(\frac{1}{1-t}e^{-\frac{x}{1-t}}\right)$$

$$=e^x\frac{\partial^p}{\partial t^p}\frac{\partial}{\partial x}e^{-\frac{x}{1-t}}=e^x\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^p}{\partial t^p}e^{-\frac{x}{1-t}}.$$

$u=e^{-x/(1-t)}$ konursa (1) aşağıdaki biçime indirgenir:

$$\left[e^x\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^p}{\partial t^p}u\right]_{t=0}=e^u\sum_{\lambda=0}^{p}(-1)^\lambda\binom{p}{\lambda}\frac{p!}{\lambda!}x^\lambda e^{-x}. \tag{2}$$

Şimdi $\dfrac{\partial u}{\partial t}=x\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ eşitliğini (2)'nin sol tarafına uygulayarak

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^p}{\partial t^p}u=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^{p-1}}{\partial t^{p-1}}\left(x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial^{p-2}}{\partial t^{p-2}}\left(x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)\left(x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)u=\cdots=\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^p u$$

ve

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^p u\right]_{t=0}=\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right)^p e^{-x}=D(xD^2)^p e^{-x}.$$

elde ederiz. Dolayısıyla eşitlik (3)'e indirgenir:

$$D(xD^2)^p e^{-x}=\sum_{\lambda=0}^{p}(-1)^\lambda\binom{p}{\lambda}\frac{p!}{\lambda!}x^\lambda e^{-x}. \tag{3}$$

(3)'ü p yerine $p+1$ için ispatlayabilirsek iddianın ispatı tamamlanır. Şimdi

$$D(xD^2)^{p+1}e^{-x}=D(xD^2)(xD^2)^p e^{-x}=DxD[D(xD^2)^p e^{-x}]$$

$$=DxD\sum_{\lambda=0}^{p}(-1)^\lambda\binom{p}{\lambda}\frac{p!}{\lambda!}x^\lambda e^{-x}=DxD\sum_{\lambda=0}^{p}a_\lambda x^\lambda e^{-x}$$

$$=(a_1-a_0)+\sum_{\lambda=1}^{p-1}[(\lambda+1)^2 a_{\lambda+1}-(2\lambda+1)a_\lambda+a_{\lambda-1}]x^\lambda e^{-x}+$$

$$[-(2p+1)a_p+a_{p-1}]x^p e^{-x}+a_p x^{p+1}e^{-x}$$

$$=-(p+1)!+\sum_{\lambda=1}^{p-1}b_\lambda x^\lambda e^{-x}+(-1)^{p-1}(p+1)^2 x^p e^{-x}+(-1)^p x^{p+1}e^{-x} \tag{4}$$

burada ilk katsayı ve son iki katsayı a_λ'lar aracılığıyla elde edilir ve

$$
\begin{aligned}
b_\lambda &= (\lambda+1)^2 a_{\lambda+1} - (2\lambda+1)a_\lambda + a_{\lambda-1} \quad (1 \leqq \lambda \leqq p-1) \\
&= (\lambda+1)^2 (-1)^{\lambda+1} \binom{p}{\lambda+1} \frac{p!}{(\lambda+1)!} - (2\lambda+1)(-1)^\lambda \binom{p}{\lambda} \frac{p!}{\lambda!} + (-1)^{\lambda-1} \binom{p}{\lambda-1} \frac{p!}{(\lambda-1)!} \\
&= (-1)^{\lambda-1} \frac{p!}{\lambda!(p-\lambda+1)!} \frac{p!}{\lambda!} [(p-\lambda)(p-\lambda+1) + (2\lambda+1)(p-\lambda+1) + \lambda^2] \\
&= (-1)^{\lambda-1} \frac{p!}{\lambda!(p-\lambda+1)!} \frac{p!}{\lambda!} \cdot (p+1)^2 = (-1)^{\lambda-1} \frac{(p+1)!}{\lambda!(p-\lambda+1)!} \frac{(p+1)!}{\lambda!} \\
&= (-1)^{\lambda-1} \binom{p+1}{\lambda} \frac{(p+1)!}{\lambda!}
\end{aligned}
$$

(4)'ün ilk katsayısının ve son iki katsayısının b_0, b_p, b_{p+1} olduğu kolayca görülür; dolayısıyla

$$
D(xD^2)^{p-1} e^{-x} = \sum_{\lambda=0}^{p+1} (-1)^{\lambda-1} \binom{p+1}{\lambda} \frac{(p+1)!}{\lambda!} x^\lambda e^{-x} .
$$

Böylece eşitlik $n = p+1$ için ispatlandığından, n'nin bütün tamsayı değerleri için doğrudur ve ispat tamamlanır.

---

400 Numaralı Önerilen Probleme Sunulan Çözüm:
***Mathematics Magazine*, 34, (1960-1961), 53.**

Bir Üçgen Çizimi

400. [Ocak 1960] *Öneren: W. B. Carver, Cornell Üniversitesi.*
Düzlemde bir nokta, bir çember ve herhangi bir eğri veriliyor. Her birinde bir köşesi bulunan bir eşkenar üçgen çiziniz.

II. Hüseyin Demir'in çözümü, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye.

Verilen nokta, çember ve eğri $A, (b), (c)$ olsun. ABC çözümse, (c) üzerindeki C köşesi, (b) üzerindeki B köşesinden A etrafında 60 ve -60 derecelik dönmelerle elde edilir. Dolayısıyla (c) üzerindeki bilinmeyen köşeler, (c) ile (b)'nin bu dönmelerden sonraki konumlarının kesiştirilmesiyle bulunur. Üçgenlerin çizimi bundan sonra doğrudan yapılır.

Harry M. Gehman, Buffalo Üniversitesi; Rostyslaw J. Lewyckyj, Toronto Üniversitesi; Harvey Walden (kısmi çözüm) ve problemi öneren de çözmüşlerdir.

401 Numaralı Önerilen Probleme Sunulan Çözüm: *Mathematics Magazine*, 34, (1960-1961), 55.

Bir Fibonacci Serisi

401. [Ocak 1960] *Öneren: John M. Howell, Los Angeles City College.*
$F(n) = aF(n-1) + bF(n-2)$, $F(0) = c$, $F(1) = d$ bağıntılarını sağlayan bir sayı dizisi veriliyor; burada $n = 0, 1, 2, \ldots$ ve a, b, c, d herhangi gerçel sayılardır. $F(n)$ için genel bir ifade bulunuz.

II. Hüseyin Demir'in çözümü, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye.
Sırasıyla

$$F(0) = c \qquad = c$$

$$F(1) = d \qquad = d$$

$$F(2) = aF(1) + bF(0) \qquad = \binom{1}{0}ad + \binom{0}{0}bc$$

$$F(3) = aF(2) + bF(1)$$

$$= (a^2 + b)F(1) + abF(0) \qquad = \left[\binom{2}{0}a^2 + \binom{1}{1}b\right]d + \left[\binom{1}{0}ab \quad c\right.$$

$$F(4) = aF(3) + bF(2)$$

$$= (a^3 + 2ab)F(1) + (a^2b + b^2)F(0) = \left[\binom{3}{0}a^3 + \binom{2}{1}ab\right]d + \left[\binom{2}{0}a^2b + \binom{1}{1}b^2\right]c$$

$$\cdots \qquad \cdots$$

ve genel olarak

$$F(n) = \left[\binom{n-1}{0}a^{n-1} + \binom{n-2}{1}a^{n-3}b + \binom{n-3}{2}a^{n-5}b^2 + \cdots\right]d$$

$$+\left[\binom{n-2}{0}a^{n-2} + \binom{n-3}{1}a^{n-4}b + \binom{n-4}{2}a^{n-6}b^2 + \cdots\right]bc$$

elde edilir; bu, tümevarımla ispatlanabilir.

III. Hüseyin Demir'in alternatif çözümü.
Bağıntı $n = 2, \ldots, n$ için yazıldığında, $F(2), \ldots, F(n)$ bilinmeyenlerinden oluşan bir denklem sistemi elde edilir:

$$F(n) - aF(n-1) - bF(n-2) = 0$$

$$F(n-1) - aF(n-2) - bF(n-3) = 0$$

$$\cdots$$

$$F(4) - aF(3) - bF(2) = 0$$

$$F(3) - aF(2) = bF(1)$$

$$F(2) = aF(1) - bF(0)$$

Sistemin determinantı 1 olduğundan

$$F(n) = \begin{vmatrix} 0 & -a & -b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -a & -b & 0 & 0 \\ & 0 & 1 & -a & -b & \\ & & \cdots & & & \\ 0 & 0 & & 1 & -a & -b \\ bd & 0 & & 0 & 1 & -a \\ ad+bc & 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{vmatrix}_{n-1}$$

elde edilir; burada indis determinantın mertebesini gösterir. Birinci sütuna göre açıp düzenleyerek sonuca ulaşırız:

$$F(n) = (bc+ad)\begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ -b & a & b & & \vdots \\ 0 & -b & a & b & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & -b & a & b \\ 0 & \cdots & 0 & -b & a \end{vmatrix}_{n-2} + bd \begin{vmatrix} a & b & 0 & \cdots & 0 \\ -b & a & b & & \vdots \\ 0 & -b & a & b & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & -b & a & b \\ 0 & \cdots & 0 & -b & a \end{vmatrix}_{n-1}$$

IV. Hüseyin Demir'in alternatif çözümü.
Verilen

$$F(n) = aF(n-1) + bF(n-2)$$

bağıntısını şu biçimde yazalım:

$$\frac{F(n)}{F(n-1)} = a + \frac{b}{F(n-1)/F(n-2)}$$

$u_n = F(n)/F(n-1)$ alırsak sırasıyla

$$u_n = a + b/u_{n-1}$$

$$= a + \frac{b}{a + b/u_{n-2}}$$

$$\cdots$$

$$u_n = a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \ddots \; a + \cfrac{b}{a + d/c}}}$$

Aşağıdaki bağıntıları taraf tarafa çarparak

$$F(n) = u_n F(n-1)$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$F(2) = u_2 F(1)$$

$$F(1) = u_1 F(0)$$

$F(n)$ için genel ifadeyi elde ederiz:

$$F(n) = u_1 u_2 \cdots u_n \cdot c$$

D. A. Breault, Sylvania Electric Products, Inc., Waltham, Massachusetts; R. G. Buschman, Oregon Üniversitesi; F. D. Parker, Alaska Üniversitesi; Charles F. Pinzka, Cincinnati Üniversitesi; Chih-yi Wang, Minnesota Üniversitesi ve problemi öneren de çözmüşlerdir.

412 Numaralı Önerilen Probleme Sunulan Çözüm:
Mathematics Magazine, 34, (1961), 175.

İzdüşümsel Eşleme

412. [Mayıs 1960] *Öneren: D. Moody Bailey, Princeton, Batı Virginia.*
P, ABC üçgeninin çevrel çemberi üzerinde herhangi bir nokta olsun. B, C'den P'ye çizilen ışınlar, CA, AB'yi sırasıyla E, F noktalarında kessin. İlgili doğru parçalarını yönlü nicelikler olarak ele alarak aşağıdaki eşitliği gösteriniz:

$$\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{BF}{FA}+\frac{c^2}{a^2}\cdot\frac{CE}{EA}=-1\ ,$$

burada a, b, c, ABC üçgeninin sırasıyla A, B, C köşelerinin karşısındaki kenarlardır.

Hüseyin Demir'in çözümü, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye.
E, F noktaları arasında bir izdüşümsel eşleme bulunduğundan, $e = CE/EA$, $f = BF/FA$ olmak üzere şu çift doğrusal bağıntı vardır:

$$A\cdot ef+B\cdot e+C\cdot f+D=0$$

Burada A, B, C, D sabittir. Bu katsayıların değerlerini bulmak için P'yi sırasıyla A, B, C noktalarıyla çakıştıralım. $P = A$ ise e, f sonsuzdur ve $A = 0$ olur. $P = B$ ise BE bir dış simedyandır; $e = -a^2/c^2$, $f = 0$ olduğundan

$$-\frac{B\cdot a^2}{c^2}+D=0 \quad \text{veya} \quad B=\frac{c^2}{a^2}D$$

ve benzer biçimde

$$-\frac{C\cdot a^2}{b^2}+D=0 \quad \text{veya} \quad C=\frac{b^2}{a^2}D\ .$$

Yerine koyma işlemi istenen sonucu verir.

Josef Andersson, Vaxholm, İsveç; Leon Bankoff, Los Angeles, Kaliforniya; A. F. Hordam, New England Üniversitesi, Armidale, Yeni Güney Galler, Avustralya ve problemi öneren de çözmüşlerdir.

427 Numaralı Önerilen Probleme Sunulan Çözüm:
***Mathematics Magazine*, 34, (1961), 303.**

Bir Cevian Bağıntısı

427. [Kasım 1960] *Öneren: D. Moody Bailey, Princeton, Batı Virginia.*

P, ABC üçgeninin düzleminde herhangi bir nokta olsun. B, C'den P üzerinden çizilen cevianlar CA, AB kenarlarını sırasıyla E, F'de kessin. M, BC'nin orta noktası olsun; MP doğrusu CA'yı N'de, AB'yi O'da kessin. Uzatılan EF, BC'yi G'de; B'den AG'ye paralel çizilen doğru da CF'yi H'de kessin. HO'nun CA'ya paralel olduğunu gösteriniz.

Hüseyin Demir'in çözümü, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye.
A, B, C, M, F noktaları sabit, geometrik olarak birbirleriyle ilişkili P, O, N, G, E, H noktaları değişken olsun. O zaman

$$O \overset{M}{\overline{\wedge}} P \overset{B}{\overline{\wedge}} E \overset{F}{\overline{\wedge}} G \overline{\wedge} AG \overline{\wedge} BH \overline{\wedge} H$$

bağıntısından, O ile H arasında bir izdüşümsel eşleme elde edilir. F kendisine karşılık gelen eleman olduğundan bu eşlemenin bir perspektivite olduğu sonucuna varılır. Dolayısıyla OH, sabit bir L noktasından geçer. O, AB üzerinde sonsuzdayken H de CF üzerinde sonsuzdadır; dolayısıyla L sonsuzdadır. Böylece OH sabit bir doğrultuyu korur. Fakat $O = B$ iken $OH = BH \parallel AB$ olduğundan ispat tamamlanır.

Problemi öneren de çözmüştür.

---

428 Numaralı Önerilen Probleme Sunulan Çözüm:
***Mathematics Magazine*, 34, (1961), 303.**

Yer Değiştiren Rakamlar

428. [Kasım 1960] *Öneren: Murray S. Klamkin, AVCO, Wilmington, Massachusetts.*

$N = 142857$ sayısının $2N, 3N, 4N, 5N, 6N$ katlarının hepsi N'nin rakamlarının permütasyonlarıdır. $2M, 3M, 4M, 5M, 6M, 7M$'nin hepsi M'nin rakamlarının permütasyonları olacak biçimde bir M sayısı var mıdır?

I. Hüseyin Demir'in çözümü, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye.
$1M, 2M, \ldots, 7M$ ile M'nin bütün permütasyonlarını elde ettiğimizden, böyle bir M varsa yedi basamaklıdır.

$M = \overline{abcdefg} = \overline{Gg}$, $G = \overline{abcdef}$ olsun; $p \cdot \overline{Gg} = \overline{gG}$ olacak biçimde $1 \leq p \leq 7$ alalım. O zaman

$$p(10G + g) = 10^6 g + G$$

veya

$$G = \frac{(10^6 - p)g}{(10p - 1)} = N_p \cdot \frac{g}{D_p} .$$

Şimdi

p	N_p	D_p	N_p/D_p	$(N_p/3)/D_p$
1	999,999	9	111,111	.
2	999,998	19	Sadeleşmez	.
3	999,997	29	Sadeleşmez	.
4	999,996	39 = 3.13	.	Sadeleşmez
5	999,995	49 = 7.7	Sadeleşmez	.
6	999,994	59	Sadeleşmez	.
7	999,993	69 = 3.23	.	Sadeleşmez

g'nin katsayısı N_p/D_p, $p = 1$ dışında tamsayı olmadığından G için 999999'dan başka çözüm yoktur. Fakat $M = \overline{Gg} = 9999999$ bir çözüm olamaz. Dolayısıyla problemin çözümü yoktur.

II. Dermott A. Breault'nun notu, Sylvania Electric Products, Inc., Waltham, Massachusetts. $M = 5882352941176470$ sayısı, $k = 2, 3, \ldots, 16$ için kM'nin M'nin rakamlarının bir permütasyonu olması özelliğine sahiptir. Şu sayı da

$$L = 344827586206896551724137931 0$$

$k = 2, 3, \ldots, 28$ için kL'nin L'nin rakamlarının bir permütasyonu olması özelliğine sahiptir. (M, 1/17'nin ondalık açılımının bir devrindeki rakamlardan oluşur ve 16 basamaklıdır; L de benzer biçimde 1/29'dan elde edilmiştir. p asal ve $1/p = Q$'nun devir uzunluğu $p - 1$ ise, $k = 2, 3, \ldots, p - 1$ için kQ'nun Q'nun rakamlarının bir permütasyonu olduğu iddiasının doğru olduğunu düşünüyorum.)

---

432 Numaralı Önerilen Probleme Sunulan Çözüm:
***Mathematics Magazine*, 34, (1961), 365.**

Cevian Doğruları

432. [Ocak 1961] *Öneren: Lee Tih-Ming, Taipei, Tayvan.*
ABC üçgeninin içindeki bir O noktası köşelerle birleştiriliyor. O'dan sırasıyla BC, CA, AB kenarlarına OX, OY, OZ dikleri indiriliyor. AO ile YZ, D'de; BO ile ZX, E'de; CO ile XY, F'de kesişsin. Aşağıdaki eşitliği gösteriniz:

$$\frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} = \frac{ZD}{DY} \cdot \frac{YF}{FX} \cdot \frac{XE}{EZ} .$$

II. Hüseyin Demir'in çözümü, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye.
O noktasının üçgenin içinde bulunması zorunlu değildir.

$$\alpha = \sphericalangle BAO \qquad \beta = \sphericalangle CBO \qquad \gamma = \sphericalangle ACO$$
$$\alpha' = \sphericalangle OAC \qquad \beta' = \sphericalangle OBA \qquad \gamma' = \sphericalangle OCB$$

alarak, AZD, ADY gibi üçgenlerden şu bağıntıları yazarız:

$$\frac{ZD}{\sin\alpha} = \frac{AZ}{\sin D}, \quad \frac{DY}{\sin\alpha'} = \frac{YA}{\sin D} \quad \text{ve} \quad \frac{ZD}{DY} = \frac{AZ}{YA} \cdot \frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'}$$

ve benzer iki bağıntı daha elde ederiz. Üç oranı taraf tarafa çarparsak

$$\frac{ZD}{DY} \cdot \frac{YF}{FX} \cdot \frac{XE}{EZ} = \frac{AZ}{ZB} \cdot \frac{BX}{XC} \cdot \frac{CY}{YA} \cdot \left(\frac{\sin\alpha}{\sin\alpha'} \cdot \frac{\sin\beta}{\sin\beta'} \cdot \frac{\sin\gamma}{\sin\gamma'} \right).$$

Fakat AO, BO, CO bir noktada kesiştiğinden parantez içindeki ifade 1'dir. Dolayısıyla eşitlik ABC düzleminin bütün noktaları için doğrudur.

Birader Alfred, St. Mary's College, Kaliforniya; Josef Andersson, Vaxholm, İsveç; C. W. Trigg, Los Angeles City College; Dale Woods, Oklahoma Eyalet Üniversitesi ve problemi öneren de çözmüşlerdir.

---

435 Numaralı Önerilen Probleme Sunulan Çözüm:
***Mathematics Magazine*, 34, (1961), 368.**

Üçgenlerde Ekstremumlar

435. [Ocak 1961] *Öneren: M. S. Klamkin, AVCO, Wilmington, Massachusetts.*

Bir elipsin içine çizilebilen en büyük ve en küçük eşkenar üçgenleri belirleyiniz.

Hüseyin Demir'in çözümü, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye.
$A_1A_2A_3$, aşağıdaki elipsin içine çizilmiş bir eşkenar üçgen olsun:

(1) $$(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1 \quad (E) \quad a > b$$

Ayrıca

(2) $$(x-u)^2 + (y-v)^2 - r^2 = 0 \quad (\Omega)$$

$A_1A_2A_3$'ün çevrel çemberi olsun. Bu çember (E)'yi dördüncü bir $A_4 = (x_4, y_4)$ noktasında keser.

(1) ile (2) arasında y'yi yok ederek x'e göre dördüncü dereceden şu denklemi elde ederiz:

$$c^4 \cdot x^4 - 4a^2c^2u \cdot x^3 + \cdots = 0$$

Bu denklemin kökleri x_1, x_2, x_3, x_4'tür.

(1) ile (2) arasında x'i yok edersek karşılık gelen denklem

$$c^4 \cdot y^4 + 4b^2c^2v \cdot y^3 + \cdots = 0$$

olur; kökleri de y_1, y_2, y_3, y_4'tür. $A_1A_2A_3$ eşkenar üçgen olduğundan

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3u$$
$$y_1 + y_2 + y_3 = 3v$$

ve

$$x_4 = \sum x_i - 3u = \frac{4a^2u}{c^2} - 3u = \frac{(a^2+3b^2)u}{c^2}$$
$$y_4 = \sum y_i - 3v = -\frac{4b^2v}{c^2} - 3v = -\frac{(b^2+3a^2)v}{c^2} \quad . \tag{3}$$

(3) koordinatları (1)'i sağladığından aşağıdaki bağıntıyı elde ederiz:

$$(u^2/\alpha^2) + (v^2/\beta^2) = 1 \tag{4}$$

burada

$$\alpha = \frac{ac^2}{a^2+3b^2}, \quad \beta = \frac{bc^2}{b^2+3a^2} .$$

Dolayısıyla (Ω) çemberlerinin merkezleri, $\alpha > \beta$ olan (4) elipsi üzerinde bulunur.

En büyük ve en küçük üçgenler, (Ω) çemberinin r yarıçapının en büyük ve en küçük değerlerine karşılık geldiğinden

$$r^2 = (x_4 - u)^2 + (y_4 - v)^2$$
$$= \frac{(a-\alpha)^2u^2}{\alpha^2} + \frac{(b+\beta)^2v^2}{\beta^2}$$
$$= Au^2 + (b+\beta)^2 = Bv^2 + (a-\alpha)^2 .$$

$dr/du = 0$ eşitliğinden

$$u = 0 \quad \text{ve} \quad r_1 = b + \beta .$$

Benzer biçimde $dr/dv = 0$ eşitliğinden

$$r_2 = a - \alpha ,$$

elde edilir; $r_1 > r_2$ olduğu kolayca doğrulanabilir.

Dolayısıyla elipsin içine çizilmiş en büyük (en küçük) eşkenar üçgenler; merkezleri $u = 0$, $v = \pm\beta$ $(u = \pm\alpha,\ v = 0)$, yarıçapları $b + \beta$ $(a - \alpha)$ olan çemberlerin içine çizilenlerdir.

En büyük üçgenler için iki, en küçük üçgenler için iki olmak üzere dört çözüm vardır.

Çizimler: Bir elipsin içine çizilmiş en büyük (en küçük) üçgenlerin birer köşesi, elipsin küçük (büyük) ekseninin uç noktalarındadır; bu eksen üçgenin simetri eksenidir.

Josef Andersson, Vaxholm, İsveç; J. W. Clawson, Collegeville, Pennsylvania (iki çözüm) ve J. W. Mellender, Üniversite…

445 Numaralı Önerilen Probleme Sunulan Çözüm: *Mathematics Magazine*, 35, (1962), 317.

445. [Mart ve Kasım 1961]. *Hüseyin Demir'in notu, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.*

İspatta küçük bir değişiklik gereklidir. Şöyle okunmalıdır: A, B, P'nin OM doğrusuna dik izdüşümleri A', B', P' olsun. İspatın geri kalanında bütün P harfleri P' ile değiştirilmelidir; sonuçta

$$\frac{MA^2 - k}{MB^2 - k} = \frac{20M \cdot A'P'}{20M \cdot B'P'} = \frac{A'P'}{B'P'} = \frac{PA}{PB}.$$

476 Numaralı Önerilen Probleme Sunulan Çözüm:
***Mathematics Magazine*, 35, (1962), 312.**

Çevreyi ve Alanı İkiye Bölen Doğru

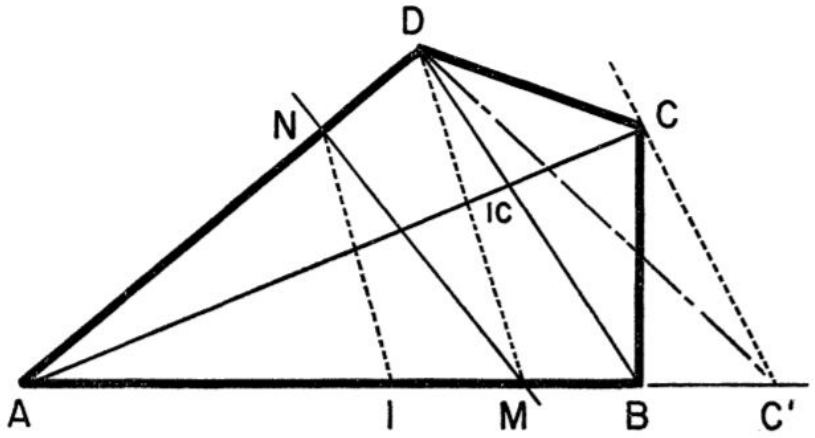
476. [Mart 1962]. *Öneren: Kaidy Tan, Fukien Normal College, Çin.*

Verilen bir dörtgenin çevresini ve alanını ikiye bölen bir doğru çiziniz.

Hüseyin Demir'in çözümü, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Doğrunun iki komşu ya da iki karşı kenarı kesmesine göre iki durum ele alıyoruz. Doğrunun bir köşeden geçtiği durum da bu iki duruma dahildir.

I. Doğru, iki komşu kenarı keser (Şekil 1).



Şekil 1

(a) Doğru, alanı ikiye böler:

$CC' \parallel BD$ çizilirse alanlar arasında $ABCD = ABD + BCD = ABD + BC'D = AC'D$ eşitliği vardır. I, AC''nün orta noktası; M de AB üzerinde bir nokta olsun. $IN \parallel MD$ çizilirse $AMN = AIN + IMN = AIN + IDN = AID = \frac{1}{2}AC'D = \frac{1}{2}ABCD$ olur. Böylece çizilen MN, alanı ikiye böler. Bu çizimlerden şu bağıntılar elde edilir:
$AM = m$, $AN = n$ olsun. O zaman

$$AC'/AC = AB/AK = a/\alpha, \qquad AC' = a \cdot AC/\alpha = pa/\alpha.$$
$$AM/AD = AI/AN, \qquad mn = AI \cdot AD = \tfrac{1}{2}AC' \cdot d = pad/2\alpha.$$
$$2mn = pad/\alpha.$$

(b) Doğru, çevreyi ikiye böler:

$$m + n = AM + AN = \tfrac{1}{2}(a + b + c + d).$$

Dolayısıyla MN doğrusunu belirleyen m, n, aşağıdaki ikinci dereceden denklemin kökleridir:

$$2x^2 - (a + b + c + d)x + pad/\alpha = 0$$

MN'nin var olması için şu koşullar gereklidir:

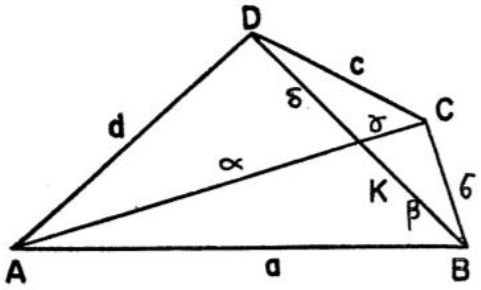
(1) $m \le b,\ n \le d$ veya $a + b + c + d = 2m + 2n \le 2b + 2d$ veya $b + c \le a + d$

(2) $pad/\alpha = 2mn \leq 2ad$ veya $p \leq 2\alpha,\ \alpha + \gamma 2\alpha,\ \alpha \geq \gamma.$

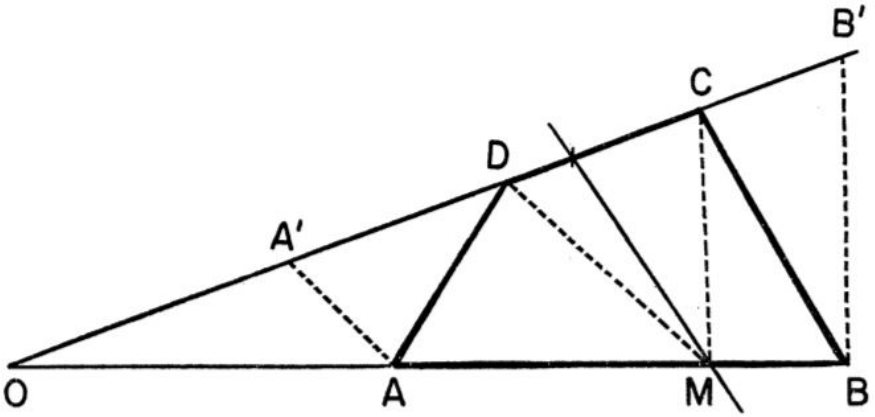
(3) $\Delta = (a+b+c+d)^2 - 8pad/\alpha \geq 0.$

II. Doğru, iki karşı kenarı keser.

(a) Doğru, alanı ikiye böler:



Şekil 2



Şekil 3

M, AB üzerinde herhangi bir nokta olsun (Şekil 3). $BB' \parallel MC$ ve $AA' \parallel MD$ çizilsin. O zaman $ABCD = AMD + MCD + BCM = A'MD + MCD + B'CM = MDA' + MCD + MB'C = MB'A'$ olur. N, $A'B'$'nün orta noktasıysa MN doğrusu $MB'A' = ABCD$ alanını ikiye böler. $OM = m$, $ON = n$, $OA = a'$, $OB = b'$, $OC = c'$, $OD = d'$, $OA' = a''$, $OB' = b''$ olsun. Çizimlerden

$$m/c' = b'/b'', \qquad m/d' = a'/a''$$
$$2n = a'' + b'' = a'd'/m + b'c'/m = (a'd' + b'c')/m$$
$$2mn = a'd' + b'c'.$$

(b) Doğru, çevreyi ikiye böler:

$$MA + AD + DN = MB + BC + CN$$
$$(m - a') - d + (n - d') = (b' - m) + b + (c' - n)$$
$$2(m + n) = (a' + b' + c' + d') + (b - d.)$$

Dolayısıyla MN'yi belirleyen m, n, şu ikinci dereceden denklemin kökleridir:

$$2x^2 - (a' + b' + c' + d' + b - d)x + (a'd' + b'c') = 0.$$

MN'nin varlığı $a' \leq m \leq b'$, $d' \leq m \leq c'$ koşullarıyla belirlenir; bunlar her zaman doğru olan $a + c + b \geq d$ ve $a + c + d \geq b$ eşitsizliklerini verir.

---

646 Numaralı Önerilen Probleme Sunulan Çözüm:
***Mathematics Magazine*, 40, (1967), 226.**

Tam Dörtkenar

646. [Ocak 1967] *Öneren: V. F. Ivanoff, San Carlos, Kaliforniya.*

Bir tam dörtkenarın karşılıklı köşe çiftlerini sırasıyla A ve A', B ve B', C ve C' ile göstererek aşağıdaki eşitliği ispatlayınız:

$$\frac{AB \cdot AB'}{A'B \cdot A'B'} = \frac{AC \cdot AC'}{A'C \cdot A'C'} .$$

I. Hüseyin Demir'in çözümü, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Eşitliği

$$(AB/AC)(AB'/AC')(A'C'/A'B)(A'C/A'B') = 1$$

biçiminde yazıp her kesrin yerine sinüs teoreminden gelen eşdeğerini koyarsak

$$(\sin C/\sin B)(\sin C'/\sin B')(\sin B/\sin C')(\sin B'/\sin C) = 1$$

özdeşliğini elde ederiz.

---

653 Numaralı Önerilen Probleme Sunulan Çözüm:
***Mathematics Magazine*, 42, (1969), 283.**

Üstel Fonksiyonun Türevi

653. [Mart 1967] *Öneren: Sam Newman, Atlantic City, New Jersey.*

Aşağıdaki fonksiyonun dy/dx türevi nedir?

$$y = x^{\left.x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{x}}}}}}\right\} n} \qquad ?$$

III. Hüseyin Demir'in çözümü, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Verilen fonksiyon, $y_n = x^{y_{n-1}}$, $y_1 = x^x$, $y_0 = x$, $y_{-1} = 1$ yineleme bağıntısıyla tanımlanabilir. Logaritma alıp türevlersek

$$\frac{y_n'}{y_n} = \frac{y_{n-1}'}{y_{n-1}} (y_{n-1} \ln x) + \frac{y_{n-1}}{x}$$

Son eşitliği $n = 1$'den $n = n$'ye kadar yazıp her bağıntıyı uygun bir çarpanla çarparak toplarsak şu eşitliği elde ederiz:

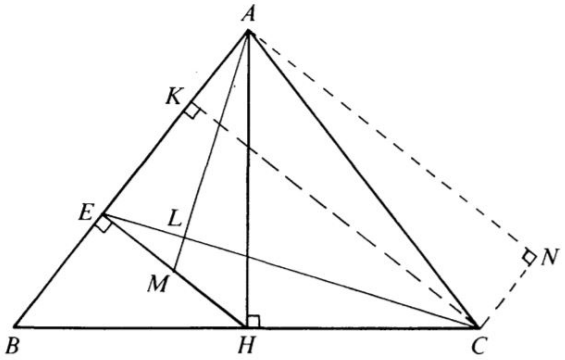
$$y_n' = \sum_{k=0}^{n} y_n y_{n-1} \cdots y_{n-k-1} (\ln x)^k / x.$$

Pierre Bouchard, Montréal Üniversitesi, Kanada; Nicholas C. Bystrom, St. Paul, Minnesota; Richard W. Feldman, Lycoming College, Pennsylvania; David Fettner, City College of New York; Reinaldo E. Giudici, Pittsburgh Üniversitesi; Michael Goldberg, Washington, D.C.; Sandra A. Gossum, Tennessee Üniversitesi; J. M. Howell, Los Angeles City College; Richard A. Jacobson, Houghton College, New York; Lew Kowarski, Morgan State College, Maryland; Fred Lambie, Lexington, Massachusetts; Douglas Lind, Virginia Üniversitesi; Edwin A. Power, University College, Londra, İngiltere ve problemi öneren de çözmüşlerdir. Yanlış ya da okunamayan bazı çözümler de alınmıştır.

1199 Numaralı Önerilen Probleme Sunulan Çözüm: *Mathematics Magazine*, 58, (1985), 243.

İkizkenar Üçgende Dik Doğrular **Eylül 1984**

1199. $AB = AC$ olan ABC ikizkenar üçgeninde H, A'dan indirilen yüksekliğin ayağı; E, H'den AB'ye indirilen dikin ayağı; M de EH'nin orta noktası olsun. $AM \perp EC$ olduğunu gösteriniz. [*Aristomenis Siskakis, Illinois Üniversitesi.*]



I. ve II. çözümler: I. CK, C'den indirilen yükseklik olsun. Benzer EHA ve KBC dik üçgenlerinde, karşılık gelen AM ve CE kenarortayları HA ve BC hipotenüsleriyle eşit açılar yapar. Bu kenarortaylar L'de kesişsin. O zaman $HCAL$ bir kirişler dörtgenidir. Dolayısıyla $\angle ALC = \angle AHC = 90°$ olur.

II. Harmonik demetleri kullanıyoruz. CK, C'den indirilen yükseklik olsun ve $AKCN$ dikdörtgeni çizilsin. AN'ye paralel olan HE doğru parçası AM tarafından ikiye bölündüğünden $(AB, AH; AM, AN) = -1$ olur. Benzer biçimde, CN'ye paralel olan BK doğru parçası CE tarafından ikiye bölündüğünden $(CK, CB; CE, CN) = -1$'dir. İki harmonik demette, üç doğru karşılık gelen doğrulara diktir. Dolayısıyla dördüncü doğrular olan AM ve CE de birbirine diktir.

HÜSEYİN DEMİR
Orta Doğu Teknik Üniversitesi
Ankara, Türkiye

Problemi öneren ve sekiz öğrenci dahil altmış iki kişi daha, yetmiş üç çözüm sunmuştur.

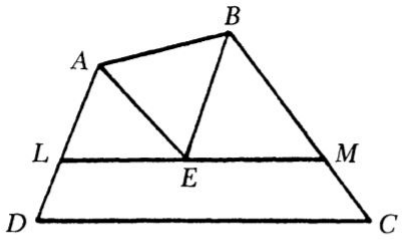
Joseph Konhauser, problemin *Monthly*'de E1476 numarasıyla yer aldığını ve üç çözümünün 69. ciltte (1962), s. 233'te yayımlandığını saptamıştır. O problemi çözen dört kişi daha bu probleme çözüm gönderirken bu durumu belirtmeyi unutmuştur. P. J. Pedler (Avustralya) ve J. H. Webb (Güney Afrika), problemi Loren C. Larson'ın *Problem Solving Through Problems*, s. 27 kitabında; Geoffrey A. Kandall ise M. N. Aref ve W. Wernick'in *Problems and Solutions in Elementary Geometry*, s. 32, alıştırma 92'de bulmuştur. O. Bottema (Hollanda) ve Webb, ters önermeler de vermiştir. (1) ABC herhangi bir üçgense, $AM \perp EC$ olması için gerek ve yeter koşul $AB = AC$ olmasıdır. (2) E, AB doğrusu üzerinde herhangi bir noktaysa, $AM \perp EC$ olması için gerek ve yeter koşul $HE \perp AB$ olması ya da A'nın BE'nin orta noktası olmasıdır. (Diğer noktalar problemdeki gibi tanımlanmıştır.)

1256 Numaralı Önerilen Probleme Sunulan Çözüm:
***Mathematics Magazine*, 61, (1988), 54.**

Kirişler Dörtgeni **Aralık 1986**

1256. *Öneren: R. S. Luthar, Wisconsin Üniversitesi Merkezi, Janesville.*

$ABCD$ bir kirişler dörtgeni olsun. A ve B'deki açıortaylar E'de kesişsin; E'den CD kenarına paralel çizilen doğru, AD'yi L'de, BC'yi M'de kessin. $LA+MB = LM$ olduğunu ispatlayınız.

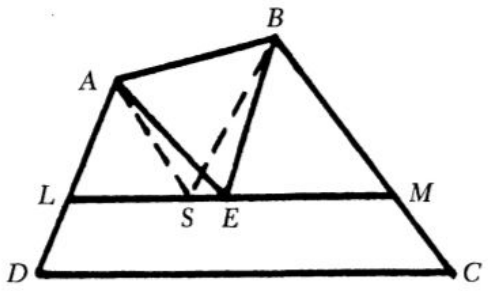


II. H. Demir ve C. Tezer'in çözümü, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

$\angle DAB = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$, $\angle BCD = 2\gamma$, $\angle CDA = 2\delta$ olsun. Açıkça $\angle ELA = 2\delta$, $\angle BME = 2\gamma$ ve $\alpha = \frac{\pi}{2} - \gamma$, $\beta = \frac{\pi}{2} - \delta$'dır. $ABCD$'nin dışbükey olduğunu ve

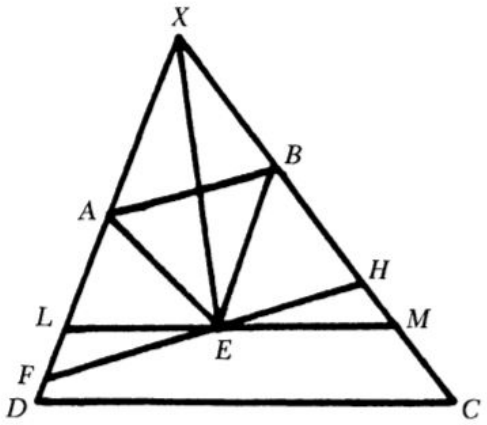
$\alpha > \beta$ olduğunu varsayacağız.

LM üzerinde, AD'nin M ile aynı tarafında ve $|LS| = |LA|$ olacak biçimde bir S noktası seçiniz (şekle bakınız).



Açıkça $\angle ASL = \angle LAS = \beta$'dır. Dolayısıyla $ASEB$ bir kirişler dörtgenidir. $\angle LAS = \beta < \alpha = \angle LAE$ olduğundan S, L ile E arasındadır.
Öte yandan $\angle SBM = \angle SBE + \angle EBM = \angle SAE + \angle EBM = \angle LAE - \angle LAS + \beta = \alpha - \beta + \beta = \alpha = \angle BSM$ olur. Dolayısıyla MBS bir ikizkenar üçgendir ve $|MS| = |MB|$'dir. Böylece $|LM| = |LS| + |SM| = |LA| + |MB|$ elde edilir.

III. John P. Hoyt'un çözümü, Lancaster, Pennsylvania.
DA ve CB'yi X'te kesişecek biçimde uzatınız. AB'ye paralel FH'yi çiziniz. XE'yi çiziniz (şekle bakınız).



E, XAB üçgeninin iki dış açısının açıortaylarının kesişimi olduğundan XE, $\angle AXB$'nin açıortayıdır. MLX ve HFX üçgenleri, açıları eşit ve bir açıortayları ortak olduğundan eştir. Açıların eşitliği, bir kirişler dörtgeninde karşılıklı açıların bütünler olmasından gelir. Dolayısıyla $ME = FE$, $HE = LE$ ve $HM = LF$'dir. FH, AB'ye paralel olduğundan ve AE, $\angle DAB$'yi ikiye böldüğünden $\angle FAE = \angle AEF$ olur. Böylece FAE üçgeni ikizkenardır ve $AF = FE$'dir. Benzer biçimde $BH = EH$ elde edilir.

Gerisi kolayca elde edilir: $LA+MB = (AF-LF)+(BH+HM) = (AF+BH)+(HM-LF) = AF + BH = FE + EH = LM$.

Frank Allen, Farid G. Bassiri (öğrenci), Andreas Bender (öğrenci, İsviçre), Nirdosh Bhatnagar, David Earnshaw (Kanada), Howard Eves, Herta T. Freitag, Richard A. Gibbs, J. T. Groenman (Hollanda), Michael B. Handelsman, P. L. Hon (Hong Kong), King Jamison, Geoffrey A. Kandall, Tsz-Mie Ko (öğrenci), Mary S. Krimmel, L. Kuipers (İsviçre), Kee-wai Lau (Hong Kong), J. C. Linders (Hollanda), David Morin (öğrenci, dört çözüm), Anna Michaelides Penk, Farhood Pouryoussefi (öğrenci, İran), Harry D. Ruderman, Kiran Lall Shrestha (Nepal), J. M. Stark, M. Vowe (İsviçre), Harry Weingarten ve Brent Young (öğrenci) da çözmüşlerdir.

Çözümlerin çoğu trigonometrik yöntemlere (etkileyici çeşitlilikte trigonometrik özdeşliklere) dayanıyordu. Gregg Patruno'nun (ABD) verdiği, yalnızca geometriye dayanan parlak bir çözüm, Murray Klamkin'in *International Mathematical Olympiads, 1978–1985*, *New Mathematical Library*, No. 31, MAA kitabında yer alır (1985, Problem 1'in çözümü).

11 *Mathesis* için Problemler

Sınav Sorusu 10, *Mathesis*, **69**, (1960), 249-250.
Sınav Sorusu 11, *Mathesis*, **69**, (1960), 250.
Sınav Sorusu 12, *Mathesis*, **69**, (1960), 251.
Soru 3954, *Mathesis*, **69**, (1960), 255.
Soru 3957, *Mathesis*, **69**, (1960), 375.

Sınav Sorusu 10, *Mathesis*, **69**, (1960), 249-250.

10. ABC üçgeninin yükseklikleri h_a, h_b, h_c; çevrel ve içteğet çemberlerinin yarıçapları R, r olsun. BC, CA, AB'nin

A, B, C açılarındaki dışteğet çemberleriyle teğet noktaları A', B', C''nün oluşturduğu üçgenin çevrel çemberinin R' yarıçapı şu bağıntıyla verilir:

$$\mathrm{R}' = \frac{1}{2r}\sqrt{2\mathrm{R}(2\mathrm{R} - h_a)(2\mathrm{R} - h_b)(2\mathrm{R} - h_c)}\,.$$

(HÜSEYİN DEMİR, Ereğli, Türkiye)

$A'B'C'$, içteğet çemberinin merkezi I'nın, çevrel çemberin merkezi O'ya göre simetriğinin pedal üçgenidir. Bunun S' alanı ile ABC'nin S alanı arasındaki bağıntı

$$\mathrm{S}' = \mathrm{S}\,\frac{\mathrm{R}^2 - \mathrm{OI}^2}{4\mathrm{R}^2} = \mathrm{S}\cdot\frac{r}{2\mathrm{R}}\,.$$

$AB' = p - c = r\cot\frac{C}{2}$ ve $AC' = p - b = r\cot\frac{B}{2}$ olduğundan, $A'B'C'$ üçgeni şu eşitliği verir:

$$\mathrm{B'C'}^2 = a'^2 = r^2\left[\left(\cot\frac{\mathrm{B}}{2} + \cot\frac{\mathrm{C}}{2}\right)^2 - 4\,\cot\frac{\mathrm{B}}{2}\cot\frac{\mathrm{C}}{2}\cos^2\frac{\mathrm{A}}{2}\right]$$

$$= r^2\,\frac{\cos^2\dfrac{\mathrm{A}}{2}}{\sin^2\dfrac{\mathrm{B}}{2}\sin^2\dfrac{\mathrm{C}}{2}}\,(1 - \sin\mathrm{B}\sin\mathrm{C}) = a^2\left(1 - \frac{bc}{4\mathrm{R}^2}\right)$$

$bc = 2Rh_a$ olduğundan da

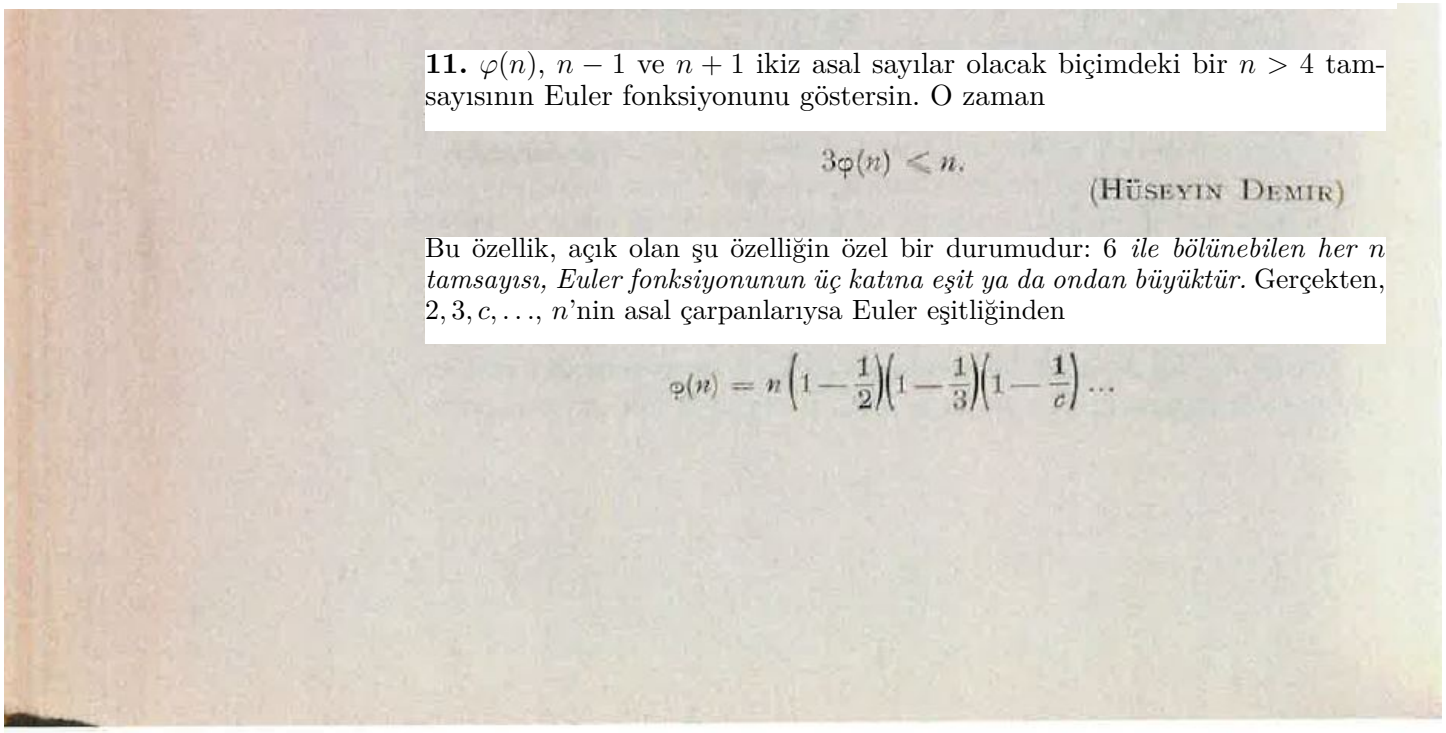
$$a'^2 = \frac{a^2}{2\mathrm{R}}\,(2\mathrm{R} - h_a)\,.$$

R' için belirtilen ifadeyi elde etmek üzere

$$\mathrm{S}'^2 = \frac{a'^2b'^2c'^2}{16\mathrm{R}'^2} = \frac{a^2b^2c^2}{16\mathrm{R}^2}\cdot\frac{1}{8\mathrm{R}\mathrm{R}'^2}\,(2\mathrm{R} - h_a)(2\mathrm{R} - h_b)(2\mathrm{R} - h_c)$$

eşitliğini (1) ile karşılaştırmak yeterlidir.

Sınav Sorusu 11, *Mathesis*, **69**, (1960), 250.



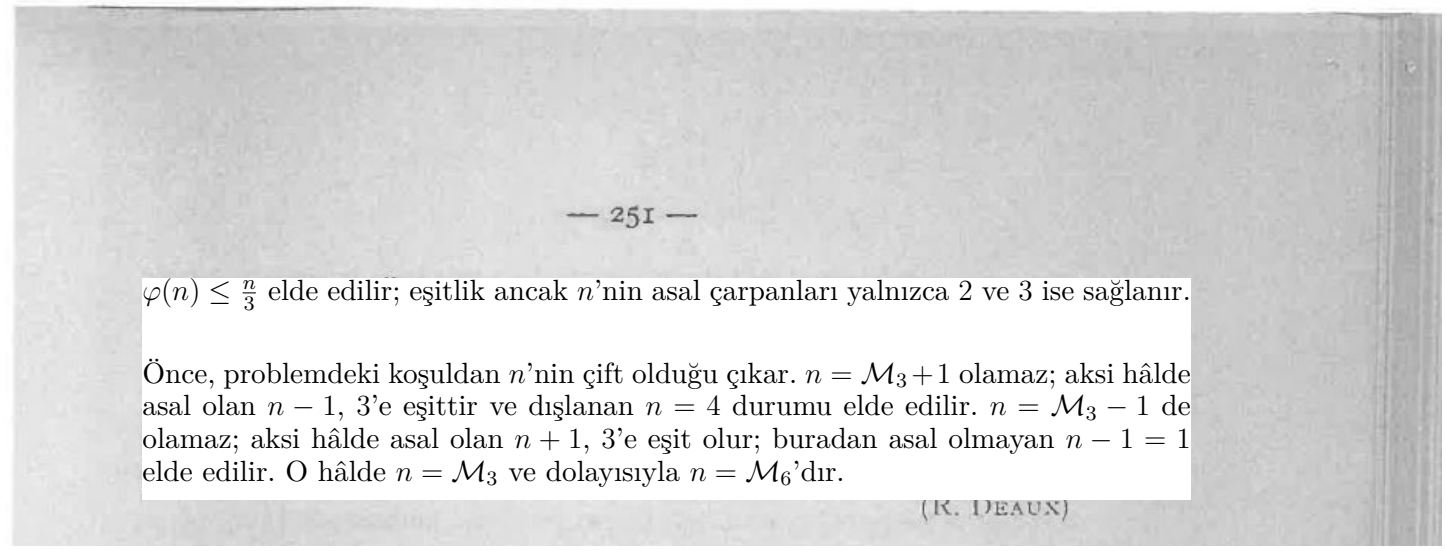
11. $\varphi(n)$, $n-1$ ve $n+1$ ikiz asal sayılar olacak biçimdeki bir $n > 4$ tamsayısının Euler fonksiyonunu göstersin. O zaman

$$3\varphi(n) < n.$$

(Hüseyin Demir)

Bu özellik, açık olan şu özelliğin özel bir durumudur: 6 *ile bölünebilen her n tamsayısı, Euler fonksiyonunun üç katına eşit ya da ondan büyüktür.* Gerçekten, $2, 3, c, \ldots,$ n'nin asal çarpanlarıysa Euler eşitliğinden

$$\varphi(n) = n\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\ldots$$



— 251 —

$\varphi(n) \leq \frac{n}{3}$ elde edilir; eşitlik ancak n'nin asal çarpanları yalnızca 2 ve 3 ise sağlanır.

Önce, problemdeki koşuldan n'nin çift olduğu çıkar. $n = \mathcal{M}_3 + 1$ olamaz; aksi hâlde asal olan $n-1$, 3'e eşittir ve dışlanan $n = 4$ durumu elde edilir. $n = \mathcal{M}_3 - 1$ de olamaz; aksi hâlde asal olan $n+1$, 3'e eşit olur; buradan asal olmayan $n - 1 = 1$ elde edilir. O hâlde $n = \mathcal{M}_3$ ve dolayısıyla $n = \mathcal{M}_6$'dır.

(R. Deaux)

Sınav Sorusu 12, *Mathesis*, **69**, (1960), 251.

12. 1. İki ortak noktası X, Y olan ve bir q dörtkenarının kenarlarının oluşturduğu bcd, cda, dab, abc üçgenlerinin sırasıyla çevresine çizilen dört konik $\alpha, \beta, \gamma, \delta$'nın üçüncü bir ortak noktası Z vardır. 2. X, Y, q'nun köşegen üçkenarı t'nin iki kenarı e, f üzerindeyse Z, üçüncü kenar g üzerindedir ve XYZ, t üçgenleri homolojiktir.

(HÜSEYIN DEMIR)

1. önerme tarafımızdan daha önce ifade ve ispat edilmiştir (M, 1947–209). Bu, X, Y ve q'nun altı köşesinden geçen dört kübiğin $(a, \alpha), (b, \beta), (c, \gamma), (d, \delta)$ dokuzuncu bir ortak noktası Z bulunmasından çıkar. X, e üzerinde ve Y, f üzerindeyse (e, f, g) kübiği ilk sekiz noktayı ve dolayısıyla zorunlu olarak g üzerinde bulunan Z'yi içerir. efg, örneğin δ'nın içine çizili abc üçgeniyle homolojik olduğundan, Steiner'in bir teoremi uyarınca efg, δ'nın efg'nin kenarlarıyla ikinci kesişim noktalarının oluşturduğu XYZ üçgeniyle de homolojiktir.

(R. Deaux)

Soru 3954, *Mathesis*, **69**, (1960), 255.

3954. Matrisler arasındaki aşağıdaki eşitliği ispatlayınız:

$$\begin{bmatrix} \cos^2\theta & -\sin 2\theta & \sin^2\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \cos 2\theta & -\sin\theta\cos\theta \\ \sin^2\theta & \sin 2\theta & \cos^2\theta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos^2 n\theta & -\sin 2n\theta & \sin^2 n\theta \\ \cos n\theta\sin n\theta & \cos 2n\theta & -\sin n\theta\cos n\theta \\ \sin^2 n\theta & \sin 2n\theta & \cos^2 n\theta \end{bmatrix}.$$

burada n pozitif bir tamsayıdır.

(HÜSEYIN DEMIR)

Soru 3957, *Mathesis*, **69**, (1960), 375.

3957. Bir n tamsayısının bölenlerinin karelerinin Euler fonksiyonu değerleri toplamı, n^2'nin bölenlerinin cebirsel toplamına eşittir; bu son toplamda her bölenin işareti, asal çarpanlarının üsleri toplamının çift ya da tek olmasına göre sırasıyla $+$ ya da $-$ alınır.

(HÜSEYIN DEMIR)

12 Diğer Yayınlar

Hüseyin Demir'in Diğer Yayınları

[1] H. Demir. Les cercles podaires dans le polygone inscriptible. *Mathesis*, 68:51–54, 1959.

[2] H. Demir. A theorem analogous to Morley's theorem. *Mathematics Magazine*, 38:228–230, 1965.

[3] H. Demir. Maximum area of a region bounded by a polygon with given sides. *Mathematics Magazine*, 39:228–231, 1966.

[4] H. Demir. On the geometry of n dimensions and extensions in E^2 of Erdös-Mordel-Oppenheim inequality. *METU Journal of Pure and Applied Sciences*, 1:175–197, 1968.

[5] H. Demir. A trigonometric proof of Morley's theorem. *Delta*, 1:11–14, 1968.

[6] H. Demir. Incircles within. *Mathematics Magazine*, 59(2):77–83, 1986.

[7] H. Demir and C. Tezer. More on incircles. *Mathematics Magazine*, 62(2):107–114, 1989.

[8] H. Demir and C. Tezer. Reflections on a problem of V. Thébault. *Geometriae Dedicata*, 39(1):79–92, 1991.

[9] B. V. Kutuzov. *Geometri. Cilt I*, Türk Matematik Derneği Yayınları, No. 19. Türk Matematik Derneği, İstanbul, 1963. Çeviren: Hüseyin Demir.

[10] B. V. Kutuzov. *Geometri. Cilt II*, Türk Matematik Derneği Yayınları, No. 20. Türk Matematik Derneği, İstanbul, 1963. Çeviren: Hüseyin Demir.

[11] B. V. Kutuzov. *Geometri. Cilt III*, Türk Matematik Derneği Yayınları, No. 21. Türk Matematik Derneği, İstanbul, 1964. Çeviren: Hüseyin Demir.

Geometri kitapları Türk Matematik Derneği'nin web sitesinden indirilebilir:
`https://tmd.org.tr/tmd-yayinlari-kitaplar/`

[1,4,5] numaralı yayınlara çevrimiçi erişim kolay değildir. Ancak şu adresten indirilebilirler:
http://sertoz.bilkent.edu.tr/HüseyinDemir.html

13 Hüseyin Demir'in Kurduğu Problemlerin Tam Listesi

American Mathematical Monthly İleri Düzey Problemleri

[1] İleri Düzey Problem 4102, *American Mathematical Monthly*, 50, (1943), 638.
[2] İleri Düzey Problem 4125, *American Mathematical Monthly*, 51, (1944), 252.
[3] İleri Düzey Problem 4134, *American Mathematical Monthly*, 51, (1944), 475.
[4] İleri Düzey Problem 4193, *American Mathematical Monthly*, 53, (1946), 160.
[5] İleri Düzey Problem 4215, *American Mathematical Monthly*, 53, (1946), 470.
[6] İleri Düzey Problem 4679, *American Mathematical Monthly*, 63, (1956), 191.
[7] İleri Düzey Problem 4695, *American Mathematical Monthly*, 63, (1956), 426.
[8] İleri Düzey Problem 4710, *American Mathematical Monthly*, 63, (1956), 669.
[9] İleri Düzey Problem 4735, *American Mathematical Monthly*, 64, (1957), 277.
[10] İleri Düzey Problem 4818, *American Mathematical Monthly*, 65, (1958), 779.

American Mathematical Monthly Temel Düzey Problemleri

[11] Temel Düzey Problem 1134, *American Mathematical Monthly*, 61, (1954), 568.
[12] Temel Düzey Problem 1160, *American Mathematical Monthly*, 62, (1955), 182.
[13] Temel Düzey Problem 1197, *American Mathematical Monthly*, 63, (1956), 39.
[14] Temel Düzey Problem 1209, *American Mathematical Monthly*, 63, (1956), 186.
[15] Temel Düzey Problem 1217, *American Mathematical Monthly*, 63, (1956), 342.
[16] Temel Düzey Problem 1778, *American Mathematical Monthly*, 72, (1965), 420.
[17] Temel Düzey Problem 1779, *American Mathematical Monthly*, 72, (1965), 420.
[18] Temel Düzey Problem 1877, *American Mathematical Monthly*, 73, (1966), 410.
[19] Temel Düzey Problem 1878, *American Mathematical Monthly*, 73, (1966), 410.
[20] Temel Düzey Problem 2100, *American Mathematical Monthly*, 75, (1968), 670.
[21] Temel Düzey Problem 2101, *American Mathematical Monthly*, 75, (1968), 670.
[22] Temel Düzey Problem 2109, *American Mathematical Monthly*, 75, (1968), 780.
[23] Temel Düzey Problem 2110, *American Mathematical Monthly*, 75, (1968), 780.
[24] Temel Düzey Problem 2124, *American Mathematical Monthly*, 75, (1968), 899.
[25] Temel Düzey Problem 2160, *American Mathematical Monthly*, 76, (1969), 300.
[26] Temel Düzey Problem 2213, *American Mathematical Monthly*, 77, (1970), 79.
[27] Temel Düzey Problem 2311, *American Mathematical Monthly*, 78, (1971), 793.
[28] Temel Düzey Problem 2312, *American Mathematical Monthly*, 78, (1971), 793.
[29] Temel Düzey Problem 2363, *American Mathematical Monthly*, 79, (1972), 662.
[30] Temel Düzey Problem 2462, *American Mathematical Monthly*, 81, (1974), 281.
[31] Temel Düzey Problem 2625, *American Mathematical Monthly*, 83, (1976), 812.
[32] Temel Düzey Problem 3135, *American Mathematical Monthly*, 93, (1986), 215.

[33] Temel Düzey Problem 3164, *American Mathematical Monthly*, 93, (1986), 566.
[34] Temel Düzey Problem 3422, *American Mathematical Monthly*, 98, (1991), 158.
[35] Temel Düzey Problem 3469, *American Mathematical Monthly*, 98, (1991), 955.

Mathematics Magazine **için Önerilen Problemler**

[36] Önerilen Problem 208, *Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 27.
[37] Önerilen Problem 217, *Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 103.
[38] Önerilen Problem 227, *Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 160.
[39] Önerilen Problem 234, *Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 234.
[40] Önerilen Problem 242, *Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 284.
[41] Önerilen Problem 248, *Mathematics Magazine*, 29, (1955-1956), 46.
[42] Önerilen Problem 258, *Mathematics Magazine*, 29, (1955-1956), 163.
[43] Önerilen Problem 266, *Mathematics Magazine*, 29, (1955-1956), 222.
[44] Önerilen Problem 298, *Mathematics Magazine*, 30, (1956-1957), 164.
[45] Önerilen Problem 304, *Mathematics Magazine*, 30, (1956-1957), 223.
[46] Önerilen Problem 334, *Mathematics Magazine*, 31, (1957-1958), 228.
[47] Önerilen Problem 349, *Mathematics Magazine*, 32, (1958-1959), 47.
[48] Önerilen Problem 372, *Mathematics Magazine*, 32, (1958-1959), 220.
[49] Önerilen Problem 380, *Mathematics Magazine*, 32, (1958-1959), 278.
[50] Önerilen Problem 384, *Mathematics Magazine*, 33, (1969-1960), 51.
[51] Önerilen Problem 398, *Mathematics Magazine*, 33, (1969-1960), 165.
[52] Önerilen Problem 407, *Mathematics Magazine*, 33, (1959-1960), 225.
[53] Önerilen Problem 415, *Mathematics Magazine*, 33, (1959-1960), 296.
[54] Önerilen Problem 419, *Mathematics Magazine*, 34, (1960-1961), 49.
[55] Önerilen Problem 425, *Mathematics Magazine*, 34, (1960-1961), 109.
[56] Önerilen Problem 437, *Mathematics Magazine*, 34, (1961), 174.
[57] Önerilen Problem 440, *Mathematics Magazine*, 34, (1961), 237.
[58] Önerilen Problem 458, *Mathematics Magazine*, 34, (1961), 364.
[59] Önerilen Problem 472, *Mathematics Magazine*, 35, (1962), 55.
[60] Önerilen Problem 487, *Mathematics Magazine*, 35, (1962), 186.
[61] Önerilen Problem 498, *Mathematics Magazine*, 35, (1962), 309.
[62] Önerilen Problem 509, *Mathematics Magazine*, 36, (1963), 133.
[63] Önerilen Problem 517, *Mathematics Magazine*, 36, (1963), 197.
[64] Önerilen Problem 529, *Mathematics Magazine*, 36, (1963), 264.
[65] Önerilen Problem 537, *Mathematics Magazine*, 37, (1964), 55.
[66] Önerilen Problem 544, *Mathematics Magazine*, 37, (1964), 119.
[67] Önerilen Problem 563, *Mathematics Magazine*, 37, (1964), 276.
[68] Önerilen Problem 572, *Mathematics Magazine*, 38, (1965), 52.
[69] Önerilen Problem 587, *Mathematics Magazine*, 38, (1965), 179.
[70] Önerilen Problem 599, *Mathematics Magazine*, 38, (1965), 241.
[71] Önerilen Problem 600, *Mathematics Magazine*, 38, (1965), 317.
[72] Önerilen Problem 609, *Mathematics Magazine*, 39, (1966), 69.
[73] Önerilen Problem 628, *Mathematics Magazine*, 39, (1966), 246.

[74] Önerilen Problem 639, *Mathematics Magazine*, 39, (1966), 306.
[75] Önerilen Problem 649, *Mathematics Magazine*, 40, (1967), 100.
[76] Önerilen Problem 680, *Mathematics Magazine*, 41, (1968), 42.
[77] Önerilen Problem 724, *Mathematics Magazine*, 42, (1969), 96.
[78] Önerilen Problem 738, *Mathematics Magazine*, 42, (1969), 214.
[79] Önerilen Problem 743, *Mathematics Magazine*, 42, (1969), 267.
[80] Önerilen Problem 756, *Mathematics Magazine*, 43l, (1970), 103.
[81] Önerilen Problem 763, *Mathematics Magazine*, 43, (1970), 166.
[82] Önerilen Problem 775, *Mathematics Magazine*, 43, (1970), 278.
[83] Önerilen Problem 806, *Mathematics Magazine*, 44, (1971), 228.
[84] Önerilen Problem 839, *Mathematics Magazine*, 45, (1972), 228.
[85] Önerilen Problem 859, *Mathematics Magazine*, 46, (1973), 103.
[86] Önerilen Problem 916, *Mathematics Magazine*, 47, (1974), 286.
[87] Önerilen Problem 963, *Mathematics Magazine*, 49, (1976), 43.
[88] Önerilen Problem 998, *Mathematics Magazine*, 49, (1976), 252.
[89] Önerilen Problem 1197, *Mathematics Magazine*, 57, (1984), 238.
[90] Önerilen Problem 1206, *Mathematics Magazine*, 58, (1985), 46.
[91] Önerilen Problem 1211, *Mathematics Magazine*, 58, (1985), 111.
[92] Önerilen Problem 1298, *Mathematics Magazine*, 61, (1988), 195.
[93] Önerilen Problem 1305, *Mathematics Magazine*, 61, (1988), 261.
[94] Önerilen Problem 1327, *Mathematics Magazine*, 62, (1989), 274.
[95] Önerilen Problem 1356, *Mathematics Magazine*, 63, (1990), 274.
[96] Önerilen Problem 1371, *Mathematics Magazine*, 64, (1991), 132.
[97] Önerilen Problem 1377, *Mathematics Magazine*, 64, (1991), 197.
[98] Önerilen Problem 1405, *Mathematics Magazine*, 65, (1992), 265.

Mathematics Magazine **Kısa Problemleri**

[99] Kısa Problem 117, *Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 37.
[100] Kısa Problem 138, *Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 241.
[101] Kısa Problem 141, *Mathematics Magazine*, 28, (1954-1955), 292.
[102] Kısa Problem 166, *Mathematics Magazine*, 29, (1955-1956), 229.
[103] Kısa Problem 188, *Mathematics Magazine*, 30, (1956-1957), 172.
[104] Kısa Problem 227, *Mathematics Magazine*, 32, (1958-1959), 32.
[105] Kısa Problem 234, *Mathematics Magazine*, 32, (1958-1959), 113.
[106] Kısa Problem 242, *Mathematics Magazine*, 32, (1958-1959), 229.
[107] Kısa Problem 266, *Mathematics Magazine*, 33, (1959-1960), 302.
[108] Kısa Problem 281, *Mathematics Magazine*, 34, (1961), 303.
[109] Kısa Problem 284, *Mathematics Magazine*, 34, (1961), 303.
[110] Kısa Problem 341, *Mathematics Magazine*, 37, (1964), 251.
[111] Kısa Problem 343, *Mathematics Magazine*, 37, (1964), 251.
[112] Kısa Problem 710, *Mathematics Magazine*, 59, (1986), 112.

Mathesis Sınav Sorusu

[113] **Sınav Sorusu 10**, *Mathesis*, **69**, (1960), 249-250.
[114] **Sınav Sorusu 11**, *Mathesis*, **69**, (1960), 250.
[115] **Sınav Sorusu 12**, *Mathesis*, **69**, (1960), 251.

Mathesis Soruları

[116] **Soru 3954**, *Mathesis*, **69**, (1960), 255.
[117] **Soru 3957**, *Mathesis*, **69**, (1960), 375.