

relatifs aux quadrangles Q_1, Q_2, Q_3 (2, 3) coupent orthogonalement une même sphère (G, σ) ayant pour carré de son rayon

$$(16) \quad \sigma^2 = \frac{5}{16} (a^2 + a'^2) = \frac{5}{4} \cdot \rho^2,$$

ρ étant le rayon de la sphère conjuguée, et qui coïncide avec la sphère orthoptique de la sphère $(G, \frac{\sigma}{\sqrt{3}})$, dont nous avons signalé d'autres propriétés (AFAS, 1945-99).

La formule (14) se réduit aussi à (16) quand le quadrangle Q_2 a les côtés $AB = DC$, ou $CA = DB$, ou $AB = DC = CA = DB$ (tétraèdre bisymétrique ABCD).

LES CERCLES PODAIRES DANS LE POLYGONE INSCRIPTIBLE,

par HÜSEYİN DEMİR (Turquie).

Nous nous proposons d'établir une propriété générale du polygone inscriptible qui conduit à la notion de cercle podaire d'un point par rapport à un tel polygone. Nous indiquerons, en outre, quelques propriétés relatives aux rayons et aux centres de ces cercles podaires généralisés.

1. Soient $A_1, A_2, \dots, A_n$, n points d'une circonférence Γ , de centre O et de rayon R , que nous prenons comme cercle unitaire dans un système de coordonnées complexes. Désignons par $\bar{u}$ le conjugué de u et appelons $t_1, t_2, \dots, t_n$ les coordonnées de $A_1, A_2, \dots, A_n$ et α celle d'un point quelconque P , n'appartenant pas à Γ .

Si s_1, s_2, s_3 sont la somme, la somme des produits deux à deux, le produit des nombres t_1, t_2, t_3 , la coordonnée β de l'inverse triangulaire de P dans le triangle $A_1 A_2 A_3$ résulte de la relation (MORLEY, *Inversive Geometry*, p. 195)

$$(1 - \bar{\alpha}\beta)(\alpha\bar{\alpha} - 1) = s_3\bar{\alpha}^3 - s_2\bar{\alpha}^2 + s_1\bar{\alpha} - 1.$$

De plus, le carré du rayon du cercle passant par les symétriques de P , par rapport aux côtés du triangle $A_1 A_2 A_3$, a pour expression (MORLEY, *loc. cit.*, p. 196)

$$(1 - \bar{\alpha}\beta)(1 - \alpha\bar{\beta}).$$

Dès lors, si l'on pose $\alpha\bar{\alpha} - 1 = a$, $\alpha\bar{\alpha} + 1 = b$ et

$$\pi_i = (\bar{\alpha}t_1 - 1)(\bar{\alpha}t_2 - 1) \dots (\bar{\alpha}t_i - 1),$$

la coordonnée du centre du cercle podaire de P, par rapport au triangle $A_1A_2A_3$ et le carré du rayon de ce cercle sont, a n'étant pas nul,

$$\omega_3 = \frac{1}{2\bar{\alpha}} \left(b - \frac{\pi_3}{a} \right), \quad \rho_3^2 = \frac{\pi_3 \bar{\pi}_3}{4a^2}.$$

L'expression de ω_3 peut aussi prendre la forme

$$\omega_3 = \frac{b}{2\bar{\alpha}} - \frac{\pi_4}{2\bar{\alpha}a(\bar{\alpha}t_4 - 1)}$$

et l'élimination de t_4 entre cette expression et sa conjuguée conduit à une relation qui, lorsqu'on y remplace ω_3 par x , s'écrit

$$4\alpha\bar{\alpha}a^3x\bar{x} - 2\bar{\alpha}a(a^2b - \bar{\pi}_4)x - 2\alpha a(a^2b - \pi_4)\bar{x} \\ - \pi_4\bar{\pi}_4 - ab(\pi_4 + \bar{\pi}_4) + a^3b^2 = 0.$$

Les centres des cercles podaires de P dans les triangles $A_2A_3A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_2A_3$ appartiennent donc à une circonférence et la coordonnée du centre et le carré du rayon de celle-ci sont

$$\omega_4 = \frac{1}{2\bar{\alpha}} \left(b - \frac{\pi_4}{a^2} \right), \quad \rho_4^2 = \frac{\pi_4 \bar{\pi}_4}{4a^4}.$$

2. La comparaison des expressions de ω_4 , ρ_4 à celles de ω_3 , ρ_3 montre que l'application à celle de ω_4 du raisonnement que nous venons d'appliquer à l'expression de ω_3 conduit, par substitution de π_5 à π_4 et de a^2 à a , aux valeurs

$$\omega_5 = \frac{1}{2\bar{\alpha}} \left(b - \frac{\pi_5}{a^4} \right), \quad \rho_5^2 = \frac{\pi_5 \bar{\pi}_5}{4a^8}$$

de la coordonnée du centre et du carré du rayon de la circonférence, à laquelle appartiennent les centres des cercles podaires de P, par rapport aux cinq quadrilatères du pentagone $A_1A_2 \dots A_5$.

3. De proche en proche, on déduit de ce qui précède le théorème général suivant :

soient $A_1, A_2, \dots, A_n$, n points d'une circonférence. Les centres des cercles podaires d'un point P, non situé sur la circonférence, par rapport aux quatre triangles obtenus en omettant successivement l'un des sommets du quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$ appartiennent à une circonférence, dite cercle podaire de P, par rapport au quadrilatère. Les centres des cercles podaires

de P, par rapport aux cinq quadrilatères obtenus en omettant successivement l'un des sommets du pentagone $A_1A_2 \dots A_5$ appartiennent à une circonférence, dite cercle podaire de P, par rapport au pentagone. Les centres des cercles podaires de P, par rapport aux n polygones de $(n-1)$ côtés obtenus en omettant successivement l'un des sommets du polygone $A_1A_2 \dots A_n$ appartiennent à une circonférence, dite cercle podaire de P, par rapport au polygone $A_1A_2 \dots A_n$.

Les expressions de la coordonnée et du carré du rayon de ce dernier cercle podaire sont

$$\omega_n = \frac{1}{2\bar{\alpha}} \left(b - \frac{\pi_n}{a^{n-2}} \right), \quad \rho_n^2 = \frac{\pi_n \bar{\pi}_n}{4a^{2(n-2)}}.$$

4. Comme $\pi_n \cdot \bar{\pi}_n$ est le produit de n expressions telles que

$$(\alpha - t_i) (\bar{\alpha} - \bar{t}_i) = PA_i^2,$$

la valeur de ρ_n résulte de la relation

$$(OP^2 - R^2)^{n-2} \rho_n = \frac{1}{2} PA_1 \cdot PA_2 \dots PA_n \cdot R^{n-3}.$$

On en déduit que, si $B_1, B_2, \dots, B_n$ sont les intersections de $A_1P, A_2P, \dots, A_nP$ avec Γ , la moyenne géométrique des rayons des cercles podaires de P, par rapport aux polygones $A_1A_2 \dots A_n$ et $B_1B_2 \dots B_n$, est

$$\frac{R^{n-3}}{2(OP^2 - R^2)^{\frac{1}{2}n-2}}.$$

Il résulte aussi de ce qui précède que les rayons des cercles podaires de P, par rapport aux polygones de $(n-1)$ côtés $A_2A_3 \dots A_n, A_1A_3 \dots A_n, \dots, A_1A_2 \dots A_{n-1}$ sont proportionnels à $PB_1, PB_2, \dots, PB_n$ et que le produit de ces rayons vaut

$$\frac{\rho^{n-1}}{2R^3} (OP^2 - R^2)^2.$$

5. Les coordonnées des centres des cercles podaires du point P, par rapport aux deux polygones de $(n-1)$ côtés obtenus en omettant successivement les points A_i et A_j parmi les points $A_1, A_2, \dots, A_n$ diffèrent de

$$\frac{\pi_n}{2\bar{\alpha}a^{n-3}} \left(\frac{1}{\bar{\alpha}t_i - 1} - \frac{1}{\bar{\alpha}t_j - 1} \right) = \frac{\pi_n(t_j - t_i)}{2a^{n-3}(\bar{\alpha}t_i - 1)(\bar{\alpha}t_j - 1)}$$

et les coordonnées des points B_i et B_j correspondants diffèrent de

$$\frac{a(t_j - t_i)}{(\bar{a}t_i - 1)(\bar{a}t_j - 1)}.$$

Le polygone formé par les centres des cercles podaires d'un point quelconque P , par rapport aux polygones de $(n - 1)$ côtés obtenus en omettant successivement un sommet du polygone $A_1A_2 \dots A_n$ est directement semblable au polygone $B_1B_2 \dots B_n$.

En particulier, le premier de ces deux polygones est harmonique quand $A_1A_2 \dots A_n$ est régulier. En outre, si $A_1A_2 \dots A_n$ est un polygone harmonique et que P coïncide avec un de ses centres isodynamiques, le polygone des centres considéré est régulier.

BIBLIOGRAPHIE

Topologische Gruppen, Teil 2 von **L. S. Pontrjagin**, Professor an der Staatlichen Lomonossow-Universität in Moskau ; in-8, 308 Seiten, 1958, B. G. Teubner, Leipzig, 1958. Preis : in Kunstleder gebunden 16 DM.

Pour le tome I, voir *Mathesis* 1957-189. Dans les chapitres VI-XI que comporte ce second tome, l'auteur considère successivement : les groupes commutatifs, topologiques localement bicomacts (pp. 5-56) ; le concept du groupe de LIE (57-98) ; la structure des groupes topologiques bicomacts (99-122) ; les groupes localement isomorphes (123-155) ; les groupes et les algèbres de LIE (156-224) ; la structure des groupes compacts de LIE (225-302). Le contenu de chacun des § est appliqué à des exemples qui sont ainsi au nombre de 60. Une liste d'ouvrages ou de travaux sur le sujet termine le volume. (R. D.)

* * *

Mathematisch-Naturwissenschaftliche Bibliothek. Band 10. **Grundzüge der Algebra. Teil II, Allgemeine Ring- und Körpertheorie** von Dr. **H. LUGOWSKI** und Dr. **H. J. WEINERT**, pädagogische Hochschule Potsdam ; 250 Seiten, 1958, B. G. Teubner, Leipzig. Preis : gebunden 11 DM.

La première partie était consacrée à la théorie générale des groupes (*Mathesis*, 1957-380). Ce tome II, qui considère la théorie générale des anneaux et des corps, est présenté avec le même souci d'ordre et de