

HÜSEYİN DEMİR

Problem kurmaya ve problem çözmeye adanmış bir ömür

Bu derlemeyi hazırlayan

Ali Sinan Sertöz

Bilkent Üniversitesi

Ankara, Türkiye

sertoz@bilkent.edu.tr

Bu genişletilmiş baskıya katkıda bulunanlar

Kürşat Aker

Lüksemburg Üniversitesi

Lüksemburg, Lüksemburg

kursat.aker@uni.lu

Alp Eden

Boğaziçi Üniversitesi

İstanbul, Türkiye

alp.eden5@gmail.com

Gözden geçirilmiş derlemenin Türkçe baskısı

Eylül 2026 tarihli genişletilmiş derleme esas alınmıştır

Ekim 2026

Çeviri, editöryal çalışma ve dizgi

Mete Han Karakaş

Kaliforniya Üniversitesi

Santa Cruz, CA, USA

mekaraka@ucsc.edu

Özet

Bu kitap, Ali Sinan Sertöz'ün Kürşat Aker ve Alp Eden'in katkılarıyla hazırladığı Eylül 2026 tarihli genişletilmiş derlemeye dayanan, Hüseyin Demir'in matematiksel problem ve çözümlerinin Türkçe baskısıdır. On üç bölüm; *American Mathematical Monthly*, *Mathematics Magazine*, *Quicks* köşesi, *Mathesis* ve diğer yayınlardaki çalışmaları, kaynak derlemede yer alan 117 problemin tam listesiyle birlikte sunar. Konular Öklid geometrisi, cebir, sayılar teorisi, kombinatorik, eşitsizlikler ve temel analizi kapsar. Tarihsel problem numaraları, dergi künyeleri ve çözüm atıfları korunur; İngilizce ve Fransızca metinler Türkçe matematik terminolojisine uygun biçimde aktarılır. Gözden geçirilmiş İngilizce ana baskı, metinlerin doğrudan LaTeX ile dizilmesi, matematiksel şekillerin TikZ ile yeniden çizilmesi ve editöryal düzeltmelerin izlenmesi için esas alınmıştır. Ön bölümler ve on üç bölümün tamamı doğrudan LaTeX ile yeniden dizilmiş, 32 matematiksel şekil dosyası TikZ ile hazırlanmıştır. Ek A, 95 editöryal kaydı ana baskıdaki numaralarıyla belgeler. Bu tarihsel derleme, bütün özgün çözümlerin eksiksiz matematiksel denetiminin yapıldığı iddiasını taşımaz.

2020 Mathematics Subject Classification. Birincil 00A07; ikincil 01A75, 51M04, 00A08.

Anahtar kelimeler. Hüseyin Demir; matematiksel problemler ve çözümler; Öklid geometrisi; eğlenceli matematik; toplu eserler; editöryal düzeltmeler.

Baskı. Gözden geçirilmiş derlemenin Türkçe ana baskısı, Ekim 2026.

Derleme. Ali Sinan Sertöz; genişletilmiş derlemeye katkıda bulunanlar: Kürşat Aker ve Alp Eden.

Çeviri, editöryal çalışma ve dizgi. Mete Han Karakaş.

Atıf. Her katkının yazarı, problemi öneren kişi ve çözümünü sunan kişiler ilgili maddelerde belirtilir. Editöryal ekler tarihsel metinden ayrı olarak tanımlanır.

Abstract

This volume is the Turkish edition of the mathematical problems and solutions associated with Hüseyin Demir, based on the expanded September 2026 collection compiled by Ali Sinan Sertöz with the collaboration of Kürşat Aker and Alp Eden. Its thirteen chapters bring together material from the *American Mathematical Monthly*, *Mathematics Magazine*, the Quickies column, *Mathesis*, and other publications, together with a complete list of 117 problems in the source collection. The topics include Euclidean geometry, algebra, number theory, combinatorics, inequalities, and elementary analysis. Historical problem numbers, journal references, and solution attributions are retained; the English and French texts are translated into Turkish. The revised English master edition provides the basis for native LaTeX typesetting, TikZ figures, and documented editorial corrections. The front matter and all thirteen chapters have been rebuilt in that structure, with 32 native TikZ figure files. Appendix A documents all 95 editorial records under the same identifiers as the master edition. This edited historical collection does not claim an exhaustive verification of every original solution.

2020 Mathematics Subject Classification. Primary 00A07; Secondary 01A75, 51M04, 00A08.

Keywords. Hüseyin Demir; mathematical problems and solutions; Euclidean geometry; recreational mathematics; collected works; editorial corrections.

Bu baskı hakkında

Kapsam ve dizgi. Bu çalışma, Hüseyin Demir’in on üç bölümlük derlemesinin Türkçe çevirisini gözden geçirilmiş İngilizce ana baskıyla uyumlaştırır. Ön bölümler, iki tarihsel önsöz ve on üç bölümün tamamı doğrudan LaTeX ile yeniden dizilmiştir. Matematiksel şekiller 32 TikZ kaynak dosyasıyla yeniden çizilmiş, portre fotoğraf olarak korunmuştur. Problem ve çözüm metinleri ile denklemler, tarama veya ekran görüntüsü olarak değil, düzenlenebilir LaTeX kaynakları olarak sunulur.

Problem numaraları, dergi künyeleri, çözüm sahipleri ve tarihsel metnin anlamı korunur. İngilizce ve Fransızca anlatım Türkçeye çevrilirken matematiksel gösterimler ana baskıyla aynı tutulur. “Tam dörtgen” ve “tam dörtkenar”, “izotomik doğru”, “kuvvet eksen” ve “kutup doğru” gibi terimlerde tutarlılık gözetilir. Özgün derginin editör notları, bu baskıda yapılan yeni açıklamalardan ayrılır. Kaynakta çözülemeyen okumalar ve eksik pasajlar tahminle tamamlanmaz.

İngilizce ana baskının düzeltme ekindeki 95 kaydın tamamı Türkçeye aktarılmış ve ilgili problem, çözüm veya listeyle eşleştirilmiştir. E001–E095 numaraları iki baskıda aynıdır; üst simge bağlantıları metni ilgili açıklamaya bağlar. Q227’nin eksiksiz problem ifadesi korunmuş, çözümündeki yanlış eksi işareti artı olarak düzeltilmiş ve on dört değer doğrudan denetlenmiştir. Kaynakta geçersiz olduğu belirlenen tarihsel kanıtlar, bu durum açıkça belirtilerek korunur. Çözülememiş matematiksel sorular, özellikle 743 numaralı problemdeki keskin sınır, çözülmüş gibi sunulmaz.

Kaynak sayfa atıfları, kapak ve ön sayfalar dâhil 233 sayfalık özgün derlemenin fiziksel PDF sayfasını gösterir. Ana metinde özgün basılı sayfa numarası bu sayıdan yedi eksiktir. Yeni dizginin sayfaları bu atıfları değiştirmez. Kitap boyunca yeni sayfa numaraları kullanılmış; düzeltme eki A-1, A-2 biçiminde ayrı numaralandırılmıştır.

Bu baskıda, özgün derlemenin hazırlanmasına ilişkin bilgiler ile problem ve çözümlerin yazarlarına yapılan atıflar korunmuştur.

Editöryal destek. Bu baskının hazırlanmasında, Türkçe çeviri, LaTeX dizgisi, TikZ şekilleri ve editöryal notların düzenlenmesi sırasında GPT-6 Astra desteğinden yararlanılmıştır.

Kaynaklar. Dergi atıfları ilgili maddelerde ve tam problem listesinde yer alır. Bu baskının kaynağı, Ali Sinan Sertöz’ün kişisel web sitesindeki Hüseyin Demir sayfasında (sertoz.bilkent.edu.tr) bulunan Eylül 2026 tarihli genişletilmiş derlemesidir.

Mete Han Karakaş

Ekim 2026

Santa Cruz, CA, USA

İçindekiler

Özet	ii
Abstract	iii
Bu baskı hakkında	iv
Önsöz	xiii
İkinci baskıya önsöz	xv
1 Monthly için İleri Düzey Problemler	1
İleri Düzey Problem 4102	1
İleri Düzey Problem 4125	1
İleri Düzey Problem 4134	1
İleri Düzey Problem 4193	2
İleri Düzey Problem 4215	2
İleri Düzey Problem 4679	2
İleri Düzey Problem 4695	2
İleri Düzey Problem 4710	3
İleri Düzey Problem 4735	3
İleri Düzey Problem 4818	3
2 Monthly'deki İleri Düzey Problemlerin Çözümleri	4
4102. Üçgende Özel Bir Kesen	4
4125. Trigonometrik Determinantlar	6
4134. Açının Üç Eşit Parçaya Bölünmesi	7
4193. Beşgende Bir Noktada Kesişen Doğrular	8
4215. Hermite Polinomları	9
4679. Aynı Çember Üzerinde On Ortopol	10
4695. Simson Doğrusu ve Euler Doğrusu	11
4710. İzotomik Doğrular	11
4735. Bir Noktada Kesişen Doğrular	12
4818. Tam Dörtkenarın Miquel Çemberinin Bir Özelliği	13
3 Monthly için Temel Düzey Problemler	14
Temel Düzey Problem E1134	14
Temel Düzey Problem E1160	14
Temel Düzey Problem E1197	14
Temel Düzey Problem E1209	14

Temel Düzey Problem E1217	15
Temel Düzey Problem E1778	15
Temel Düzey Problem E1779	15
Temel Düzey Problem E1877	15
Temel Düzey Problem E1878	16
Temel Düzey Problem E2100	16
Temel Düzey Problem E2101	16
Temel Düzey Problem E2109	16
Temel Düzey Problem E2110	17
Temel Düzey Problem E2124	17
Temel Düzey Problem E2160	17
Temel Düzey Problem E2213	17
Temel Düzey Problem E2311	18
Temel Düzey Problem E2312	18
Temel Düzey Problem E2363	18
Temel Düzey Problem E2462	18
Temel Düzey Problem E2625	19
Temel Düzey Problem E3135	19
Temel Düzey Problem E3164	19
Temel Düzey Problem E3422	19
Temel Düzey Problem E3469	19
4 Monthly'deki Temel Düzey Problemlerin Çözümleri	20
E1134. Tamkareler ve Mükemmel Sayılar	20
E1160. Tam Dörtkenarın Newton Doğrusunun Bir Özelliği	20
E1197. Zengin Bir Geometrik Şekil	21
E1209. Her Üçgenle İlişkili Bir Çapraz Oran	23
E1217. Euler Fonksiyonunun Bir Özelliği	23
E1778. Üçgenin Çember Yarıçapları	24
E1779. Üçgenin Yükseklikleri ve Dışteğet Yarıçapları	25
E1877. Yarım Çembere Çizilmiş Dışbükey Beşgen	26
E1878. Düzgün Çokgenle İlişkili İçteğet Merkezleri	26
E2100. Altı Bağntı	27
E2101. Üç Parabol ve Bir Üçgen	28
E2109. Üçgen Kuruluşu	28
E2110. Benzer Üçgenler	29
E2124. Her Üçgenden Bir Dik Üçgen	29
E2160. Üçgenle İlgili Bazı Yeni Eşitsizlikler	30
E2213. Nagel Özelliğine Sahip Dörtgenler	31
E2311. Çembersel Dörtgenin Tamamlanması	33
E2312. Ceva Teoreminin Bir Uygulaması	34
E2363. Küresel Üçgenler Üzerine	35

E2462. Genişletilmiş Erdős–Mordell Eşitsizliği	35
E2625. Koniklerin Bir Özelliği	44
E3135. Köşelere Uzaklıkların Eşleştirilmesi	44
E3164. Elipse Çizilen Teğetler	45
E3422. Teğetlerin İnvolyasyon Ekseninde Kesişmesi	46
E3469. Bir Konik Arayan Altı Ağırlık Merkezi	47
5 Monthly Problemlerine Verilen Çözümler	49
4057. Euler Doğrusu	49
E1107. Bir Dörtüzlüyle İlişkili Düzlem Demeti	49
E1142. Bir Dik Dairesel Koninin Yarı Tepe Açısı	50
E1148. Alanları Eşit İki Üçgen	50
E1166. Bir Daire Parçasındaki Çember Zinciri	51
E1687. Menelaus Teoreminin Bir Uygulaması	52
E2122. Napolyon Teoreminin Bir Genişletmesi	53
E2398. Johnson’ın Bildiği Bir Sonuç	54
6 Mathematics Magazine için Önerilen Problemler	55
208	55
217	55
227	56
234	56
242	56
248	56
258	56
266	57
298	57
304	57
334	57
349	58
372	58
380	58
384	58
398	59
407	59
415	59
419	59
425	60
437	60
440	60
458	60
472	61

487	61
498	61
509	61
517	62
529	62
537	62
544	62
563	63
572	63
587	63
599	63
600	64
609	64
628	64
639	64
649	65
680	65
724	65
738	65
743	66
756	66
763	66
775	66
806	67
839	67
859	67
916	67
963	68
998	68
1197	68
1206	68
1211	69
1298	69
1305	69
1327	69
1356	70
1371	70
1377	70
1405	70

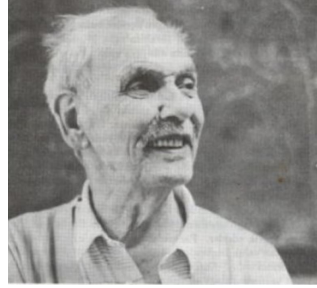
7 Önerilen Problemlerin Çözümleri	71
208	71
217	72
227: Dengedeki Kuvvetler	72
234	73
242	74
248	75
258: Diklik Merkezinin Geometrik Yeri	76
266: Çevrel Çembere Göre Evritik Noktalar	77
298: Biçimini Koruyan Bir Eğri	78
304: Bir Üçgenle İlişkili Çemberler	79
349: Bir Orta Nokta	79
334: Düzensiz Bir Bölgenin Alanı	80
372: Bir Trigonometrik Özdeşlik	80
380: Bir Denklem Sistemi	81
384: Sonsuz Bir Grup	82
398: Birbirine Bağlı İkinci Derece Denklemler	83
407: Bir Küpte Direnç	84
415: Bir Trigonometrik Toplam	84
419: Sabit Sürat Eğrisi	86
425: Euler'in Fi Fonksiyonu	87
437: İyi Bilinen Bir Problem	88
E1288: Tek Binom Katsayıları	89
440: Çember Paketlemesi	90
458: De Moivre Teoremi	91
472: Simetrik Konikler	92
487: Bir Matrisin Karekökü	93
498: Çarpımsal Fonksiyonların Bir Özelliği	94
509: Amerika Üzerine Bir Harfli İşlem	95
517: Parabolik Alanlar	96
529: Eğrilik Merkezi	98
537: Ortak Alanın Ekstremleri	98
544: Koşullu Bir Harfli İşlem	99
563: Altıgende Açılar	100
572: Bir Anma Bulmacası	101
587: Bir Trigonometrik Eşitsizlik	102
599: Doğrusal Bağımlı Vektörler	103
600: İlişkili Üçgenler	104
609: Harfli Bir Eşitlik	105
628: Pisagor Bağıntılı Bir Harfli İşlem	106
639: Dışbükey Dörtgen İçin Bir Eşitsizlik	106

649: Bir Harfli İşlem	107
680: Çembersel Bir Geometrik Yer	108
724: Üçgen Oluşma Olasılığı	109
738: Bir Feribot ve Nehir Akıntısı	110
743: Dört yüzlü İçin Bir Eşitsizlik	111
756: Merkezî Simetrikli Eğriler	112
763: Zeta Benzeri Fonksiyonlar	113
775: Ters Fonksiyonlar	114
806: Bir Doğruya Göre Simetri	116
839: Değişme Olasılığı	116
859: Tek Çözümü Olmayan Bir Harfli İşlem	117
916: Üç doğrusal Koordinatlar	118
963: Dışbükey Dörtgenler	119
998: 120° Açılı Bir Üçgen	120
1197: Yükseklik Orta Noktalarının Doğrudaşlığı	120
1206: Parçalara Ayrılmış Bir Üçgende İçyarıaçıların Toplamı	122
1211: Bir Elipsin İzoptığı	124
1298: İçteğet Çemberli Bir Dörtgen	126
1305: İçyarıaçılar İçin Bir Özdeşlik	127
1327: Teğet Dörtgenlerin Köşegenleri	128
1356: Doğrudaşlık ve Simetri	129
1371: Bir Üçgen Değişmezi	130
1377: Bir Üçgen Değişmezi	131
1405: İzogonal İlişkili Çemberler	132
8 Mathematics Magazine için Kısa Problemler	134
Q117	134
Q138	134
Q141	134
Q166	134
Q188	135
Q227	135
Q234	135
Q242	135
Q266	135
Q281	136
Q284	136
Q341	136
Q343	136
Q710	136

9 Kısa Problemlerin Çözümleri	137
Q117	137
Q138	137
Q141	137
Q166	137
Q188	138
Q227	138
Q234	138
Q242	139
Q266	139
Q281	139
Q284	139
Q341	139
Q343	140
Q710	140
10 Mathematics Magazine Problemlerine Sunulan Çözümler	141
192	141
203	142
204	143
221	144
226	145
270: Hilal İçindeki Çemberler	145
273: Harmonik Nokta Dörtlüsü	146
332: Bir Polinom Çarpımı	147
353: Teğet Çemberler	147
374: Eş Alanlı Üçgenler	148
383: Bir Karenin Parçalara Ayrılması	149
387: Tümevarımla Bir Kanıt	150
400: Bir Üçgen Kuruluşu	151
401: Bir Fibonacci Dizisi	151
412: Projektif Eşleme	153
427: Köşe Doğruları Arasında Bir Bağntı	153
428: Rakamların Permütasyonları	154
432: Köşe Doğruları	155
435: Üçgenlerde Uç Değerler	155
445: Yayımlanmış Bir Kanıtı Düzeltme	156
476: Çevreyi ve Alanı İkiye Bölen Doğru	157
646: Tam dörtkenar	159
653: Üstel fonksiyonun türevi	159
1199: İkizkenar üçgende dik doğrular	160
1256: Kirişler dörtgeni	161

11 Mathesis'teki Problemler ve Çözümler	163
Sınav sorusu 10	163
Sınav sorusu 11	164
Sınav sorusu 12	164
Soru 3954	165
Soru 3957	165
12 Diğer Yayınlar	166
13 Hüseyin Demir'in Kurduğu Problemlerin Tam Listesi	167
A Önceki Baskıdaki Hatalar ve Düzeltmeler	A-1

Önsöz



1916–1995

Kaynak PDF s. 5–6.

Hüseyin Demir, yaşamı boyunca yüzden fazla problem kurmuş üretken bir matematikçiydi. Çalışmalarını neredeyse yalnızca *American Mathematical Monthly* ve *Mathematics Magazine* dergilerinde yayımladı. İlk yayını, 1943 yılında *American Mathematical Monthly*'de “İleri Düzey Problem 4102” başlığıyla çıktı. Son yayını ise bir önceki yıl yayımlanan “Önerilen Problem 1405” için hazırladığı ve 1993 yılında *Mathematics Magazine*'de çıkan “Problemi önerenin çözümü” idi.

Hüseyin Demir'in *American Mathematical Monthly* ve *Mathematics Magazine* dergilerindeki yayınlarını bulmak için JSTOR'un arama motorunu kullandım. Burada yalnızca Demir'in önerdiği problemleri değil, bu problemlere verilen çözümleri de bir araya getirdim. Ayrıca Demir'in başka kişilerin problemlerine sunduğu yayımlanmış çözümleri de derledim.

Hüseyin Demir, Darüşşafaka Lisesi mezunuydu.

Darüşşafaka Cemiyeti, 1863 yılında yaşları 38, 35, 31, 27 ve 24 olan beş genç Osmanlı beyefendisi tarafından kuruldu. Kuruluşa izin veren Sultan Abdülaziz de o sırada yalnızca 33 yaşındaydı.

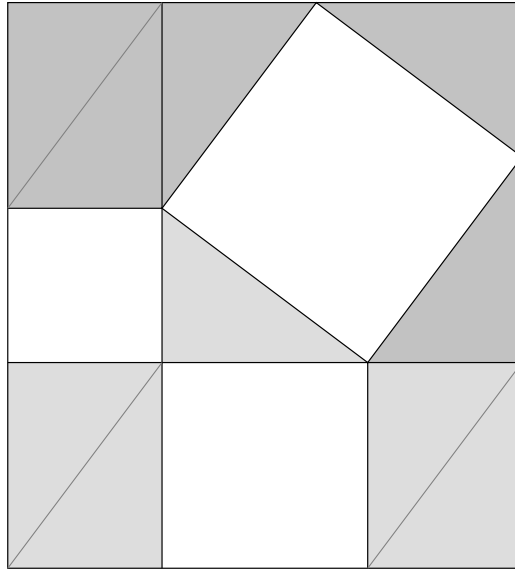
Darüşşafaka, Türk tarihindeki ilk sivil eğitim kuruluşudur. İmparatorluğun son on yıllarında askere alınan Müslüman Osmanlı erkeklerinin çoğu, uzun süren ve sık tekrarlanan savaşlarda hayatını kaybediyordu. Böylece birçok aile babasını kaybediyor; çocukları da eğitimlerini bırakıp *Kapalıçarşı*'da çalışmaya başlamak zorunda kalıyordu.

Öte yandan gayrimüslim Osmanlı çocukları aynı durumdan etkilenmiyordu. Bu nedenle Darüşşafaka Cemiyetinin o zamanki ve bugün de geçerli olan ilkesi “Eğitimde fırsat eşitliği” idi. Anne veya babasından birini kaybetmiş, maddi olanaksızlıklar nedeniyle iyi bir eğitim sürdüremeyen çocuklar, yarışmalı bir giriş sınavından sonra Darüşşafakaya kabul edilir. Darüşşafaka yatılı bir lisedir; öğrencilerin bütün günlük ve eğitim giderleri, bugün de bağışlarla desteklenen Darüşşafaka Cemiyeti tarafından karşılanır. Darüşşafaka günümüzde Türkiye'nin en iyi eğitim kurumlarından biri olarak tanınmaktadır.

Ünlü matematikçilerimizden Salih Zeki, Darüşşafakanın 1882 mezunuydu. Hüseyin Demir ise 1935 mezunuydu ve kendi anlatımına göre okuldayken Salih Zeki'nin kitaplarını okumuştur. Darüşşafakada ortaokul öğrencisiyken Pisagor teoremi için “sözsüz ispat” türünde yeni bir ispat bulmuştu; bu ispatı burada yeniden veriyorum.

Hüseyin Demir'in problemlerinden oluşan bu derlemeyi hazırlamayı okuluma karşı bir sorumluluk olarak gördüm. İçinde yetiştığımız geleneği sürdürmek için bu derlemenin eğitim amacıyla serbestçe kullanılması amaçlanmıştır.

Ali Sinan Sertöz
 Darüßsafaka 1973 mezunu
 sertoz@bilkent.edu.tr
 Aralık 2021, Ankara



İkinci baskıya önsöz

Kaynak PDF s. 7.

Hüseyin Demir, 1965 yılında yayını sona eren *Mathesis* dergisinde çeşitli problemler ve bir makale yayımlamıştır. Bu metinleri Kürşat Aker sağlama nezaketini göstermiştir.

Demir'in ayrıca 1977 yılında yayını sona eren matematik dergisi *Delta*'da bir makalesi vardır. Bu makaleye Bilkent Kütüphanesinin Kütüphanelerarası Ödünç Verme Sisteminin değerli yardımıyla ulaşıldı.

Son olarak Alp Eden, Demir'in *METU Journal*'da yayımlanmış, ancak başka yerde kaydına rastlanmayan bir makalesini daha buldu. Bu makale de Bilkent Kütüphanesi tarafından sağlandı.

Mathesis problemleri bu kitapçığa eklenmiştir. Yukarıda sözü edilen makalelere Hüseyin Demir sayfamdan ulaşılabilir.

Yardımlarını esirgemeyen Bilkent Kütüphanesine içten teşekkürlerimi sunuyorum; Hüseyin Demir'in çalışmalarından oluşan bu derlemeyi tamamlamamıza katkıda bulunan dostlarım Kürşat ve Alp'e şükranlarımı ifade ediyorum.

Ali Sinan Sertöz
Eylül 2026, Ankara

Monthly için İleri Düzey Problemler

İleri Düzey Problem 4102

American Mathematical Monthly **50** (1943), 638

Kaynak PDF s. 8.

Öneren: Hüseyin Demir, Columbia Üniversitesi.

O ve I , verilen bir ABC üçgeninin sırasıyla çevrel çemberinin ve içteğet çemberinin merkezleri olsun. BC, CA, AB üzerinde sırasıyla A_0, B_0, C_0 noktaları, her birinin diğer iki kenara olan cebirsel uzaklıklarının toplamı verilen bir l uzunluğuna eşit olacak biçimde alınsın. Sentetik yöntemle şunları ispatlayınız: (1) A_0, B_0, C_0 doğrusaldır; (2) $A_0B_0C_0$ doğrusu üzerindeki noktaların ABC 'nin kenarlarına olan uzaklıklarının toplamı l sabitidir; (3) $A_0B_0C_0$ doğrusu OI doğrusuna diktir.

İleri Düzey Problem 4125

American Mathematical Monthly **51** (1944), 252

Kaynak PDF s. 9.

Öneren: Hüseyin Demir, Columbia Üniversitesi.

Şu özdeşliği ispatlayınız:

$$\begin{vmatrix} \sin \theta_1 & -e^{-i\theta_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sin \theta_2 & e^{i\theta_2} & -e^{-i\theta_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sin \theta_3 & 0 & e^{i\theta_3} & -e^{-i\theta_3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sin \theta_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{i\theta_n} \end{vmatrix} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n).$$

İleri Düzey Problem 4134

American Mathematical Monthly **51** (1944), 475

Kaynak PDF s. 9.

Öneren: Hüseyin Demir, Columbia Üniversitesi.

$C_1^1 C_2^1 C_3^1$, verilen $A_1 A_2 A_3$ üçgeninin içteğet çemberinin değme noktalarının oluşturduğu üçgen; $C_1^2 C_2^2 C_3^2$ de $C_1^1 C_2^1 C_3^1$ için aynı yolla elde edilen üçgen olsun. Bu işlem sürdürülerek n adım sonunda $C_1^n C_2^n C_3^n$ elde edilsin. n 'inci üçgenin açılarını da C_i^n ile göstererek şunları ispatlayınız:^[E003]

1. $(C_i^n - \pi/3)/(A_i - \pi/3) = (-1)^n 2^{-n}$. Paydanın sıfır olduğu durumda eşdeğer çarpım özdeşliği kullanılır.
2. $n \rightarrow \infty$ iken $C_2^n C_3^n$ doğrusunun doğrultusunun limiti, $(A_2 A_3, C_2^1 C_3^1)$ açısını üç eşit parçaya bölen doğrulardan birinin doğrultusudur. Buradan, cetvel ve pergelle sonsuz sayıda adım kullanarak bir açıyı üç eşit parçaya bölme yöntemi elde ediniz.

İleri Düzey Problem 4193

American Mathematical Monthly **53** (1946), 160

Kaynak PDF s. 9.

Öneren: Hüseyin Demir, Columbia Üniversitesi.

Herhangi bir $A_1A_2A_3A_4A_5$ beşgeninin kenarları üzerine, indisler mod 5 alınmak üzere, $B_iA_{i+2} \parallel A_iA_{i+1}$ ve $B_iA_{i+3} \parallel A_iA_{i+4}$ olacak biçimde $B_iA_{i+2}A_{i+3}$ üçgenleri kurulsun. O zaman A_iB_i doğruları bir C noktasında kesişir.

İleri Düzey Problem 4215

American Mathematical Monthly **53** (1946), 470

Kaynak PDF s. 10.

Öneren: Hüseyin Demir, Columbia Üniversitesi.

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}$$

ile tanımlanan Hermite polinomlarının

$$n! \sum_{p=0}^n \frac{H_p^2(x)}{p!} = H_{n+1}^2(x) - H_n(x)H_{n+2}(x)$$

özdeşliğini sağladığını ispatlayınız.

İleri Düzey Problem 4679

American Mathematical Monthly **63** (1956), 191

Kaynak PDF s. 10.

Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye.

$A_1A_2A_3A_4A_5$ bir çembersel beşgen ve Ω_{ij} , A_iA_j doğrusunun kalan üç köşenin oluşturduğu üçgene göre ortopolu olsun. On Ω_{ij} noktasının aynı çember üzerinde bulunduğunu ispatlayınız.

İleri Düzey Problem 4695

American Mathematical Monthly **63** (1956), 426

Kaynak PDF s. 10.

Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye.

Bir çembersel dörtgende, bir köşenin diğer üç köşenin oluşturduğu üçgene göre Simson doğrusu bu üçgenin Euler doğrusuna dikse, aynı özelliğin dörtgenin diğer köşeleri için de geçerli olduğunu ispatlayınız.

İleri Düzey Problem 4710*American Mathematical Monthly* **63** (1956), 669

Kaynak PDF s. 10.

Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye.

Bir (O) çemberine çizilmiş tam dörtgende, karşılıklı kenar çiftlerinden biri (O)'ya çizilmiş bir üçgene göre izotomik doğrulardan oluşuyorsa, diğer karşılıklı kenar çiftlerinin de aynı üçgene göre izotomik olduğunu ispatlayınız.

İleri Düzey Problem 4735*American Mathematical Monthly* **64** (1957), 277

Kaynak PDF s. 11.

Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye.

$A_1A_2A_3A_4A_5$ düzlemde basit bir beş noktalı şekil, d de bu düzlemde herhangi bir doğru olsun. d ile A_i 'nin karşısındaki a_i kenarının kesişimini B_i ; A_iB_{i+1} ile B_iA_{i+1} doğrularının kesişimini C_{i+3} ile gösterelim. Beş A_iC_i doğrusu ortak bir D noktasından geçer.

İleri Düzey Problem 4818*American Mathematical Monthly* **65** (1958), 779

Kaynak PDF s. 11.

Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye.

Bir tam dörtkenarın kenarları d_i , d_i ile d_j üzerindeki köşesi A_{ij} olsun. d_i dışındaki üç kenarın oluşturduğu üçgeni t_i , bunun çevrel çemberini (O_i) ile gösterelim. (O_i) üzerindeki bir S_i noktasının t_i 'ye göre Simson doğrusu D_i olsun.

Her i için $D_i \parallel d_i$ ise şunları ispatlayınız: (1) S_iO_p doğrusu A_{qr} köşesinden geçer ($i, p \neq q, r$); (2) bütün S_i noktaları Miquel çemberi (O) üzerindedir.

Monthly'deki İleri Düzey Problemlerin Çözümleri

4102. Üçgende Özel Bir Kesen

American Mathematical Monthly **52** (1945), 103–104

Kaynak PDF s. 12–13.

4102 [1943, 638]. Öneren: Hüseyin Demir, Columbia Üniversitesi.

O ve I, verilen bir ABC üçgeninin sırasıyla çevrel çemberinin ve içteğet çemberinin merkezleri olsun. BC, CA, AB üzerinde sırasıyla A_0, B_0, C_0 noktaları, her birinin diğer iki kenara olan cebirsel uzaklıklarının toplamı verilen bir l uzunluğuna eşit olacak biçimde alınsın. Sentetik yöntemle şunları ispatlayınız: (1) A_0, B_0, C_0 doğrusaldır; (2) $A_0B_0C_0$ doğrusu üzerindeki noktaların ABC'nin kenarlarına olan uzaklıklarının toplamı l sabitidir; (3) $A_0B_0C_0$ doğrusu OI doğrusuna diktir.

Problemi önerenin çözümü. (1) CA, AB kenarlarına uzaklıkları toplamı l olan noktaların geometrik yeri, A_0 'dan geçen ve AI 'ya dik bir doğrudur. Bu doğrunun CA, AB ile kesişim noktaları B_c, C_b olsun. Benzer biçimde B_0, C_0 'a karşılık gelen iki geometrik yeri daha ele alalım. Bu üç doğrunun oluşturduğu üçgen $A'B'C'$ olsun. Bu üçgen ile ABC 'nin, perspektiflik merkezi I olan perspektif üçgenler olduğunu göstereceğiz. Nitekim A' , iki geometrik yerin kesişimi olduğundan CA, AB 'ye uzaklıkları eşittir; dolayısıyla AI üzerindedir. Benzer biçimde B', C' sırasıyla BI, CI üzerindedir. Desargues teoremi uygulanınca A_0, B_0, C_0 'ın doğrusal olduğu elde edilir.

(2) $A_0B_0C_0$ üzerinde bir M noktasının BC, CA, AB 'ye uzaklıkları x, y, z olsun. $x + y + z = l$ olduğunu göstereceğiz. $y + z = \text{Cst}$ koşulunu sağlayan noktaların geometrik yerini ele alalım. Şekildeki bu MQ doğrusu B_cC_b 'ye paraleldir ve $QQ_1 = y + z$ 'dir. C_b, A_b 'nin CA 'ya uzaklıkları l olduğundan (bkz. (1)), göstermemiz gereken $QQ_2 = x$ eşitliğidir. BC 'ye paralel MP çizilsin; o zaman $x = MX = PP_1$ olur. $A'A_b, A_0A_bC_b$ açısının açıortayı olduğundan $x = PP_1 = PP_2$ 'dir. Geriye $QP \parallel C_bA_b$ olduğunu göstermek kahr. $QMP, C_bA_0A_b$ üçgenlerinde QM, C_bA_0 ile MP, A_0A_b kenar çiftleri paraleldir; bu üçgenler, perspektiflik merkezi C_0 olan perspektif üçgenlerdir. Dolayısıyla üçüncü kenarları QP, C_bA_b de paraleldir; böylece $x = PP_2 = QQ_2$ elde edilir.

(3) İki önerme ispatlayacağız: (a) $A_0B_0C_0, (ABC)$ ile $(A'B'C')$ çemberlerinin kuvvet eksenidir; (b) $(A'B'C')$ 'nin merkezi O', OI üzerindedir. Böylece (3) ispatlanmış olacaktır.^[E001]

(a) $C_0A \cdot C_0B = C_0A' \cdot C_0B'$ bağıntısına dikkat ediniz. $ABB'A'$ dörtgeni çembersel olduğu için bu eşitlik doğrudur. (Açıların $A_bB'B = A'AB = \frac{1}{2}A$ eşitliğine bakınız.) Böylece C_0 'ın iki çembere göre kuvvetleri eşittir. Benzer özellik A_0, B_0 için de geçerlidir.

(b) O' 'nün OI üzerinde olduğunu göstermek için, kenarları AI, BI, CI 'ya dik olan $A'B'C'$ değişirken O' 'nün geometrik yerinin bir doğru olduğuna dikkat edelim. $A'B'C'$ ile ABC her zaman I merkezli perspektif olduğundan O', I 'dan geçen bir doğru çizer. Bu doğru O 'dan da geçer. Gerçekten, A' noktası AI ile (ABC) çemberinin kesişiminde seçilsin. B', C' 'nin de aynı çember üzerinde benzer noktalar olacağı kolayca görülür. Böylece $(A'B'C')$ 'nin merkezi $O', (ABC)$ 'nin merkezi O ile çakışır. Dolayısıyla bu iki çemberin kuvvet eksenini $A_0B_0C_0$, merkezlerden geçen OI doğrusuna diktir.

Editör notu (özgün dergi). İlk iki sonuç benzer üçgenlerden elde edilir. ABC 'nin ikizkenar olduğu durum ayrı ele alınabilir. Örneğin $AB = AC$ ise AI 'ya göre simetriden, B_0, C_0 sırasıyla AC, AB üzerinde olmak üzere $AB_0 = AC_0$ olur. Buradan $B_0C_0 \perp OI$ çıkar; bunun tersi ile (1) ve (2) de doğrudur, ancak A_0 istisnai bir konumdur. A_0, B_0, C_0 , verilen l sabitiyle tek olarak belirlenir. B_0 'ın uzaklıkları x_b, y_b, z_b için $y_b = 0, x_b + z_b = l$ olur; diğer noktalar için de benzeri geçerlidir. C_0B_0 doğrusu üzerindeki P , bu parçayı $\lambda : 1$ oranında bölsün. O zaman

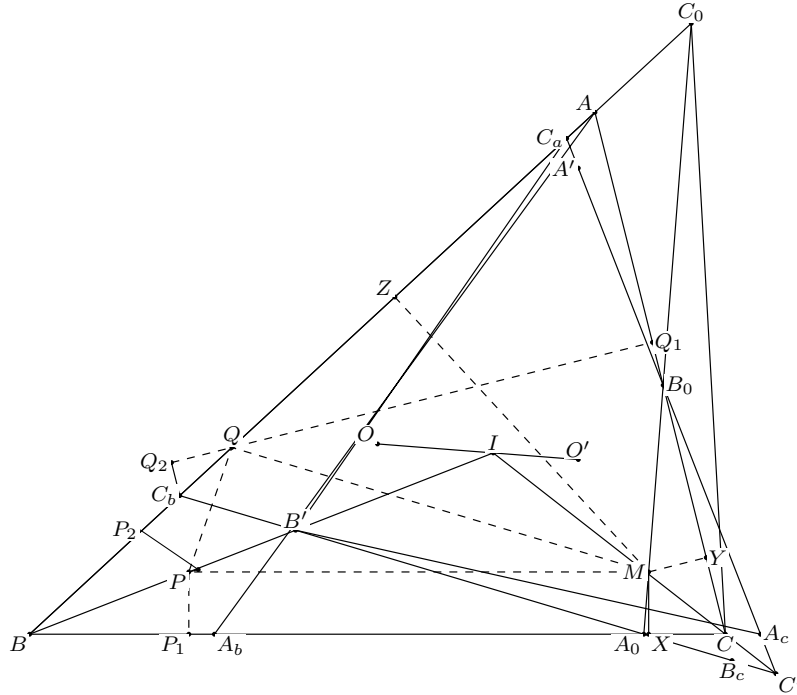
$$(\lambda + 1)x = x_c + \lambda x_b, \quad (\lambda + 1)y = y_c, \quad (\lambda + 1)z = \lambda z_b,$$

olur; burada x, y, z , P 'nin uzaklıklarıdır. Toplayınca

$$(\lambda + 1)(x + y + z) = (x_c + y_c) + \lambda(x_b + z_b) = (\lambda + 1)l;$$

elde edilir; P sonlu bir nokta ise $x + y + z = l$ 'dir. C_0B_0 doğrusu, BC 'yi $x_a = 0$ ve $y_a + z_a = l$ sağlayan sonlu bir noktada keser; bu nokta A_0 'dır. l 'nin farklı değerlerine karşılık gelen $A_0B_0C_0$ doğruları paraleldir: sonlu bir noktada kesişeselerdi, o noktanın uzaklıkları toplamı iki farklı değere eşit olurdu. P , B_0C_0 üzerinde değilse, P 'den buna paralel çizilen doğru iki kenarı B_0, C_0 'dan farklı noktalarda keser. Bu nedenle uzaklıklar toplamı l 'den farklıdır. Bu da verilen l için geometrik yerin o değere karşılık gelen $A_0B_0C_0$ doğrusu olduğunu gösterir.

$A'B'C'$ 'nin (O) 'ya çizildiği özel durumda C_0 'ın kutup doğrusu $(AA', BB') = I$ 'dan geçer; benzer biçimde B_0 'ın kutup doğrusu da I 'dan geçer. Dolayısıyla I 'nın kutup doğrusu B_0C_0, OI 'ya diktir.



Şekil 2.1: 4102 numaralı problemde kesenin kuruluşu.

4125. Trigonometrik Determinantlar

American Mathematical Monthly **52** (1945), 523

Kaynak PDF s. 14–15.

4125 [1944, 252].^[E002] Öneren: Hüseyin Demir, Columbia Üniversitesi.

Şu özdeşliği ispatlayınız:

$$\begin{vmatrix} \sin \theta_1 & -e^{-i\theta_1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sin \theta_2 & e^{i\theta_2} & -e^{-i\theta_2} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \sin \theta_3 & 0 & e^{i\theta_3} & -e^{-i\theta_3} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ \sin \theta_n & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{i\theta_n} \end{vmatrix} = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n).$$

Çözüm: Mary L. Boas, Tufts College. Her $\sin \theta$ yerine $(e^{i\theta} - e^{-i\theta})/(2i)$ yazıp $1/(2i)$ çarpanını determinantın dışına çıkaralım. Birinci sütunun her elemanından, aynı satırdaki diğer bütün elemanların toplamını çıkaralım. Determinant şu biçimi alır:

$$\frac{1}{2i} \begin{vmatrix} e^{i\theta_1} & -e^{-i\theta_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} & -e^{-i\theta_2} & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & e^{i\theta_{n-1}} & -e^{-i\theta_{n-1}} \\ -e^{-i\theta_n} & 0 & 0 & \cdots & 0 & e^{i\theta_n} \end{vmatrix}.$$

Birinci sütuna göre açalım. $e^{i\theta_1}$ 'in minörü $e^{i(\theta_2+\theta_3+\cdots+\theta_n)}$ 'dir; çünkü bu minörde ana köşegenin altındaki bütün elemanlar sıfırdır. $-e^{-i\theta_n}$ 'in minörü ise $(-1)^{n-1}e^{-i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_{n-1})}$ 'dir; çünkü ana köşegenin üstündeki bütün elemanlar sıfırdır. Böylece determinant

$$\frac{1}{2i} [e^{i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)} - e^{-i(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)}] = \sin(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n).$$

Diğer çözenler: E. F. Allen, Murray Barbour, C. B. Barker, Jr., Shepard Bartnoff, R. P. Boas, Jr., Mrs. R. C. Buck, Howard Eves, Clifford Gardner, P. C. Hammer, R. Hamming, J. F. Hofmann, L. M. Kelly, E. Lukacs, Norman Miller, Henry Nelson, Ivan Niven, H. N. Shapiro, Robert Steinberg, R. H. Wilson, Jr., ve problemi öneren.

Editör notu (özgün dergi). Çözümlerin yaklaşık yarısı tümevarım, diğer yarısı ise tümevarım kullanmadan basit determinant dönüşümleri uygulamıştır. Hammer, θ_j yerine $\pi/2 - \theta_j$ koyarak determinantın ve değerinin dönüşümünü incelemiştir. Sadeleştirmeden sonra birinci sütununda $a_{j1} = \cos \theta_j$ bulunan, ana köşegeni $\cos \theta_1, e^{-i\theta_2}, e^{-i\theta_3}, \dots$, bunun hemen üstündeki köşegeni $e^{i\theta_1}, e^{i\theta_2}, e^{i\theta_3}, \dots$ olan ve diğer elemanları sıfır olan bir determinant elde etmiştir. Değerini n tekken $\cos \sum \theta_j$, n çiftken $-\sin \sum \theta_j$ olarak bulmuştur. Daha basit bir yol, birinci sütunda aynı değışikliği yapmak, ana köşegeni $\cos \theta_1, -e^{i\theta_2}, -e^{i\theta_3}, \dots, -e^{i\theta_n}$ olarak değıştirmek ve özgün determinantın kalanını korumaktır. Bunun değeri Hammer'ın determinantının değeriyle aynıdır.

4134. Açının Üç Eşit Parçaya Bölünmesi

American Mathematical Monthly **52** (1945), 587

Kaynak PDF s. 15–17.

4134 [1944, 475]. Öneren: Hüseyin Demir, Columbia Üniversitesi.

$C_1^1 C_2^1 C_3^1$, verilen $A_1 A_2 A_3$ üçgeninin içteğet çemberinin değme noktalarının oluşturduğu üçgen; $C_1^2 C_2^2 C_3^2$ de $C_1^1 C_2^1 C_3^1$ için aynı yolla elde edilen üçgen olsun. Bu işlem sürdürülerek n adım sonunda $C_1^n C_2^n C_3^n$ elde edilsin. n 'inci üçgenin açılarını da C_i^n ile göstererek şunları ispatlayınız.^[E003]

1. $(C_i^n - \pi/3)/(A_i - \pi/3) = (-1)^n 2^{-n}$. Paydanın sıfır olduğu durumda eşdeğer çarpım özdeşliği kullanılır.
2. $n \rightarrow \infty$ iken $C_2^n C_3^n$ doğrusunun doğrultusunun limiti, $(A_2 A_3, C_2^1 C_3^1)$ açısını üç eşit parçaya bölen doğrulardan birinin doğrultusudur. Buradan, cetvel ve pergelle sonsuz sayıda adım kullanarak bir açığı üç eşit parçaya bölme yöntemi elde ediniz.

Çözüm: Howard Eves, College of Puget Sound. 1. $A_1 A_2 A_3$ 'ün içteğet çemberinin merkezini I ile gösterirsek $C_2^1 I C_3^1 = 2C_1^1$ olur. Dolayısıyla $A_1 + 2C_1^1 = \pi$ 'dir. Benzer biçimde $A_i + 2C_i^1 = \pi$, yani

$$\frac{C_i^1 - \pi/3}{A_i - \pi/3} = -\frac{1}{2}.$$

Aynı işlemlerle

$$\frac{C_i^j - \pi/3}{C_i^{j-1} - \pi/3} = -\frac{1}{2}, \quad j = 2, 3, \dots, n.$$

Çarparak şu sonucu elde ederiz:

$$\frac{C_i^n - \pi/3}{A_i - \pi/3} = (-1)^n 2^{-n}.$$

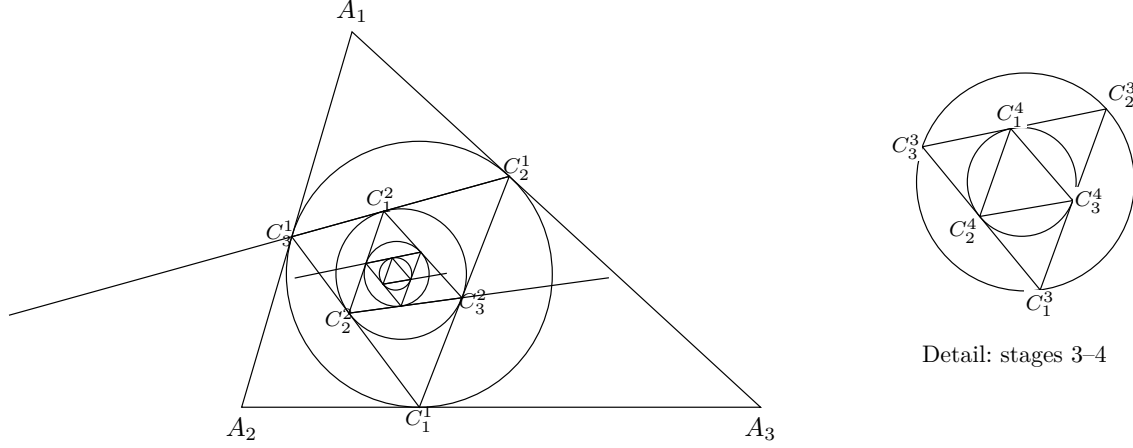
2. Şimdi, birinci kısımdaki bağıntılarla,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} [\text{angle}(A_2 A_3, C_2^n C_3^n)] &= \sum_{n=1}^{\infty} \text{angle}(C_2^{2n-2} C_3^{2n-2}, C_2^{2n} C_3^{2n}), \quad C_i^0 \equiv A_i \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (C_3^{2n-1} - C_1^{2n}) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [(C_3^{2n-1} - \pi/3) - (C_1^{2n} - \pi/3)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [-2^{-2n+1}(A_3 - \pi/3) - 2^{-2n}(A_1 - \pi/3)], \end{aligned}$$

bulunur. Sağdaki sonsuz toplam şu biçimde sadeleşir:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} [\pi - A_1 - 2A_3] 2^{-2n} &= (A_2 - A_3) \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-2n} = \frac{1}{3}(A_2 - A_3) \\ &= \frac{2}{3} \left(\frac{A_2 - A_3}{2} \right) \\ &= \frac{2}{3} \left[\frac{1}{2}(A_2 - \pi/3) - \frac{1}{2}(A_3 - \pi/3) \right] \\ &= \frac{2}{3} [-(C_2^1 - \pi/3) + (C_3^1 - \pi/3)] \\ &= \frac{2}{3} (C_3^1 - C_2^1) = \frac{2}{3} \text{angle}(A_2 A_3, C_2^1 C_3^1). \end{aligned}$$

Böylece ikinci kısım ispatlanır. Verilen bir dar $(A_2A_3, C_2^1C_3^1)$ açısını üç eşit parçaya bölen doğrulardan birini asimptotik olarak elde etmek için önerilen yöntem açıktır. Bununla birlikte, bir açıyı üç eşit parçaya bölmek için daha iyi pek çok Öklid geometrisi temelli asimptotik kuruluş bulunduğunu belirtmek gerekir.



Şekil 2.2: Açının üç eşit parçaya bölünmesinde ardışık değme üçgenleri.

Diğer çözenler: problemi öneren.

Editör notu (özgün dergi). *American Mathematical Monthly* içinde, hata sınırlarıyla birlikte yaklaşık açı üçleme yöntemlerine ilişkin bazı kaynaklar şunlardır:

1932, 478, E. C. Kennedy'nin *Angle Division* makalesi; 2972 [1925, 95]; 3114 [1925, 483]; 3522 [1933, 303]; 3563 [1934, 113]; Pappus'un konikleri kullanan yöntemi: 3490 [1932, 243].

4193. Beşgende Bir Noktada Kesişen Doğrular

American Mathematical Monthly **54** (1947), 349

Kaynak PDF s. 17.

4193 [1946, 160]. Öneren: Hüseyin Demir, Columbia Üniversitesi.

Herhangi bir $A_1A_2A_3A_4A_5$ beşgeninin kenarları üzerine, indisler mod 5 alınmak üzere, $B_iA_{i+2} \parallel A_iA_{i+1}$ ve $B_iA_{i+3} \parallel A_iA_{i+4}$ olacak biçimde $B_iA_{i+2}A_{i+3}$ üçgenleri kurulsun. O zaman A_iB_i doğruları bir C noktasında kesişir.

Çözüm: J. W. Clawson, Ursinus College, Collegeville, Pennsylvania. Homojen trilineer koordinat sistemi için $A_1A_2A_4$ 'ü referans üçgeni alalım. $A_1 = (1, 0, 0)$, $A_2 = (0, 1, 0)$, $A_3 = (d, e, f)$, $A_4 = (0, 0, 1)$, $A_5 = (k, l, m)$ olsun.

A_3 'ten A_1A_2 'ye paralel geçen doğru ile A_4 'ten A_1A_5 'e paralel geçen doğrunun denklemleri sırasıyla

$$afx + bfy - (ad + be)z = 0, \quad alx + (bl + cm)y = 0.$$

olur. Dolayısıyla B_1 'in koordinatları

$$(bl + cm)(ad + be), \quad -al(ad + be), \quad acfm;$$

ve A_1B_1 'in denklemi

$$cfmy + l(ad + be)z = 0.$$

biçimindedir. Aynı yolla A_2B_2 ve A_4B_4 'ün denklemleri

$$cfmx + d(ak + bl)z = 0, \quad l(ad + be)x - d(ak + bl)y = 0.$$

olarak bulunur. Bu üç doğrunun, koordinatları

$$d(ak + bl), \quad l(ad + be), \quad -cfm.$$

olan bir C noktasında kesiştiği kolayca görülür. $A_1A_3A_4$ ve $A_2A_4A_5$ üçgenleri kullanılarak A_3B_3, A_5B_5 'in de aynı C noktasından geçtiği benzer biçimde ispatlanır.

Diğer çözenler: problemi öneren.

Editör notu (özgün dergi). Clawson, Ceva teoreminin tersini kullanan ikinci bir ispat da vermiştir. Problemi öneren, diğer kenarlar sabitken A_4A_5 kenarının A_5 çevresinde dönmesiyle oluşan A_3B_3, A_4B_4 doğru demetlerini kullanmıştır. Bu doğrular arasındaki eşleme homografik olduğundan, kesişimleri C 'nin geometrik yeri bir koniktir. Bu konik A_1B_1 ile A_3A_4 doğrularına ayrışır; ispat buradan elde edilir.

4215. Hermite Polinomları

American Mathematical Monthly **55** (1948), 34

Kaynak PDF s. 18–19.

4215 [1946, 470]. Öneren: Hüseyin Demir, Columbia Üniversitesi.

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2}$$

ile tanımlanan Hermite polinomlarının

$$n! \sum_{p=0}^n \frac{H_p^2(x)}{p!} = H_{n+1}^2(x) - H_n(x)H_{n+2}(x)$$

özdeşliğini sağladığını ispatlayınız.

Çözüm: Hsien-yü Hsü, Yenching University, Peiping, China. Pólya–Szegő, *Aufgaben und Lehrsätze II*, s. 294–295'te Hermite polinomları

$$h_n(x) = \frac{1}{n!} e^{x^2/2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2/2},$$

biçiminde tanımlanır ve

$$nh_n(x) = -xh_{n-1}(x) - h_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots$$

fark denklemini sağlar. Ayrıca

$$H_n \equiv H_n(x) = (-1)^n n! h_n(x),$$

olduğundan fark denklemi

$$H_n = xH_{n-1} - (n-1)H_{n-2}, \quad n = 2, 3, \dots \quad (1)$$

biçimini alır. Bu denklemden ve H_{n+1}, H_{n+2} için benzer denklemlerden x yok edilirse doğrudan

$$\begin{aligned} H_{n+1}^2 - H_n H_{n+2} &= n(H_n^2 - H_{n+1} H_{n-1}) + H_n^2 \\ &= n(n-1)(H_{n-1}^2 - H_n H_{n-2}) + nH_{n-1}^2 + H_n^2 \\ &= \dots \\ &= n! \left\{ (H_1^2 - H_2 H_0) + \frac{1}{1!} H_1^2 + \frac{1}{2!} H_2^2 + \dots + \frac{1}{n!} H_n^2 \right\} \\ &= n! \sum_{p=0}^n H_p^2 / p!, \end{aligned}$$

elde edilir; burada $H_1^2 - H_2 H_0 = 1$ kullanılmıştır.

Diğer çözenler: F. E. Cothran, A. B. Farnell, L. M. Kelly, Norman Miller, S. T. Parker, W. A. Pierce, W. H. Spragens, M. S. Webster, M. Wyman, Profesör Otto Szász'ın sınıfı, ve problemi öneren.

Editör notu (özgün dergi). Bazı çözüm sahipleri, yukarıdaki (1) denkleminin Dunham Jackson'ın *Fourier Series and Orthogonal Polynomials* kitabında s. 176 ve devamında bulunduğunu belirtmiştir. Profesör Szász'ın Ortogonal Açılımlar dersindeki öğrencilerin çözümü, Christoffel formülü olarak bilinen

$$\sum_{p=0}^n \frac{H_p(x)H_p(y)}{p!} = \frac{H_{n+1}(x)H_n(y) - H_n(x)H_{n+1}(y)}{n!(x-y)}.$$

bağıntısından hareket eder (Szegő, *Orthogonal Polynomials*, s. 102). Webster'ın çözümü ise

$$H_m(x)H_n(x) = n! \sum_{r=0}^n \binom{m}{n-r} \frac{H_{m-n+2r}}{r!}, \quad (m \geq n),$$

bağıntısını kullanır. Bu bağıntı E. Feldheim tarafından *Journal of the London Mathematical Society*, 1938, s. 22–29'da elde edilmiştir.

4679. Aynı Çember Üzerinde On Ortopol

American Mathematical Monthly **63** (1956), 191

Kaynak PDF s. 20.

4679 [1956, 191]. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye.

$A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ bir çembersel beşgen ve Ω_{ij} , $A_i A_j$ doğrusunun kalan üç köşenin oluşturduğu üçgene göre ortopolu olsun. On Ω_{ij} noktasının aynı çember üzerinde bulunduğunu ispatlayınız.

Çözüm: Chih-yi Wang, University of Minnesota. Aşağıdaki bilinen teoremi kullanacağız.

Teorem. Bir doğru bir üçgenin çevrel çemberini keserse, kesişim noktalarının Simson doğruları, doğrunun bu üçgene göre ortopolunda kesişir.

(Bkz. Court, *College Geometry*, 2. baskı, s. 289.)

$A_1 A_2 A_3 A_4 A_5$ 'in çevrel çemberi birim çember ve $A_i = (\cos \theta_i, \sin \theta_i)$, $i = 1, 2, \dots, 5$ olsun. Özel olarak Ω_{12} 'nin koordinatlarını bulalım. A_1, A_2 'nin Simson doğrularının denklemleri, $j = 1, 2$ için,

$$\begin{aligned} y - \frac{1}{2}(\sin \theta_j + \sin \theta_3 + \sin \theta_4) + \frac{1}{2} \sin(\theta_3 + \theta_4 - \theta_j) \\ = \tan \frac{1}{2}(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_j) \\ \times \left[x - \frac{1}{2}(\cos \theta_3 + \cos \theta_4 + \cos \theta_j) + \frac{1}{2} \cos(\theta_3 + \theta_4 - \theta_j) \right], \end{aligned}$$

biçimindedir.^[E004] Denklemler birlikte çözülünce

$$\Omega_{12} = \left(\alpha + \frac{1}{2} \cos(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_1 - \theta_2), \beta + \frac{1}{2} \sin(\theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_1 - \theta_2) \right),$$

elde edilir; burada $\alpha = \frac{1}{2} \sum \cos \theta_k$, $\beta = \frac{1}{2} \sum \sin \theta_k$ ve $k = 1, 2, \dots, 5$ 'tir. α, β simetrik fonksiyonlar olduğundan indisleri değiştirerek, on Ω_{ij} noktasının merkezi (α, β) ve yarıçapı $\frac{1}{2}$ olan çember üzerinde bulunduğunu görürüz.

Diğer çözenler: J. W. Clawson, R. Goormaghtigh, O. J. Ramler, Sister M. Stephanie, ve problemi öneren.

Editör notu (özgün dergi). Goormaghtigh bu teoremi *Mathesis*, 1939, s. 312'de vermiştir. Ramler, sonucu çembersel yedigeneye genişletir: Ω_{ijk} , $A_i A_j A_k$ üçgeninin kalan dört köşenin oluşturduğu dörtgene göre Kantor noktası ise otuz beş Ω_{ijk} noktası, yarıçapı yedigenin çevrel çemberinin yarıçapının yarısı olan bir çember üzerindedir.

4695. Simson Doğrusu ve Euler Doğrusu

American Mathematical Monthly **64** (1957), 437

Kaynak PDF s. 20–21.

4695 [1956, 426]. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye.

Bir çembersel dörtgende, bir köşenin diğer üç köşenin oluşturduğu üçgene göre Simson doğrusu bu üçgenin Euler doğrusuna dikse, aynı özelliğin dörtgenin diğer köşeleri için de geçerli olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: Sister M. Stephanie, *Georgian Court College, Lakewood, N. J.* Karmaşık koordinatları kullanıp çemberi birim çember alalım. Dörtgenin köşeleri t_1, t_2, t_3, t_4 ve $|t_i| = 1$ olsun. t_1 'in, t_2, t_3, t_4 'ün oluşturduğu üçgene göre Simson doğrusunun denklemi

$$2t_1^2 z - 2t_1 s_3 \bar{z} + s_3 + t_1 s_2 - t_1^3 - t_1^2 s_1 = 0,$$

biçimindedir; burada $s_1, s_2, s_3, t_2, t_3, t_4$ 'ün temel simetrik fonksiyonlarıdır. Bu üçgenin Euler doğrusunun denklemi $s_2 z - s_1 s_3 \bar{z} = 0$ 'dır. İki doğru dikse, birinin klinantı diğerinin negatiftir; dolayısıyla $s_3/t_1 = -s_1 s_3/s_2$ olur. Sadeleştirince

$$t_1 t_2 + t_1 t_3 + t_1 t_4 + t_2 t_3 + t_2 t_4 + t_3 t_4 = 0.$$

elde edilir. Bu sonucun simetrisi, özelliğin her köşe için geçerli olduğunu gösterir.

Diğer çözenler: J. W. Clawson, G. W. Courter, R. Deaux, Beckham Martin, O. J. Ramler, Robert Sibson, Chih-yi Wang, ve problemi öneren.

4710. İzotomik Doğrular

American Mathematical Monthly **64** (1957), 601

Kaynak PDF s. 21.

4710 [1956, 669]. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye.

Bir (O) çemberine çizilmiş tam dörtgende, karşılıklı kenar çiftlerinden biri (O)'ya çizilmiş bir üçgene göre izotomik doğrulardan oluşuyorsa, diğer karşılıklı kenar çiftlerinin de aynı üçgene göre izotomik olduğunu ispatlayınız.

I. Çözüm: O. J. Ramler, Catholic University of America. Eşlenik koordinat sistemi kullanalım; (O) 'yu birim çember alıp üzerindeki T_1, T_2, T_3 vektör koordinatlı noktaları üçgenin, t_1, t_2, t_3, t_4 noktalarını tam dörtgenin köşeleri olarak seçelim. t_2t_3 doğrusu, üçgenin T_2T_3 kenarını vektör koordinatı

$$z = \frac{T_2T_3(t_2 + t_3) - (T_2 + T_3)t_2t_3}{T_2T_3 - t_2t_3}.$$

olan noktada keser. Benzer biçimde t_1t_4 'ün T_2T_3 ile kesişiminin koordinatı

$$z' = \frac{T_2T_3(t_4 + t_1) - (T_2 + T_3)t_1t_4}{T_2T_3 - t_1t_4}.$$

olur. Varsayım gereği $T_3 - z = z' - T_2$ 'dir. Yerine koyup sadeleştirince

$$T_2^2T_3^2(T_2 + T_3 - s_1) + T_2T_3s_3 - (T_2 + T_3)s_4 = 0,$$

elde edilir; burada $s_1, s_3, s_4, t_1, t_2, t_3, t_4$ 'ün temel simetrik fonksiyonlarıdır. Bu sonucun simetrisi istenen teoremi ispatlar.

II. Çözüm: Roland Deaux, Faculté Polytechnique, Mons, Belgium. (O) çemberi yerine herhangi bir Γ koniği alınabilir. ABC ve $PQRS$, Γ 'ya çizilmiş üçgen ve tam dörtgen olsun. Desargues teoremi uyarınca Γ , (PQ, RS) , (PR, QS) , (PS, QR) konikleri, ABC 'nin her kenarı üzerinde bir involüsyonun dört çiftini belirler. Γ ile izotomik PQ, RS doğrularının belirlediği bu involüsyonun çift noktaları, kenarın orta noktası ile sonsuzdaki noktasıdır. İstenen özellik buradan çıkar.

Diğer çözenler: J. W. Clawson, N. A. Court, R. Goormaghtigh, Josef Langr, ve problemi öneren.

4735. Bir Noktada Kesişen Doğrular

American Mathematical Monthly **65** (1958), 128

Kaynak PDF s. 22.

4735 [1957, 277]. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye.

$A_1A_2A_3A_4A_5$ düzlemde basit bir beş noktalı şekil, d de bu düzlemde herhangi bir doğru olsun. d ile A_i 'nin karşısındaki a_i kenarının kesişimini B_i ; A_iB_{i+1} ile B_iA_{i+1} doğrularının kesişimini C_{i+3} ile gösterelim. Beş A_iC_i doğrusu ortak bir D noktasından geçer.

Çözüm: E. J. F. Primrose, The University, Leicester, England. Her A_i 'nin karşı kenarı a_i 'nin kutbu olduğu tek bir P kutupsallığı vardır (Coxeter, *The Real Projective Plane*, 5.65). $A_1C_1B_3B_4$ dört noktalı şekline bakalım. A_1B_3 'ün P 'ye göre kutbu A_3 olduğundan A_1B_3, C_1B_4 eşlenik doğrulardır; benzer biçimde A_1B_4, C_1B_3 de eşleniktir. Hesse teoreminin düaline göre (Coxeter, 5.55), A_1C_1 ile B_3B_4 eşleniktir. Dolayısıyla A_1C_1, d 'nin P 'ye göre kutbu D 'den geçer. Aynı akıl yürütmeyle bütün A_iC_i doğruları D 'den geçer.

Diğer çözenler: W. B. Carver, J. W. Clawson, R. Deaux, ve problemi öneren.

4818. Tam Dörtkenarın Miquel Çemberinin Bir Özelliği

American Mathematical Monthly **66** (1959), 732

Kaynak PDF s. 22–23.

4818 [1958, 779]. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye.

Bir tam dörtkenarın kenarları d_i , d_i ile d_j üzerindeki köşesi A_{ij} olsun. d_i dışındaki üç kenarın oluşturduğu üçgeni t_i , bunun çevrel çemberini (O_i) ile gösterelim. (O_i) üzerindeki bir S_i noktasının t_i 'ye göre Simson doğrusu D_i olsun.

Her i için $D_i \parallel d_i$ ise şunları ispatlayınız: (1) $S_i O_p$ doğrusu A_{qr} köşesinden geçer ($i, p \neq q, r$); (2) bütün S_i noktaları Miquel çemberi (O) üzerindedir.

Problemi önerenin çözümü. (1) S_i, O_p 'nin d_r üzerindeki dik izdüşümleri U_{ir}, V_{pr} olsun. Yönlü açılarla

$$\begin{aligned} \angle V_{pr} O_p A_{qr} &= \angle A_{ir} A_{qi} A_{qr} && ((O_p) \text{ çemberinden}), \\ &= \angle U_{ir} U_{iq} A_{qr} && (D_i \parallel d_i \text{ olduğundan}), \\ &= \angle U_{ir} S_i A_{qr} && (S_i U_{ir} A_{qr} U_{iq} \text{ çemberinden}). \end{aligned}$$

elde edilir. $O_p V_{pr} \parallel S_i U_{ir}$ olduğundan, S_i, O_p, A_{qr} 'ın istenen doğrusallığı çıkar.

(2) F Miquel noktası olmak üzere, merkezleri birleştiren $O_p O_q$ doğrusu $F A_{pq}$ kuvvet eksenine diktir. Bu nedenle sırasıyla

$$\begin{aligned} \angle O_p O_r O_q &= \angle A_{qi} F A_{pi}, \\ &= \angle A_{qr} A_{pq} A_{pi} && ((O_r) \text{ çemberinden}), \\ &= \angle A_{qr} A_{pq} A_{pr}, \\ &= \angle A_{qr} S_i A_{pr} && ((O_i) \text{ çemberinden}), \\ &= \angle O_p S_i O_q && ((1) \text{ özelliğinden}), \end{aligned}$$

elde edilir; böylece S_i , Miquel çemberi (O) üzerindedir.

Diğer çözenler: A. E. Landry.

BÖLÜM 3

Monthly için Temel Düzey Problemler

Temel Düzey Problem E1134

American Mathematical Monthly **61** (1954), 568

Kaynak PDF s. 24.

Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye.

Bir tamkare tamsayının mükemmel sayı olamayacağını ispatlayınız.

Temel Düzey Problem E1160

American Mathematical Monthly **62** (1955), 182

Kaynak PDF s. 25.

Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye.

Bir tam dörtkenarda, herhangi bir kenarın diğer üç kenarın oluşturduğu üçgene göre izotomik doğrusunun dörtkenarın Newton doğrusuna paralel olduğunu ispatlayınız.

Temel Düzey Problem E1197

American Mathematical Monthly **63** (1956), 39

Kaynak PDF s. 25.

Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye.

ABC bir dik üçgen ve CH , AB hipotenüsüne ait yükseklik olsun. ABC, HCA, HCB üçgenlerinin içteğet çemberlerinin yarıçapları toplamının CH 'ye eşit olduğunu gösteriniz.

Temel Düzey Problem E1209

American Mathematical Monthly **63** (1956), 186

Kaynak PDF s. 25.

Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye.

ABC herhangi bir üçgen ve (I) onun içteğet çemberi olsun. (I) , BC, CA, AB kenarlarına sırasıyla D, E, F noktalarında değsin; BE, CF ceviyenlerini de sırasıyla E', F' noktalarında kessin. $D(E, F, E', F')$ çapraz oranının bütün ABC üçgenleri için aynı olduğunu gösteriniz.

Temel Düzey Problem E1217*American Mathematical Monthly* **63** (1956), 342

Kaynak PDF s. 25.

Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye. $\prod_{d|n} d^{\phi(n/d)+\phi(d)}$ çarpımını hesaplayınız.**Temel Düzey Problem E1778***American Mathematical Monthly* **72** (1965), 420

Kaynak PDF s. 26.

*Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.**Bir üçgenin çevrel çemberinin, içteğet çemberinin ve dışteğet çemberlerinin yarıçapları sırasıyla R, r, r_1, r_2, r_3 ise*

$$\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_3^3} = \frac{12R}{r \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}$$

*olduğunu ispatlayınız.***Temel Düzey Problem E1779***American Mathematical Monthly* **72** (1965), 420

Kaynak PDF s. 26.

*Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.**Bir üçgenin yükseklikleri ve dışteğet çemberlerinin yarıçapları h_i ve r_i ise*

$$\frac{r_1}{h_1} + \frac{r_2}{h_2} + \frac{r_3}{h_3} \geq 3$$

*olduğunu ispatlayınız.***Temel Düzey Problem E1877***American Mathematical Monthly* **73** (1966), 410

Kaynak PDF s. 26.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye. *$ABCDE$, çapı AE olan birim çembere çizilmiş dışbükey bir beşgen ve $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DE = d$ olsun. Şu eşitsizliği ispatlayınız:*

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + abc + bcd < 4.$$

Temel Düzey Problem E1878

American Mathematical Monthly **73** (1966), 410

Kaynak PDF s. 26.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

$A_1A_2 \cdots A_n$, yarıçapı R olan (O) çemberine çizilmiş düzgün bir çokgen olsun. İndisler mod n alınmak üzere $A_{i-1}A_iA_{i+1}$ üçgeninin içteğet çemberinin merkezini I_i ; $A_iA_{i+2}, A_{i+2}A_{i+1}, A_{i+1}A_{i+3}$ doğrularının oluşturduğu üçgenin içteğet çemberinin merkezini J_i ile gösterelim. Bütün $I_1, \dots, I_n$ ve $J_1, \dots, J_n$ noktalarının, yarıçapı $R' = R \cos(3\pi/2n) / \cos(\pi/2n)$ olan aynı çember üzerinde bulunduğunu gösteriniz.

Temel Düzey Problem E2100

American Mathematical Monthly **75** (1968), 670

Kaynak PDF s. 27.

Öneren: H. Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Şu altı bağıntıdan herhangi beşinin altıncısını gerektirdiğini gösteriniz:

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{x - a_1}{a_1 - a_2} &= \frac{a - b}{b - c}, & (2) \quad \frac{x - b_1}{b_1 - b_2} &= \frac{b - c}{c - a}, & (3) \quad \frac{x - c_1}{c_1 - c_2} &= \frac{c - a}{a - b}, \\ (4) \quad x + a &= b_2 + c_1, & (5) \quad x + b &= c_2 + a_1, & (6) \quad x + c &= a_2 + b_1. \end{aligned}$$

a, b, c sayıları karmaşık düzlemde bir ABC referans üçgeninin köşelerini, diğer sayılar da diğer noktaları temsil etsin. Bu tutarlı bağıntılar sistemini geometrik olarak yorumlayınız.

Temel Düzey Problem E2101

American Mathematical Monthly **75** (1968), 670

Kaynak PDF s. 27.

Öneren: H. Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

ABC bir üçgen olsun. AB, AC kenarlarına sırasıyla B, C noktalarında teğet olan parabolü P_a ile gösterelim. P_b, P_c benzer biçimde tanımlansın. Bu parabollerin ABC içindeki kesişim noktaları A', B', C' olsun. $ABC, A'B'C', AB'C', BC'A', CA'B', A'BC, B'CA, C'AB$ (eğrisel) üçgensel bölgelerinin alanlarını sırasıyla $\Delta, \Delta_0, \Delta'_a, \Delta'_b, \Delta'_c, \Delta''_a, \Delta''_b, \Delta''_c$ ile gösterelim. Şunları ispatlayınız:

$$\begin{aligned} (1) \quad \Delta'_a &= \Delta'_b = \Delta'_c = (\Delta_1), & \Delta''_a &= \Delta''_b = \Delta''_c = (\Delta_2), \\ (2) \quad \Delta_0 : \Delta_1 : \Delta_2 : \Delta &= 15 : 17 : 5 : 81. \end{aligned}$$

Temel Düzey Problem E2109

American Mathematical Monthly **75** (1968), 780

Kaynak PDF s. 27.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

ABC bir üçgen, A' da BC kenarı üzerinde sabit bir nokta olsun. Verilen bir XYZ üçgenine yön koruyan biçimde benzer olan ve ABC içine çizilen $A'B'C'$ üçgenini kurunuz.

Temel Düzey Problem E2110*American Mathematical Monthly* **75** (1968), 780

Kaynak PDF s. 27.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Düzlemdeki AUV, VBU, UVC üçgenleri verilen bir üçgene yön koruyan biçimde benzerse, A, B, C noktalarının üçü birden çakışmamak koşuluyla ABC de aynı üçgene yön koruyan biçimde benzerdir.^[E006]

Temel Düzey Problem E2124*American Mathematical Monthly* **75** (1968), 899

Kaynak PDF s. 28.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

ABC üçgeninin BC, CA, AB kenarları üzerine dışa doğru BCDE, ACFG, BAHK karelerini çizin; FCDQ, EBKP paralelkenarlarını kurunuz. APQ'nun ikizkenar dik üçgen olduğunu gösteriniz.

Temel Düzey Problem E2160*American Mathematical Monthly* **76** (1969), 300

Kaynak PDF s. 28.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

A₁A₂A₃ üçgeninin içinde veya sınırında bulunan bir P noktasının A_i köşesine ve bunun karşısındaki kenara uzaklıkları sırasıyla p_i, x_i olsun (i = 1, 2, 3). İçteğet çemberinin yarıçapı r olmak üzere şu eşitsizlikleri ispatlayınız:

$$(a) \quad \sum_{i=1}^3 p_i \left(\frac{1}{2} \sin A_i \right) \leq \sum_{i=1}^3 x_i \leq \sum_{i=1}^3 p_i \sin \left(\frac{1}{2} A_i \right),$$

$$(b) \quad p_2 p_3 + p_3 p_1 + p_1 p_2 \geq 8x_1 x_2 x_3 / r.$$

Temel Düzey Problem E2213*American Mathematical Monthly* **77** (1970), 79

Kaynak PDF s. 28.

Öneren: H. Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Bir düzlemsel çokgenin köşelerinden geçen ve çevresini iki eşit parçaya bölen doğrular bir noktada kesişiyorsa, çokgenin Nagel özelliğine sahip olduğunu söyleyelim. Bütün üçgenlerin bu özelliğe sahip olduğu, ancak her dörtgenin olmadığı bilinmektedir. Nagel özelliğine sahip basit, dejenere olmayan dörtgenleri belirleyiniz.

Temel Düzey Problem E2311

American Mathematical Monthly **78** (1971), 793

Kaynak PDF s. 28.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

$A_1A_2A_3A_4$ dörtgeni bir çembere çizilebiliyorsa, p, q, r, s birbirinden farklı olmak üzere A_pA_q 'nin orta noktasından A_rA_s 'ye dik çizilen altı doğrunun bir noktada kesiştiğini ispatlayınız.

Temel Düzey Problem E2312

American Mathematical Monthly **78** (1971), 793

Kaynak PDF s. 29.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

D , pozitif yönlendirilmiş ABC üçgeninin düzleminde bir nokta olsun; AD, BD, CD doğruları karşı kenarları sırasıyla A_1, B_1, C_1 noktalarında kessin. Yönlü BA_1, CB_1, AC_1 parçaları birbirine eşitse ($= \delta$), D tek olarak belirlenir ve ABC 'nin içindedir. (D ile Brocard noktası Ω arasındaki benzerliğe dikkat ediniz.)

Temel Düzey Problem E2363

American Mathematical Monthly **79** (1972), 662

Kaynak PDF s. 29.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

$A' = a, B' = b, C' = c, A = a', B = b', C = c'$ koşullarını sağlayan ABC ve $A'B'C'$ küresel üçgen çiftlerini karakterize ediniz.

Temel Düzey Problem E2462

American Mathematical Monthly **81** (1974), 281

Kaynak PDF s. 29.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

$P, A_1A_2A_3$ üçgeninin içinde bir nokta olsun. P 'nin A_i köşesine uzaklığını R_i , bu köşenin karşısındaki a_i kenarına uzaklığını r_i ile gösterelim. Erdős–Mordell eşitsizliği

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq 2(r_1 + r_2 + r_3)$$

biçimindedir. Her zaman $R_i \geq 0$ alınsın; P ile A_i, a_i 'nin aynı tarafındaysa r_i pozitif, karşı taraflarındaysa negatif olsun. Bu yorumla eşitsizliğin düzlemdeki bütün P noktaları için geçerli olduğunu ispatlayınız.

Temel Düzey Problem E2625*American Mathematical Monthly* **83** (1976), 812

Kaynak PDF s. 29.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

A_i ($i = 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$), bir Γ çemberi üzerinde dört nokta olsun. t_i , A_i 'deki teğet; p_i, q_i ise sırasıyla A_{i-1}, A_{i+1} noktalarından geçen ve t_i 'ye paralel doğrular olsun. $B_i = t_i \cap t_{i+1}$, $C_i = p_i \cap q_{i+1}$ ise dört $B_i C_i$ doğrusunun ortak bir noktası olduğunu gösteriniz.

Temel Düzey Problem E3135*American Mathematical Monthly* **93** (1986), 215

Kaynak PDF s. 30.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Bir çembere çizilmiş çeşitkenar ABC üçgeninin bir köşesinin karşısındaki yay üzerinde, o köşeye uzaklığı diğer iki köşeye uzaklıklarının toplamına eşit olan bir D noktası bulunduğunu ispatlayınız. D 'nin cetvel ve pergelle nasıl kurulacağını gösteriniz.

Temel Düzey Problem E3164*American Mathematical Monthly* **93** (1986), 566

Kaynak PDF s. 30.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Bir elipse dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları s, t olsun. s/t oranının uç değerlerini bulunuz.

Temel Düzey Problem E3422*American Mathematical Monthly* **98** (1991), 158

Kaynak PDF s. 30.

Öneren: H. Demir ve C. Tezer, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

F, F' , verilen bir çemberin merkezine göre simetrik noktalar; S ise çember üzerinde, FF' doğrusu dışında bir nokta olsun. SF, SF' doğrularının çemberle ikinci kesişimleri sırasıyla P, P' olsun. P, P' noktalarındaki teğetler T 'de kesişiyorsa, FF' 'nin orta dikmesinin ST parçasının orta noktasından geçtiğini ispatlayınız.

Temel Düzey Problem E3469*American Mathematical Monthly* **98** (1991), 955

Kaynak PDF s. 30.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

P , ABC üçgeninin içinde bir nokta olsun; AP, BP, CP doğruları BC, CA, AB doğrularını sırasıyla D, E, F noktalarında kessin. $PBD, PDC, PCE, PEA, PAF, PFB$ üçgenlerinin ağırlık merkezlerinin bir konik üzerinde bulunması için gerek ve yeter koşulun, P 'nin üçgenin en az bir kenarortayı üzerinde bulunması olduğunu ispatlayınız.

Monthly'deki Temel Düzey Problemlerin Çözümleri

E1134. Tamkareler ve Mükemmel Sayılar

American Mathematical Monthly **62** (1955), 257

Kaynak PDF s. 32.

E1134 [1954, 568]. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye.

Bir tamkare tamsayının mükemmel sayı olamayacağını ispatlayınız.

I. Çözüm: C. F. Pinzka, Princeton, N. J. $N = \prod p^{2a}$ ise N 'nin pozitif bölenlerinin toplamı

$$\prod \frac{p^{2a+1} - 1}{p - 1}.$$

biçimindedir. Bu sayı her zaman tek olduğundan, mükemmel sayı için gerekli olan $2N$ değerine eşit olamaz.

II. Çözüm: C. D. Olds, San Jose State College. Euler, tek bir mükemmel sayının, r sayısı $4n + 1$ biçiminde bir asal olmak üzere, $r^{4k+1}P^2$ biçiminde olması gerektiğini ispatlamıştır. Çift bir mükemmel sayı ise Öklid tipinde, yani $2^p - 1$ asal olmak üzere $2^{p-1}(2^p - 1)$ biçimindedir. Dolayısıyla bir tamkare mükemmel sayı olamaz.

E1160. Tam Dörtkenarın Newton Doğrusunun Bir Özelliği

American Mathematical Monthly **62** (1955), 658

Kaynak PDF s. 33.

E1160 [1955, 182]. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye.

Bir tam dörtkenarda, herhangi bir kenarın diğer üç kenarın oluşturduğu üçgene göre izotomik doğrusunun dörtkenarın Newton doğrusuna paralel olduğunu ispatlayınız.

I. Problemi önerenin çözümü. d , dörtkenarın dört kenarından biri; ABC de buna karşılık gelen üçgen olsun. d 'nin BC, CA, AB ile kesişimlerini α, β, γ ile gösterelim. $\alpha\beta\gamma$ 'nin ABC 'ye göre izotomik doğrusu IJK , α, β, γ noktalarının BC, CA, AB kenarlarının orta noktaları A', B', C' 'ye göre simetrikleri I, J, K alınarak elde edilir. $A\alpha, B\beta, C\gamma$ 'nin orta noktaları I', J', K' olsun. Dörtkenarın Newton doğrusu üzerindeki bu noktalar, ABC 'nin orta noktalar üçgeni $A'B'C'$ 'nin kenarları üzerindedir. ABC ile IJK 'nin oluşturduğu tam dörtkenar, $A'B'C'$ ile $I'J'K'$ 'nin oluşturduğuna benzerdir: birincisi, ABC ile $A'B'C'$ benzer ve benzerlik oranı $2 : 1$ 'dir; ikincisi,

$$BI = C\alpha = 2(B'I'), \quad AJ = C\beta = 2(A'J'), \quad AK = B\gamma = 2(A'K').$$

Bu, IJK ile $I'J'K'$ doğrularının paralel olduğunu ispatlar.

II. Çözüm: Sister M. Stephanie, Georgian Court College, Lakewood, N. J. Dört doğruya teğet olan bir ve yalnız bir parabol bulunduğundan, tam dörtkenarı dik koordinatlarda $y^2 = 4ax$

parabolüne teğet olarak ele alalım. Dört kenarın denklemleri $y = m_i x + a/m_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, alınabilir. 1 ve 2 kenarlarının kesişimi

$$\left(\frac{a}{m_1 m_2}, \frac{a}{m_1} + \frac{a}{m_2} \right)$$

noktasıdır; diğer kesişimler benzer biçimde verilir. 123 üçgeninin 2 kenarının orta noktasının koordinatları

$$\frac{a}{2} \left[\frac{m_1 + m_3}{m_1 m_2 m_3}, \frac{2}{m_2} + \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_3} \right].$$

olur. (x, y) , 2 kenarı üzerinde, 4 ile 2'nin kesişimine izotomik nokta ise

$$y + \frac{a}{m_2} + \frac{a}{m_4} = \frac{2a}{m_2} + \frac{a}{m_1} + \frac{a}{m_3},$$

buradan

$$y = a \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_3} - \frac{1}{m_4} \right),$$

elde edilir. Bu ifade m_1, m_2, m_3 bakımından simetriktir; dolayısıyla 4 kenarının 123 üçgenine göre izotomik doğrusu parabolün eksenine paraleldir. Newton doğrusu da bu eksene paraleldir: dörtkenara içten çizilen bütün koniklerin merkezlerinin geometrik yeridir ve bu geometrik yer parabolün merkezini de içerir.

E1197. Zengin Bir Geometrik Şekil

American Mathematical Monthly **63** (1956), 493

Kaynak PDF s. 34–36.

E1197 [1956, 39]. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye.

ABC bir dik üçgen ve CH , AB hipotenüsüne ait yükseklik olsun. ABC, HCA, HCB üçgenlerinin içteğet çemberlerinin yarıçapları toplamının CH 'ye eşit olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Leon Bankoff, Los Angeles, Calif. I. Bir dik üçgenin içteğet çemberinin çapı, dik kenarların toplamından hipotenüsün çıkarılmasına eşittir. Bu bağıntıyı ABC, HCA, HCB üçgenlerine uygulayınca

$$\frac{(AC + CB - AB) + (AH + CH - AC) + (CH + HB - CB)}{2} = CH.$$

II. Benzer dik üçgenlerde içteğet çemberi yarıçapının hipotenüse oranı aynıdır. Dolayısıyla

$$r/c = r_1/b = r_2/a = (r + r_1 + r_2)/(a + b + c),$$

yazabiliriz; burada r, r_1, r_2 , sırasıyla ABC, HCA, HCB 'nin içteğet çemberlerinin yarıçaplarıdır. Ayrıca

$$r/c = CH/(a + b + c)$$

olduğundan $r + r_1 + r_2 = CH$ elde edilir.

Şekle ilişkin seçilmiş ek özellikler. R, S, T , sırasıyla AHC, CHB, ABC üçgenlerinin içteğet çemberlerinin merkezleri; H, R', S', T' ise C, R, S, T 'nin AB üzerindeki dik izdüşümleri olsun. ABC, AHC, CHB 'nin içteğet çemberlerinin yarıçaplarını r, r_1, r_2 ile gösterelim. P, Q, CR, CS ceviyenlerinin ayaklarıdır. RS, AC 'yi U 'da ve CB 'yi V 'de keser. K, PS ile RQ 'nun kesişimidir.

- (1) T' , RST 'nin çevrel çemberinin merkezidir; Q, S, T, R, P aynı çember üzerindedir; $PT' = TT' = T'Q$.
- (2) T , CRS 'nin diklik merkezi ve CPQ 'nun çevrel çemberinin merkezidir.
- (3) $r_1^2 + r_2^2 = r^2$.
- (4) $RS = CT = PT = QT = r\sqrt{2}$.
- (5) HSR, ABC, AHC, HCB üçgenleri benzerdir.
- (6) A, R, S, B aynı çember üzerindedir. RST ile ABT ters yönlü benzerdir.
- (7) R, T', H, S aynı çember üzerindedir; RS bu çemberin çapıdır.
- (8) $T'S \parallel AC$; $RT' \parallel CB$.
- (9) $RR'T'$ ile $T'S'S$ üçgenleri eştir ve ABC 'ye benzerdir.
- (10) ATB, BCS, ARC üçgenleri benzerdir.
- (11) $\angle ATB = \angle BSC = \angle ARC = 135^\circ$.
- (12) $AC = AQ$; $PB = CB$.
- (13) $CU = CV$; CT, UV 'nin orta dikmesidir.
- (14) PS, RQ, CH, CPQ 'nun diklik merkezi K 'de kesişir.
- (15) $PS \parallel AT$; $RQ \parallel TB$; PBS ile CSB eştir; AQR ile ARC eştir.
- (16) RS 'nin orta noktası, CPQ 'nun dokuz nokta çemberinin merkezidir.
- (17) HSR 'nin çevrel çemberi, CPQ 'nun dokuz nokta çemberidir.
- (18) ARC ile CSB 'nin çevrel çemberleri C 'de teğettir; CT ortak iç teğetleridir.
- (19) $RT = KS = SQ$; $RP = RK = TS$; PKR, KQS ve $RT'S$ ikizkenar dik üçgenlerdir.
- (20) A, P, T, C aynı çember üzerindedir; B, Q, T, C aynı çember üzerindedir.
- (21) $T'S'S$ ile $RR'T'$ üçgenlerinin çevreleri CH 'ye eşittir; çünkü $SS' = r_2$, $T'S' = r_1$, $T'S = r$.
- (22) RST üçgeninin alanı $(a + b - c)^3 / (8c) = r^3 / c$ 'dir.
- (23) $PQSTR$ beşgeninin alanı $2r^3 / c + r^2$ 'dir.
- (24) CPQ üçgeninin alanı abr / c 'dir.

Diğer çözenler: W. A. Al-Salam, L. C. Barrett, Robert Bart, G. E. Bills, R. L. Caskey, G. B. Charlesworth, N. A. Childress, T. Y. Chow, Mary Constable, R. J. Cormier, K. W. Crain, A. E. Danese, D. E. D'Atri, G. W. Day, Hazel Evans, Herta Freitag, Michael Goldberg, A. J. Goldman, Peter Gould, Cornelius Groenewoud, D. J. Hansen, Vern Hoggatt, R. T. Hood, Roger Hou, J. P. Hoyt, Raymond Huck, Louise Hutchinson, A. R. Hyde, P. W. M. John, Edgar Karst, M. S. Klamkin, W. G. Koellner, Sam Kravitz, M. A. Laframboise, L. E. Laird, B. R. Leeds, L. I. Lokomowitz, Robert Lynch, D. C. B. Marsh, Beckham Martin, C. N. Mills, C. S. Ogilvy, Margaret Olmsted, M. J. Pascual, Walter Penney, L. L. Pennisi ve N. C. Scholomiti (birlikte), C. F. Pinzka, P. W. A. Raine, M. A. Rachid, L. A. Ringenberg, Azriel Rosenfeld, Donald Rubin, C. M. Sandwick, Sr., E. D. Schell, G. J. Simmons, Bernard Smilowitz, Sister M. Stephanie, A. V. Sylwester, W. R. Talbot, Chih-yi Wang, R. M. Warten, Dale Woods, Roscoe Woods, André Yandl, David Zeitlin, problemi öneren. Sonradan gelen çözümler: Paul Herzberg ve Alan Wayne.

Bu problemin N. A. Court, *College Geometry*, 2. baskı, s. 93, Alıştırma 19b'de ve *Scripta Mathematica*, cilt 16 (1950), s. 167'de yer aldığı belirtilmiştir.

E1209. Her Üçgenle İlişkili Bir Çapraz Oran*American Mathematical Monthly* **63** (1956), 186

Kaynak PDF s. 36.

E1209 [1956, 186]. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye.

ABC herhangi bir üçgen ve (I) onun içteğet çemberi olsun. (I) , BC, CA, AB kenarlarına sırasıyla D, E, F noktalarında değsin; BE, CF ceviyenlerini de sırasıyla E', F' noktalarında kessin. $D(E, F, E', F')$ çapraz oranının bütün ABC üçgenleri için aynı olduğunu gösteriniz.

I. Çözüm: W. B. Carver, Cornell University. Bu, daha genel bir projektif teoremin metrik bakımdan özel bir durumudur. İçteğet çemberi yerine, kenarlara D, E, F 'de teğet olan ve BE, CF doğrularını sırasıyla E', F' 'de kesen herhangi bir konik alınabilir. Brianchon teoreminin sınır durumlarından birine göre AD, BE, CF , bir G noktasında kesişir. A, B, C, G 'nin sırasıyla $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1), (1, 1, 1)$ olduğu homojen koordinat sistemini kuralım. Buradan D, E, F 'nin $(0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0)$ olduğu ve koniğin denkleminin

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy = 0;$$

olduğu kolayca çıkar. $E', F', (1, 4, 1), (1, 1, 4)$ noktalarıdır. D 'den geçen doğruların denklemleri $kx + y - z = 0$ biçimindedir; DE, DF, DE', DF' için k sırasıyla $1, -1, -3, 3$ 'tür. Böylece istenen çapraz oran

$$\frac{(1+3)(-1-3)}{(1-3)(-1+3)} = 4.$$

II. Çözüm: M. S. Klamkin, Polytechnic Institute of Brooklyn. Merkezî izdüşümle ABC ve içteğet çemberi (I) , bir eşkenar üçgene ve onun içteğet çemberine dönüştürülebilir. $D(E, F, E', F')$ çapraz oranı bu dönüşüm altında değişmez; dolayısıyla bütün üçgenler için sabittir. $D(E, F, E', F') = 4$ olduğu kolayca gösterilir.

Diğer çözenler: N. A. Court, P. W. M. John, D. C. B. Marsh, O. J. Ramler, Roscoe Woods, problemi öneren.

E1217. Euler Fonksiyonunun Bir Özelliği*American Mathematical Monthly* **64** (1957), 45

Kaynak PDF s. 37.

E1217 [1956, 342]. Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye.

$\prod_{d|n} d^{\phi(n/d)+\phi(d)}$ çarpımını hesaplayınız.

Çözüm: J. B. Johnston, Cornell University. f , tamsayılar üzerinde tanımlı herhangi bir fonksiyon olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \prod_{d|n} d^{f(d)+f(n/d)} &= \prod_{d|n} d^{f(d)} \prod_{d|n} d^{f(n/d)} \\ &= \prod_{d|n} d^{f(d)} \prod_{d|n} (n/d)^{f(d)} \\ &= \prod_{d|n} n^{f(d)} = n^{\sum_{d|n} f(d)}. \end{aligned}$$

$f = \phi$ alıp

$$\sum_{d|n} \phi(d) = n, \quad (1)$$

özdeşliğini kullanınca verilen problemin cevabı n^n olur.

Diğer çözenler: W. J. Buckingham, Leonard Carlitz, A. E. Danese, M. P. Drazin, L. T. Gardner, A. J. Goldman, D. S. Greenstein, Cornelius Groenewoud, Emil Grosswald, Virginia Hanly, A. R. Hyde, Richard Kelisky, Sidney Kravitz, R. G. McDermot, D. C. B. Marsh, Leo Moser, J. B. Muskat, F. R. Olson, Hiram Paly, M. Perisastri, Azriel Rosenfeld, A. V. Sylwester, Chih-yi Wang, David Zeitlin, problemi öneren. Late solution by M. S. Klamkin.

Editör notu (özgün dergi). (1)'in ispatı için örneğin Uspensky ve Heaslet, *Elementary Number Theory*, s. 113'e bakınız. Yukarıdaki genel sonucun başka bir uygulaması olarak

$$\prod_{d|n} d^{(n/d)+d} = n^{\sigma(n)},$$

elde edilir; burada $\sigma(n)$, n 'nin pozitif bölenlerinin toplamıdır.

E1778. Üçgenin Çember Yarıçapları

American Mathematical Monthly **73** (1966), 667

Kaynak PDF s. 38.

E1778 [1965, 420]. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Bir üçgenin çevrel çemberinin, içteğet çemberinin ve dışteğet çemberlerinin yarıçapları sırasıyla R, r, r_1, r_2, r_3 ise

$$\frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_1^3} - \frac{1}{r_2^3} - \frac{1}{r_3^3} = \frac{12R}{r \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot r_3}$$

olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: Ralph Schreiber, Warsaw High School, Warsaw, Ind. ABC'nin alanını Δ , yarı çevresini s , a kenarına karşılık gelen dışteğet çemberinin yarıçapını r_a ile gösterelim; diğerleri benzer biçimde tanımlansın. Bilinen özdeşlikleri hatırlayalım:

$$\Delta = rs = r_a(s - a) = r_b(s - b) = r_c(s - c) = \sqrt{rr_ar_br_c} = abc/(4R).$$

Böylece

$$\begin{aligned} \frac{1}{r^3} - \frac{1}{r_a^3} - \frac{1}{r_b^3} - \frac{1}{r_c^3} &= \frac{1}{\Delta^3} [s^3 - (s - a)^3 - (s - b)^3 - (s - c)^3] \\ &= \frac{3abc}{\Delta^3} = \frac{12R}{\Delta^2} = \frac{12R}{rr_ar_br_c}. \end{aligned}$$

Diğer çözenler: A. N. Aheart, Leon Bankoff, W. J. Blundon, D. I. A. Cohen, Ragnar Dybvik (Norway), Mrs. A. C. Garstang, Michael Goldberg, Louise S. Grinstein, D. M. Hancasky, E. S. Langford, Ruth S. Lefkowitz, F. Leuenberger (İsviçre), Andrzej Makowski (Polonya), D. C. B. Marsh, F. R. Prieto, J. M. Quoniam (Fransa), S. Bhaskara Rao (Hindistan), Simeon Reich (İsrail), P. A. Scheinok, Klaus Schmitt, R. Sivaramakrishnan (Hindistan), Sidney Spital, Sister M. Stephanie, M. V. Tamhankar ve M. B. Suryanarayana (Hindistan), Simon Vatriquant (Belçika), C. S. Venkataraman (Hindistan), William Wernick, problemi öneren.

E1779. Üçgenin Yükseklikleri ve Dışteğet Yarıçapları*American Mathematical Monthly* **73** (1966), 668

Kaynak PDF s. 39.

*E1779 [1965, 420]. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.**Bir üçgenin yükseklikleri ve dışteğet çemberlerinin yarıçapları h_i ve r_i ise*

$$\frac{r_1}{h_1} + \frac{r_2}{h_2} + \frac{r_3}{h_3} \geq 3$$

olduğunu ispatlayınız.

*I. Çözüm: D. C. B. Marsh, Colorado School of Mines. $i, j, k, 1, 2, 3$ 'ün döngüsel bir sıralaması olmak üzere $2/h_i = 1/r_j + 1/r_k$ 'dir (R. A. Johnson, *Modern Geometry*, s. 189; veya yukarıdaki E1778 özdeşliklerini $1/r = 1/r_1 + 1/r_2 + 1/r_3$ ile birlikte kullanınız). Buradan doğrudan*

$$\sum_i \frac{r_i}{h_i} = \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \frac{r_i}{r_j} \geq \frac{1}{2}(6) = 3,$$

elde edilir; çünkü pozitif x, y için $(x/y) + (y/x) \geq 2$ 'dir. Eşitlik ancak $r_1 = r_2 = r_3$ olduğunda, yani üçgen eşkenarken sağlanır.

II. Çözüm: H. Guggenheimer, University of Minnesota. $n \geq 1$ için $\sum (r_i/h_i)^n \geq 3$ eşitsizliğini elde ederek sonucu genelleleyebiliriz. Aslında daha kuvvetli bir sonuç doğrudur. Açığortay uzunlukları t_i olsun. $t_i \geq h_i$ olduğundan önerilen eşitsizlik

$$\sum_{i=1}^3 \left(\frac{r_i}{t_i} \right)^m \geq 3, \quad m > 0,$$

eşitsizliğinden daha zayıftır; şimdi bunu ispatlayalım.

Üçgenin yarı çevresi s , kenarları a_i olsun. Leuenberger, $t_i \leq [s(s - a_i)]^{1/2}$ olduğunu ispatlamıştır (*Elemente Math.*, 17 (1962), 45–46; ayrıca 16 (1961), s. 129). Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \sum_i \left(\frac{r_i}{t_i} \right)^m &\geq \sum_{\text{cyc}} \left[\frac{s(s - a_j)(s - a_k)}{s(s - a_i)^2} \right]^{m/2} \\ &= \frac{1}{[(s - a_1)(s - a_2)(s - a_3)]^m} \sum_{\text{cyc}} [(s - a_j)(s - a_k)]^{3m/2}. \end{aligned}$$

İstenen sonuç aritmetik–geometrik ortalama eşitsizliğinden çıkar; eşitlik yine yalnızca eşkenar üçgende sağlanır.

Diğer çözenler: A. N. Aheart, Leon Bankoff, W. J. Blundon, D. I. A. Cohen, Mrs. A. C. Garstang, Michael Goldberg, H. Guggenheimer, D. M. Hancasky, E. S. Langford, F. Leuenberger (İsviçre), Andrzej Makowski (Polonya), F. R. Prieto, J. M. Quoniam (Fransa), S. Bhaskara Rao (Hindistan), Simeon Reich (İsrail), P. A. Scheinok, Ralph Schreiber, R. Sivaramakrishnan (Hindistan), Sidney Spital, Sister M. Stephanie, M. V. Tamhankar ve M. B. Suryanarayana (Hindistan), P. D. Thomas, Simon Vatriquant (Belçika), C. S. Venkataraman (Hindistan), problemi öneren.

Makowski'nin öğrencisi Tadeusz Figiel, istenen eşitsizliğin, bir dar açılı üçgenin diklik üçgeninin alanının, verilen üçgenin alanının dörtte birini aşmamasıyla eşdeğer olduğunu gözlemlemiştir. [*İspat:* ABC , $A_1B_1C_1$ 'in diklik üçgeni olsun. A_1, B_1, C_1 , dışteğet çemberlerinin merkezleridir. ABC_1 ile ABC 'nin alanları oranı, ortak AB kenarına ait yüksekliklerinin oranına, yani r_3/h_3 'e eşittir.]

E1877. Yarım Çembere Çizilmiş Dışbükey Beşgen

American Mathematical Monthly **74** (1967), 869

Kaynak PDF s. 40.

E1877 [1966, 410]. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

$ABCDE$, çapı AE olan birim çembere çizilmiş dışbükey bir beşgen ve $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DE = d$ olsun. Şu eşitsizliği ispatlayınız:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + abc + bcd < 4.$$

Çözüm: Allan Wachs, Far Rockaway (N. Y.) High School öğrencisi. AC, CE çizilsin ve $\theta = \angle CEA$ olsun. O zaman $\angle CAE = 90^\circ - \theta$, $\angle CBA = 180^\circ - \theta$, $\angle CDE = 180^\circ - (90^\circ - \theta) = 90^\circ + \theta$ 'dır. Kosinüs teoremiyle

$$(1) \quad AC^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos(180^\circ - \theta) = a^2 + b^2 + 2ab \cos \theta,$$

$$(2) \quad CE^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos(90^\circ + \theta) = c^2 + d^2 + 2cd \sin \theta.$$

ACE dik üçgeninden $AC^2 + CE^2 = AE^2 = 4$ elde edilir. Geniş açılar nedeniyle ayrıca $AC = 2 \sin \theta > b$ ve $CE = 2 \cos \theta > c$ 'dir. Bunları (1) ile (2)'nin toplamında yerine koyunca doğrudan

$$4 > a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + abc + bcd.$$

Diğer çözenler: Leon Bankoff, W. J. Blundon, L. Carlitz, Mannis Charosh, M. A. Ettrick, Michael Goldberg, M. G. Greening (Avustralya), Ned Harrell, Donald Jeffords, Erwin Just, J. D. E. Konhauser, Dan Marcus, Lieselotte Miller, Norman Miller, C. B. A. Peck, Al Somoyajulu, J. L. Standig, C. S. Venkataraman (Hindistan), J. C. Williams, Dale Woods, problemi öneren.

E1878. Düzgün Çokgenle İlişkili İçteğet Merkezleri

Problem önerisi: *American Mathematical Monthly* **73** (1966), 410

Kaynak PDF s. 26, 41.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

$A_1 A_2 \cdots A_n$, yarıçapı R olan (O) çemberine çizilmiş düzgün bir çokgen olsun. İndisler mod n alınmak üzere $A_{i-1} A_i A_{i+1}$ üçgeninin içteğet çemberinin merkezini I_i ; $A_i A_{i+2}, A_{i+2} A_{i+1}, A_{i+1} A_{i+3}$ doğrularının oluşturduğu üçgenin içteğet çemberinin merkezini J_i ile gösterelim. Bütün $I_1, \dots, I_n$ ve $J_1, \dots, J_n$ noktalarının, yarıçapı $R' = R \cos(3\pi/2n) / \cos(\pi/2n)$ olan aynı çember üzerinde bulunduğunu gösteriniz.

Editöryal ikame ispat.^[E005] Sağlanan derlemede E1878 başlığı altında E1877'nin çözümü tekrarlanmıştır. Aşağıdaki ispat bu baskı için verilmiştir; özgün dergiye atfedilmez.

Kanıt. $\theta = \pi/n$ olsun. Köşelerden ve kenarların orta noktalarından geçen simetri eksenlerinin tümü O 'dan geçer. $A_{i-1} A_i A_{i+1}$ üçgeninde A_i 'yi $(R, 0)$, komşularını $(R \cos 2\theta, \pm R \sin 2\theta)$ alalım. Yükseklik $h = R(1 - \cos 2\theta)$, tepe açısının yarısı $\pi/2 - \theta$ 'dır. İçteğet çemberinin yarıçapı u ise $u = (h - u) \cos \theta$ olur; dolayısıyla merkezinin apsisi

$$R \cos 2\theta + u = R - \frac{R(1 - \cos 2\theta)}{1 + \cos \theta} = R(2 \cos \theta - 1).$$

İkinci üçgen için koordinatları, A_{i+1}, A_{i+2} 'nin argümanları $-\theta, \theta$ ve A_i, A_{i+3} 'ün argümanları $-3\theta, 3\theta$ olacak biçimde döndürelim. İki köşegen doğrusu $(R \cos 2\theta / \cos \theta, 0)$ 'da kesişir; tabanları

$x = R \cos \theta$ üzerindedir. Yükseklik bu kez $R \sin^2 \theta / \cos \theta$, tepe açısının yarısı yine $\pi/2 - \theta$ 'dir. İçteğet çemberinin yarıçapı $R(1 - \cos \theta)$ olduğundan, merkezinin apsisi yine $R(2 \cos \theta - 1)$ 'dir. Dönel simetri, ileri sürülen ortak çemberi verir; çünkü

$$R(2 \cos \theta - 1) = R \frac{\cos(3\theta/2)}{\cos(\theta/2)}.$$

□

E2100. Altı Bağntı

American Mathematical Monthly **76** (1969), 563

Kaynak PDF s. 42.

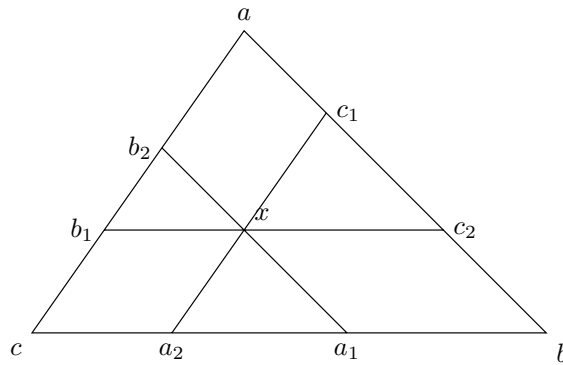
E2100 [1968, 670]. Öneren: H. Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Şu altı bağıntıdan herhangi beşinin altıncısını gerektirdiğini gösteriniz:

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{x - a_1}{a_1 - a_2} &= \frac{a - b}{b - c}, & (2) \quad \frac{x - b_1}{b_1 - b_2} &= \frac{b - c}{c - a}, & (3) \quad \frac{x - c_1}{c_1 - c_2} &= \frac{c - a}{a - b}, \\ (4) \quad x + a &= b_2 + c_1, & (5) \quad x + b &= c_2 + a_1, & (6) \quad x + c &= a_2 + b_1. \end{aligned}$$

a, b, c sayıları karmaşık düzlemde bir ABC referans üçgeninin köşelerini, diğer sayılar da diğer noktaları temsil etsin. Bu tutarlı bağıntılar sistemini geometrik olarak yorumlayınız.

Çözüm: Michael Goldberg, Washington, D. C. Köşeleri a, b, c ile temsil edilen herhangi bir üçgen ve düzleminde herhangi bir x noktası alalım. x 'ten kenarlara paraleller çizelim. Bu paralellerin kenarlarla kesişimleri şekildeki gibi $a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2$ olsun. Verilen altı bağıntı sağlanır. Altı noktadan biri, örneğin c_2 , çıkarılırsa x, a_2c_1 ile b_2a_1 'in kesişimi olarak bulunur; sonra c_2, b_1x ile ab 'nin kesişimi olarak belirlenir.



Şekil 4.1: Referans üçgeninde x 'ten geçen paraleller.

Diğer çözenler: A. F. Gentzel, Jr., Simeon Reich (İsrail), problemi öneren.

E2101. Üç Parabol ve Bir Üçgen

American Mathematical Monthly **76** (1969), 564

Kaynak PDF s. 43.

E2101 [1968, 670]. Öneren: H. Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

ABC bir üçgen olsun. AB, AC kenarlarına sırasıyla B, C noktalarında teğet olan parabolü P_a ile gösterelim. P_b, P_c benzer biçimde tanımlansın. Bu parabollerin ABC içindeki kesişim noktaları A', B', C' olsun. $ABC, A'B'C', AB'C', BC'A', CA'B', A'BC, B'CA, C'AB$ (eğrisel) üçgensel bölgelerinin alanlarını sırasıyla $\Delta, \Delta_0, \Delta'_a, \Delta'_b, \Delta'_c, \Delta''_a, \Delta''_b, \Delta''_c$ ile gösterelim. Şunları ispatlayınız:

$$(1) \quad \Delta'_a = \Delta'_b = \Delta'_c = (\Delta_1), \quad \Delta''_a = \Delta''_b = \Delta''_c = (\Delta_2),$$

$$(2) \quad \Delta_0 : \Delta_1 : \Delta_2 : \Delta = 15 : 17 : 5 : 81.$$

Problemi önerenin çözümü. Paralel izdüşüm altında koniklerin türü, teğetlik, doğru parçalarının oranları ve alan oranları değişmez; her üçgen eşkenar üçgene dönüştürülebilir. Bu nedenle iddiayı eşkenar üçgen için ispatlamak yeterlidir. Böylece (1) zaten ispatlanmıştır.

(2) için koordinat düzleminde $A = (1, \sqrt{3})$, $B = (0, 0)$, $C = (2, 0)$ olan eşkenar üçgeni alalım. P_a, P_c parabollerinin denklemleri

$$(1) \quad P_a : y = (x - \frac{1}{2}x^2)\sqrt{3},$$

$$(2) \quad P_c : \sqrt{3}x^2 + 6xy + 3\sqrt{3}y^2 - 16y = 0.$$

(1) ve (2)'den

$$(3) \quad \Delta_0 + 2\Delta_1 + \Delta_2 = \sqrt{3} \int_0^2 (x - \frac{1}{2}x^2) dx = \frac{2}{3}\sqrt{3} = \frac{2}{3}\Delta,$$

$$(4) \quad y = \frac{8\sqrt{3}}{9} - \frac{\sqrt{3}}{3}x - \frac{4\sqrt{3}}{9}\sqrt{4-3x}, \quad 0 \leq x \leq \frac{4}{3}.$$

Böylece

$$(5) \quad \Delta_2 = 2 \int_0^1 y dx = \frac{5\sqrt{3}}{81} = \frac{5}{81}\Delta,$$

ve ayrıca

$$(6) \quad \Delta_0 + 3\Delta_1 + 3\Delta_2 = \Delta.$$

(3), (5), (6) sistemi $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2$ için çözülünce istenen sonuç elde edilir.

Diğer çözenler: Anders Bager (Danimarka), Jordi Dou (İspanya), Michael Goldberg, M. G. Greening (Avustralya), Norman Miller, J. M. Quoniam (Fransa), ve A. Zujus.

E2109. Üçgen Kuruluşu

American Mathematical Monthly **76** (1969), 698

Kaynak PDF s. 44.

E2109 [1968, 780]. Öneren: H. Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

ABC bir üçgen, A' da BC kenarı üzerinde sabit bir nokta olsun. Verilen bir XYZ üçgenine yön koruyan biçimde benzer olan ve ABC içine çizilen $A'B'C'$ üçgenini kurunuz.

Not: A. W. Walker, Toronto, Kanada. İstenen kuruluş N. A. Court, *College Geometry*, 1. baskı, 1925, s. 47'de bulunabilir. Bu, s. 46'da ispatlanan şu teoremin basit bir uygulamasıdır: *Bicimi*

sabit, büyüklüğü değişen bir üçgenin bir köşesi sabit kalırken ikinci köşesi verilen bir doğru üzerinde hareket ederse, üçüncü köşesinin geometrik yeri de bir doğrudur.

Diğer çözenler: Anders Bager (Danimarka), Walter Bluger, C. W. Eliason, Jr., Michael Goldberg, M. G. Greening (Avustralya), Beckham Martin, D. N. Page, problemi öneren.

E2110. Benzer Üçgenler

American Mathematical Monthly **76** (1969), 698

Kaynak PDF s. 45.

E2110 [1968, 780]. Öneren: H. Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Düzlemdeki AUV, VBU, UVC üçgenleri verilen bir üçgene yön koruyan biçimde benzerse, A, B, C noktalarının üçü birden çakışmamak koşuluyla ABC de aynı üçgene yön koruyan biçimde benzerdir.^[E006]

Çözüm: M. G. Greening, University of New South Wales, Avustralya. Noktaları karşılık gelen küçük harfli karmaşık sayılarla gösterip verilen üçgeni $Z_1Z_2Z_3$ alalım. Yön koruyan benzerlikler $z \mapsto \alpha_i z + \beta_i$ ($i = 1, 2, 3$) olsun. İndisler mod 3 alınmak üzere $u = \alpha_i z_{i+1} + \beta_i$, $v = \alpha_i z_{i+2} + \beta_i$ olur. Böylece $\alpha_i z_i (z_{i+1} - z_{i+2}) = z_i (u - v)$ ve

$$\beta_i (z_{i+1} - z_{i+2}) = z_{i+1} v - z_{i+2} u$$

so that

$$\sum_{i=1}^3 (\alpha_i z_i + \beta_i) (z_{i+1} - z_{i+2}) = 0.$$

$\sum_{i=1}^3 (z_{i+1} - z_{i+2}) = 0$ ve $\sum_{i=1}^3 z_i (z_{i+1} - z_{i+2}) = 0$ olduğundan

$$0 = \begin{vmatrix} \alpha_1 z_1 + \beta_1 & z_1 & 1 \\ \alpha_2 z_2 + \beta_2 & z_2 & 1 \\ \alpha_3 z_3 + \beta_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & z_1 & 1 \\ b & z_2 & 1 \\ c & z_3 & 1 \end{vmatrix}$$

elde edilir. Bu, elde edilen dönüşüm sabit olmamak koşuluyla, $z_1 \mapsto a$, $z_2 \mapsto b$, $z_3 \mapsto c$ yön koruyan benzerliğinin varlığı için yeterlidir.^[E006]

Diğer çözenler: Leon Bankoff, Jordi Dou (İspanya), C. W. Eliason, Jr., Michael Goldberg, Norman Miller, Simeon Reich (İsrail), A. W. Walker, problemi öneren.

Walker, sonucun R. A. Johnson, *Modern Geometry* (1929), s. 289'da bulunduğunu belirtir.

E2124. Her Üçgenden Bir Dik Üçgen

American Mathematical Monthly **76** (1969), 938

Kaynak PDF s. 46.

E2124 [1968, 899]. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

ABC üçgeninin BC, CA, AB kenarları üzerine dışa doğru BCDE, ACFG, BAHK karelerini çizin; FCDQ, EBKP paralelkenarlarını kurunuz. APQ'nun ikizkenar dik üçgen olduğunu gösteriniz.

Çözüm: W. E. Buker, Pittsburgh Public Schools. $A(0, 0)$, $B(a, 0)$, $C(b, c)$ koordinatlarını seçelim. Doğrudan incelemeye şu koordinatlar bulunur:

$$\begin{aligned} F(b - c, b + c), \quad D(b + c, c + a - b), \quad Q(b, a + c), \\ K(a, -a), \quad E(a + c, a - b), \quad P(a + c, -b). \end{aligned}$$

AQ ile AP eşit uzunlukta ve birbirine dik olduğundan teorem elde edilir.

Diğer çözenler: kırk başka okur.

Not. $HAGR$ paralelkenarı kurulursa, BQR ile CRP üçgenlerinin de ikizkenar dik olduğu hemen görülür.

A. W. Walker, kenarları üzerine kareler çizilen üçgenler için Musselman'ın ayrıntılı incelemesine işaret eder: *American Mathematical Monthly*, 43 (1936), 539–548.

E2160. Üçgenle İlgili Bazı Yeni Eşitsizlikler

American Mathematical Monthly **76** (1969), 1146

Kaynak PDF s. 47–48.

E2160 [1969, 300]. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

$A_1A_2A_3$ üçgeninin içinde veya sınırında bulunan bir P noktasının A_i köşesine ve bunun karşısındaki kenara uzaklıkları sırasıyla p_i, x_i olsun ($i = 1, 2, 3$). İçteğet çemberinin yarıçapı r olmak üzere şu eşitsizlikleri ispatlayınız:

$$(a) \quad \sum_{i=1}^3 p_i \left(\frac{1}{2} \sin A_i\right) \leq \sum_{i=1}^3 x_i \leq \sum_{i=1}^3 p_i \sin\left(\frac{1}{2} A_i\right),$$

$$(b) \quad p_2 p_3 + p_3 p_1 + p_1 p_2 \geq 8x_1 x_2 x_3 / r.$$

Çözüm: *M. G. Greening, University of New South Wales, Avustralya.* A_i 'nin karşısındaki kenar a_i , $A_{i-1}PA_{i+1}$ açısı P_i , A_i 'de p_i ile a_j arasındaki açı $B_{i,j}$ olsun. Böylece $B_{i,i+1} + B_{i,i-1} = A_i$ 'dir. Bütün indis toplamaları mod 3 alınır. O zaman $x_i = p_{i+1} \sin B_{i+1,i} = p_{i-1} \sin B_{i-1,i}$ ve

$$\begin{aligned} \sum_i x_i &= \frac{1}{2} \sum_j p_j (\sin B_{j,j+1} + \sin B_{j,j-1}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_j p_j \cdot 2 \sin\left(\frac{1}{2} A_j\right) \cos\left(\frac{1}{2} (B_{j,j+1} - B_{j,j-1})\right). \end{aligned}$$

$0 \leq |B_{j,j+1} - B_{j,j-1}| \leq A_j$ eşitsizliği (a)'yı verir.

$p_1 p_2 \sin P_3 = x_3 a_3$ olduğundan, önce bir iç nokta için,

$$\begin{aligned} \sum_i p_i p_{i+1} &= \sum_i \frac{x_i a_i}{\sin P_i} \geq \frac{3 (\prod_i a_i \cdot \prod_i x_i)^{1/3}}{(\prod_i \sin P_i)^{1/3}} \\ &\geq 2\sqrt{3} \left(\prod_i a_i \cdot \prod_i x_i \right)^{1/3}. \end{aligned}$$

Son sonuç, $\sum_i P_i = 2\pi$ koşulu altında $\prod_i \sin P_i$ 'nin en büyük değerini $P_1 = P_2 = P_3$ iken almasından çıkar.

(b) için şimdi şu eşitsizliği göstereceğiz:

$$(i) \quad 2\sqrt{3}r \left(\prod_i a_i \right)^{1/3} \geq 8 \left(\prod_i x_i^2 \right)^{1/3}.$$

$\sum_i a_i x_i = 2\Delta$ olduğundan,^[E007] $\prod_i x_i$ en büyük değerini $a_1 x_1 = a_2 x_2 = a_3 x_3 = 2\Delta/3$ iken alır. Dolayısıyla

$$\max 8 \left(\prod_i x_i^2 \right)^{1/3} = 2^5 \Delta^2 3^{-2} \left(\prod_i a_i \right)^{-2/3}.$$

$$3^{5/2}r \cdot \prod_i a_i \geq 2^4 \Delta^2, \text{ yani}$$

$$(ii) \quad 3^{5/2}R \geq 4s,$$

sağlanırsa (i) elde edilir; burada R çevrel çemberin yarıçapı olmak üzere $\prod_i a_i = 4R\Delta$ kullanılmıştır. Verilen bir çembere çizilebilen en büyük çevrel üçgen eşkenardır; bu durumda (ii) doğrudur ve (b) ispatlanır. Aslında (b)'de 8 yerine 12 yazılabilir. Sınır noktaları süreklilikle elde edilir.^[E007]

Diğer çözenler: Simeon Reich (İsrail), T. Tamura (Japonya), C. S. Venkataraman (Hindistan), A. W. Walker problemi öneren.

(b)'nin kuvvetlendirilmiş biçimi Walker tarafından öne sürülmüş ve Reich tarafından ispatlanmıştır. L. Carlitz'in (a) çözümü dışında, bütün çözüm sahiplerinin ve problemi önerenin Amerika Birleşik Devletleri dışında yaşamaması ilginçtir.

E2213. Nagel Özelliğine Sahip Dörtgenler

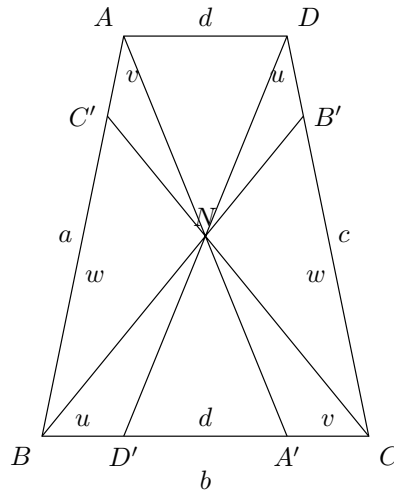
American Mathematical Monthly **77** (1970), 1109

Kaynak PDF s. 49–51.

E2213 [1970, 79]. Öneren: H. Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Türkiye.

Bir düzlemsel çokgenin köşelerinden geçen ve çevresini iki eşit parçaya bölen doğrular bir noktada kesişiyorsa, çokgenin Nagel özelliğine sahip olduğunu söyleyelim. Bütün üçgenlerin bu özelliğe sahip olduğu, ancak her dörtgenin olmadığı bilinmektedir. Nagel özelliğine sahip basit, dejenere olmayan dörtgenleri belirleyiniz.

Özgün dergi editörünün, problemi önerenin çözümüne dayanan çözümü. $ABCD$, Nagel özelliğine sahip bir dörtgen olsun. AA', BB', CC', DD' doğrularının her biri çevreyi ikiye bölüp Nagel noktası N 'den geçsin. $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ olsun. $a + b \geq c + d$, $b + c \geq a + d$ varsayabiliriz. O zaman C' , AB üzerinde; B' , CD üzerinde; A' , D' ise BC üzerindedir (Şekil 4.2). $BD' = u$, $A'C = v$, $CB' = w$ ve $a + b + c + d = 2s$ alalım. $BC + CB' = s = D'C + CD$ olduğundan $DB' = u$ olur. Benzer biçimde $AC' = v$, $BC' = w$, $D'A' = d'$ dir. Üç durum ayıralım.



Şekil 4.2: Birinci durumda çevreyi ikiye bölen doğrular (özgün Şekil 1).

DURUM 1. $u \neq 0$, $v \neq 0$. AA' ile DD' 'nin N 'de kesiştiğini düşünelim. ABA' üçgenine ve onu kesen CNC' doğrusuna Menelaus teoremi uygulanırsa, CC' 'nin N 'den geçmesi için gerek

ve yeter koşul

$$\frac{v}{w} \cdot \frac{b}{-v} \cdot \frac{A'N}{NA} = -1$$

olur. Benzer biçimde $DD'C$ üçgenini kesen BNB' kullanılırsa, BB' 'nin N 'den geçmesi için gerek ve yeter koşul

$$\frac{-u}{b} \cdot \frac{w}{u} \cdot \frac{DN}{ND'} = -1,$$

olur. Böylece

$$\frac{DN}{ND'} = \frac{b}{w} = \frac{AN}{NA'}.$$

Buradan $AD \parallel D'A'$ çıkar. Bu parçalar aynı zamanda eşit olduğundan $ADA'D'$ bir paralelkenardır. Köşegenleri AA', DD' birbirini ortalar; dolayısıyla $AN = NA'$ ve $b = w$ olur. $b + w = s$ olduğundan $2w = a - b + c + d = 2b$, yani

$$b = \frac{a + c + d}{3}.$$

elde edilir. Böylece $ABCD$, uzun tabanı diğer üç kenarın aritmetik ortalamasına eşit olan bir yamuktur. Akıl yürütme tersine çevrildiğinde böyle her yamuğun Nagel özelliğine sahip olduğu görülür. Örneğin köşeleri $(0, 0), (19, 0), (38/7, 24), (0, 24)$ olan yamuğun Nagel noktası $N = (7, 12)$ 'dir.^[E008]

DURUM 2. $u = v = 0$. O zaman $a + b = c + d = s$ ve $a + d = b + c = s$; dolayısıyla $2a + b + d = 2c + b + d$ olur. Buradan $a = c$, $b = d$ çıkar ve $ABCD$ paralelkenardır. Her paralelkenarın Nagel özelliğine sahip olduğu açıktır.

DURUM 3. $u = 0, v \neq 0$ veya tersi olsun. AC ile BD , M 'de kesişsin (Şekil 4.3). $a + d = b + c = s$ olduğundan $d + v + w = C'B + BC = CD + DA + AC' = c + d + v$ ve dolayısıyla $c = w$ olur. ABA' üçgenine CNC' keseniyle, $AA'C$ üçgenine de BNM keseniyle Menelaus teoremi uygulanırsa

$$\begin{aligned} \frac{b}{-v} \frac{A'N}{NA} \frac{v}{c} &= -1, & \text{dolayısıyla} & \frac{A'N}{NA} = \frac{c}{b}, \\ \frac{AN}{NA'} \frac{-d}{b} \frac{CM}{MA} &= -1, & \text{dolayısıyla} & \frac{CM}{MA} = \frac{b}{d} \frac{A'N}{NA} = \frac{b}{d} \frac{c}{b} = \frac{c}{d}. \end{aligned}$$

M , DAC üçgeninin CA kenarını komşu kenarların c/d oranında böldüğünden, DM açığı ortalar. Dolayısıyla $\angle ADM = \angle MDC = \alpha$ 'dır. ABD, CBD üçgenlerine kosinüs teoremini uygulayıp $BD = f$ alırsak

$$\begin{aligned} a^2 &= d^2 + f^2 - 2df \cos \alpha, \\ b^2 &= c^2 + f^2 - 2cf \cos \alpha, \end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$a^2 - b^2 = d^2 - c^2 - 2f(d - c) \cos \alpha.$$

$d \geq c$ varsayıp $d = c + e$ yazalım. $b = c + v + e$, $a = c + v$ olur. $a^2 - (a + e)^2 = (c + e)^2 - c^2 - 2ef \cos \alpha$ eşitliği

$$ef \cos \alpha = ce + ae + e^2.$$

biçiminde sadeleşir. $e \neq 0$ ise $\cos \alpha = (c + a + e)/f = (c + b)/f$ olur; $c + b > f$ olduğundan bu olanaksızdır. Böylece $e = 0$, yani $c = d$, $a = b$ 'dir. Şekil bir deltoiddir. Simetriden, her deltoidin Nagel özelliğine sahip olduğu görülür.

Üç başka katılımcı da deltoid ve paralelkenardan söz etmiştir.

sekiz A_i, H_i noktası, her çiftin simetri merkezi N olmak üzere, dörderli gruplar hâlinde dört ayrı çember çifti üzerinde yer alır.

Dört $A_i A_j A_k$ ve dört $H_i H_j H_k$ üçgeninin birbirine eş sekiz dokuz nokta çemberinin tümü N 'den geçer; merkezleri de merkezi N olan eş bir çember üzerindedir. Bu nedenle N 'ye dörtgenin *sekiz çember noktası*, son çembere de *sekiz nokta çemberi* denebilir.

Sekiz A_m, H_m noktası ile karşılık gelen $A_i A_j A_k, H_i H_j H_k$ üçgenleri için dört farklı Simson doğrusu vardır ve hepsi N 'den geçer. Aslında sekiz noktadan birini ve diğer üçünün oluşturduğu üçgeni seçerek 280 pedal çemberi veya doğrusu elde edilir; bunların 180'i farklıdır ve hepsi N 'den geçer.

$A_i A_j A_k$ üçgenlerinin dokuz nokta merkezleri N_m , $H_1 H_2 H_3 H_4$ 'e O merkezli, $\frac{1}{2}$ oranlı homotetik bir dörtgen oluşturur. Dolayısıyla $A_1 A_2 A_3 A_4$ 'e, O 'dan H 'ye yolun $1/3$ 'ündeki G merkezli, $-\frac{1}{2}$ oranlı homotetiktir. Benzer biçimde $H_i H_j H_k$ üçgenlerinin dokuz nokta merkezleri N'_m , $H_1 H_2 H_3 H_4$ 'e, yolun $2/3$ 'ündeki G' merkezli ve $-\frac{1}{2}$ oranlı homotetiktir. Ortak çevrel çemberlerinin merkezi N , yarıçapı verilen dörtgenin çevrel yarıçapının yarısıdır. Benzer biçimde (bkz. E1740 [1965, 1026]), $A_i A_j A_k$ üçgenlerinin ağırlık merkezleri G_m , $H_1 H_2 H_3 H_4$ 'e O merkezli ve $1/3$ oranlı; dolayısıyla $A_1 A_2 A_3 A_4$ 'e, yolun $1/4$ 'ündeki S ortalama merkeziyle $-\frac{1}{3}$ oranlı homotetik bir dörtgen oluşturur. Bunun çevrel merkezi G 'dir. $H_i H_j H_k$ 'nin ağırlık merkezleri G'_m ve çevrel merkezleri G' , OH 'nin diğer dörtte birlik noktası S' 'yi belirler. Ayrıca N , hem $N_1 N_2 N_3 N_4$ ile $N'_1 N'_2 N'_3 N'_4$ 'ün hem de $G_1 G_2 G_3 G_4$ ile $G'_1 G'_2 G'_3 G'_4$ 'ün simetri merkezidir.

$G_i H_i$ ve $G'_i H'_i$ parçalarını çap alan sekiz *diklik merkezi-ağırlık merkezi çemberi* vardır (bkz. Droussent). Bunların çiftleri, tümü N 'den geçen 16 farklı kuvvet ekseni belirler. Dolayısıyla N , sekiz çemberin hepsine dik olan bir çemberin merkezidir.

Euler parçası pekâlâ *yedi nokta doğrusu* olarak da adlandırılabilir: O, S, G, N, G', S', H . G ile N , OH 'yi sırasıyla üçte birinde ve yarısında böldüğünden, üçgenin Euler doğrusuyla benzerlik belirgindir.

Ayrıca H. G. Forder, *Higher Course Geometry*, Cambridge University Press, 1949, s. 232–235 ve R. A. Johnson, *Modern Geometry*, Houghton-Mifflin, 1929, s. 169, 207, 243, 251–253'e bakınız.

E2312. Ceva Teoreminin Bir Uygulaması

American Mathematical Monthly **79** (1972), 778

Kaynak PDF s. 53–54.

E2312 [1971, 793]. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

D , pozitif yönlendirilmiş ABC üçgeninin düzleminde bir nokta olsun; AD, BD, CD doğruları karşı kenarları sırasıyla A_1, B_1, C_1 noktalarında kessin. Yönlü BA_1, CB_1, AC_1 parçaları birbirine eşitse ($= \delta$), D tek olarak belirlenir ve ABC 'nin içindedir. (D ile Brocard noktası Ω arasındaki benzerliğe dikkat ediniz.)

Çözüm: Michael Goldberg, Washington, D. C. Üçgenin kenar uzunlukları $a \leq b \leq c$ olmak üzere a, b, c olsun. Ceva teoreminden

$$(*) \quad (a - \delta)(b - \delta)(c - \delta) = \delta^3.$$

(*)'ın sol tarafı, $\delta = 0$ 'da abc değerinden $\delta = a$ 'da sıfıra monoton azalır; sağ tarafı ise $\delta = 0$ 'da sıfırdan başlayarak monoton artar. Dolayısıyla iki fonksiyon, $(0, a)$ aralığındaki tam bir gerçek δ değerinde eşittir. (*)'ın başka gerçek çözümü olmadığı da kolayca görülür.

Bunun yerine CA_1, BC_1, AB_1 parçaları eşit alınırsa δ aynı kalır, ancak kesenler başka bir E noktasında kesişir. D ile E yalnızca eşkenar üçgende çakışır.

Diğer çözenler: Bernhard Andersen (Danimarka), Harold Donnelly, Jordi Dou (İspanya), M. G. Greening (Avustralya), V. F. Ivanoff, problemi öneren.

Editör notu (özgün dergi). L. Goldstone, bu noktanın, izotomik eşleniğinin ve özelliklerinin ayrıntılı incelemesini Peter Yff, *An analogue of the Brocard Points*, *American Mathematical Monthly* 70 (1963), 495–501’de bulmuştur.

E2363. Küresel Üçgenler Üzerine

American Mathematical Monthly **80** (1973), 694

Kaynak PDF s. 55.

E2363 [1972, 662].^[E009] Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

$A' = a, B' = b, C' = c, A = a', B = b', C = c'$ koşullarını sağlayan ABC ve $A'B'C'$ küresel üçgen çiftlerini karakterize ediniz.

Çözüm: M. G. Greening, *University of New South Wales, Avustralya*. Herhangi bir $A'B'C'$ küresel üçgeni için

$$(1) \quad \cos a' = \cos b' \cos c' + \sin b' \sin c' \cos A'$$

ve (a, b, c) 'nin döngüsel permütasyonlarıyla elde edilen diğer iki bağıntı geçerlidir.^[E009] Böylece

$$(2) \quad \cos A = \cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a,$$

ve benzerleri elde edilir. Öte yandan ABC 'nin kutupsal üçgeninden

$$(3) \quad \cos A = -\cos B \cos C + \sin B \sin C \cos a.$$

çıkar. Dolayısıyla $\cos B \cos C = \cos C \cos A = \cos A \cos B = 0$ 'dır. Örneğin $A = B = \pi/2$ alırsak (2)'den $a = b = \pi/2$ bulunur. Ayrıca $\cos C = \cos c$ ve $c > 0, C < \pi$ olduğundan $C = c$ 'dir. Sonuç olarak

$$A' = B' = a' = b' = \pi/2 \quad \text{ve} \quad c' = C' = c = C,$$

elde edilir; yani iki üçgen zorunlu olarak eştir.

Diğer çözenler: Michael Goldberg, Lew Kowarski, Clellie Oursler ve Eric Sturley, problemi öneren.

E2462. Genişletilmiş Erdős–Mordell Eşitsizliği

American Mathematical Monthly **92** (1985), 360

Kaynak PDF s. 55–63.

E2462 [1974, 281]. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

$P, A_1A_2A_3$ üçgeninin içinde bir nokta olsun. P 'nin A_i köşesine uzaklığını R_i , bu köşenin karşısındaki a_i kenarına uzaklığını r_i ile gösterelim. Erdős–Mordell eşitsizliği

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq 2(r_1 + r_2 + r_3)$$

biçimindedir. Her zaman $R_i \geq 0$ alınsın; P ile A_i, a_i 'nin aynı tarafındaysa r_i pozitif, karşı taraflarındaysa negatif olsun. Bu yorumla eşitsizliğin düzlemdeki bütün P noktaları için geçerli olduğunu ispatlayınız.

Editör notu (özgün dergi). Maine Üniversitesi Matematik Bölümünden Profesör Clayton W. Dodge, bu probleme 1974'te sunulan “çözümleri” değerlendirmiş ve hiçbirinin çözüm olmadığını saptamıştır. Daha sonra problemi kendisi çözmüştür. Çözümü *Cruce Mathematicorum*, cilt 10, sayı 9, Kasım 1984, s. 274–281'de yayımlanmıştır.

Genişletilmiş Erdős–Mordell Eşitsizliği

Clayton W. Dodge

Cruce Mathematicorum **10** (1984), 274–281.

Kaynak PDF s. 56–63.

On yıl önce *American Mathematical Monthly*, Paul Erdős'ün önerdiği 3740 numaralı problemin [42 (1935), 396] bir genişletmesi olan E2462'yi [81 (1974), 281] yayımladı. Önceki problem ilk kez L. J. Mordell tarafından çözülmüştü [44 (1937), 252–254]:

E2462. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

P , $A_1A_2A_3$ üçgeninin içinde bir nokta olsun. P 'nin A_i köşesine uzaklığını R_i , bu köşenin karşısındaki a_i kenarına uzaklığını r_i ile gösterelim. Erdős–Mordell eşitsizliği

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq 2(r_1 + r_2 + r_3)$$

biçimindedir. Her zaman $R_i \geq 0$ alınsın; P ile A_i , a_i 'nin aynı tarafındaysa r_i pozitif, karşı taraflarındaysa negatif olsun. Bu yorumla eşitsizliğin düzlemdeki bütün P noktaları için geçerli olduğunu ispatlayınız.

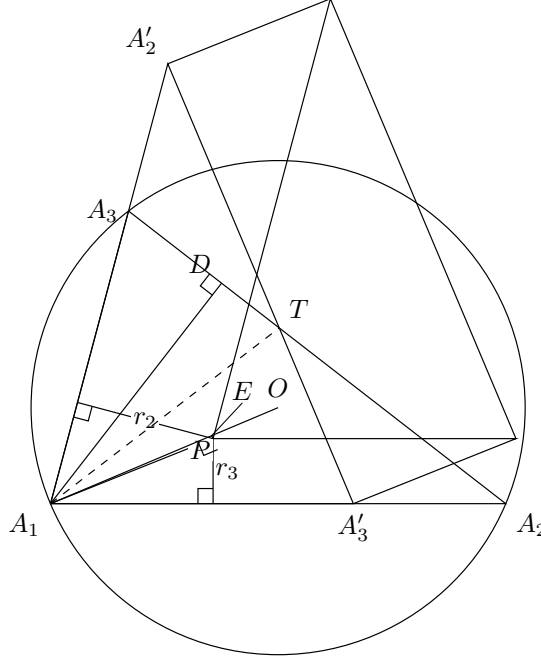
1974'te bu probleme gelen çözümlerin hakemliğini yapmak bana düştü. İlginçtir ki her çözüm sahibi, Kazarinoff'un [1] özgün Erdős eşitsizliği için verdiği ispatla başlayıp bunu r_1, r_2, r_3 'ten birinin negatif olduğu duruma uyarlamıştı. Hepsi aynı hatayı yapmış, ispatı geçersiz kılmıştı. Kazarinoff da ispatının “ P üçgenin dışında olsa bile, çevrel çemberin içinde kaldığı sürece geçerli” olduğunu yazmıştı. Ancak Temel Problemler Bölümü editörleri, aynı hataya düşmeden böyle bir genişletmenin nasıl yapılabileceğini görememişti. Kazarinoff'un ispatını özetleyip hatayı açıklayacağız. Bu ispata sıkça dayanacağımızdan özetimiz oldukça ayrıntılıdır. Kazarinoff'un iddiası o zaman doğrulanabilseydi, bir ispat 1975'te yayımlanmış olacaktı.

Demir'in gösterimiyle Kazarinoff, P 'yi A_1 açısının içinde alıp $A_1A_2A_3$ üçgenini A_1T açıortayına göre yansıtarak $A_1A_2'A_3'$ 'ü elde eder (Şekil 4.4). A_1 'in açıortayının A_1D yüksekliği ile OA_1 çevrel yarıçapı arasındaki açıyı da ortaladığına dikkat ederek Pappus'un bir teoremini kullanır: komşu kenarları A_1A_2', A_1P olan paralelkenarın alanı ile komşu kenarları A_1P, A_1A_3' olan paralelkenarın alanının toplamı, $A_2'A_3'$ üzerine kurulan ve A_2', A_3' 'ten çıkan kenarları vektör olarak $\overrightarrow{A_1P}$ 'ye eşit olan paralelkenarın alanına eşittir. $A_1P = R_1$ olduğundan (1)'in ilk eşitliği elde edilir; diğer ikisi, P sırasıyla A_2, A_3 açılarının içindeyken aynı biçimde bulunur:

$$\begin{cases} a_1 R_1 \cos(OA_1P) = a_2 r_3 + a_3 r_2, \\ a_2 R_2 \cos(OA_2P) = a_3 r_1 + a_1 r_3, \\ a_3 R_3 \cos(OA_3P) = a_1 r_2 + a_2 r_1. \end{cases} \quad (1)$$

P üçgenin içindeyken buradan

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 + R_3 &\geq R_1 \cos(OA_1P) + R_2 \cos(OA_2P) + R_3 \cos(OA_3P) \\ &= \left(\frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_2}\right) r_1 + \left(\frac{a_3}{a_1} + \frac{a_1}{a_3}\right) r_2 + \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1}\right) r_3 \\ &\geq 2(r_1 + r_2 + r_3) \end{aligned} \quad (2)$$



Şekil 4.4: Açığortaya göre yansıma (Dodge'un 1. şekli).

elde edilir; çünkü $x > 0$ için $x + 1/x \geq 2$ 'dir.

Demir'in işaret kuralına uyulursa (1) denklemleri P 'nin bütün konumlarında geçerlidir. O zaman (2)'nin ilk iki satırı da geçerlidir. İleride bu olguyu kullanacağımız için bir ispat verelim.

P , Şekil 4.5'deki gibi A_1, A_2 açılarının dışında, A_3 açısının ve üçgenin çevrel çemberinin içinde olsun. Şekil 4.4'in gösterimiyle, $A'_2 A'_3$ üzerindeki paralelkenarın alanı bu kez $A_1 A'_2, A_1 A'_3$ üzerindikilerin farkıdır. Dolayısıyla

$$a_1 R_1 \cos(OA_1 P) = -a_2 r_3 + a_3 r_2,$$

olur; burada bütün r_i değerleri negatif olmayan uzaklıklardır. Benzer biçimde

$$a_2 R_2 \cos(OA_2 P) = a_3 r_1 - a_1 r_3,$$

ve daha önce olduğu gibi

$$a_3 R_3 \cos(OA_3 P) = a_1 r_2 + a_2 r_1,$$

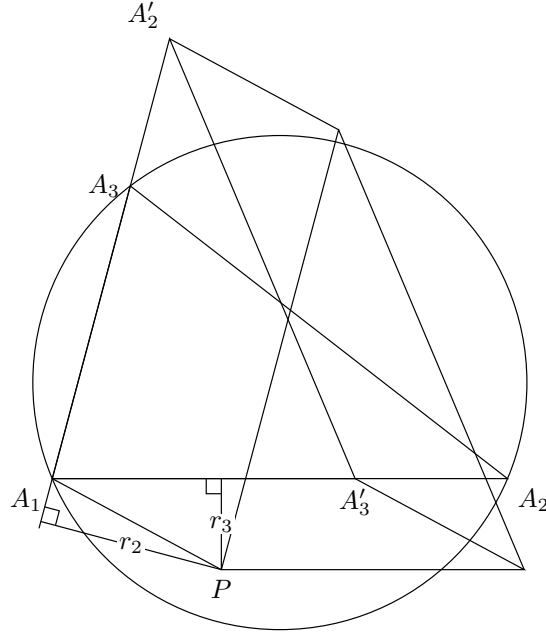
elde edilir; çünkü P , A_3 açısının içindedir. Demir'in işaret kuralı kullanıldığında (1) bu durumda doğrudur. Diğer durumlarda da doğru olması burada gerekli değildir. P çevrel çemberin içinde olduğundan $OA_i P$ açılarının kosinüsleri hâlâ pozitifdir ve (2)'nin ilk iki satırı geçerlidir. Yalnız üçüncü satır kuşkuludur. Kazarinoff'un akıl yürütmesi, aşağıda açıklanacağı gibi, tam burada aksar. E2462'ye sunulan çözümlerdeki hata, r_i 'lerden biri, örneğin r_3 , negatif olduğunda ortaya çıkmıştır. Hâlâ

$$\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} \geq 2,$$

geçerlidir; ancak $r_3 < 0$ olduğundan eşitsizliğin yönü değişir:

$$\left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1} \right) r_3 \leq 2r_3,$$

Bu nedenle akıl yürütme bir sonuca ulaşmaz. Genişletilmiş teoremden r_i 'lerden birinin veya ikisinin negatif olması gerektiğinden editörler bu hataya basit bir çözüm bulamamıştır. Çözüm



Şekil 4.5: Üçgen dışındaki P için yansıtılmış şekil (Dodge'un 2. şekli).

gönderenlere yazdık; Leon Bankoff ile ben, yeterli bir ispat kurmak için belki bir yıl yazdık. Sonraki dokuz yıl boyunca problemin zorluğuna kapılarak zaman zaman ona geri döndüm.

İki durum hemen hemen doğrudan çözüldü.

Durum 1. P , bir köşe açısının ters açısının içindedir.

Örneğin P , Şekil 4.6'teki gibi A_1 'in ters açısının içinde olsun. r_2, r_3 negatif alınmalıdır. İspatlanacak eşitsizlik

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq 2(r_1 - r_2 - r_3),$$

biçimindedir; burada r_i 'leri negatif olmayan uzunluklar alıp gerekli eksi işaretlerini açıkça yazdık. R_2, r_1 bir dik üçgenin hipotenüsü ve dik kenarı olduğundan

$$R_2 \geq r_1, \quad \text{benzer biçimde} \quad R_3 \geq r_1.$$

Böylece

$$R_1 + R_2 + R_3 \geq R_2 + R_3 \geq r_1 + r_1 \geq 2(r_1 - r_2 - r_3). \quad \square$$

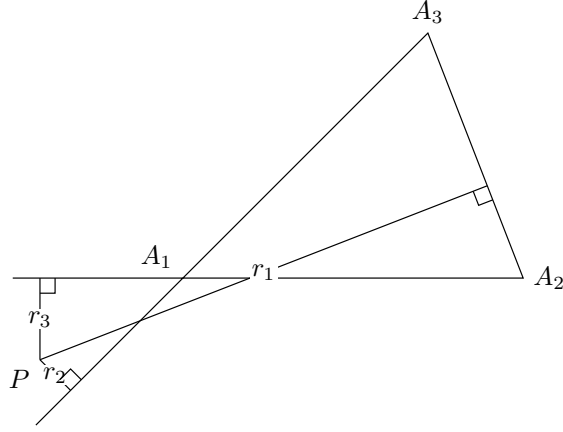
Durum 2. P , üçgenin bir köşe açısının içinde, fakat bir r_i uzaklığının ayağı F_i üçgenin dışında kalacak kadar üçgenden uzaktır.

Şekil 4.7'teki gibi P , A_1 açısının içinde ve örneğin r_3 'ün ayağı F_3 üçgen dışında kalacak kadar uzakta olsun. Bu durumda r_1 negatif almır. A'_2, F_3 noktası $A_2A'_2$ 'nin orta noktası olacak biçimde seçilsin. $PA_2 = PA'_2$ olduğundan üç R_i uzaklığı $A_1A_2A_3$ ve $A_1A'_2A_3$ için aynıdır. r_2, r_3 değişmez; yalnız r_1, r'_1 olur. Şekildeki gibi P yeni üçgenin dışındaysa $|r_1| > |r'_1|$ ve ikisi de negatif işaretlerle alınacağından $-r_1 < -r'_1$ 'dir. P yeni üçgenin içindeyse $-r_1 < 0 < r'_1$ olur. Böylece her iki durumda uygun işaretlerle

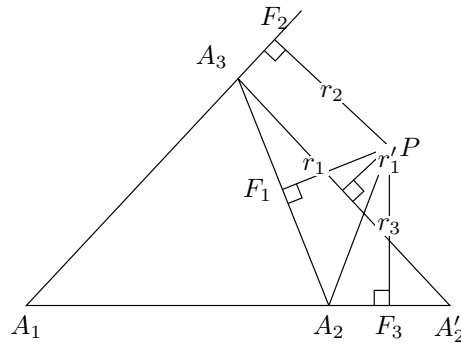
$$\pm r'_1 + r_2 + r_3 \geq -r_1 + r_2 + r_3.$$

Dolayısıyla teoremi, üç F_i ayağının tümü kenar parçaları üzerinde veya köşelerdeyken ispatlamak yeterlidir; bu durumda P çevrel çemberin içindedir. $\square$

Kapsamlı bir bilgisayar taraması, teoremin çevrel çemberin içindeki bütün noktalar için doğru görüldüğünü ortaya koydu. Geriye P üçgenin dışında, çevrel çemberin içindeyken ispatlamak



Şekil 4.6: Bir köşe açısının ters açısındaki bölge (Dodge'un 3. şekli).

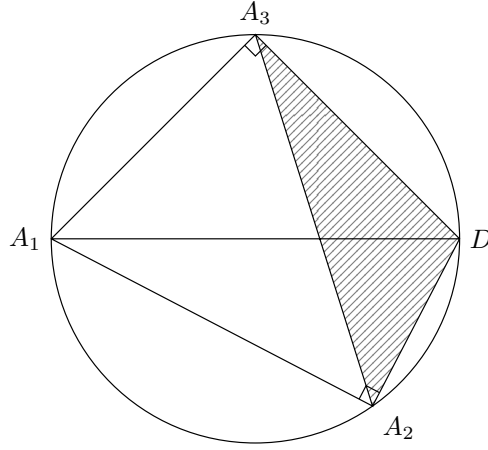


Şekil 4.7: Bir köşenin dikme ayağına göre yansıtılması (Dodge'un 4. şekli).

kaldı. Üstelik Durum 2 bu bölgenin bir kısmını da eler; örneğin P , $A_1A_2A_3$ içindeyse özgün Erdős eşitsizliği o üçgene uygulanır. D , Şekil 4.8'teki gibi A_1 'in çap karşısı olsun. Genellik kaybı olmadan, teoremi P noktası A_2A_3D 'nin içinde veya sınırındayken ispatlamalıyız. Aksi hâlde gösterilen bölge boş olacağından $A_2 < 90^\circ$, $A_3 < 90^\circ$ varsayabiliriz. r_1 negatif işaretle alınacağından bu bölgede

$$R_1 + R_2 + R_3 + 2r_1 \geq 2r_2 + 2r_3. \quad [E010]$$

ispatlanmalıdır. Kazarinoff'un ispatının çevrel çember içinde geçerli olduğu doğrulansaydı, E2462'nin ispatı burada biterdi. Geçen yıl içinde geliştirilen aşağıdaki durumlar, istenen ispatı tamamlar.



Şekil 4.8: Geriye kalan üçgensel bölge (Dodge'un 5. şekli).

Durum 3. P , A_2A_3D üçgenindedir ve A_2, A_3 açılarından en az biri 30° 'yi aşmaz.

Şekil 4.9'da $A_2 \leq 30^\circ$ olsun; böylece $\sin A_2 \leq 1/2$ 'dir. $\angle A_3A_2P = \varepsilon$ ise

$$r_3 = R_2 \sin(A_2 + \varepsilon), \quad r_1 = R_2 \sin \varepsilon,$$

ve

$$\begin{aligned} \sin(A_2 + \varepsilon) - \sin \varepsilon &= \sin A_2 \cos \varepsilon + \cos A_2 \sin \varepsilon - \sin \varepsilon \\ &= \sin A_2 \cos \varepsilon + \sin \varepsilon (\cos A_2 - 1) \\ &\leq \sin A_2 \leq \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Şimdi

$$R_2 = PA_2 \geq PA_2 \{2 \sin(A_2 + \varepsilon) - 2 \sin \varepsilon\} = 2r_3 - 2r_1.$$

Dolayısıyla

$$R_1 + R_2 + R_3 + 2r_1 \geq r_2 + (2r_3 - 2r_1) + r_2 + 2r_1 = 2r_2 + 2r_3. \quad \square$$

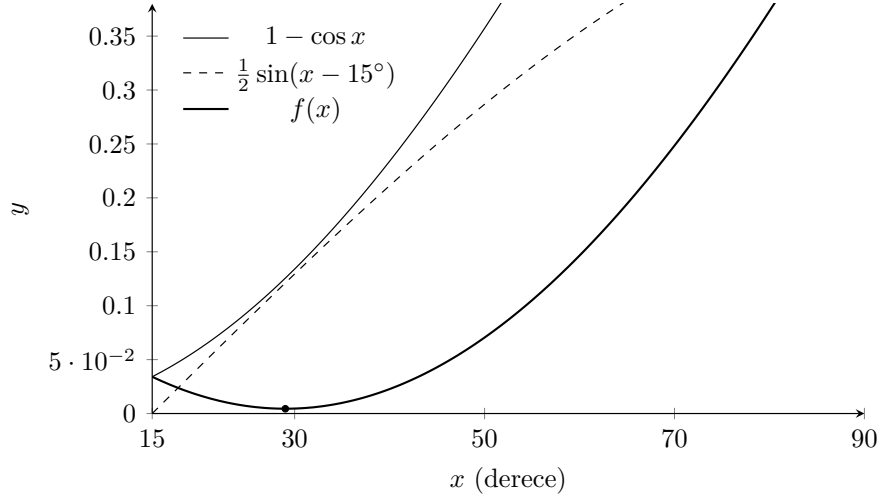
Durum 4. P , üçgenin en büyük köşe açısının içindedir.

P , A_2A_3D üçgeninde olsun ve $A_1 \geq A_2 \geq A_3$ varsayalım. $a_1 \geq a_2 \geq a_3$, $r_1 \leq r_2$ ve ayrıca

$$2 \leq U \equiv \frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_2} \leq V \equiv \frac{a_3}{a_1} + \frac{a_1}{a_3}.$$

elde edilir. Bir N sayısı için $Ur_1 = Vr_2 + N$ ise

$$Ur_1 \geq Ur_2 + N$$



Şekil 4.10: Lemma 1'deki üç fonksiyon (Dodge'un 7. şekli).

Durum 5. P , A_2A_3D 'nin içindedir; $30^\circ < A_3 \leq A_2$ ve $A_1 \leq A_2 < 90^\circ$ 'dir. Bkz. Şekil 4.11.

$\delta = \angle OA_3P$ olsun. $A_3 > 30^\circ$ olduğundan $A_1 + A_2 < 150^\circ$, $A_1 < 75^\circ$ 'dir. Dolayısıyla $\angle A_3OA_2 < 150^\circ$, $\angle OA_3A_2 > 15^\circ$ olur. Şu bağıntılardan

$$\frac{a_2}{a_3} = \frac{\sin A_2}{\sin A_3} \quad \text{ve} \quad 30^\circ < A_3 \leq A_2 < 90^\circ,$$

şu sonuç çıkar:

$$1 \leq \frac{a_2}{a_3} < \frac{\sin 90^\circ}{\sin 30^\circ} = 2,$$

Böylece Lemma 2'ye göre

$$\frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_2} < 2.5.$$

$r_1 \leq R_3 \sin(\delta - 15^\circ)$ olduğundan Lemma 1 ile

$$R_3(1 - \cos \delta) \geq \frac{1}{2}R_3 \sin(\delta - 15^\circ) \geq \frac{1}{2}r_1.$$

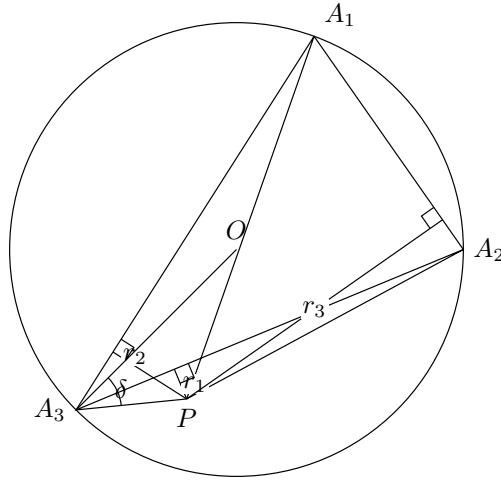
Sonra

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 + R_3 + 2r_1 &= R_1 + R_2 + R_3 \cos \delta + R_3(1 - \cos \delta) + 2r_1 \\ &\geq R_1 + R_2 + R_3 \cos \delta + 2.5r_1 \\ &\geq R_1 \cos(\angle OA_1P) + R_2 \cos(\angle OA_2P) + R_3 \cos \delta + \left(\frac{a_2}{a_3} + \frac{a_3}{a_2}\right) r_1 \\ &= \left(\frac{a_3}{a_1} + \frac{a_1}{a_3}\right) r_2 + \left(\frac{a_1}{a_2} + \frac{a_2}{a_1}\right) r_3 \quad (2) \text{ gereği} \\ &\geq 2(r_2 + r_3), \end{aligned}$$

elde edilir ve sonunda ispat tamamlanır. E2462 çözülmüştür.

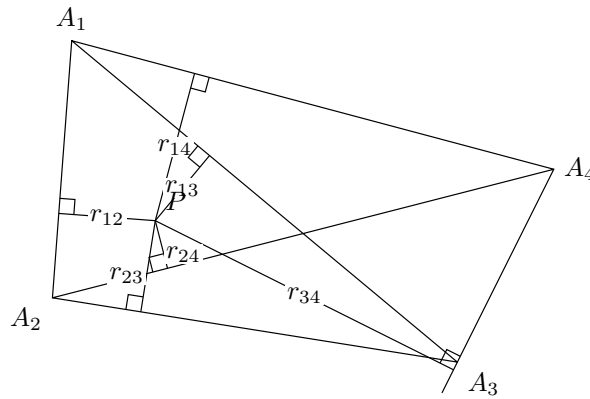
Son olarak, üçgenler için genişletilmiş Erdős–Mordell eşitsizliğinden dışbükey dörtgenler için karşılık gelen sonucu çıkaralım.

$A_1A_2A_3A_4$ dışbükey dörtgen, P düzlemindeki herhangi bir nokta olsun. $PA_i = R_i \geq 0$ alalım.^[E012] P ile A_iA_j doğrusu arasındaki işaretli uzaklık r_{ij} olsun; işaret, bu doğruyu kenar alan üçgene Demir'in kuralı uygulanarak belirlenir. Böylece r_{12} , $A_1A_2A_3$ ve $A_1A_2A_4$ ile ilişkilidir ve P nerede olursa olsun ikisi için aynı işareti taşır (Şekil 4.12). r_{23}, r_{34}, r_{41} için de aynı durum



Şekil 4.11: Son açı düzeni (Dodge'un 8. şekli).

geçerlidir. Öte yandan $|r_{13}|$, $A_1A_2A_3$ ve $A_1A_3A_4$ ile ilişkilidir: ilk üçgen için uzaklık r_{13} ise ikincisi için $-r_{13}$ 'tür. Benzer biçimde r_{24} , $A_1A_2A_4$ 'e karşılık geliyorsa $-r_{24}$, $A_2A_3A_4$ 'e karşılık gelir. Dörtgenlere genişletilen eşitsizlik şöyledir:



Şekil 4.12: Dışbükey dörtgende işaretli uzaklıklar (Dodge'un 9. şekli).

Sonuç. $A_1A_2A_3A_4$ dışbükey dörtgen, P düzleminde herhangi bir nokta ve R_i, r_{ij} yukarıdaki gibi tanımlıysa

$$3(R_1 + R_2 + R_3 + R_4) \geq 4(r_{12} + r_{23} + r_{34} + r_{41}). \quad (3)$$

Kanıt. Genişletilmiş Erdős–Mordell eşitsizliğini sırasıyla $A_1A_2A_3$, $A_1A_2A_4$, $A_1A_3A_4$, $A_2A_3A_4$ üçgenlerine uygulayalım:

$$\begin{aligned} R_1 + R_2 + R_3 &\geq 2(r_{12} + r_{23} + r_{13}), \\ R_1 + R_2 + R_4 &\geq 2(r_{12} + r_{24} + r_{41}), \\ R_1 + R_3 + R_4 &\geq 2(r_{34} + r_{41} - r_{13}), \\ R_2 + R_3 + R_4 &\geq 2(r_{23} + r_{34} - r_{24}), \end{aligned}$$

Bu dört eşitsizliğin toplamı (3)'ü verir. □

Kaynak

- [1] D. K. Kazarinoff, "A Simple Proof of the Erdős–Mordell Inequality for Triangles", *Michigan Math. J.* **4** (1957), 97–98.

Matematik Bölümü, Maine Üniversitesi, Orono, Maine 04469.

E2625. Koniklerin Bir Özelliği

American Mathematical Monthly **85** (1978), 121

Kaynak PDF s. 64.

E2625 [1976, 812]. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

A_i ($i = 0, 1, 2, 3 \pmod{4}$), bir Γ çemberi üzerinde dört nokta olsun. t_i , A_i 'deki teğet; p_i, q_i ise sırasıyla A_{i-1}, A_{i+1} noktalarından geçen ve t_i 'ye paralel doğrular olsun. $B_i = t_i \cap t_{i+1}$, $C_i = p_i \cap q_{i+1}$ ise dört $B_i C_i$ doğrusunun ortak bir noktası olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Jordi Dou, Barcelona, İspanya. Daha genel bir sonuç ispatlayacağız.

Teorem. K , gerçek projektif düzlemde dejenere olmayan bir konik; A_i ($0 \leq i \leq 3$), K üzerinde dört farklı nokta ve r , $A_i \notin r$ koşulunu sağlayan bir doğru olsun. t_i , A_i 'deki teğet; $B_i = t_i \cap t_{i+1}$, $T_i = t_i \cap r$, $p_i = T_i A_{i-1}$, $q_i = T_i A_{i+1}$ ve $C_i = p_i \cap q_{i+1}$ olsun. Dört $B_i C_i$ doğrusu bir noktada kesişir.

Kanıt. π , K 'ye göre kutupsallık; $S = A_0 A_2 \cap A_1 A_3$ olsun. $s = \pi(S)$, $R = \pi(r)$ alalım. σ , merkezi S , eksen s olan harmonik homoloji olsun. Böylece $\sigma^2 = 1$ ve $\sigma(A_i) = A_{i+2}$ 'dir. $Q = \sigma(R)$ 'nin her $B_i C_i$ doğrusu üzerinde bulunduğunu ileri sürüyoruz.

π , S ile s 'yi yer değiştirdiğinden σ ile π değişmelidir. Dolayısıyla $\tau = \sigma\pi = \pi\sigma$ da bir kutupsallıktır. Şu eşitlikler geçerlidir:

$$\begin{aligned}\tau(t_i) &= \sigma\pi(t_i) = \sigma(A_i) = A_{i+2}, \\ \tau(t_{i+1}) &= A_{i+3} = A_{i-1}, \\ \tau(r) &= \sigma\pi(r) = \sigma(R) = Q\end{aligned}$$

Dolayısıyla $T_{i+1} T_i B_i$ ile $A_{i+2} A_{i-1} Q$, τ 'ya göre birbirinin kutupsal üçgenleridir.^[E014] Chasles teoremine göre (H. S. M. Coxeter, *The Real Projective Plane*, Cambridge University Press, 1961, s. 71), bunlar bir Desargues üçgen çifti oluşturur. Böylece $T_{i+1} A_{i+2} = q_{i+1}$, $T_i A_{i-1} = p_i$ ve $B_i Q$, $C_i = p_i \cap q_{i+1}$ noktasında kesişir. Yani Q , ileri sürüldüğü gibi $B_i C_i$ doğrularının tümü üzerindedir. $\square$

Problemdeki sonuç, $K = \Gamma$ ve r sonsuzdaki doğru seçilerek elde edilir.

Diğer çözenler: L. Kuipers (İsviçre), problemi öneren.

E3135. Köşelere Uzaklıkların Eşleştirilmesi

American Mathematical Monthly **95** (1988), 764

Kaynak PDF s. 65.

E3135 [1986, 215]. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Bir çembere çizilmiş çeşitkenar ABC üçgeninin bir köşesinin karşısındaki yay üzerinde, o köşeye uzaklığı diğer iki köşeye uzaklıklarının toplamına eşit olan bir D noktası bulunduğunu ispatlayınız. D 'nin cetvel ve pergelle nasıl kurulacağını gösteriniz.

I. Çözüm: J. Leech, University of Stirling, İskoçya. $BC > AC > AB$ olsun. BA ışını üzerinde X ve BC üzerinde Y noktalarını $BX = BY = AC$ olacak biçimde seçerek BAC 'den ikizkenar BXY üçgenini elde edelim. BXY 'nin çevrel çemberi, BAC 'nin çevrel çemberini istenen D noktasında keser. Özelliği doğrulamak için AD 'yi $DZ = DC$ olacak biçimde Z 'ye uzatalım. D ve B açıları ADC 'nin bütünleri olduğundan DZC ile BXY benzerdir. Kuruluş gereği $AC = BY$, A ve B açıları eşit, $\angle BDY = \angle BXY = \angle DZC$ olduğundan DBY ile ZAC eşittir. Böylece $DB = ZA = DA + DC$ olur.

II. Çözüm: P. Tzermias (öğrenci), University of Patras, Yunanistan. A, B, C 'nin karşısındaki kenarlar a, b, c ; DA, DB, DC uzunlukları x, y, z olsun. $y = x + z$ sağlayan D 'yi arıyoruz. Batlamyus teoreminden $ax + cz = by$ 'dir. y yerine yazınca $x/z = (c - b)/(b - a)$ bulunur. Dolayısıyla D , A, C ve $(c - b)/(b - a)$ oranıyla belirlenen Apollonius çemberi üzerindedir. Bunun standart bir kuruluşu vardır (N. Altshiller-Court, *College Geometry*, 1952, s. 15).

Editör notu (özgün dergi). $c - b$ ile $b - a$ aynı işaretli olacağından, D , orta uzunluktaki kenarın ayırdığı yay üzerinde bulunmalıdır. Bu nedenle ABC ikizkenarsa D yalnızca eşit kenarların ortak köşesi olabilir. ABC eşkenarsa D çemberin herhangi bir noktası olabilir; Leech'in iki çemberi bu durumda çakışır.

Bazı çözüm sahipleri D 'nin varlığının Ara Değer Teoremi'nden çıktığını belirtmiştir. B 'nin karşısındaki yay üzerinde D , ABC 'nin en kısa kenarına yakinken $DB < DA + DC$; en uzun kenarına yakinken ise $DB > DA + DC$ olur.

Batlamyus teoreminden bağımsız başka çözümler J. Dou (İspanya), L. Kuipers (İsviçre) ve P. L. Hon (Hong Kong) tarafından sunulmuştur.

E. Morgantini (İtalya), bu probleme atıfta bulunan “Una Quartica Bicircolare Della Geometria Del Triangolo” başlıklı bir makale sunmuştur.

Yukarıdaki kişilerin yanı sıra S. Arslanagić (Yugoslavya), A. Bager, H. Eves, J. Fukuta (Japonya), H. Kappus (Batı Almanya), O. P. Lossers (Hollanda), J. P. Robertson, J. S. Robertson, V. Schindler (Doğu Almanya), R. A. Simon (Şili), B. A. Troesch, M. Vowe (İsviçre) ve problemi önerenden doğru çözümler alınmıştır.

E3164. Elipse Çizilen Teğetler

American Mathematical Monthly **95** (1988), 660

Kaynak PDF s. 66.

E3164 [1986, 566]. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

Bir elipse dışındaki bir noktadan çizilen teğet parçalarının uzunlukları s, t olsun. s/t oranının uç değerlerini bulunuz.

Çözüm: Gene Arnold ve Vaclav Konecny, Ferris State College, Big Rapids, MI. Bir elipsi, $\mathbb{R}^3$ içinde bir düzlemdeki çemberin başka bir düzleme dik izdüşümü olarak ele alalım. Teğetler teğetlere izdüşer ve elipsin küçük eksenini iki düzlemin kesişimine diktir. Çemberin kesişen iki teğet parçasının oranı 1 olduğundan, elipste iki teğet parçasının uç oranları, çemberdeki bir teğetin izdüşümüne oranı en küçükken diğerinin en büyük olduğu durumda elde edilir. Bu, izdüşen teğetler düzlemlerin kesişimine sırasıyla paralel ve dik olduğunda gerçekleşir. Dolayısıyla uç oranlar büyük eksenin küçük eksene oranı ve bunun tersidir.

Editör notu (özgün dergi). M. S. Klamkin, daha güç olan $|s - t|$ farkının uç değerleri probleminin incelenmesini önermiştir.

Diğer çözenler: M. Barr (Kanada), J. C. Binz (İsviçre), J. M. Cohen, J. Dou (İspanya), J. Fukuta (Japonya), P. L. Hon (Hong Kong), L. R. King, M. S. Klamkin (Kanada), K.-W. Lau (Hong

Kong), O. P. Lossers (Hollanda), M. Pachter (Güney Afrika), K. Schilling, J. H. Steelman, P. Tracy, D. B. Tyler, C. Vandermeer (Hollanda), problemi öneren. Bir yanlış çözüm alınmıştır.

E3422. Teğetlerin İnvölüsyon Ekseninde Kesişmesi

American Mathematical Monthly **99** (1992), 679

Kaynak PDF s. 66–68.

E3422 [1991, 158]. Öneren: H. Demir ve C. Tezer, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

F, F' , verilen bir çemberin merkezine göre simetrik noktalar; S ise çember üzerinde, FF' doğrusu dışında bir nokta olsun. SF, SF' doğrularının çemberle ikinci kesişimleri sırasıyla P, P' olsun. P, P' noktalarındaki teğetler T 'de kesişiyorsa, FF' 'nin orta dikmesinin ST parçasının orta noktasından geçtiğini ispatlayınız.

I. Çözüm: Jean-Pierre Grivaux, Paris, Fransa. Karmaşık düzlemde çalışalım; büyük harfle gösterilen noktaların karmaşık karşılıklarını küçük harflerle belirtelim. Çemberi $\mathbf{U} = \{Z : |z| = 1\}$, F, F' noktalarını gerçekte eksen üzerinde varsayabiliriz.

$A, B \in \mathbf{U}$ ise Z 'nin AB doğrusu üzerinde olması için gerek ve yeter koşul $z + ab\bar{z} = a + b$ 'dir; buna $\mathcal{E}_{ab}$ diyelim. Türetmek için, doğru üzerindeki noktaların r gerçekte olmak üzere $z = a + r(b - a)$ sağladığına dikkat edelim. Eşlenik alıp $\bar{a} = 1/a$, $\bar{b} = 1/b$ kullanınca $\bar{z} = \bar{a} + r(\bar{b} - \bar{a})$ bulunur. Bunu ab ile çarpıp ilk denkleme eklemek $\mathcal{E}_{ab}$ 'yi verir. Bu biçim $a = b$ iken de geçerlidir.

$\mathcal{E}_{pp}$ ile $\mathcal{E}_{p'p'}$, $\mathbf{U}$ 'nun P, P' 'deki teğetlerinin denklemleri olduğundan $t + p^2\bar{t} = 2p$ ve $t + (p')^2\bar{t} = 2p'$ 'dir. $p \neq p'$ iken $\bar{t}$ yok edilirse $t = 2/(\bar{p} + \bar{p}')$ bulunur. Teğetlerin sonlu kesişimi T olduğundan $p + p' \neq 0$ 'dir.^[E013] ST 'nin orta noktası Z için

$$z = \frac{1}{2}(s + t) = \frac{1}{2} \left(s + \frac{2}{\bar{p} + \bar{p}'} \right),$$

olur. İspatlamak istediğimiz $z + \bar{z} = 0$ eşitliği, buna göre

$$\left(s + \frac{2}{1/p + 1/p'} \right) + \left(\frac{1}{s} + \frac{2}{p + p'} \right) = 0.$$

biçimindedir. Cebirsel düzenlemeyle bu,

$$\left(\frac{-2s}{1 + s^2} \right) (1 + pp') = p + p'. \quad (*)$$

eşitliğine denktir. F, F' sırasıyla $PS, P'S$ üzerinde olduğundan $f, f' = -f$, $\mathcal{E}_{ps}, \mathcal{E}_{p's}$ denklemlerini sağlar: $f(1 + ps) = p + s$ ve $(-f)(1 + p's) = p' + s$.^[E013] Burada $\bar{f} = f$ kullanılmıştır. İki denklemden f yok edilince (*) elde edilir; $1 + s^2 = 0$ durumunda eşitlik paydalar kaldırılarak yorumlanır.^[E013]

II. Problemi önerenlerin çözümü. F ile F' 'nin çakıştığı durumu dışlayalım. K , çemberde S 'nin çap karşıtı; S', S' 'den FF' 'ye paralel doğrunun çemberle diğer kesişimi olsun (S', S ile çakışabilir). Çemberin merkezi FF' 'yi ortaladığından SS', SP, SK, SP' harmonik bir demet oluşturur. Dolayısıyla çemberin her X noktası için XS', XP, XK, XP' de harmonik demettir. Özellikle $X = P$ veya $X = P'$ seçilirse PS', PT, PK, PP' ile $P'S', P'P, P'K, P'T$ demetleri harmoniktir. PP' her ikisinde ortak olduğundan S', K, T , açıkça FF' 'ye dik olan aynı doğru üzerindedir. Böylece FF' 'nin orta dikmesi ST 'yi ortalır.

Editör notu (özgün dergi). Çözüm sahiplerinin çoğu doğrudan analitik geometri ve uzun hesaplar, bazıları ise sentetik Öklid geometrisi kullanmıştır. H. Kappus karmaşık sayılarla, O. P. Lossers

projektif geometriyle başka ispatlar vermiştir. J. Dou'nun güzel yaklaşımı, bir koniğin projektif involüsyonlarının klasik bir özelliğine dayanır; bunlar koniği kendisine götüren ve çapraz oranları koruyan involüsyonlardır. Grivaux'nun gösterimini kullanarak bu yaklaşımı ve onun çözümüyle ilişkisini kısaca açıklayalım.

$\sigma(x) = -x$ ile verilen $\sigma : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, gerçek doğrunun projektif bir involüsyonudur. $\sigma(\infty) = \infty$ tanımıyla gerçek projektif doğru $\mathbf{P}$ 'ye genişler. Birim çember $\mathbf{U}$ üzerinde S verilsin. $\pi : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{U}$ dönüşümünde $\pi(X)$, S ile $X \in \mathbf{P}$ 'yi birleştiren doğrunun $\mathbf{U}$ ile ikinci kesişimi olsun. Özellikle sonsuzdaki noktanın görüntüsü, S 'den gerçek eksene paralel doğrunun çemberle diğer kesişimidir. O zaman $g = \pi \circ \sigma \circ \pi^{-1}$ ile verilen $g : \mathbf{U} \rightarrow \mathbf{U}$, çemberin projektif bir involüsyonudur.

σ , 0 ile ∞ 'yi sabit tuttuğundan g 'nin sabit noktalarının sayısal karşılıkları $-s, -\bar{s}$ 'dir. Projektif geometrinin klasik bir sonucuna göre her $P \in \mathbf{U}$ için $P, g(P)$ 'deki teğetler, g 'nin sabit noktalarından geçen $\mathbf{l}$ doğrusu üzerinde kesişir. T, P ile $P' = g(P)$ 'deki teğetlerin kesişimi olduğundan $\mathbf{l}$ üzerindedir. Buradan ST 'nin orta noktasının salt sanal eksen üzerinde olduğu açıktır.

$x \in \mathbb{R}$ için $\pi(X)$ 'in $(x - s)/(1 - xs)$ ile, $p \in \mathbf{U}$ için $g(P)$ 'nin $(\lambda - p)/(1 - \lambda p)$ ile temsil edildiği kolayca hesaplanır; burada $\lambda = -2s/(1 + s^2)$ 'dir. λ gerçektir veya sonsuzdur ve g 'nin sabit noktalarındaki teğetlerin kesişimini temsil eder. Nitekim Grivaux'nun (*) bağıntısı, λ 'nın $\mathcal{E}_{pp'}$ 'yi sağladığını söyler; yani PP' doğrusu her zaman Λ 'dan geçer. Böylece g , her P 'yi ΛP doğrusunun çemberle diğer kesişimine götürerek elde edilir. İnvölüsyonun “ekseni” $\mathbf{l}$, Λ 'nın $\mathbf{U}$ 'ya göre kutup doğrusudur.

Konik involüsyonlarının ayrıntılı incelemesi için H. F. Baker, *An Introduction to Plane Geometry* (Cambridge University Press, 1943), Bölüm IX veya M. Berger, *Geometry II* (Springer, 1987), §16.3'e bakınız. Berger, yukarıdaki Λ 'yı g involüsyonunun “Frégier noktası” olarak adlandırır.

Adları yukarıda geçenler dâhil 26 okur ve problemi önerenler tarafından çözülmüştür.

E3469. Bir Konik Arayan Altı Ağırlık Merkezi

American Mathematical Monthly **100** (1993), 875

Kaynak PDF s. 69–70.

E3469 [1991, 955]. Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.

P , ABC üçgeninin içinde bir nokta olsun; AP, BP, CP doğruları BC, CA, AB doğrularını sırasıyla D, E, F noktalarında kessin. $PBD, PDC, PCE, PEA, PAF, PFB$ üçgenlerinin ağırlık merkezlerinin bir konik üzerinde bulunması için gerek ve yeter koşulun, P 'nin üçgenin en az bir kenarortayı üzerinde bulunması olduğunu ispatlayınız.

Problemin yeniden ifadesi ve gösterimin belirlenmesi. P merkezli, $3 : 2$ oranlı homoteti uygulanınca, üçgenlerin ağırlık merkezlerinin bir konik üzerinde olması ile AF, FB, BD, DC, CE, EA orta noktalarının bir konik üzerinde olması eşdeğerdir. x, y, z, u, v, w , sırasıyla bu parçaların uzunluklarının yarıları olsun. Orta noktaları sırasıyla 1, 2, 3, 4, 5, 6 ile gösterelim.^[E015]

I. Çözüm: Victor Prasolov, Independent University of Moscow, Moscow, Rusya. Carnot teoremine göre (Howard W. Eves, *A survey of geometry*, gözden geçirilmiş baskı, Allyn ve Bacon, 1972, s. 256, 262), altı ağırlık merkezinin bir konik üzerinde olması için gerek ve yeter koşul

$$x(2x + y)z(2z + u)v(2v + w) = w(2w + v)u(2u + z)y(2y + x). \quad (1)$$

Ceva teoreminden $xzv = wuy$ olduğundan (1), $xzw + zvy + vxu - (wux + uyv + ywz) = 0$, yani $(x - y)(z - u)(w - v) = 0$ biçimine indirgenir. Bu koşul P 'nin bir kenarortay üzerinde olmasına karşılık gelir.

II. Çözüm: Albert Nijenhuis, Seattle, WA. Pascal teoremine göre 1, 2, 3, 4, 5, 6'nın bir konik üzerinde olması için gerek ve yeter koşul $Q = AB \cap 45$, $R = BC \cap 61$, $S = CA \cap 23$ noktalarının doğrusal olmasıdır. Bu noktalardan bazılarının sonsuzda olması gerçek bir güçlük yaratmaz; örneğin $AB \parallel 45$ ise AQ/QB yerine -1 kullanılır.

Menelaus teoremiyle

$$\begin{aligned} \frac{AQ}{QB} \cdot \frac{2z+u}{u} \cdot \frac{v}{2w+v} &= -1, & \frac{BR}{RC} \cdot \frac{2v+w}{w} \cdot \frac{x}{2y+x} &= -1, \\ \frac{CS}{SA} \cdot \frac{2x+y}{y} \cdot \frac{z}{2u+z} &= -1. \end{aligned}$$

elde edilir. Bunları çarpıp birinci çözümdeki gibi Ceva teoremini kullanınca

$$\frac{AQ}{QB} \cdot \frac{BR}{RC} \cdot \frac{CS}{SA} = -1$$

eşitliğinin ancak ve ancak $(x-y)(z-u)(w-v) = 0$ iken sağlandığı görülür. Böylece Q, R, S 'nin doğrusal olması, dolayısıyla altı noktanın bir konik üzerinde bulunması, P 'nin bir kenarortay üzerinde olmasına denktir.

Açıklamalar: Neela Lakshmanan, University of Scranton, Scranton, PA. P 'nin üçgen içinde olması koşulu gevşetilebilir: üçgenin hiçbir kenar doğrusu üzerinde olmaması yeterlidir.

Sonuç yalnızca orta noktalar için değil, altı parçanın her birini aynı sabit oranda bölen noktalar için de doğrudur. Üçgenin kenarları üzerinde 1, 2, 3, 4, 5, 6 noktaları

$$A1 : 1F = F2 : 2B = B3 : 3D = D4 : 4C = C5 : 5E = E6 : 6A,$$

ile tanımlanırsa, bu altı nokta ancak ve ancak P bir kenarortay üzerinde olduğunda bir konik üzerinde bulunur. Ayrıca P iç noktaysa 1, 2, 3, 4, 5, 6 altıgeni dışbükeydir ve alanı en büyük değerini P , ABC 'nin ağırlık merkezi olduğunda alır.

Editör notu (özgün dergi). Çözüm sahiplerinin çoğu Carnot veya Pascal teoremini homojen koordinatlar ve analitik yöntemlerle desteklemiştir. Diğerleri genel bir koniğin altı katsayısı üzerindeki koşullarla doğrudan çalışmıştır.

Diğer çözenler: F. Bellot ve M. A. López (İspanya), R. J. Chapman (U.K.), J. Fukuta (Japonya), H. Kappus (İsviçre), O. P. Lossers (Hollanda), I. A. Sakmar (Türkiye), Anchorage Math Solutions Group, problemi öneren. Bir yanlış çözüm alınmıştır.

Monthly Problemlerine Verilen Çözümler

4057. Euler Doğrusu

American Mathematical Monthly **51** (1944), 168

Kaynak PDF s. 72.

4057 [1942, 616]. Öneren: J. R. Musselman, Western Reserve University.

$B_1, B_2, B_3, A_1A_2A_3$ üçgeninin köşelerinin çevrel merkez O 'ya göre simetrikleri; C_1, C_2, C_3 ise A_i köşelerinin karşılardaki kenarların orta dikmelerine göre yansımaları olsun. OB_1C_1, OB_2C_2 ve OB_3C_3 çemberlerinin bir P noktasında kesiştiği bilinmektedir. P 'nin $A_1A_2A_3$ üçgeninin Euler doğrusu üzerinde olduğunu ve O 'nun PD 'nin orta noktası olduğunu gösteriniz; burada D , üçgenin diklik merkezi H 'nin çevrel çembere göre evirtiğidir.

Çözüm: Hüseyin Demir, Columbia Üniversitesi. A_iC_i doğrularının oluşturduğu üçgen $G_1G_2G_3$ olsun. Bu durumda $A_1A_2A_3$ onun orta noktalar üçgenidir; $A_1A_2A_3$ 'ün çevrel çemberi (O), $G_1G_2G_3$ 'ün dokuz nokta çemberidir; G_iC_i doğruları yükseklikleridir. Diklik merkezi H' , H 'nin O 'ya göre simetriğidir ve C_iB_i doğruları H' 'de kesişir. (OB_iC_i) çemberinin OH' , yani OH doğrusunu yeniden kestiği nokta P olsun. $H'O \cdot H'P = H'C_i \cdot H'B_i = H'C_j \cdot H'B_j$ olduğundan (OB_iC_i) çemberleri P 'de yeniden kesişir. (OB_iC_i) çemberinin (O)'ya göre evirtiği B_iC_i doğrusudur; dolayısıyla $OH' \cdot OP = OC_i^2 = R^2$ 'dir. $OH \cdot OD = R^2$ ve $OH = H'O$ olduğundan $OD = PO$ olmalıdır.

Diğer çözenler: O merkezli, $-R^2$ kuvvetli evirtim kullanarak kısa bir ispat veren H. Eves.

E1107. Bir Dörtüzlüyle İlişkili Düzlem Demeti

American Mathematical Monthly **61** (1954), 643

Kaynak PDF s. 73.

E1107 [1954, 194]. Öneren: Victor Thébault, Tennie, Sarthe, Fransa.

$ABCD$ dörtüzlüsünün AB, AC, AD ayrıtları üzerinde $AB = nAM, AC = (n+1)AN, AD = (n+2)AP$ olacak biçimde M, N, P noktaları işaretlenmiştir. n değişirken MNP düzleminin sabit bir doğru içerdiğini gösteriniz.

I. Çözüm: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye. Verilen bağıntılardan $[M]$ ve $[P]$ nokta dizilerinin projektif olduğu açıktır. Ancak A kendisine karşılık geldiğinden bu projektiflik bir perspektifliktir. Dolayısıyla MP doğrusu sabit bir P' noktasından geçer. Benzer biçimde MN doğrusu sabit bir N' noktasından geçer. Böylece MNP düzlemi sabit $P'N'$ doğrusunu içerir.

E1142. Bir Dik Dairesel Koninin Yarı Tepe Açısı*American Mathematical Monthly* **62** (1955), 444

Kaynak PDF s. 73.

*E1142 [1954, 711]. Öneren: M. S. Klamkin, Polytechnic Institute of Brooklyn, N. Y.**Üç ana doğrusu birbiriyle $2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ açıları yapan bir dik dairesel koninin yarı tepe açısını bulunuz.*Demir aşağıdaki eşdeğer yanıtı vermiştir; sayısal çarpan bu baskıda düzeltilmiştir:^[E017]

$$\sin^2 \phi = - \frac{4 \sin^2 \alpha \sin^2 \beta \sin^2 \gamma}{\begin{vmatrix} 0 & \sin \alpha & \sin \beta & \sin \gamma \\ \sin \alpha & 0 & \sin \gamma & \sin \beta \\ \sin \beta & \sin \gamma & 0 & \sin \alpha \\ \sin \gamma & \sin \beta & \sin \alpha & 0 \end{vmatrix}}.$$

E1148. Alanları Eşit İki Üçgen*American Mathematical Monthly* **62** (1955), 495

Kaynak PDF s. 74.

E1148 [1955, 40]. Öneren: Victor Thébault, Tennie, Sarthe, Fransa. *a, b, c , ABC üçgeninin sırasıyla BC, CA, AB kenarları üzerinde herhangi üç nokta; A', B', C' ise A, B, C köşelerinin sırasıyla bc, ca, ab parçalarının orta noktalarına göre yansımaları olsun. abc ve $A'B'C'$ üçgenlerinin alanlarının eşit olduğunu gösteriniz.**Çözüm: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye.* a', b', c', a, b, c noktalarının sırasıyla BC, CA, AB kenarlarının orta noktalarına göre yansımaları olsun. Bilinen bir özelliğe göre abc ve $a'b'c'$ eş alanlı olduğundan, $a'b'c'$ ile $A'B'C'$ 'nin eş alanlı olduğunu ispatlamak yeterlidir. Şu bağıntılardan

$$\overrightarrow{aB'} = \overrightarrow{Bc} = \overrightarrow{c'A}, \quad \overrightarrow{aC'} = \overrightarrow{Cb} = \overrightarrow{b'A}$$

 $\overrightarrow{b'C'} = \overrightarrow{B'C'}$ elde edilir. Benzer biçimde $\overrightarrow{c'A'} = \overrightarrow{C'A'}$, $\overrightarrow{a'b'} = \overrightarrow{A'B'}$ dir; dolayısıyla $a'b'c'$ ile $A'B'C'$ üçgenleri aslında eştir.*Diğer çözenler:* W. B. Carver, A. R. Hyde, M. S. Klamkin, D. C. B. Marsh, C. S. Ogilvy, C. F. Pinzka, Roscoe Woods ve problemi öneren.*Pinzka, R. A. Johnson'ın Modern Geometry (1929), s. 80'deki iki benzer sonucuna dikkat çekmiştir. Carver, Hyde, Ogilvy ve Woods, eğik koordinatlar kullanarak basit çözümler vermiştir. Editör notu (özgün dergi). Yukarıdaki çözüm, $a'b'c', A'B'C'$ üçgenlerinin eş olmanın yanı sıra homotetik olduğunu da gösterir. Buna göre a, b, c bir L doğrusu üzerinde ise A', B', C' de L 'nin karşılıklı keseneine paralel bir L' doğrusu üzerindedir. Dolayısıyla L, ABC üçgeninin bir Simson doğrusu ise L ile L' birbirine diktir.*

E1166. Bir Daire Parçasındaki Çember Zinciri*American Mathematical Monthly* **63** (1956), 42

Kaynak PDF s. 75.

E1166 [1955, 364]. Öneren: Leon Bankoff, Los Angeles, Calif.

DE, verilen bir (O) çemberinin AB çapına dik değişken bir kiriş olsun. Küçük DEB daire parçasına çizilebilen en büyük (ω_0) çemberi, DE kirisine C'de değmektedir. (ω_1) çemberi (ω_0), (O) ve DC'ye; başka bir (ω_2) çemberi de (ω_1), (O) ve DC'ye teğettir. (ω_2) çemberinin yarıçapını en büyük yapan BC/CA oranını bulunuz.

Çözüm: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye. (O) ve (ω_i) çemberlerinin yarıçaplarını sırasıyla R ve r_i ile gösterelim. (ω_1), (ω_2) çemberleri CD'ye sırasıyla C_1, C_2 'de değsin. Kolayca

$$CC_1 = 2\sqrt{r_0r_1}, \quad C_1C_2 = 2\sqrt{r_1r_2}$$

elde edilir. Hipotenüsleri $O\omega_1 = R - r_1$, $O\omega_2 = R - r_2$ olan dik üçgenlerden

$$(1) \quad (R - 2r_0 + r_1)^2 + 4r_0r_1 = (R - r_1)^2,$$

$$(2) \quad (R - 2r_0 + r_2)^2 + 4(\sqrt{r_0r_1} + \sqrt{r_1r_2})^2 = (R - r_2)^2.$$

bağıntıları elde edilir. (1)'den elde edilen

$$r_1 = r_0(R - r_0)/R,$$

değeri (2)'de yerine konursa

$$r_2 = (R - r_0)^2 r_0 / (R + r_0)^2.$$

bulunur. Şimdi $k = BC/CA = r_0/(R - r_0)$ yazıp maksimum için türev testini uygulayarak

$$k = (\sqrt{5} - 1)/4$$

bulunur.

Diğer çözenler: G. B. Charlesworth, Walter Guber, A. R. Hyde, R. B. Plymale ve problemi öneren. Bu çözümlerden bazıları problemdeki şeklin yanlış yorumlanmasına dayanıyordu.

Problemi öneren, sorunun (ω_2) çemberini bir çizimde en belirgin biçimde gösterme çabasından doğduğunu belirtmiştir. Ayrıca şu ilginç bağlantılı özelliklere dikkat çekmiştir:

1. (ω_0) ve (ω_1) çemberleri C ile O çakıştığında en büyük olur. Buna karşılık (ω_2), $BC/CA = (\sqrt{5} - 1)/4$ olduğunda en büyüktür. Bunun beklenmedik sonucu şudur: CB, çapı AC olan çembere çizilmiş düzgün bir ongenin kenarıdır.
2. $r_{2(\max)} = r_1/2$.
3. $r_n = 2AB \cos^2 u / [\tan^n(u/2) + \cot^n(u/2)]^2$; burada u, ABD açısıdır (Victor Thébault tarafından problemi önerene bildirilmiştir).
4. AC ve CB rasyonel ise r_n de rasyoneldir.

E1687. Menelaus Teoreminin Bir Uygulaması

American Mathematical Monthly **72** (1965), 425

Kaynak PDF s. 76–77.

E1687 [1964, 430]. Öneren: Daniel Pedoe, Purdue University.

UVW bir eşkenar üçgen; A, B, C, sırasıyla VW, WU, UV kenarlarının orta noktaları olsun. A', VW doğrusu üzerinde; B', WU doğrusu üzerinde; C' ise UV doğrusu üzerinde herhangi birer noktadır. P, BC ile B'C' 'nin; Q, CA ile C'A' 'nin; R, AB ile A'B' 'nin kesişimi ise şunları ispatlayınız: (1) A'P, B'Q, C'R doğruları bir noktada kesişir; (2) uygun bir işaret kuralıyla bu kesişim noktasının ABC üçgenine göre alan koordinatları $(AA')^{-1} : (BB')^{-1} : (CC')^{-1}$ 'dir.

Afin bir izdüşüm yardımıyla hem (1)'i hem (2)'yi; genel bir izdüşüm yardımıyla da (1)'i genelleyiniz.

I. Çözüm: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye. (1) Önce $BC = CA = AB = 1$ alalım ve VW, WU, UV ile $AA' = a', BB' = b', CC' = c'$ parçalarını yönlü parçalar olarak düşünelim. P, Q, R 'nin $A'B'C'$ üçgeninin kenarlarını böldüğü oranlar λ, μ, ν olsun. Menelaus teoremini $UC'B', CB$ çiftine uygulayarak $(PB'/PC') \cdot (CC'/CU) \cdot (BU/BB') = 1$, yani $\lambda(-c')(1/b') = 1$ elde ederiz; dolayısıyla $\lambda = -b'/c'$ 'dir. Diğer iki çifti de ele alırsak $\mu = -c'/a'$ ve $\nu = -a'/b'$ bulunur. Böylece $\lambda\mu\nu = -1$ olur; bu da doğruların bir T noktasında kesiştiğini gösterir.

(2) T 'nin $A'B'C'$ ve ABC üçgenlerindeki alan koordinatlarını sırasıyla $(l' m' n')$ ve $(l m n)$ matrisleriyle gösterelim. $l' : n' = -\mu$, $m' : l' = -\nu$ bağıntılarından

$$(\alpha) \quad l' : m' : n' = l' : \frac{a'}{b'}l' : \frac{a'}{c'}l' = \frac{1}{a'} : \frac{1}{b'} : \frac{1}{c'}.$$

elde edilir. $l : m : n = (l m n)$ 'yi bulmak için önce şu gösterimi kullanalım:

$$LMN/XYZ = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix}$$

Burada satırlar, L, M, N 'nin XYZ üçgenindeki alan koordinatlarıdır.^[E016] Şu bağıntılar geçerlidir:

$$(\beta) \quad A'B'C'/UVW = \begin{bmatrix} 0 & 1-a' & 1+a' \\ 1+b' & 0 & 1-b' \\ 1-c' & 1+c' & 0 \end{bmatrix}, \quad UVW/ABC = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

Ayrıca $T/A'B'C' = (1/a' \ 1/b' \ 1/c')$ 'dir. Koordinatlar tutarlı biçimde normalize edildiğinde şu genel özdeşliği görmek güç değildir:

$$(\gamma) \quad T/ABC = (T/A'B'C') \cdot (A'B'C'/UVW) \cdot (UVW/ABC).$$

(α) ve (β) , (γ) 'da yerine konursa

$$\begin{aligned} (l m n) &= (l' m' n') \begin{bmatrix} 0 & 1-a' & 1+a' \\ 1+b' & 0 & 1-b' \\ 1-c' & 1+c' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \\ &= (1/a' \ 1/b' \ 1/c') \begin{bmatrix} 2 & 2a' & -2a' \\ -2b' & 2 & 2b' \\ 2c' & -2c' & 2 \end{bmatrix} = (2/a' \ 2/b' \ 2/c'), \end{aligned}$$

$$(\delta) \quad T/ABC = l : m : n = 1/a' : 1/b' : 1/c' = (AA')^{-1} : (BB')^{-1} : (CC')^{-1}.$$

(3) Afin bir izdüşüm, UVW 'yi herhangi bir üçgene; ABC 'yi ise bu üçgenin orta noktalar üçgenine dönüştürür. Doğruların bir noktada kesişmesi korunur.

Afin dönüşümler, doğru parçalarının oranlarını ve alan oranlarını korur. Bu nedenle $AA'/1$, $BB'/1$, $CC'/1$ yerine sırasıyla AA'/VW , BB'/WU , CC'/UV yazıldığında (δ) şu biçimi alır:

$$T/ABC = \left(\frac{AA'}{VW} \right)^{-1} : \left(\frac{BB'}{WU} \right)^{-1} : \left(\frac{CC'}{UV} \right)^{-1}.$$

Genel bir izdüşüm altında perspektif UVW ve ABC üçgenleri yine perspektif üçgenlere dönüşür. Böylece herhangi bir UVW üçgeni ve onun kenar doğruları üzerine yerleştirilmiş, AU, BV, CW doğruları bir noktada kesişen ABC ile $A'B'C'$ üçgenleri için genelleme elde edilir. Ayrıca yukarıdaki afin durumda T noktası, ABC ve $A'B'C'$ üçgenlerinde aynı alan koordinatlarına sahiptir.^[E016]

Diğer çözenler: (1)'in genel izdüşümlere genellemesinin 1909 Mathematical Tripos, I. Kısım'da bir problem olarak yer aldığını belirten problem önereni.

E2122. Napolyon Teoreminin Bir Genişletmesi

American Mathematical Monthly **76** (1969), 833

Kaynak PDF s. 78.

E2122 [1968, 898]. Öneren: Stanley Rabinowitz, Far Rockaway, N. Y.

D, E, F , eşkenar olmayan bir ABC üçgeninin düzleminde, BDC, CEA, AFB üçgenleri yön koruyan benzerlikle birbirine dönüşecek biçimde seçilmiş noktalar olsun. DEF üçgeninin eşkenar olması için gerek ve yeter koşulun bu üç üçgenin, tabanları ABC 'nin birer kenarı ve taban açıları 30° olan ikizkenar üçgenler olması olduğunu ispatlayınız. (Yeterlilik yönü, Napolyon teoremi, bilinmektedir. Bkz. *Mathematics Magazine*, 1966, s. 166.)

Çözüm: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye. Aşağıdaki lemma kolayca ispatlanır:

Lemma. Karmaşık düzlemde köşeleri a, b, c olan bir üçgenin eşkenar olması için gerek ve yeter koşul $a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab = 0$ olmasıdır.

ABC, DEF üçgenlerinin köşelerinin karmaşık koordinatları sırasıyla a, b, c ve d, e, f olsun. DBC, ECA, FAB üçgenleri yön koruyan benzerlikle birbirine dönüştüğünden, bir t için

$$d = b + (c - b)t, \quad e = c + (a - c)t, \quad f = a + (b - a)t.$$

yazılır. $U = d^2 + e^2 + f^2 - ef - fd - de$ ifadesini oluşturursak

$$U = (a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab)(3t^2 - 3t + 1).$$

bulunur. ABC eşkenar ise lemmaya göre $U = 0$ 'dır ve yine lemmaya göre DEF eşkenardır. Şimdi DEF 'nin eşkenar olduğunu, yani lemmaya göre $U = 0$ olduğunu varsayalım. ABC eşkenar kabul edilmediğinden $3t^2 - 3t + 1 = 0$ olmalıdır. Bu denklemi çözerek $t = \frac{1}{3}\sqrt{3} \operatorname{cis}(\pm\pi/6)$ buluruz; bu da iddiayı ispatlar.

Diğer çözenler: Walter Bluger, Slobodan Ćuk (Yugoslavya), M. G. Greening (Avustralya), L. Kuipers, C. F. Merrill ve problemi öneren. Jordi Dou (İspanya), çözümün tekliğini göstermiştir. A. W. Walker, Wong'un *American Mathematical Monthly*, 48 (1941), s. 530'daki makalesinde verilen daha zayıf bir sonuca değinmiştir.

E2398. Johnson'ın Bildiği Bir Sonuç

American Mathematical Monthly **81** (1974), 89

Kaynak PDF s. 79.

E2398 [1973, 202]. Öneren: C. W. Dodge, *University of Maine at Orono*.

Bir paralelkenarın köşegenlerinin kesişim noktasının, herhangi bir köşenin diğer üç köşenin oluşturduğu üçgene göre pedal çemberi üzerinde olduğunu ispatlayınız.

I. Çözüm: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye. Merkezi I olan bir $ABCD$ paralelkenarı verilsin. D 'nin ABC üçgeninin BC, CA, AB kenarlarına dik izdüşümleri sırasıyla A', B', C' olsun. $\angle D = \pi/2$ ise pedal üçgeni, I noktasını içeren AC Simson doğrusuna yozlaşır.

İspatı $\angle D > \pi/2$, $A' \in BC$ ve $C' \in AB$ olduğu durum için verelim. Diğer durumlarda benzer ispatlar yapılabilir. Yalnızca $\angle C'A'I = \angle AB'C'$ olduğunu göstermek yeterlidir. Bu eşitliği elde ederken $AC'B'D$ ve $DC'BA'$ dörtgenlerinin çembersel, DIA' üçgeninin ise ikizkenar olmasını kullanırız. Şöyle ki

$$\begin{aligned}\angle C'A'I &= \angle C'A'D - \angle IA'D = \angle C'BD - \angle IDA' = \angle A'DC \\ &= \pi/2 - \angle C = \pi/2 - \angle A = \angle ADC' = \angle AB'C' .\end{aligned}$$

II. Çözüm: A. W. Walker, Toronto, Kanada. D , ABC üçgeninin A köşesinin BC kenarının orta noktası M 'ye göre yansıması olsun. BAC üçgeni A 'da dik ise D 'nin bu üçgene göre pedal "çemberi" BC doğrusudur. Aksi durumda, ABC çemberine B ve C 'de çizilen teğetlerin kesişimi E olsun. BD ile BE , ABC açısında izogonal eşlenik doğrulardır; benzer biçimde CD ile CE de BCA açısında izogonal eşleniktir. Dolayısıyla D ve E , ABC üçgeninde izogonal eşlenik noktalardır. Bu nedenle (R. A. Johnson, *Modern Geometry*, s. 155), E 'nin BC üzerindeki izdüşümü M 'den geçen ortak bir pedal çemberine sahiptirler.

Açıklama. E2398 şu teoremin özel bir durumudur: Düzlemde, köşeleri bir diklik sistemi oluşturmayan bir $ABCD$ dörtgeni için, bu dört noktadan geçen dik hiperbolün merkezinden geçen dört pedal çemberi (ve dört dokuz nokta çemberi) vardır (Johnson, s. 242).

Diğer çözenler: Günter Bach (Almanya), Leon Bankoff, Howard Eves, Michael Goldberg, M. G. Greening (Avustralya), Lew Kowarski, L. Kuipers ve problemi öneren.

Mathematics Magazine için Önerilen Problemler

Hüseyin Demir'in hazırladığı altmış üç problem önerisi aşağıda verilmiştir. Kronolojik kaynak listesi 13. bölümdedir. Tarihsel çözümlerde belirtilmiş düzeltmeler ve yeni editöryal düzeltmeler, Ek A'da açıklanır. İlgili çözümler, tarihsel yorumlar ve editöryal açıklamalar Bölüm 7'de aynı dizgi düzeniyle verilmiştir.

208

Mathematics Magazine **28** (1954–1955), 27

Kaynak PDF s. 81.

Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye

Aşağıdaki trigonometrik ifadelerin değerlerini sayısal tablo kullanmadan hesaplayınız:

$$A = \cos 5^\circ \cos 10^\circ \cos 15^\circ \cdots \cos 75^\circ \cos 80^\circ \cos 85^\circ,$$

$$B = \cos 1^\circ \cos 3^\circ \cos 5^\circ \cdots \cos 85^\circ \cos 87^\circ \cos 89^\circ,$$

$$C = \cos 4^\circ \cos 8^\circ \cos 12^\circ \cdots \cos 80^\circ \cos 84^\circ \cos 88^\circ.$$

217

Mathematics Magazine **28** (1954–1955), 103

Kaynak PDF s. 82.

Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye

Dışbükey $A_1A_2A_3A_4$ dörtgeninin bir çembere içten çizilebilmesi için gerek ve yeter koşulun

$$D = \begin{vmatrix} A_1A_1 & A_1A_2 & A_1A_3 & A_1A_4 \\ A_2A_1 & A_2A_2 & A_2A_3 & A_2A_4 \\ A_3A_1 & A_3A_2 & A_3A_3 & A_3A_4 \\ A_4A_1 & A_4A_2 & A_4A_3 & A_4A_4 \end{vmatrix} = 0,$$

olduğunu ispatlayınız. Burada $j > i$ için A_iA_j , A_i ile A_j köşeleri arasındaki uzaklığı gösterir ve $A_jA_i = -A_iA_j$ olarak tanımlanır.

227

Mathematics Magazine **28** (1954–1955), 160

Kaynak PDF s. 82.

Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye

A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 , uzunlukları sırasıyla l_1, l_2, l_3 ve ağırlıkları W_1, W_2, W_3 olan üç çubuk olsun. B_1, B_2, B_3 uçları yatay bir yüzey üzerinde dururken diğer uçlar A_1, A_2, A_3 , sırasıyla A_3B_3, A_1B_1, A_2B_2 çubuklarına dayanmaktadır. B_1, B_2, B_3 'teki R_1, R_2, R_3 tepki kuvvetlerini bulunuz.

234

Mathematics Magazine **28** (1954–1955), 234

Kaynak PDF s. 82.

Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye

$m \times n$ nokta içeren, $m \geq n$ olmak üzere m satırlı ve n sütunlu dikdörtgensel bir kafes verilsin. Köşeleri kafes noktalarında bulunan (a) karelerin, (b) dikdörtgenlerin toplam sayısını bulunuz.

242

Mathematics Magazine **28** (1954–1955), 284

Kaynak PDF s. 83.

Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye

A', B', C' , ABC üçgeninin kenarlarını k oranında bölen noktalar; A'', B'', C'' ise $A'B'C'$ üçgeninin kenarlarını $1/k$ oranında bölen noktalar olsun. $A''B''C''$ üçgeninin başlangıçtaki ABC üçgeniyle homotetik olduğunu ispatlayınız.

248

Mathematics Magazine **29** (1955–1956), 46

Kaynak PDF s. 83.

Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye

Γ_1 ve Γ_2 iki düzlem eğrisi olsun. Değişken bir t doğrusu, bu eğrileri M_1, M_2 noktalarında kessin ve bu noktalardaki t_1, t_2 teğetleri birbirine paralel olsun. Γ_1 ve Γ_2 'nin M_1, M_2 'deki eğrilik merkezleri C_1, C_2 'nin, t doğrusunun karakteristik noktası C ile aynı doğru üzerinde olduğunu ispatlayınız.

258

Mathematics Magazine **29** (1955–1956), 163

Kaynak PDF s. 83.

Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye

Bir çembere içten çizilmiş ABC üçgeni, AB ve AC doğrultuları sabit kalacak biçimde değişmektedir. Diklik merkezi H 'nin geometrik yerini bulunuz.

266

Mathematics Magazine **29** (1955–1956), 222

Kaynak PDF s. 83.

Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye

M ve M' , ABC üçgeninin çevrel çemberine göre birbirinin evirtiği olan noktalar olsun. Açılarının tanımlı olduğu durumlarda, yönlü açılar için 2π modülünde aşağıdaki bağıntıları ispatlayınız.^[E038]

$$\begin{aligned}\angle BMC + \angle BM'C &= 2\angle A, \\ \angle CMA + \angle CM'A &= 2\angle B, \\ \angle AMB + \angle AM'B &= 2\angle C.\end{aligned}$$

298

Mathematics Magazine **30** (1956–1957), 164

Kaynak PDF s. 84.

Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli Bölgesi, Türkiye

$y = f(x)$ eğrisi şu özelliklere sahip olsun:

- (a) $f(x) = f(-x)$;
- (b) $x > 0$ için $f'(x) > 0$;
- (c) $f''(x) > 0$.

Eğri, üzerindeki herhangi iki noktadan yerçekimi altında asıldığında başlangıçtaki biçimini koruyacak şekilde, (x, y) noktasındaki birim uzunluk başına ağırlık $w(x)$ 'i belirleyiniz.

304

Mathematics Magazine **30** (1956–1957), 223

Kaynak PDF s. 84.

Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli Bölgesi, Türkiye

$AB \neq AC$ olmak üzere, ABC üçgeni O çemberine içten çizilmiş olsun. A 'nın dış açıortayı O 'yu K 'de kessin. Merkezi K olan değişken bir çember, AB, AC 'yi sırasıyla E, F 'de kesmekte ve A, KEF üçgeninin içinde bulunmamaktadır. EF, BC 'ye yaklaşıırken EF ile BC 'nin kesişim noktası M 'nin limit konumu m 'yi bulunuz.

334

Mathematics Magazine **31** (1957–1958), 228

Kaynak PDF s. 84.

Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye

Bir sikloidin AM yayı, yuvarlanan $\Omega(a)$ çemberinin TM yayı ve taban doğrusu üzerindeki AT parçasıyla sınırlanan S alanı için en basit ifadeyi bulunuz.

349

Mathematics Magazine **32** (1958–1959), 47

Kaynak PDF s. 84.

Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye

$ABCD$, $AEBK$ ve $CEFG$ aynı yönelimli kareler ise B 'nin DF 'nin orta noktası olduğunu ispatlayınız.

372

Mathematics Magazine **32** (1958–1959), 220

Kaynak PDF s. 85.

Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye

Aşağıdaki özdeşliği ispatlayınız.^[E027]

$$\sin^2(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) = \sin^2 \theta_1 + \cdots + \sin^2 \theta_n + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sin \theta_i \sin \theta_j \cos(\theta_i + 2\theta_{i+1} + \cdots + 2\theta_{j-1} + \theta_j).$$

380

Mathematics Magazine **32** (1958–1959), 278

Kaynak PDF s. 85.

Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye

Aşağıdaki denklem sistemini çözünüz:

$$\begin{aligned} x(z - a) + u(x + u) &= 0, \\ y(x - b) + u(y + u) &= 0, \\ z(y - c) + u(z + u) &= 0, \end{aligned}$$

Burada $abc \neq 0$ ve $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = u^{-1}$ 'dir.

384

Mathematics Magazine **33** (1959–1960), 51

Kaynak PDF s. 85.

Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye^[E018]

$n \geq 2$ olmak üzere (a_{ij}) , her satırındaki elemanların toplamı 1 olan, $n \times n$ boyutlu tersinir bir gerçel matris olsun. Bu tür matrislerin tümünün sonsuz mertebeli bir grup oluşturduğunu ispatlayınız.^[E024]

398

Mathematics Magazine **33** (1959–1960), 165

Kaynak PDF s. 85.

Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye^[E018]

Bir denklemdeki gerçel katsayıların diğer denklemin kökleri olduğu

$$x^2 + y_1x + y_2 = 0, \quad y^2 + x_1y + x_2 = 0,$$

denklemlerinin köklerini belirleyiniz.

407

Mathematics Magazine **33** (1959–1960), 225

Kaynak PDF s. 86.

Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye

Bir küpün on iki ayrıtı, her birinin direnci bir ohm olan tellerden yapılmıştır. Küp bir elektrik devresine şu noktalardan bağlanmaktadır:

- (a) komşu iki köşeden;
- (b) bir yüzün karşılıklı iki köşesinden;
- (c) küpün karşılıklı iki köşesinden.

Hangi bağlantı en küçük direnci verir?

415

Mathematics Magazine **33** (1959–1960), 296

Kaynak PDF s. 86.

Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye

Aşağıdaki özdeşliği ispatlayınız:

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \cos(px) \sin((n-p)x) = 2^{n-1} \sin nx.$$

419

Mathematics Magazine **34** (1960–1961), 49

Kaynak PDF s. 86.

Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye

Düsey bir düzlemde, üzerindeki bir noktadan v_0 ilk hızıyla yerçekimi altında harekete bırakılan bir parçacığın yol boyunca süratinin sabit kaldığı yolu belirleyiniz. Sürtünme olmadığını varsayınız.

425

Mathematics Magazine **34** (1960–1961), 109

Kaynak PDF s. 86.

Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye

$n > 4$ ve $n-1, n+1$ ikiz asal sayılar ise $3\varphi(n) \leq n$ olduğunu ispatlayınız. Burada φ , Euler'in φ fonksiyonudur.^[E025]

437

Mathematics Magazine **34** (1961), 174

Kaynak PDF s. 86.

Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye

Şu önermeyi ispatlayınız veya çürütünüz: $(a+b)^n$ binom açılımındaki tek katsayıların sayısı $2^{s_2(n)}$ 'dir; burada $s_2(n)$, n 'nin ikili sayı sistemindeki yazılışında bulunan 1'lerin sayısıdır.^[E028]

440

Mathematics Magazine **34** (1961), 237

Kaynak PDF s. 87.

Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye

Her biri çevresindeki altı çembere teğet olacak biçimde yerleştirilmiş, yarıçapı r olan çemberler düşününüz. Küçük çemberlerden biriyle eş merkezli, yarıçapı R olan daha büyük bir çember çizilsin. Büyük çemberin içinde bütünüyle kalan küçük çemberlerin sayısı N ise aşağıdaki bağıntıyı ispatlayınız.^[E026]

$$N = 1 + 6n + 6 \sum_{p=1}^n \left\lfloor \frac{\sqrt{4\rho^2 - 3p^2} - p}{2} \right\rfloor, \quad \rho = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} - 1 \right), \quad n = \lfloor \rho \rfloor,$$

Burada $\lfloor \cdot \rfloor$ simgesi en büyük tam sayı fonksiyonunu gösterir.

458

Mathematics Magazine **34** (1961), 364

Kaynak PDF s. 87.

Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye

Bir öğrenci De Moivre teoremini yanlışlıkla şu biçimde kullanmıştır:

$$(\sin \alpha + i \cos \alpha)^n = \sin n\alpha + i \cos n\alpha.$$

Bu eşitlik, α 'nın hangi değerleri için her n tam sayısında geçerlidir?

472

Mathematics Magazine **35** (1962), 55

Kaynak PDF s. 87.

Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye

(C) , çember olmayan bir elips veya yarı eksenleri $a, b > 0$ olup $a^2 \neq 3b^2$, $b^2 \neq 3a^2$ koşullarını sağlayan bir hiperbol olsun. M , (C) üzerinde eksenler dışında değişken bir nokta olsun; eksenlerdeki değerler süreklilikle alınsın.^[E049] M 'nin asal eksene göre simetriği T , T 'deki teğet ise t olsun. M 'den t 'ye indirilen dikmenin, T 'yi koniğin merkezine birleştiren doğruyla kesişimi I olsun. M' , M 'nin I 'ya göre simetriği ise şunları ispatlayınız:

1. M' 'nin geometrik yeri, (C) ile aynı türden başka bir (C') koniğidir.
2. (C) ve (C') konikleri eş odaklıdır.

487

Mathematics Magazine **35** (1962), 186

Kaynak PDF s. 87.

Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisinin karekökünü bulunuz.

498

Mathematics Magazine **35** (1962), 309

Kaynak PDF s. 88.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

m, n pozitif tam sayılar; δ, D sırasıyla bunların en büyük ortak böleni ve en küçük ortak katı olsun. $d(n)$, n 'nin pozitif bölenlerinin sayısını; $\varphi(n)$ ise Euler fonksiyonunu göstermek üzere şu bağıntıları ispatlayınız:

$$d(m)d(n) = d(\delta)d(D), \quad (1)$$

$$\varphi(m)\varphi(n) = \varphi(\delta)\varphi(D). \quad (2)$$

509

Mathematics Magazine **36** (1963), 133

Kaynak PDF s. 88.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Aşağıdaki harfli işlem bulmacasını, α rakamını da kullanarak 11 tabanında çözünüz:

$$\begin{array}{rcccccc} & U & N & I & T & E & D \\ & S & T & A & T & E & S \\ \hline A & M & E & R & I & C & A \end{array}$$

517*Mathematics Magazine* **36** (1963), 197

Kaynak PDF s. 88.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Buradaki iki bölgenin ortak sınırı, doğru parçası olan MN kirişi değil, parabolün MN yayıdır.^[E030] Bir parabolün odağı F , doğrultmanı d olsun. M, N parabol üzerinde herhangi iki nokta ve M', N' bunların d üzerindeki dik izdüşümleri ise şu oranın sabit olduğunu gösteriniz:

$$\frac{\text{Alan } FMN}{\text{Alan } N'M'MN} = \text{Sabit.}$$

529*Mathematics Magazine* **36** (1963), 264

Kaynak PDF s. 89.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Bir sikloid (kardiyoid), bir doğru üzerinde kaymadan yuvarlanmaktadır. Değme noktasındaki eğrilik merkezinin geometrik yerinin bir çember (elips) üzerinde bulunduğunu ispatlayınız; bir yay (bir tam tur) boyunca çizilen kısmı belirleyiniz.^[E054]

537*Mathematics Magazine* **37** (1964), 55

Kaynak PDF s. 89.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Aynı çembere içten çizilmiş bir eşkenar üçgen ile bir karenin ortak alanının ekstremum olması için birbirlerine göre konumlarını belirleyiniz.

544*Mathematics Magazine* **37** (1964), 119

Kaynak PDF s. 89.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Aşağıdaki harfli işlem bulmacasını

$$ONE + TWO + SIX = NINE$$

10 tabanında, şu koşullar altında çözünüz:

(a) $ONE < TWO < SIX$;

(b) $2 \mid TWO$, $6 \mid SIX$, $9 \mid NINE$; burada $a \mid b$, “ a , b ’yi böler” anlamındadır.

563

Mathematics Magazine **37** (1964), 276

Kaynak PDF s. 89.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

A, B', A', B bir düzgün altıgenin ardışık dört köşesi olsun. M , çevrel çemberin uç noktaları hariç küçük $A'B'$ yayı üzerinde bulunsun.^[E057] MA, MB doğruları BB', AA' doğrularını sırasıyla E, F noktalarında kesiyorsa aşağıdaki eşitlikleri ispatlayınız:

$$\angle MEF = 3\angle MAF, \quad (a)$$

$$\angle MFE = 3\angle MBE. \quad (b)$$

572

Mathematics Magazine **38** (1965), 52

Kaynak PDF s. 90.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Başkan Kennedy'nin anısına. J. F. Kennedy, 22 Kasım 1963'te, yani ay-gün-yıl sırasıyla 11-22-1963 tarihinde öldürülmüştür. Aşağıdaki harfli işlem bulmacasını

$$JF \cdot (KEN + NEDY) = (11 + 22) \cdot 1963$$

onluk sayı sisteminde çözünüz.

587

Mathematics Magazine **38** (1965), 179

Kaynak PDF s. 90.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Aşağıdaki eşitsizliği ispatlayınız.^[E029]

$$\left(\frac{\theta + \sin \theta}{\pi}\right)^2 + \cos^4 \frac{\theta}{2} < 1, \quad 0 < |\theta| < \pi.$$

599

Mathematics Magazine **38** (1965), 241

Kaynak PDF s. 90.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

a, b, c , üç boyutlu uzayda herhangi üç vektör ise

$$a \times (b \times c), \quad b \times (c \times a), \quad c \times (a \times b)$$

vektörlerinin doğrusal bağımlı olduğunu gösteriniz.

600*Mathematics Magazine* **38** (1965), 317

Kaynak PDF s. 90.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

ABC üçgeninin alanı S ; içteğet ve dışteğet çemberlerinin değme noktalarının oluşturduğu üçgenlerin alanları sırasıyla T, T_a, T_b, T_c olsun. Şu bağıntıları gösteriniz:

$$T_a + T_b + T_c - T = 2S, \quad (1)$$

$$T_a^{-1} + T_b^{-1} + T_c^{-1} - T^{-1} = 0. \quad (2)$$

609*Mathematics Magazine* **39** (1966), 69

Kaynak PDF s. 91.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Aşağıdaki harfli işlem bulmacasını onluk sayı sisteminde çözünüz:

$$4 \cdot NINE = 9 \cdot FOUR.$$

628*Mathematics Magazine* **39** (1966), 246

Kaynak PDF s. 91.

Öneren: B. Suer ve Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Aşağıdaki harfli işlem bulmacasını

$$\text{COS}^2 + \text{SIN}^2 = \text{UNO}^2$$

onluk sayı sisteminde çözünüz.

639*Mathematics Magazine* **39** (1966), 306

Kaynak PDF s. 91.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

$ABCD$ dışbükey bir dörtgen, P ise AC ve BD köşegenlerinin kesişim noktası olsun. P 'nin $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ kenarlarına uzaklıkları sırasıyla x, y, z, t olsun. Şu eşitsizliği ispatlayınız:

$$x + y + z + t < \frac{3}{4}(a + b + c + d).$$

649

Mathematics Magazine **40** (1967), 100

Kaynak PDF s. 91–92.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Aşağıdaki harfli işlem bulmacasını

$$\begin{array}{rcccccc}
 & T & H & R & E & E \\
 + & & F & O & U & R \\
 \hline
 & S & E & V & E & N
 \end{array}$$

onluk sayı sisteminde şu koşullarla çözünüz:

- *THREE* sayısı 3'e bölünmez ve yazılışında 3 rakamı bulunmaz;
- *FOUR* sayısı 4'e bölünmez ve yazılışında 4 rakamı bulunmaz;
- *SEVEN* sayısı 7'ye bölünmez ve yazılışında 7 rakamı bulunmaz.

680

Mathematics Magazine **41** (1968), 42

Kaynak PDF s. 92.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

E bir elips; t', t'' ona çizilmiş değişken, birbirine paralel iki teğet olsun. t', t'' doğrularına ve E 'ye dıştan teğet bir C çemberi düşününüz. C 'nin merkezinin geometrik yerinin bir çember olduğunu gösteriniz.

724

Mathematics Magazine **42** (1969), 96

Kaynak PDF s. 92.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

ABC üçgeninin ($a \geq b \geq c$) içinden rastgele seçilen bir P noktasının, üçgenin kenarlarına uzaklıklarının bir üçgenin kenar uzunluklarını oluşturma olasılığını bulunuz.

738

Mathematics Magazine **42** (1969), 214

Kaynak PDF s. 92.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Tarihsel veriler (pozitif genişlikli bir nehir için tutarsızdır).^[E061] Kıyıları birbirine paralel doğrular olan bir nehirde, A bir kıyıda ve B diğer kıyıda bulunmakta, $AB = 72$ mil olmaktadır. Bir feribot doğrusal AB yolunu A 'dan B 'ye dört saatte, B 'den A 'ya dokuz saatte almaktadır. Feribotun durgun sudaki sürati $v = 13$ mil/saat ise akıntının hızı nedir?

743

Mathematics Magazine **42** (1969), 267

Kaynak PDF s. 93.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Tarihsel öneri (basıldığı biçimiyle yanlıştır).^[E062] $P, T \equiv A_1A_2A_3A_4$ düzgün dörtyüzlüsünün bir iç noktası olsun. $p_i = PA_i$ ve x_{ij} , P 'nin A_iA_j ayırıtına uzaklığı olmak üzere şu eşitsizliği ispatlayınız:

$$\sum_{i=1}^4 p_i \geq \frac{2\sqrt{3}}{3} \sum_{i<j} x_{ij},$$

Eşitlik ancak ve ancak P, T 'nin merkezi O 'da iken sağlanır.

756

Mathematics Magazine **43** (1970), 103

Kaynak PDF s. 93.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye^[E018]

Merkezden çıkan birbirine dik iki yarıçap vektörünün uzunlukları çarpımı sabit olan, çember dışındaki kapalı ve merkezî simetrik C eğrilerini belirleyiniz.

763

Mathematics Magazine **43** (1970), 166

Kaynak PDF s. 93.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Aşağıdaki eşitliği ispatlayınız:

$$\left(1 + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \cdots\right) = \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\right) \left(1 - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \frac{1}{4^6} + \cdots\right).$$

775

Mathematics Magazine **43** (1970), 278

Kaynak PDF s. 93.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Aşağıdaki eşitliği ispatlayınız:

$$\int_0^1 \sqrt[q]{1-x^p} dx = \int_0^1 \sqrt[p]{1-x^q} dx, \quad p, q > 0.$$

806

Mathematics Magazine **44** (1971), 228

Kaynak PDF s. 94.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

H, dik olmayan bir ABC ikizkenar üçgeninin diklik merkezi olsun. AH, BH, CH doğruları karşı kenarları sırasıyla D, E, F'de kessin. HBD, HDC, HCE, HEA, HAF, HFB dik üçgenlerinin içteğet merkezlerinin, yozlaşmış da olabilen bir konik üzerinde bulunduğunu ispatlayınız.^[E065]

839

Mathematics Magazine **45** (1972), 228

Kaynak PDF s. 94.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Her birinde aynı biçimde w beyaz ve r kırmızı top bulunan üç kutu verilsin. Birinci kutudan bir top alıp ikinciye, sonra ikinci kutudan bir top alıp üçüncüye, son olarak üçüncü kutudan bir top alıp birinciye koyunuz. Kutuların renk bakımından başlangıçtaki içeriklerine dönme olasılığını bulunuz.

859

Mathematics Magazine **46** (1973), 103

Kaynak PDF s. 94.

Öneren: B. Suer ve H. Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Aşağıdaki harfli işlem bulmacasını çözünüz:

$$THREE + NINE = EIGHT + FOUR.$$

916

Mathematics Magazine **47** (1974), 286

Kaynak PDF s. 94.

Öneren: H. Demir, ODTÜ, Ankara, Türkiye

XYZ, bir P noktasının ABC üçgenine göre pedal üçgeni olsun. Aşağıdaki koşulu sağlayan P'nin trilineer koordinatları x, y, z'yi bulunuz:

$$YA + AZ = ZB + BX = XC + CY.$$

963

Mathematics Magazine **49** (1976), 43

Kaynak PDF s. 95.

Öneren: Hüseyin Demir, Ankara, Türkiye

Kenarları a, b, c, d olup aşağıdaki koşulu sağlayan dışbükey dörtgenleri karakterize ediniz:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix} = 0.$$

998

Mathematics Magazine **49** (1976), 252

Kaynak PDF s. 95.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

İç açılış ortaylarının ayaklarının oluşturduğu üçgen dik olan bütün üçgenleri karakterize ediniz.

1197

Mathematics Magazine **57** (1984), 238

Kaynak PDF s. 95.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Yüksekliklerinin orta noktaları doğrusal olan üçgenleri karakterize ediniz.

1206

Mathematics Magazine **58** (1985), 46

Kaynak PDF s. 95.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

ABC , kenarları a, b, c ve yarı çevresi s olan bir üçgen olsun. BC kenarı, bu sırayla alınan $B = P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n = C$ noktalarıyla bölünsün. $i = 1, \dots, n$ için r_i , $AP_{i-1}P_i$ üçgeninin içteğet yarıçapı ise aşağıdaki eşitsizliği ispatlayınız:

$$r_1 + \dots + r_n < \frac{1}{2} h_a \ln \frac{s}{s-a},$$

Burada h_a , A köşesinden indirilen yüksekliğin uzunluğudur.

1211*Mathematics Magazine* **58** (1985), 111

Kaynak PDF s. 95.

*Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye**Bir elipsin sabit bir açı altında görüldüğü noktaların geometrik yerini bulunuz.***1298***Mathematics Magazine* **61** (1988), 195

Kaynak PDF s. 96.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

$ABCD$ dörtgeni bir çembere dıştan çizilmiş; AB, BC, CD, DA kenarlarının değme noktaları sırasıyla P, Q, R, S olsun. $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$ ve $p = |QS|$, $q = |PR|$ olmak üzere şu bağıntıyı gösteriniz:

$$\frac{ac}{p^2} = \frac{bd}{q^2}.$$

1305*Mathematics Magazine* **61** (1988), 261

Kaynak PDF s. 96.

Öneren: H. Demir ve C. Tezer, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

$P_0 = B, P_1, P_2, \dots, P_n = C$, ABC üçgeninin BC kenarı üzerinde bu sırayla alınmış noktalar olsun. r ve r_i , sırasıyla ABC ve $AP_{i-1}P_i$ üçgenlerinin içteğet yarıçaplarını; h ise ortak yüksekliklerini gösterebilir. Şu eşitliği ispatlayınız:

$$\prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{2r_i}{h}\right) = 1 - \frac{2r}{h}.$$

1327*Mathematics Magazine* **62** (1989), 274

Kaynak PDF s. 96.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

$PQRS$ dışbükey dörtgeninin PQ, QR, RS, SP kenarları, içteğet çemberine sırasıyla A, B, C, D noktalarında değsin. AB, BC, CD, DA parçalarının orta noktaları E, F, G, H olsun. PR, QS köşegenleri arasındaki açının, karşılıklı kenarların orta noktalarını birleştiren EG, FH doğruları arasındaki açıya eşit olduğunu gösteriniz.

1356*Mathematics Magazine* **63** (1990), 274

Kaynak PDF s. 96.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

P, Q , ABC üçgeninin BC kenarı üzerinde B, P, Q, C sırasıyla alınmış noktalar olsun. PAB, QAC üçgenlerinin çevrel çemberleri $M \neq A$ 'da; PAC, QAB üçgenlerinin çevrel çemberleri ise $N \neq A$ 'da yeniden kesişsin. Her iki farklı ikinci kesişimin de var olduğu varsayılmaktadır.^[E070] A, M, N 'nin doğrusal olması için gerek ve yeter koşulun P, Q noktalarının BC 'nin orta noktası A' 'ya göre simetrik olması olduğunu gösteriniz.

1371*Mathematics Magazine* **64** (1991), 132

Kaynak PDF s. 97.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

A, B, C bir üçgenin köşeleri, D, E, F ise sırasıyla BC, AC, AB kenarları üzerinde noktalar olsun. U, X, V, Y, W, Z , sırasıyla BD, DC, CE, EA, AF, FB parçalarının orta noktaları olsun. Şu ifadenin

$$\text{Alan}(\triangle UVW) + \text{Alan}(\triangle XYZ) - \frac{1}{2} \text{Alan}(\triangle DEF)$$

D, E, F 'den bağımsız bir sabit olduğunu ispatlayınız.

1377*Mathematics Magazine* **64** (1991), 197

Kaynak PDF s. 97.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

D, E, F , ABC üçgeninin sırasıyla BC, CA, AB kenar parçaları üzerinde bulunsun. U, X, V, Y, W, Z , sırasıyla BD, DC, CE, EA, AF, FB doğru parçalarının orta noktaları olsun. Alanlar için yazılan

$$|UVW| + |XYZ| - \frac{1}{2}|DEF|$$

ifadesinin sabit olduğunu gösteriniz.^[E071]

1405*Mathematics Magazine* **65** (1992), 265

Kaynak PDF s. 97.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Bir üçgenin farklı iki açısına içten teğet çizilen iki çember için, üçüncü köşeden çizilen ve kenarlarla çakışmayan teğetler üçüncü açının açortayına göre simetrik ise bu çemberlere izogonal ilişkili denir. Bir üçgenin farklı açılara içten teğet üç çember verildiğinde, oluşan üç çember çiftinden herhangi ikisi izogonal ilişkili ise üçüncü çiftin de izogonal ilişkili olduğunu ispatlayınız.

Önerilen Problemlerin Çözümleri

Bu bölüm, Mathematics Magazine için önerilen 63 problemin çözümlerini ve bunlarla ilişkili E1288 kaydını içerir. Tarihsel yorumlar, alternatif çözümler ve çözüm sahiplerinin listeleri korunmuştur. İngilizce ana baskıdaki editöryal düzeltmeler ilgili yerlerde belirtilmiş ve Ek A ile ilişkilendirilmiştir.

208

Mathematics Magazine **28** (1954–1955), 27

Kaynak PDF s. 98–99.

I. Çözüm: E. P. Starke, Rutgers University.

$$\begin{aligned}\sqrt{2}A &= \cos 5^\circ \cos 10^\circ \cdots \cos 40^\circ \sin 40^\circ \cdots \sin 10^\circ \sin 5^\circ \\ &= \frac{\sin 10^\circ \sin 20^\circ \cdots \sin 80^\circ}{2^8},\end{aligned}$$

İki kat açı formülü kullanılarak elde edilir. Aynı işlem yinelenirse

$$2^{12}\sqrt{2}A = \sin 20^\circ \sin 40^\circ \sin 60^\circ \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}k,$$

yazılır; burada

$$\begin{aligned}k &= \sin 20^\circ (\sin 40^\circ \sin 80^\circ) = \sin 20^\circ (\sin^2 60^\circ - \sin^2 20^\circ) \\ &= \frac{1}{4}(3 \sin 20^\circ - 4 \sin^3 20^\circ) = \frac{1}{4} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{8}.\end{aligned}$$

Böylece $A = 3 \cdot 2^{-33/2}$ olur. Benzer biçimde

$$B = \cos 1^\circ \sin 1^\circ \cos 3^\circ \sin 3^\circ \cdots \cos 43^\circ \sin 43^\circ \cos 45^\circ,$$

ve $2^{22}\sqrt{2}B = \sin 2^\circ \sin 6^\circ \sin 10^\circ \cdots \sin 86^\circ = C$ bulunur. $x = \cos 2^\circ \cos 6^\circ \cos 10^\circ \cdots \cos 86^\circ$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned}2^{22} \cdot 2^{22}\sqrt{2}B x &= \sin 4^\circ \sin 12^\circ \sin 20^\circ \cdots \sin 172^\circ \\ &= \sin 4^\circ \sin 8^\circ \sin 12^\circ \sin 16^\circ \cdots \sin 88^\circ = x,\end{aligned}$$

olduğundan $B = 2^{-89/2}$ ve $C = 2^{-22}$ elde edilir.

II. Çözüm: H. M. Feldman, Washington University, St. Louis, Missouri. Aşağıdaki özdeşliklerden^[E031]

$$\begin{aligned}x^{2n} - 1 &= (x^2 - 1)(x^{2n-2} + x^{2n-4} + \cdots + 1) \\ &= (x^2 - 1) \prod_{k=1}^{n-1} \left(x^2 - 2x \cos \frac{k\pi}{n} + 1 \right), \\ x^{2n+1} + 1 &= (x + 1)(x^{2n} - x^{2n-1} + \cdots + 1) \\ &= (x + 1) \prod_{k=1}^n \left(x^2 - 2x \cos \frac{(2k-1)\pi}{2n+1} + 1 \right),\end{aligned}$$

$x = \pm 1$ alınarak şu bağıntılar elde edilir:

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{2n} &= \prod_{k=1}^{n-1} \cos \frac{k\pi}{2n} = 2^{-n+1} \sqrt{n}, \\ \prod_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{n} &= 2^{-n+1} n, \\ \prod_{k=1}^n \sin \frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)} &= 2^{-n}, \\ \prod_{k=1}^n \cos \frac{(2k-1)\pi}{2(2n+1)} &= \prod_{k=1}^n \sin \frac{(2k-1)\pi}{2n+1} = 2^{-n} \sqrt{2n+1}.\end{aligned}$$

Bu bağıntılar yardımıyla

$$A = 2^{-17}(3\sqrt{2}), \quad B = 2^{-45}\sqrt{2}, \quad C = 2^{-22}.$$

Diğer çözenler: Leon Bankoff, Los Angeles, California; Kwan Moon (kısmen), Mississippi State College; George Mott, Republic Aviation Corp., New York; T. F. Mulcrone, St. Charles College, Louisiana; L. A. Ringenberg, Eastern Illinois State College; Chih-yi Wang, University of Minnesota; Hazel S. Wilson, Jacksonville State College, Alabama; ve problemi öneren.

217

Mathematics Magazine **28** (1954–1955), 103

Kaynak PDF s. 99.

Çözüm: H. M. Feldman, St. Louis, Missouri. $A_i A_i$ açıkça sıfır olduğundan determinant çarpık simetrik ve değeri şudur:^[E035]

$$D = [(A_1 A_2)(A_3 A_4) + (A_1 A_4)(A_2 A_3) - (A_1 A_3)(A_2 A_4)]^2.$$

Köşeli parantez içindeki ifadenin sıfır olması, dörtgenin bir çembere içten çizilebilmesi için gerek ve yeter koşuldur (Batlamyus teoremi).

Diğer çözenler: Ben K. Gold, Los Angeles City College; M. S. Klamkin, Polytechnic Institute of Brooklyn; E. P. Starke, Rutgers University; Chih-yi Wang, University of Minnesota; ve problemi öneren.

227: Dengedeki Kuvvetler

Mathematics Magazine **28** (1954–1955), 160; öneri: Ocak 1955

Kaynak PDF s. 100–101.

Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye

$A_1 B_1, A_2 B_2, A_3 B_3$, uzunlukları sırasıyla l_1, l_2, l_3 ve ağırlıkları W_1, W_2, W_3 olan üç çubuk olsun. B_1, B_2, B_3 uçları yatay bir yüzey üzerinde dururken diğer uçlar A_1, A_2, A_3 , sırasıyla $A_3 B_3, A_1 B_1, A_2 B_2$ çubuklarına dayanmaktadır. B_1, B_2, B_3 'teki R_1, R_2, R_3 tepki kuvvetlerini bulunuz.

Çözüm: problemi öneren. Çubukların A_1, A_2, A_3 uçlarındaki tepki kuvvetlerini r_1, r_2, r_3 ; $A_1 A_2, A_2 B_1$; $A_2 A_3, A_3 B_2$; $A_3 A_1, A_1 B_3$ uzunluklarını sırasıyla a_1, b_1 ; a_2, b_2 ; a_3, b_3 ile gösterelim.

Çubuklardan birinin, örneğin A_1B_1 'in dengesini ele alıp r_1, r_2, W_1, R_1 kuvvetlerinin B_1 'e göre momentlerini alırsak

$$\frac{1}{2}l_1W_1 - l_1r_1 + b_1r_2 = 0.$$

$b_i = k_i l_i$ ($i = 1, 2, 3$) yazıp diğer iki çubuğa karşılık gelen denklemleri de kullanarak, bilinmeyenleri r_1, r_2, r_3 olan sistemi elde ederiz:

$$r_1 - k_1r_2 = \frac{1}{2}W_1, \quad r_2 - k_2r_3 = \frac{1}{2}W_2, \quad r_3 - k_3r_1 = \frac{1}{2}W_3.$$

Bu sistemin determinanı

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -k_1 & 0 \\ 0 & 1 & -k_2 \\ -k_3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 - k_1k_2k_3,$$

olduğundan

$$\begin{aligned} r_1 &= (W_1 + k_1W_2 + k_1k_2W_3)/(2D), \\ r_2 &= (W_2 + k_2W_3 + k_2k_3W_1)/(2D), \\ r_3 &= (W_3 + k_3W_1 + k_3k_1W_2)/(2D), \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} R_1 &= W_1 - r_1 + r_2 \\ &= W_1 - \frac{W_1 + k_1W_2 + k_1k_2W_3}{2D} + \frac{W_2 + k_2W_3 + k_2k_3W_1}{2D}. \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece^[E032]

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{(1 + k_2k_3 - 2k_1k_2k_3)W_1 + (1 - k_1)W_2 + k_2(1 - k_1)W_3}{2(1 - k_1k_2k_3)}, \\ R_2 &= \frac{k_3(1 - k_2)W_1 + (1 + k_3k_1 - 2k_1k_2k_3)W_2 + (1 - k_2)W_3}{2(1 - k_1k_2k_3)}, \\ R_3 &= \frac{(1 - k_3)W_1 + k_1(1 - k_3)W_2 + (1 + k_1k_2 - 2k_1k_2k_3)W_3}{2(1 - k_1k_2k_3)}. \end{aligned}$$

Diğer çözenler: George R. Mott, Republic Aviation Company.

234

Mathematics Magazine **28** (1954–1955), 234

Kaynak PDF s. 102.

Çözüm: problemi öneren. İki tür kareyi ayıralım. Kenarları kafesin kenarlarına paralel olan kareye N -karesi, paralel olmayana L -karesi diyelim.

Her L -karesi tek bir N -karesine içten çizilmiştir. $p \times p$ boyutlu bir N -karesiyle her kenarında p nokta bulunan bir kareyi kastediyoruz. Böyle bir kareye açıkça $p - 2$ tane L -karesi içten çizilir. N -karesinin kendisi de sayılırsa sayı $p - 1$ olur.

$p \times p$ boyutlu N -karelerinin sayısının $(m - p + 1)(n - p + 1)$ olduğu kolayca görülür. Bunlar ve içlerine çizilen L -kareleri birlikte sayıldığında $(p - 1)(m - p + 1)(n - p + 1)$ bulunur. Dolayısıyla

istenen toplam kare sayısı şöyledir:^[E033]

$$\begin{aligned}
 N &= \sum_{p=2}^n (p-1)(m-p+1)(n-p+1) \\
 &= mn \sum_{p=2}^n (p-1) - (m+n) \sum_{p=2}^n (p-1)^2 + \sum_{p=2}^n (p-1)^3 \\
 &= mn \frac{n(n-1)}{2} - (m+n) \frac{n(n-1)(2n-1)}{6} + \frac{n^2(n-1)^2}{4} \\
 &= \frac{n(n-1)}{12} [6mn - 2(m+n)(2n-1) + 3n(n-1)] \\
 &= \frac{n(n^2-1)(2m-n)}{12}.
 \end{aligned}$$

Editör notu (özgün dergi). Dikdörtgen durumu için çözüm alınmamıştır. Julian H. Braun (White Sands Proving Ground) ve E. P. Starke (Rutgers University), kare ve dikdörtgenlerin kenarlarını kafes doğrularına paralel olanlarla sınırlayan çözümler göndermiştir. Braun, bu kısıtlı durumun *American Mathematical Monthly*'deki E1127 probleminin bir çeşitlemesi olduğunu belirtmiştir.

(b) kısmının editöryal tamamlaması. Kareler de dahil olmak üzere toplam dikdörtgen sayısı

$$\binom{m}{2} \binom{n}{2} + \sum_{\substack{p,q \geq 1 \\ \gcd(p,q)=1}} \sum_{\substack{a,b \geq 1 \\ ap+bq < m \\ aq+bp < n}} (m-ap-bq)(n-aq-bp).$$

biçimindedir. İlk terim, yatay ve dikey kenarlı dikdörtgenleri sayar. Diğer her dikdörtgenin, aralarında asal bileşenli ve pozitif eğimli tek bir (p, q) doğrultusu ile buna dik $(-q, p)$ doğrultusu vardır. Komşu kenar vektörleri, a, b pozitif tam sayılar olmak üzere $a(p, q)$ ve $b(-q, p)$ biçimindedir. Çevreleyen eksenlere paralel dikdörtgenin genişliği $ap + bq$, yüksekliği $aq + bp$ olduğundan kafes içinde tam olarak formüldeki sayıda öteleme mümkündür. Böylece her eğik dikdörtgen bir kez sayılır.

242

Mathematics Magazine **28** (1954–1955), 284

Kaynak PDF s. 102–103.

Çözüm: P. W. Allen Raine, Newport News High School, Newport News, Virginia.

$A, B, C, A', B', C', A'', B'', C''$ ilgili noktaların vektör koordinatlarını, k ise bir skaler niceliği göstersin. Buna göre

$$A' = \frac{kB + C}{k+1}, \quad B' = \frac{kC + A}{k+1}, \quad C' = \frac{kA + B}{k+1},$$

ve^[E034]

$$\begin{aligned}
 A'' &= \frac{B' + kC'}{1+k} = \frac{kC + A + k^2A + kB}{(1+k)^2}, \\
 B'' &= \frac{C' + kA'}{1+k} = \frac{kA + B + k^2B + kC}{(1+k)^2}, \\
 C'' &= \frac{A' + kB'}{1+k} = \frac{kB + C + k^2C + kA}{(1+k)^2}.
 \end{aligned}$$

yazılır. Şu eşitlikler kolayca gösterilir:

$$\begin{aligned} A'' - B'' &= \frac{1 - k + k^2}{(1 + k)^2} (A - B), \\ B'' - C'' &= \frac{1 - k + k^2}{(1 + k)^2} (B - C), \\ C'' - A'' &= \frac{1 - k + k^2}{(1 + k)^2} (C - A), \end{aligned}$$

Bunlar iki üçgenin karşılıklı kenarlarının paralel olduğunu, dolayısıyla üçgenlerin $(1 - k + k^2)/(1 + k)^2$ oranıyla homotetik olduğunu gösterir.

Diğer çözenler: Maimouna Edy, Hull, P. Q., Kanada; M. S. Klamkin, Polytechnic Institute of Brooklyn; Chih-yi Wang, University of Minnesota; ve problemi öneren.

248

Mathematics Magazine **29** (1955–1956), 46

Kaynak PDF s. 104.

Çözüm: problemi öneren. t 'nin kendisine çok yakın yeni bir t' konumunu ele alırsak

$$\frac{M_1 M'_1}{\sin \Delta\theta} = \frac{C' M'_1}{\sin \mu_1},$$

elde edilir. Burada M'_1 , Γ_1 üzerinde M_1 'e yakın bir nokta; $\Delta\theta = (t, t')$ ise t, t' arasındaki açıdır. Sonsuz küçükler cinsinden

$$\frac{ds_1}{d\theta} = \frac{CM_1}{\sin \mu_1}, \quad \mu_1 = (t, t_1) \pm \pi,$$

ve benzer biçimde

$$\frac{ds_2}{d\theta} = \frac{CM_2}{\sin \mu_2}, \quad \mu_2 = (t, t_2) \pm \pi.$$

t_1 ile t_2 paralel olduğundan $\sin \mu_1 = \sin \mu_2$ olur; böylece

$$\frac{ds_1}{CM_1} = \frac{ds_2}{CM_2},$$

ve buradan^[E036]

$$\frac{ds_1/d\alpha}{CM_1} = \frac{ds_2/d\alpha}{CM_2}, \quad \text{yani} \quad \frac{R_1}{CM_1} = \frac{R_2}{CM_2},$$

elde edilir. Burada $d\alpha$, M_1, M_2 'deki paralel normallere ilişkin sonsuz küçük açı; R_1, R_2 ise karşılık gelen eğrilik yarıçaplarıdır. Son eşitlik iddiayı ispatlar.

Diğer çözenler: Richard K. Guy, University of Malaya, Singapur; ve Chih-yi Wang, University of Minnesota.

258: Diklik Merkezinin Geometrik Yeri

Mathematics Magazine **30** (1956–1957), 47; öneri: Ocak 1956

Kaynak PDF s. 104–106.

Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye

Bir çembere içten çizilmiş ABC üçgeni, AB ve AC doğrultuları sabit kalacak biçimde değişmektedir. Diklik merkezi H 'nin geometrik yerini bulunuz.

I. Çözüm: Binbaşı H. S. Subba Rao, Defense Science Organization, New Delhi, Hindistan. A tepe açısının ölçüsü ve BC tabanının uzunluğu sabittir. $A_1B_1C_1$, ABC 'ye konan koşulları sağlayan ikizkenar üçgen olsun. P , çevrel çemberin küçük AC yayının; benzer biçimde Q , küçük AB yayının orta noktası olsun. Çemberin merkezi O olsun. P, Q noktaları sabittir.

A_1 'den geçen çapı y eksen, buna dik çapı x eksen alalım. Bu eksenlere göre ABC çemberinin herhangi bir noktası $a \cos t, a \sin t$ ile parametrik olarak gösterilebilir.

$B_1 = (t_2)$, $C_1 = (t_3)$, $P = (t_4)$, $Q = (t_5)$ olsun. $\angle A_1B_1C_1 = \angle A_1C_1B_1 = 90^\circ - A/2$ olduğu dikkate alınırsa

$$t_2 = \frac{3\pi}{2} - A, \quad t_3 = \frac{3\pi}{2} + A, \quad t_4 = \frac{A}{2}, \quad t_5 = 2\pi - \frac{A}{2}.$$

ABC üçgeninin herhangi bir konumunda $t = \angle B_1OB = \angle C_1OC$ olsun. O zaman $B = (t_2 + t)$ ve $C = (t_3 + t)$ olur. Ayrıca BH , AC 'ye dik olduğundan OP 'ye paraleldir; benzer biçimde CH , OQ 'ya paraleldir.

BH ve CH doğrularının denklemleri kolayca bulunur.^[E037]

$$\begin{aligned} x \sin \frac{A}{2} - y \cos \frac{A}{2} &= a \cos \left(t - \frac{3A}{2} \right), \\ x \sin \frac{A}{2} + y \cos \frac{A}{2} &= -a \cos \left(t + \frac{3A}{2} \right). \end{aligned}$$

İki denklem arasında t yok edilirse H 'nin geometrik yeri

$$\frac{x^2 \sin^2(A/2)}{a^2 \sin^2(3A/2)} + \frac{y^2 \cos^2(A/2)}{a^2 \cos^2(3A/2)} = 1.$$

olarak bulunur. Bu, merkezi O ve yarı eksen uzunlukları

$$\left| \frac{a \sin(3A/2)}{\sin(A/2)} \right| \quad \text{ve} \quad \left| \frac{a \cos(3A/2)}{\cos(A/2)} \right|.$$

olan bir elipstir. $A = 60^\circ$ veya 120° olduğunda parametrizasyon bir doğru parçası, yani yozlaşmış elips verir; yukarıdaki kesirli denklem yalnızca paydaları sıfırdan farklıken kullanılır. İlginç bir sonuç olarak ABC üçgeninin dokuz nokta merkezi ve ağırlık merkezinin geometrik yerleri de aynı yozlaşma olasılığıyla birer elipstir.

II. Çözüm: problemi öneren. OX, OY , sırasıyla A 'nın dış ve iç açıortaylarına paralel doğrular olsun. AH yüksekliği bu sabit doğruları X, Y 'de kessin. AO, AH , A 'nın açıortaylarıyla eşit açılar yaptığından $AX = AO = AY$ olur. Dolayısıyla $XY = 2R = \text{sabit}$ 'tir.

XY 'yi uçları OX, OY üzerinde hareket eden sabit uzunluklu bir çubuk olarak düşünebiliriz. A açısı sabit olduğundan BC 'nin zarfı, ya da BC 'nin orta noktası D 'nin geometrik yeri, merkezi O olan bir çembere dir. Dolayısıyla yönlü yükseklik $AH = 2OD = 2R \cos A = \text{sabit}$ olur. Bu, H 'nin hareketli XAY çubuğu üzerinde sabit bir nokta olduğunu gösterir. Böylece H bir elips çizer.

Elipsin yarı eksen uzunlukları kolayca belirlenir:^[E037]

$$a = R|1 + 2 \cos A|, \quad b = R|1 - 2 \cos A|.$$

Diğer çözenler: J. W. Clawson, Collegeville, Pennsylvania; R. K. Guy, University of Malaya, Singapur; Sister M. Stephanie, Georgian Court College, New Jersey; Harry D. Ruderman, The Bronx, New York; ve Chih-yi Wang, University of Minnesota.

266: Çevrel Çembere Göre Evirtik Noktalar

Mathematics Magazine **30** (1956–1957), 105; öneri: Mart 1956

Kaynak PDF s. 107–108.

Öneren: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye

M ve M', ABC üçgeninin çevrel çemberine göre birbirinin evirtiği olan noktalar olsun. Açılarının tanımlı olduğu durumlarda, yönlü açılar için 2π modülünde aşağıdaki bağıntıları ispatlayınız.^[E038]

$$\begin{aligned}\angle BMC + \angle BM'C &= 2\angle A, \\ \angle CMA + \angle CM'A &= 2\angle B, \\ \angle AMB + \angle AM'B &= 2\angle C.\end{aligned}$$

I. Çözüm: Richard K. Guy, University of Malaya, Singapur. COM ve $M'OC$ üçgenlerinde O açısı ortaktır; $OM \cdot OM' = OC^2$ olduğundan $OC/OM = OM'/OC$ 'dir. Dolayısıyla üçgenler benzerdir ve $\angle OM'C = \angle OCM$ olur. Aynı biçimde $\angle OM'B = \angle OBM$ elde edilir. Bunları $\angle OMC$ ve $\angle OMB$ ile toplayınca

$$\angle BMC + \angle BM'C = \pi - \angle COM + \pi - \angle BOM = \angle BOC = 2\angle A.$$

bulunur. Benzer biçimde $\angle CMA + \angle CM'A = 2\angle B$ ve $\angle AMB + \angle AM'B = 2\angle C$ elde edilir.^[E038]

II. Çözüm: Maimouna Edy, Hull, P. Q., Kanada. A, B, C, M, M' noktalarını sırasıyla z_1, z_2, z_3, z, z' karmaşık sayılarıyla gösterelim. Parantezler çapraz oramı, üst çizgiler karmaşık eşleniği gösterebilir. O zaman

$$(z_1, z_2, z_3, z) = \overline{(z_1, z_2, z_3, z')}. \quad (1)$$

olur. Bu, z_1, z_2, z_3 'ü sırasıyla $1, 0, \infty$ 'ye götüren homografik dönüşümün, yani verilen çemberi gerçel eksene dönüştüren dönüşümün, z, z' 'yi eşlenik iki karmaşık noktaya götürdüğünü söyler.

Şimdi (1) açık biçimde şöyle yazılır:

$$\frac{z - z_2}{z - z_3} \cdot \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2} = \frac{\overline{z' - z_2}}{\overline{z' - z_3}} \cdot \frac{\overline{z_1 - z_3}}{\overline{z_1 - z_2}}.$$

Açıkça

$$\frac{z_2 - z}{z_3 - z} \div \frac{\overline{z_2 - z'}}{\overline{z_3 - z'}} = \frac{\overline{z_3 - z_1}}{\overline{z_2 - z_1}} \div \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1}.$$

Dolayısıyla

$$\begin{aligned}\arg \frac{z_2 - z}{z_3 - z} + \arg \frac{z_2 - z'}{z_3 - z'} &= -2 \arg \frac{z_3 - z_1}{z_2 - z_1} \\ &= 2 \arg \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}.\end{aligned}$$

Bu, yönlü açılar için

$$\angle(\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MB}) + \angle(\overrightarrow{M'C}, \overrightarrow{M'B}) = 2\angle(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}).$$

olduğu anlamına gelir. Yönlü açılar, birim çemberin çarpma grubuna izomorf bir toplama grubu oluşturur. Başka bir deyişle açılarımızın herhangi ölçülerini seçip bunları 2π modülünde toplayabiliriz. Diğer iki bağıntı da benzer biçimde ispatlanır.

Bankoff'un çözümünde de açıların uygun biçimde yönlendirilmesi gerektiği belirtilmiştir.

Diğer çözenler: Leon Bankoff, Los Angeles, California; J. W. Clawson, Collegeville, Pennsylvania; ve problemi öneren.

298: Biçimini Koruyan Bir Eğri

Mathematics Magazine **31** (1957–1958), 56; öneri: Ocak 1957

Kaynak PDF s. 109.

Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli Bölgesi, Türkiye

$y = f(x)$ eğrisi şu özelliklere sahip olsun:

(a) $f(x) = f(-x)$;

(b) $x > 0$ için $f'(x) > 0$;

(c) $f''(x) > 0$.

Eğri, üzerindeki herhangi iki noktadan yerçekimi altında asıldığında başlangıçtaki biçimini koruyacak şekilde, (x, y) noktasındaki birim uzunluk başına ağırlık $w(x)$ 'i belirleyiniz.^[E039]

Çözüm: K. L. Cappel, Philadelphia, Pennsylvania. Eğrinin herhangi iki A, B noktasından asıldığını varsayalım. A ile eğrinin y eksenini kestiği nokta arasındaki kısmın ağırlığı W olsun. A 'daki gerilme düşey ve yatay bileşenlerine ayrılırsa $W/H = \tan \theta$, yani $W = H \, dy/dx$ olur.

Şimdi sağdaki askı noktasının A 'dan A' 'ye taşındığını varsayalım. Eğri biçimini koruyacaksa A 'daki kuvvetler değişmemelidir. Bu ancak H sabit olduğunda mümkündür. AA' parçasının uzunluğu ds , ağırlığı dW ise birim uzunluk başına ağırlık

$$W_x = \frac{dW}{ds} = \frac{dW}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2} \, dx}, \quad \text{veya} \quad W_x = H \frac{d^2y/dx^2}{\sqrt{1 + (dy/dx)^2}},$$

olur. Verilen koşulları sağlayan her eğri bu bağıntıyı sağlayabilir. Bu problem, yalnızca kendi malzemesinin ağırlığını taşıyan bir yığma kemerin en uygun biçimini bulma problemine benzer: eğilme momentlerini ortadan kaldırmak için basınç kuvvetinin tarafsız eksen boyunca etkimesi istenir.

Diğer çözenler: problemi öneren.

304: Bir Üçgenle İlişkili Çemberler

Mathematics Magazine **31** (1957–1958), 117; öneri: Mart 1957

Kaynak PDF s. 110.

Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli Bölgesi, Türkiye

$AB \neq AC$ olmak üzere, ABC üçgeni O çemberine içten çizilmiş olsun. A 'nın dış açıortayı O 'yu K 'de kessin. Merkezi K olan değişken bir çember, AB, AC 'yi sırasıyla E, F 'de kesmekte ve A, KEF üçgeninin içinde bulunmamaktadır. EF, BC 'ye yaklaşıırken EF ile BC 'nin kesişim noktası M 'nin limit konumu m 'yi bulunuz.

Çözüm: problemi öneren. (K) çemberinin AB, AC ile E, F dışındaki kesişimleri E', F' olsun. BC ile $E'F'$ 'nin ortak noktasına M' diyelim. EFM ve $E'F'M'$ kesenlerini kullanarak Menelaus teoremini ABC 'ye uygularsak

$$\frac{MB}{MC} \frac{FC}{FA} \frac{EA}{EB} = 1, \quad \frac{M'B}{M'C} \frac{F'C}{F'A} \frac{E'A}{E'B} = 1.$$

Bu eşitlikleri taraf tarafa çarpıp $EA = F'A, E'A = FA$ olduğunu göz önüne alırsak

$$\frac{MB}{MC} \frac{M'B}{M'C} = \frac{EB \cdot E'B}{FC \cdot F'C}.$$

Son oranın payı ve paydası, B, C noktalarının (K) çemberine göre kuvvetleridir. K, B ve C 'ye eşit uzaklıkta olduğundan bu kuvvetler eşittir. Böylece $MB : MC = M'C : M'B$ olur. Dolayısıyla M, M', BC üzerinde simetrik noktalardır. M 'nin limit konumu m de M' 'nin limit konumu m' 'nin simetrisi olur. m' 'nin, A 'nın dış açıortayı KA 'nın ayağı olduğu kolayca görülür. Böylece m 'nin kuruluşu hemen elde edilir.

349: Bir Orta Nokta

Mathematics Magazine **32** (1958–1959), 223; öneri: Eylül 1958

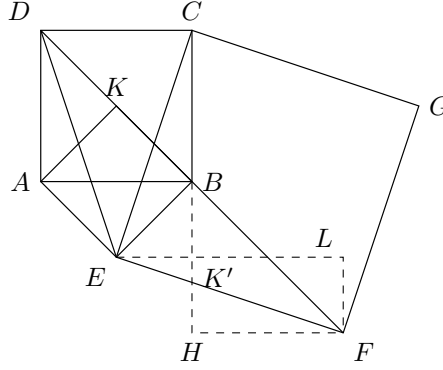
Kaynak PDF s. 111.

Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye

$ABCD, AEBK$ ve $CEFG$ aynı yönelimli kareler ise B 'nin DF 'nin orta noktası olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: Leon Bankoff, Los Angeles, California. AEB ve CEF dik açılarından CEB açısı çıkarılınca BEF, AEC, DEB açılarının eşit olduğu bulunur. Ayrıca $DE = EC = EF$ 'dir. Dolayısıyla BDE ile FBE üçgenleri eş ve $FB = BD$ olur. $EBD = 90^\circ$ olması, F, B, D 'nin doğrusal olduğunu gösterir.

Diğer çözenler: Norman Anning, Alhambra, California; D. A. Breault, Sylvania Electric Products, Inc., Waltham, Massachusetts; J. W. Clawson, Collegeville, Pennsylvania; Norbert Jay, New York, New York; Joseph D. E. Konhauser, Haller, Raymond and Brown, Inc., State College, Pennsylvania; Arne Pleijel, Trollhättan, İsveç; William Sanders, Mississippi Southern College; C. W. Trigg, Los Angeles City College; Dale Woods, Idaho State College; ve problemi öneren.



Şekil 7.1: 349 numaralı problemdeki aynı yönelimli üç kare. BH üzerindeki yardımcı nokta, karenin K köşesinden ayrılması için K' ile gösterilmiştir.

334: Düzensiz Bir Bölgenin Alanı

Mathematics Magazine **32** (1958–1959), 106; öneri: Mart 1958

Kaynak PDF s. 112.

Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye

Bir sikloidin AM yayı, yuvarlanan $\Omega(a)$ çemberinin TM yayı ve taban doğrusu üzerindeki AT parçasıyla sınırlanan S alanı için en basit ifadeyi bulunuz.

Çözüm: J. W. Clawson, Collegeville, Pennsylvania. AT'ye dik MN ve CT çizilsin. $MCT = \theta$, $CT = a$ olsun. İstenen alan, AMN alanına NMCT yamuğunun alanı eklenip MCT daire diliminin alanı çıkarılarak bulunur. M için $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ olduğundan

$$\begin{aligned} S &= a^2 \int_0^\theta (1 - \cos t)^2 dt + \frac{a^2 \sin \theta}{2} (2 - \cos \theta) - \frac{a^2 \theta}{2} \\ &= \frac{3}{2} a^2 \theta - 2a^2 \sin \theta + \frac{a^2}{2} \sin \theta \cos \theta + a^2 \sin \theta - \frac{a^2}{2} \sin \theta \cos \theta - \frac{a^2 \theta}{2} \\ &= a^2 (\theta - \sin \theta) = ax. \text{ [E041]} \end{aligned}$$

Diğer çözenler: Stanley P. Franklin, Memphis State University; Joseph D. E. Konhauser, State College, Pennsylvania; Arne Pleijel, Trollhättan, İsveç; ve problemi öneren.

372: Bir Trigonometrik Özdeşlik

Mathematics Magazine **33** (1959–1960), 112; öneri: Mart 1959

Kaynak PDF s. 112–113.

Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye

Aşağıdaki özdeşliği ispatlayınız.^[E027]

$$\begin{aligned} \sin^2(\theta_1 + \theta_2 + \cdots + \theta_n) &= \sin^2 \theta_1 + \cdots + \sin^2 \theta_n \\ &\quad + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} \sin \theta_i \sin \theta_j \cos(\theta_i + 2\theta_{i+1} + \cdots + 2\theta_{j-1} + \theta_j). \end{aligned}$$

Çözüm: problemi öneren. Tümevarımla ilerleyelim. Eşitlik $n = 1$ ve $n = 2$ için geçerlidir. $n = p$ için doğru olduğunu varsayalım. $\theta = \theta_1 + \cdots + \theta_p$ yazıldığında, çıkarma yoluyla elde edilen şu

eşitliği ispatlamak yeterlidir:

$$\begin{aligned} \sin^2(\theta + \theta_{p+1}) - \sin^2 \theta &= \sin^2 \theta_{p+1} \\ &+ 2 \sum_{i=1}^p \sin \theta_i \sin \theta_{p+1} \cos(\theta_i + 2\theta_{i+1} + \cdots + 2\theta_p + \theta_{p+1}). \end{aligned}$$

Sol taraf A için

$$A = \sin \theta_{p+1} \sin(2\theta + \theta_{p+1}).$$

bulunur. Sağ taraf B ise

$$\begin{aligned} B &= \sin^2 \theta_{p+1} + \sin \theta_{p+1} \sum_{i=1}^p 2 \sin \theta_i \cos(\theta_i + 2\theta_{i+1} + \cdots + 2\theta_p + \theta_{p+1}) \\ &= \sin^2 \theta_{p+1} + \sin \theta_{p+1} \sum_{i=1}^p [\sin(2\theta_i + 2\theta_{i+1} + \cdots + 2\theta_p + \theta_{p+1}) \\ &\quad - \sin(2\theta_{i+1} + \cdots + 2\theta_p + \theta_{p+1})] \\ &= \sin^2 \theta_{p+1} + \sin \theta_{p+1} [\sin(2\theta_1 + 2\theta_2 + \cdots + 2\theta_p + \theta_{p+1}) - \sin \theta_{p+1}] \\ &= \sin \theta_{p+1} \sin(2\theta_1 + \cdots + 2\theta_p + \theta_{p+1}) = A. \end{aligned}$$

biçimindedir. $A = B$ eşitliği, iddiamın $n = p + 1$ için de geçerli olduğunu gösterir. Sonuç tümevarımla elde edilir.^[E027]

380: Bir Denklem Sistemi

Mathematics Magazine **33** (1959–1960), 172; öneri: Mayıs 1959

Kaynak PDF s. 114–115.

Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye

Aşağıdaki denklem sistemini çözünüz:

$$\begin{aligned} x(z - a) + u(x + u) &= 0, \\ y(x - b) + u(y + u) &= 0, \\ z(y - c) + u(z + u) &= 0, \end{aligned}$$

Burada $abc \neq 0$ ve $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = u^{-1}$ ’dir.

Çözüm: Chih-yi Wang, *University of Minnesota*. Üç denklemi (1), (2), (3) olarak numaralandıralım. (1)’i y , (2)’yi z , (3)’ü x ile çarpıp sırasıyla (2), (3), (1)’i kullanarak

$$xyz - aby + auy + au^2 + buy - u^3 = 0, \quad (4)$$

$$xyz - bcz + buz + bu^2 + cuz - u^3 = 0, \quad (5)$$

$$xyz - cax + cux + cu^2 + aux - u^3 = 0. \quad (6)$$

elde ederiz. (4)–(5), (5)–(6), (6)–(4) işlemleriyle

$$(au + bu - ab)y + (bc - bu - cu)z = (b - a)u^2, \quad (7)$$

$$(ca - cu - au)x + (cu + bu - bc)z = (c - b)u^2, \quad (8)$$

$$(au + cu - ca)x + (ab - au - bu)y = (a - c)u^2. \quad (9)$$

bulunur. (7), (8), (9)'un genişletilmiş matrisinin rankı 2 olduğundan iki değişkeni üçüncü cinsinden hesaplayabiliriz:

$$y = \frac{c^2}{a^2}z - \frac{c(b-a)}{ab}u, \quad (10)$$

$$x = \frac{b^2}{a^2}z + \frac{b(c-b)}{ca}u. \quad (11)$$

(11)'deki işaret düzeltilmiştir.^[E040] (10), (3)'te yerine konup sadeleştirilirse

$$\left(\frac{c}{a}z - u\right)^2 = 0,$$

elde edilir. Buradan (10) ve (11) yardımıyla

$$x = \frac{b}{a}u, \quad y = \frac{c}{b}u, \quad z = \frac{a}{c}u.$$

bulunur. Gereken yerlerde $abc \neq 0$, $a^{-1} + b^{-1} + c^{-1} = u^{-1}$ bağıntıları kullanılmıştır.

Diğer çözenler: D. A. Breault, Sylvania Electric Products, Inc., Waltham, Massachusetts; Victor Ch'in, Kent State University, Kent, Ohio; Melvin Hochster, Stuyvesant High School, New York; ve problemi öneren.

384: Sonsuz Bir Grup

Mathematics Magazine **33** (1959–1960), 230; öneri: Eylül 1959

Kaynak PDF s. 115.

Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye

$n \geq 2$ olmak üzere (a_{ij}) , her satırındaki elemanların toplamı 1 olan, $n \times n$ boyutlu tersinir bir gerçel matris olsun. Bu tür matrislerin tümünün sonsuz mertebeli bir grup oluşturduğunu ispatlayınız.^[E024]

Çözüm: D. A. Breault, Sylvania Electric Products, Inc. Önerilen grup işleminin çarpma olduğunu ve toplam koşulunun

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} = 1 \quad \text{her } i = 1, 2, \dots, n. \quad (1)$$

anlamına geldiğini varsayalım. Sistem şu özelliklere sahiptir:

(1) *Kapalılık:* $A = [a_{ij}]$, $B = [b_{ij}]$ ise

$$c_{ij} = (AB)_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj};$$

olur; buradan

$$\sum_{j=1}^n c_{ij} = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik}b_{kj} = \sum_{k=1}^n a_{ik} \left(\sum_{j=1}^n b_{kj} \right) = \sum_{k=1}^n a_{ik} = 1$$

her i için elde edilir.

(2) *Birleşme özelliği:* Yukarıdakilere benzer toplamalarla gösterilebilir.

- (3) *Birim eleman*: Olağan birim matris $I = (\delta_{ij})$ burada da birimdir.
- (4) *Tersler*: (1)'i sağlayan bir A matrisi için, *var olduğu sürece*, A^{-1} 'in de (1)'i sağladığı gösterilebilir. Dolayısıyla (1)'i sağlayan tersinir matrislerin tümü bir grup oluşturur; tersinirlik koşulu kaldırılırsa bu doğru değildir.

Editöryal tamamlama. $n \geq 2$ için

$$\begin{pmatrix} 1-t & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \oplus I_{n-2}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{1\},$$

matrisleri birbirinden farklı, tersinir ve satır toplamaları 1 olan matrislerdir. Böylece grup sonsuzdur. $n = 2$ için ikinci blok alınmaz.^[E024]

Diğer çözenler: problemi öneren.

398: Birbirine Bağlı İkinci Derece Denklemler

Mathematics Magazine **34** (1960–1961), 51; öneri: Ocak 1960

Kaynak PDF s. 116.

Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye

Bir denklemdeki gerçel katsayıların diğer denklemin kökleri olduğu

$$x^2 + y_1x + y_2 = 0, \quad y^2 + x_1y + x_2 = 0,$$

denklemlerinin köklerini belirleyiniz.

Çözüm: Harry M. Gehman, University of Buffalo. Köklerle katsayılar arasındaki bağıntılar şu dört denklemi verir:

$$x_1 + x_2 = -y_1, \quad x_1x_2 = y_2, \quad y_1 + y_2 = -x_1, \quad y_1y_2 = x_2.$$

Birinci ve üçüncü denklemlerden $x_2 = y_2$ elde edilir.

I. Durum. $x_2 = y_2 = 0$ ise $x_1 = -y_1 = a$ olur; burada a keyfidir. Denklemler

$$x^2 - ax = 0 \quad \text{ve} \quad x^2 + ax = 0,$$

biçimindedir; kökleri sırasıyla $a, 0$ ve $-a, 0$ 'dır.

II. Durum. $x_2 = y_2 \neq 0$ ise $x_1 = y_1 = 1$ ve $x_2 = y_2 = -2$ 'dir. Her iki denklem de

$$x^2 + x - 2 = 0,$$

biçimini alır ve kökleri $1, -2$ 'dir. Katsayıların gerçel olması koşuluna gerek olmadığına dikkat ediniz.

Diğer çözenler: D. A. Breault, Sylvania Electric Products, Inc., Waltham, Massachusetts; Sidney Kravitz, Dover, New Jersey; A. J. Kokar, School of Mines, Adelaide, Avustralya; Rostyslaw Lewyckyj, University of Toronto; Ernest E. Moyers, University of Mississippi; F. D. Parker, University of Alaska; Charles F. Pinzka, University of Cincinnati; Arne Pleijel, Trollhättan, İsveç; Robert E. Shafer, University of California Radiation Laboratory; C. M. Sidlo, Framingham, Massachusetts; William Squire, Southwestern Research Institute, San Antonio, Texas; Harvey Walden, Rensselaer Polytechnic Institute; Chih-yi Wang, University of Minnesota; Dale Woods, Northeastern Missouri State College; ve problemi öneren.

407: Bir Küpte Direnç

Mathematics Magazine **34** (1960–1961), 115; öneri: Mart 1960

Kaynak PDF s. 117–118.

Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye

Bir küpün on iki ayrıtı, her birinin direnci bir ohm olan tellerden yapılmıştır. Küp bir elektrik devresine şu noktalardan bağlanmaktadır:

- (a) komşu iki köşeden;
- (b) bir yüzün karşılıklı iki köşesinden;
- (c) küpün karşılıklı iki köşesinden.

Hangi bağlantı en küçük direnci verir?

Çözüm: C. W. Trigg, Los Angeles City College. Uçlar arasında tek bir ayrıtla doğrudan bağlantı bulunduğu için en küçük direncin (a)'da oluştuğu düşünülebilir. Bunu doğrulayalım:

Şekillerde her durum için akım yönü gösterilmiştir. Her küpün altında, simetriden eş potansiyelde olduğu belirlenen köşelerin aynı noktayla temsil edildiği şematik devre vardır. Böylece her durum, paralel devre kurallarının art arda uygulanmasına indirgenir:

$$(a) \quad \frac{1}{R} = \frac{1}{r} + \frac{1}{\frac{r}{2} + \frac{1}{\frac{1}{2/r + 1/(r/2 + r + r/2)} + \frac{r}{2}}},$$

buradan $R = \frac{7}{12}r$,

Burada R küpün direnci, r ise 1 ohm'dur.

(b) E, B, H, C aynı potansiyelde olduğundan

$$R = \frac{2}{1/r + 1/r + 1/(r + r/2)} = \frac{3r}{4}.$$

(c)

$$R = \frac{r}{3} + \frac{r}{6} + \frac{r}{3} = \frac{5r}{6}.$$

(a) ve (c) durumları E. E. Brooks ile A. W. Poyser'in *Magnetism and Electricity*, Longmans, Green and Co. (1920), s. 277–279'da çözülmüştür. (c) durumu, *Mathematics Magazine*, Mart 1951 ve Kasım 1959'da yer alan Quickie 32'dir.

Diğer çözenler: Charles F. Pinzka, University of Cincinnati ve problemi öneren (kısmen). Bir yanlış çözüm alınmıştır.

415: Bir Trigonometrik Toplam

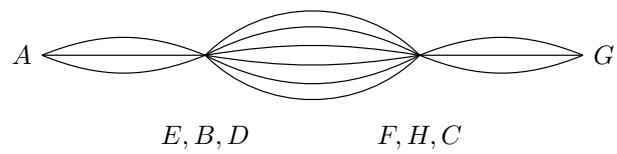
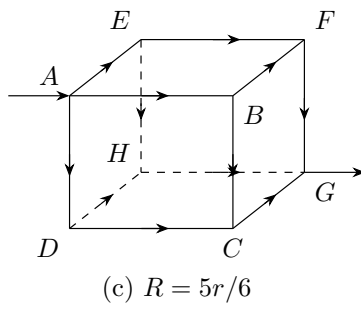
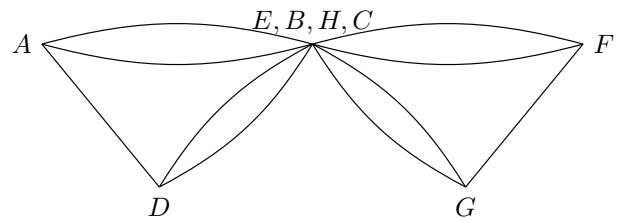
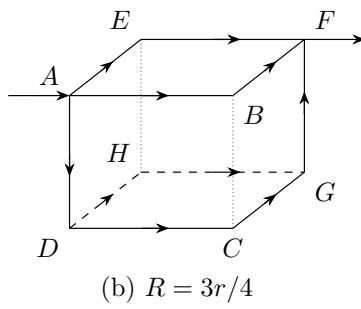
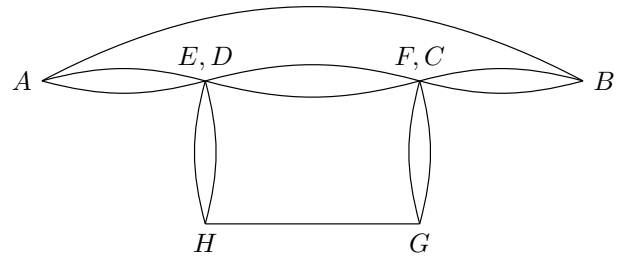
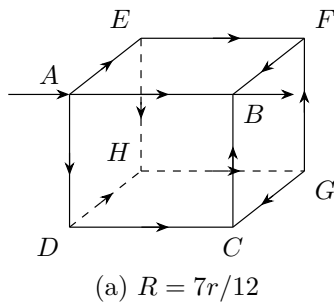
Mathematics Magazine **34** (1961), 178; öneri: Mayıs 1960

Kaynak PDF s. 119.

Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye

Aşağıdaki özdeşliği ispatlayınız:

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \cos(px) \sin((n-p)x) = 2^{n-1} \sin nx.$$



Şekil 7.2: Küpteki akımlar ve eş potansiyeldeki köşeler birleştirildikten sonraki devreler. Her dal bir r ayrıt direncini temsil eder. Kesikli ayrıt arkada kalır; (b)'deki gri ayrıt akım taşımaz.

Çözüm: Josef Andersson, Vaxholm, İsveç. (Özgün derginin editörü tarafından çevrilip yeniden ifade edilmiştir.) Şu formüller kullanılarak

$$\sum_{p=0}^n \binom{n}{p} = 2^n, \quad \binom{n}{n-p} = \binom{n}{p},$$

başlangıçtaki toplam

$$\frac{1}{2} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \sin nx + \frac{1}{2} \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \sin((n-2p)x) = 2^{n-1} \sin nx + \frac{s}{2}.$$

biçiminde yazılır. Geriye $s = 0$ olduğunu göstermek kalır. $p = n - p'$ yerine koymasıyla

$$s = \sum_{p'=0}^n \binom{n}{n-p'} \sin((2p' - n)x) = -s. \text{[E042]}$$

Dolayısıyla $s = 0$ 'dır.

Diğer çözenler: J. L. Brown, Ordnance Research Laboratory, Pennsylvania State University; L. Carlitz, Duke University; James C. Ferguson, Lynnwood, Washington; A. F. Horadam, University of New İngiltere, Armidale, NSW, Avustralya; Joseph D. E. Konhauser, HRB-Singer, Inc., State College, Pennsylvania; William Squire, Southwest Research Institute, San Antonio, Texas; Chih-Yi Wang, University of Minnesota; ve problemi öneren.

415 Numaralı Problem Üzerine Açıklama

Mathematics Magazine **34** (1961), 308.

Kaynak PDF s. 120.

Açıklama: Louis Brand, University of Houston. Trigonometrik toplam problemi için çok daha basit bir çözüm şöyledir: toplama S diyelim ve $p = n - q$ indis değişimini yapalım. İki toplamı toplarsak

$$2S = \sum_{p=0}^n \binom{n}{p} \sin nx = 2^n \sin nx.$$

419: Sabit Sürat Eğrisi

Mathematics Magazine **34** (1961), 239; öneri: Eylül 1960

Kaynak PDF s. 120–121.

Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye

Düşey bir düzlemde, üzerindeki bir noktadan v_0 ilk hızıyla yerçekimi altında harekete bira-kılan bir parçacığın yol boyunca süratinin sabit kaldığı yolu belirleyiniz. Sürtünme olmadığını varsayınız.

Düzeltilmiş yanıt (editöryal). Yatay bir doğru istenen özelliğe sahiptir. Sürtünmesiz, sabit ve düzgün bir yol üzerinde hareket eden parçacığa uygulanan kısıt kuvveti iş yapmaz. Enerjinin korunumu $\frac{1}{2}mv^2 + mgh = \text{sabit}$ verir; dolayısıyla sıfırdan farklı sabit sürat, h yüksekliğinin sabit olmasını gerektirir. Düşey düzlemde bu, yatay bir doğrudur. Yayımlanmış parabol yanıtı, belirtilen mekanik varsayımlarla bağdaşmaz. Akıl yürütme, tarihsel hata olduğu açıkça belirtilerek aşağıda korunmuştur.^[E043]

Problemi önerenin tarihsel çözüm önerisi (geçersiz). Düşey düzlemde Oy aşağıya, Ox sola yönelen koordinat eksenleri olsun. Parçacık O 'dan serbest bırakılsın. Oy üzerindeki, $y_0 = OA = v_0^2/(2g)$ koşulunu sağlayan A noktasında v_0 hızına ulaşır.

Sürtünme olmadığından yol boyunca hız, $v = \sqrt{2gy}$ hızının izdüşümüdür ve $v_0 = v \cos \alpha$ yazılır. Burada

$$v_0 = \sqrt{2gy_0}, \quad v = \sqrt{2gy}, \quad \cos^2 \alpha = \frac{1}{1 + \tan^2 \alpha} = \frac{1}{1 + y'^2},$$

olup $y_0 = y/(1 + y'^2)$ elde edilir.

Değişkenler ayrılarak

$$x = \int_{y_0}^y \frac{dy}{\sqrt{(y - y_0)/y_0}} = \frac{1}{2} \sqrt{y_0} \sqrt{y - y_0},$$

$$y = \frac{4x^2}{y_0} + y_0 = \frac{8g}{v_0^2} x^2 + \frac{v_0^2}{2g}.$$

bulunur. Yol, A 'da Oy 'ye teğet bir paraboldür; Oy , tepe noktasındaki teğettir.

Editöryal açıklama. Yukarıdaki izdüşüm varsayımı, sürtünmesiz kısıtlı hareketi tanımlamaz. Ayrıca gösterilen integral $2\sqrt{y_0}\sqrt{y - y_0}$ 'a eşittir; bu çarpımın yarısına değil. Yazılan parabolün tepe noktasındaki teğeti de iddia edildiği gibi düşey değil yataydır. Yalnızca integrali düzeltmek fiziksel akıl yürütmeyi geçerli kılmaz.^[E043]

425: Euler'in Fi Fonksiyonu

Mathematics Magazine **34** (1961), 300; öneri: Kasım 1960

Kaynak PDF s. 121–123.

Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye

$n > 4$ ve $n - 1, n + 1$ ikiz asal sayılar ise $3\varphi(n) \leq n$ olduğunu ispatlayınız. Burada φ , Euler'in φ fonksiyonudur.^[E025]

I. Çözüm: Dermott A. Breault, Sylvania Electric Products, Inc., Waltham, Massachusetts (düzeltilmiş). $n + 1$ ve $n - 1$ asal, $n > 4$ ise n hem çift hem 3'ün katıdır; dolayısıyla bir m için $n = 6m$ olur. Özgün çözümdeki çarpımsallık hatası düzeltildiğinde gereken hesap şöyledir:

$$\varphi(n) = \varphi(6m) = 2m \prod_{\substack{p|m \\ p \neq 2,3}} \left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

Böylece

$$3\varphi(n) = 6m \prod_{\substack{p|m \\ p \neq 2,3}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) = n \prod_{\substack{p|m \\ p \neq 2,3}} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \leq n,$$

elde edilir. Özgün ispat, $(6, m) = 1$ koşulunu aramadan $\varphi(6m) = \varphi(6)\varphi(m)$ kullanmıştır; aşağıdaki tarihsel açıklama bu hatayı kaydeder.^[E044]

II. Çözüm: L. Carlitz, Duke University. $n > 4$ varsayımının gerekli olduğu açıktır. $n - 1$ ve $n + 1$ asal olduğundan $n, 3$ 'e bölünür. Ayrıca n çift olmak zorundadır; dolayısıyla 6'ya bölünür. Şimdi

$$n = 2^\alpha 3^\beta m \quad (\alpha \geq 1, \beta \geq 1, (m, 6) = 1), \quad (1)$$

ise $\varphi(n) \leq n/3$ olduğunu göstereceğiz. Gerçekten (1)'den

$$\varphi(n) = 2^\alpha 3^{\beta-1} \varphi(m) \leq 2^\alpha 3^{\beta-1} m = \frac{n}{3}. \quad (2)$$

Açıklama: Şu iki koşulun eşdeğer olduğu kolayca gösterilir:

$$\varphi(n) = \frac{n}{3} \quad (3)$$

ve

$$n = 2^\alpha 3^\beta \quad (\alpha \geq 1, \beta \geq 1). \quad (4)$$

(4)'ün (3)'ü gerektirdiğini yukarıda gördük. Şimdi (3) sağlansın; n 'nin 3'e bölündüğü açıktır. $\alpha \geq 1$, $(k, 3) = 1$ olmak üzere $n = 3^\alpha k$ yazalım. O zaman (3),

$$2 \cdot 3^\alpha \varphi(k) = n,$$

biçimini alır; dolayısıyla n çifttir. Şimdi

$$n = 2^\alpha 3^\beta m \quad (\alpha \geq 1, \beta \geq 1, (m, 6) = 1).$$

yazalım. $m > 1$ ise (2)'den $\varphi(n) < n/3$ çıkar. Böylece (3) ile (4)'ün eşdeğerliği ispatlanır.^[E045]

Diğer çözenler: Brother Alfred, St. Mary's College, California; Leon Bankoff, Los Angeles, California; Maxey Brooke, Sweeny, Texas; B. A. Hausman, S. J., West Baden College, Hindistanna; Vern Hoggatt, San Jose State College; Sidney Kravitz, Dover, New Jersey; D. L. Silverman, Fort Meade, Maryland; Dale Woods, Northeast Missouri State Teachers College; ve problemi öneren.

425 Numaralı Problem Üzerine Açıklama

Mathematics Magazine **34** (1961), 433.

Kaynak PDF s. 123.

Açıklama: David A. Klarner, Napa, California. Dermott A. Breault'nun çözümünde bir hata vardır. İspatta şu ifade yer alır: “ $n + 1$ ve $n - 1$ asal ise n çift ve 3'ün katıdır; dolayısıyla bir m için $n = 6m$ olur ve $\varphi(n) = \varphi(6)\varphi(m) = 2\varphi(m)$ elde ederiz.” Bu yalnızca $(6, m) = 1$ olduğunda doğrudur. Nitekim 11, 13 ikiz asalları yanlış

$$\varphi(12) = \varphi(6)\varphi(2) = 2,$$

değerini verir; oysa $\varphi(12) = 4$ 'tür. Dolayısıyla ispat yönteminin geçerli olması için değiştirilmesi gerekir.

437: İyi Bilinen Bir Problem

Mathematics Magazine **34** (1961), 371; öneri: Ocak 1961

Kaynak PDF s. 123.

Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye

Şu önermeyi ispatlayınız veya çürütünüz: $(a + b)^n$ binom açılımındaki tek katsayıların sayısı $2^{s_2(n)}$ 'dir; burada $s_2(n)$, n 'nin ikili sayı sistemindeki yazılışında bulunan 1'lerin sayısıdır.^[E028]

Editör notu (özgün dergi). Joseph D. E. Konhauser, HRB-Singer, Inc., State College, Pennsylvania, bu problemin daha basit bir biçiminin 1956 Putnam Yarışması'nın II. Kısım, 7. problemi olduğunu belirtmiştir. Verilen problem, Kasım 1957'de *American Mathematical Monthly*'de E1288 olarak; çözümü ve kaynakları ise Mayıs 1958 sayısında yayımlanmıştır.

E1288: Tek Binom Katsayıları

American Mathematical Monthly **65** (1958), 368; öneri: *American Mathematical Monthly* **64** (1957), 671

Kaynak PDF s. 123–125.

Öneren: *S. H. Kimball, University of Maine*

Her sonlu binom açılımındaki tek binom katsayılarının sayısı 2'nin bir kuvvetidir (Putnam Matematik Yarışması, American Mathematical Monthly [1957, s. 24]). $(x+y)^n$ için bu kuvvetin üssünün, n 'nin ikili yazılışındaki 1'lerin sayısı olduğunu ispatlayınız.

I. Çözüm: T. R. Hatcher and J. A. Riley, Parke Mathematical Laboratories, Carlisle, Mass. $h < n$ olmak üzere h, n pozitif tam sayılar olsun. n 'nin ikili yazılışındaki 1'lerin sayısına $L(n)$ ile gösterilen ikili uzunluk; n 'yi bölen en büyük 2 kuvvetinin üssüne $C(n)$ ile gösterilen ikili kapasite diyelim. h 'nin ikili yazılışında 1 bulunan her basamakta n 'de de 1 varsa “ h, n içinde kapsanır” deyip $h \subset n$ yazalım. Başka bir deyişle h 'nin ikili yazılışı, n 'nin bazı 1'leri 0 yapılarak elde edilebilir.

Şu özellikler kolayca ispatlanır:

- (1) $C(n)$, n 'nin ikili yazılışının sonundaki sıfırların sayısıdır.
- (2) $C(n) = 0$ ancak ve ancak n tektir.
- (3) $C(ab) = C(a) + C(b)$; a/b pozitif tam sayı ise $C(a/b) = C(a) - C(b)$ 'dir.
- (4) $L(n) = L(h) + L(n - h)$ ancak ve ancak $h \subset n$ 'dir.
- (5) $C(n) = 1 + L(n - 1) - L(n)$.
- (6) $C(n!) = n - L(n)$.
- (7) $C\left(\binom{n}{h}\right) = L(h) + L(n - h) - L(n)$.

Aşağıdaki teoremin sonucu çözümü verir. Uç durumlarda $L(0) = 0$ alınır ve kapsanma gösteriminde $h = 0, n$ değerlerine de izin verilir.^[E046]

Teorem. $\binom{n}{h}$ ancak ve ancak $h \subset n$ olduğunda tektir.

Kanıt. $\binom{n}{h}$ tek ise $C\left(\binom{n}{h}\right) = 0$ ve (7)'den $L(n) = L(h) + L(n - h)$ olur. Böylece (4)'ten $h \subset n$ çıkar. Tersine, $h \subset n$ ise $L(n) = L(h) + L(n - h)$ ve $C\left(\binom{n}{h}\right) = 0$ olur. $\square$

Sonuç. $\binom{n}{h}$ katsayısını tek yapan h tam sayılarının sayısı $2^{L(n)}$ 'dir.

Kanıt. $h \subset n$ ve $L(h) = j$ koşullarını sağlayan h tam sayılarının sayısı $\binom{L(n)}{j}$ 'dir. Dolayısıyla $\binom{n}{h}$ katsayısını tek yapan h tam sayılarının sayısı

$$\sum_{j=0}^{L(n)} \binom{L(n)}{j} = 2^{L(n)}.$$

$\square$

II. Açıklamalar: Leo Moser, University of Alberta. E1288, 4723 [1957, 116] probleminin özel bir durumudur. O problemin çözümü şöyledir:

p asal ve $n = a_0 + a_1p + a_2p^2 + \dots + a_kp^k$, $0 \leq a_i < p$, $i = 0, 1, 2, \dots, k$ ise $\gcd\left(\binom{n}{r}, p\right) = 1$, $r = 0, 1, \dots, n$ koşulunun çözüm sayısı $\prod_{i=0}^k (a_i + 1)$ 'dir.^[E046]

E1288'deki sonuç, J. W. L. Glaisher'ın "On the residue of a binomial coefficient with respect to a prime modulus", *Quarterly Journal of Mathematics* **30** (1899), 150–156 makalesinde vardır. Daha yakın tarihte J. B. Roberts, "On binomial coefficient residues", *Canadian Journal of Mathematics* **9** (1957), 363–370 makalesinde bir ispat vermiştir.

Diğer çözenler: D. R. Brillinger, Leonard Carlitz, Joe Lipman, D. C. B. Marsh, Paul Schillo, and problemi öneren.

440: Çember Paketlemesi

Mathematics Magazine **34** (1961), 427; öneri: Mart 1961

Kaynak PDF s. 125–127.

Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye

Her biri çevresindeki altı çembere teğet olacak biçimde yerleştirilmiş, yarıçapı r olan çemberler düşününüz. Küçük çemberlerden biriyle eş merkezli, yarıçapı R olan daha büyük bir çember çizilsin. Büyük çemberin içinde bütünüyle kalan küçük çemberlerin sayısı N ise aşağıdaki bağıntıyı ispatlayınız:^[E026]

$$N = 1 + 6n + 6 \sum_{p=1}^n \left\lfloor \frac{\sqrt{4\rho^2 - 3p^2} - p}{2} \right\rfloor, \quad \rho = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{r} - 1 \right), \quad n = \lfloor \rho \rfloor,$$

Burada $\lfloor \cdot \rfloor$ simgesi en büyük tam sayı fonksiyonunu gösterir.

Çözüm: Alan Sutcliffe, Knottingley, Yorkshire, İngiltere. [Özgün önerideki] ifade tam doğru değildir. Örneğin $R/r = 2\sqrt{3} + 1$ için $\lfloor \rho \rfloor = 1$ olur ve eski ifade $N = 7$ verir; doğru değer ise $N = 13$ 'tür. Doğru ifade şöyledir:

$$\begin{aligned} N &= 1 + 6\lfloor \rho \rfloor + 6 \sum_{p=1}^{\lfloor \rho \rfloor} \left\lfloor \frac{1}{2} (\sqrt{4\rho^2 - 3p^2} - p) \right\rfloor \\ &= 1 + 6 \sum_{p=0}^{\lfloor \rho \rfloor} \left\lfloor \sqrt{\rho^2 - \frac{3}{4}p^2} - \frac{p}{2} \right\rfloor, \quad \rho = \frac{1}{2}(R/r - 1). \end{aligned}$$

Burada ρ , özgün çözümde n denilen yuvarlanmamış yarıçap parametresidir. İlk yeniden yazılıştan yanlış basılan $3/5$ katsayısı $3/4$ olarak düzeltilmiştir.^[E047]

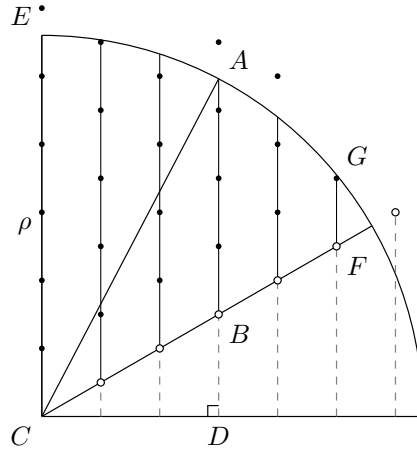
İspat için önce komşu merkezler arasındaki uzaklığı bir birim alıp yarıçapı ρ olan çemberin içindeki merkezleri sayalım. Merkezlerin oluşturduğu üçgensel düzende, şekildeki altı benzer sektörden yalnızca birini ele almak yeterlidir. $\circ$ ile gösterilen merkezler komşu sektördedir; ortak merkez C hiçbir sektöre dahil değildir. Bir sektördeki merkez sayısı, CE 'den FG 'ye kadar AB gibi uzunlukların tam kısımlarının toplamıdır. Tam sayı olan $CB = p$ alalım. $\angle BCD = 30^\circ$ olduğundan $CD = (\sqrt{3}/2)p$, $BD = p/2$ 'dir. $AC^2 = AD^2 + CD^2$ bağıntısından

$$\rho^2 = \left(AB + \frac{p}{2} \right)^2 + \frac{3}{4}p^2, \quad AB = \sqrt{\rho^2 - \frac{3}{4}p^2} - \frac{p}{2}.$$

elde edilir. Sektördeki merkez sayısı, bu ifadenin $p = 0$ ile $\lfloor \rho \rfloor$ arasındaki tam kısımlarının toplamıdır. Altı sektör ve ortak merkez C olduğundan

$$N = 1 + 6 \sum_{p=0}^{\lfloor \rho \rfloor} \left\lfloor \sqrt{\rho^2 - \frac{3}{4}p^2} - \frac{p}{2} \right\rfloor.$$

bulunur. Gerçekte komşu merkezlerin uzaklığı bir birim değil $2r$ 'dir. Dolayısıyla $2r\rho$ yarıçapı içinde N merkez; $R = 2r\rho + r$ yarıçapı içinde N çember bulunur. Böylece $\rho = \frac{1}{2}(R/r - 1)$ elde edilir ve ispat tamamlanır.



Şekil 7.3: 440 numaralı problem için üçgensel kafesin yarı açık 60° sektörü. Yayın içindeki dolu merkezler sayılır; alt ışındaki boş merkezler komşu sektöre aittir. Yayın yarıçapı, merkezler arası uzaklık biriminde ρ 'dur.

440 Numaralı Öneri Üzerine Açıklama

Mathematics Magazine **35** (1962), 316.

Kaynak PDF s. 127.

Açıklama: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Editör notu (özgün dergi). İfadede verilen N sayısı doğrudur. N , büyük çemberin tamamen içinde kalan küçük çemberleri, teğet olanlar dahil, sayar. A. Sutcliffe'in verdiği N sayısı kısmen içeride kalan çemberleri de kapsar; dolayısıyla her iki sayı da doğrudur.

Tarihsel açıklamaya editöryal düzeltme. Yukarıdaki iddia yanlıştır: Sutcliffe'in yarıçap parametresi $(R - r)/(2r)$ olduğundan zaten yalnızca tamamen içerilen çemberleri sayar. $R/r = 1 + 2\sqrt{3}$ için altı merkez, ortak merkezden $2\sqrt{3}r$ uzaklıktadır; bunların çemberleri büyük sınıra içten teğet olduğundan sayılmalıdır. Merkez çemberi ve en yakın altı komşusuyla birlikte sayı 7 değil 13 olur. Düzeltilmiş formül ve tarihsel açıklama, bu ayrım açıkça belirtilerek korunmuştur.^[E048]

458: De Moivre Teoremi

Mathematics Magazine **35** (1962), 126; öneri: Eylül 1961

Kaynak PDF s. 127.

Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye

Bir öğrenci De Moivre teoremini yanlışlıkla şu biçimde kullanmıştır:

$$(\sin \alpha + i \cos \alpha)^n = \sin n\alpha + i \cos n\alpha.$$

Bu eşitlik, α 'nın hangi değerleri için her n tam sayısında geçerlidir?

Çözüm: Dermott A. Breault, Sylvania Applied Research Laboratory, Waltham, Massachusetts.

$z = \cos \theta + i \sin \theta$ olsun. De Moivre teoremi doğru kullanıldığında $z^n = \cos n\theta + i \sin n\theta$ elde edilir. Önerilen bağıntı $(i/z)^n = i/z^n$ olduğundan

$$\frac{1}{z^n}(i^n - i) = 0.$$

olmalıdır. Ancak $z^{-n} \neq 0$ olduğundan, öneriyi her n tam sayısı için sağlayan hiçbir θ yoktur. Buna karşılık bağıntı, $n = 4k + 1$ biçimindeki bütün n 'ler için bir özdeşliktir.

Diğer çözenler: Brother U. Alfred, St. Mary's College, California; Leonard Carlitz, Duke University; Alan B. Delfino, St. Mary's College, California; P. D. Goodstein, University of Leicester, İngiltere; Harvey H. Green, R. C. A. Ascension Island (kısmen); Richard Levitt, Boston Latin School; David L. Silverman, Beverly Hills, California; Paul Stygar, Yale University; W. C. Waterhouse, Harvard University; ve problemi öneren.

472: Simetrik Konikler

Mathematics Magazine **35** (1962), 255; öneri: Ocak 1962

Kaynak PDF s. 128.

Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye

(C) , çember olmayan bir elips veya yarı eksenleri $a, b > 0$ olup $a^2 \neq 3b^2$, $b^2 \neq 3a^2$ koşullarını sağlayan bir hiperbol olsun. M , (C) üzerinde eksenler dışında değişken bir nokta olsun; eksenlerdeki değerler süreklilikle alınsın.^[E049] M 'nin asal eksene göre simetriği T , T 'deki teğet ise t olsun. M 'den t 'ye indirilen dikmenin, T 'yi koniğin merkezine birleştiren doğruyla kesişimi I olsun. M' , M 'nin I 'ya göre simetriği ise şunları ispatlayınız:

1. M' 'nin geometrik yeri, (C) ile aynı türden başka bir (C') koniğidir.
2. (C) ve (C') konikleri eş odaklıdır.

Çözüm: R. D. H. Jones, College of William and Mary, Virginia (düzeltilmiş). $a > b > 0$ olmak üzere konik $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ olsun. $M = (a \cos \Delta, b \sin \Delta)$ alırsak $T = (a \cos \Delta, -b \sin \Delta)$ olur ve T 'deki teğet $(x/a) \cos \Delta - (y/b) \sin \Delta = 1$ 'dir. MI bu teğete dik olduğundan

$$y - b \sin \Delta = -\frac{a \sin \Delta}{b \cos \Delta}(x - a \cos \Delta). \quad (1)$$

T 'yi merkeze birleştiren doğru

$$\frac{x}{a \cos \Delta} + \frac{y}{b \sin \Delta} = 0. \quad (2)$$

biçimindedir. Eksenler dışında kesişimlerinin koordinatları

$$I = \left(\frac{a(a^2 + b^2)}{a^2 - b^2} \cos \Delta, -\frac{b(a^2 + b^2)}{a^2 - b^2} \sin \Delta \right).$$

olur. Varsayıma göre $M' = 2I - M$ olduğundan

$$x_{M'} = \frac{a(a^2 + 3b^2)}{a^2 - b^2} \cos \Delta, \quad y_{M'} = -\frac{b(3a^2 + b^2)}{a^2 - b^2} \sin \Delta.$$

yazılır. Şimdi

$$A = \frac{a(a^2 + 3b^2)}{a^2 - b^2}, \quad B = \frac{b(3a^2 + b^2)}{a^2 - b^2}.$$

alalım. Bunlar yeni elipsin düzeltilmiş yarı eksen uzunluklarıdır. Şu bağıntıyı sağlarlar:

$$A^2 - B^2 = \frac{(a^2 - b^2)^3}{(a^2 - b^2)^2} = a^2 - b^2,$$

Dolayısıyla elipsler eş odaklıdır. Eksen noktalarındaki değerler süreklilikle elde edilir.^[E049]

Hiperbol için editöryal tamamlama. $x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$ için karşılık gelen parametrizasyon, bir dal üzerinde

$$x_{M'} = \frac{a(a^2 - 3b^2)}{a^2 + b^2} \cosh t, \quad y_{M'} = \frac{b(b^2 - 3a^2)}{a^2 + b^2} \sinh t$$

verir; diğer dal merkezi yansımayla elde edilir. Yeni yarı eksenlerin kareleri toplamı $a^2 + b^2$ olduğundan odaklar değişmez. $a^2 = 3b^2$ veya $b^2 = 3a^2$ ise bir yarı eksen sıfır olur ve geometrik yer yozlaşır. Yozlaşmamış hiperbol sonucu için bu durumlar dışlanmalıdır. Kaynağın sanal bir b kullanarak yaptığı geçiş bu istisnaları atlamıştır.^[E049]

487: Bir Matrisin Karekökü

Mathematics Magazine **36** (1963), 76

Kaynak PDF s. 129–130.

Öneren: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye

$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ matrisinin karekökünü bulunuz.

Çözüm: Maurice Brisebois, Université de Sherbrooke, Kanada (gösterimi düzeltilmiş). Kaynak, tersinir bir matris için daha genel $X^m = A$ denklemini ele alır. $\mathbb{C}$ üzerinde $A = UJU^{-1}$ olsun; burada

$$J = \text{diag}(J_1, \dots, J_s), \quad J_i = \lambda_i I_{p_i} + H_{p_i}, \quad \sum_{i=1}^s p_i = n,$$

ve H_{p_i} , ana köşegenin hemen üstünde 1, diğer yerlerde 0 bulunan matristir. Her sıfırdan farklı λ_i için bir m . kök μ_i seçip

$$R_i = \mu_i \sum_{k=0}^{p_i-1} \binom{1/m}{k} \lambda_i^{-k} H_{p_i}^k.$$

yazalım. Bütün kökler, μ_i dallarının tüm seçimlerine izin verilerek

$$X = UZ \text{diag}(R_1, \dots, R_s)Z^{-1}U^{-1}, \quad ZJ = JZ, \quad \det Z \neq 0,$$

biçiminde elde edilir. Bu yazılış, özgün çözümdeki blok kökü gösterimini açar; matris boyutunu, blok sayısını ve kök derecesini birbirinden ayırır.^[E050]

Köşegenleştirilebilir 2×2 bir matris için bu ifade

$$X = UZ \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1} & 0 \\ 0 & \sqrt{\lambda_2} \end{pmatrix} Z^{-1}U^{-1},$$

biçimine indirgenir. Burada skaler karekökler bağımsız seçilir ve Z , köşegen biçimle değişmelidir. Kaynak bu özel durumu, gerekli köşegenleştirilebilirlik koşulunu belirtmeden verir. Buna karşılık tersinir bir Jordan bloğunun kökleri

$$\pm \begin{pmatrix} \sqrt{\lambda} & 1/(2\sqrt{\lambda}) \\ 0 & \sqrt{\lambda} \end{pmatrix}.$$

biçimindedir. Tekil matrisler için kaynak bir “uygun elemanter bölenler” sistemi tartışır: önerilen kökün nilpotent blokları, m . kuvvetleri alındığında A ’nın nilpotent bloklarını vermelidir. Basılı blok açıklamasında A ile X ’in blokları karıştırılmıştır. Aşağıdaki açık 2×2 çözüm bu belirsizliği önler.

Açıklamalar (düzeltilmiş). Köklerin hepsinin A ’nın polinomları olması gerekmez. Farklı özdeğerler, bütün köklerin polinom olması için yeterli, fakat gerekli değildir. Tersinir Z matrisleri, A ile değişmeli matrisler uzayının açık bir altkümelerini oluşturur. Sabit olmayan değişmez çarpanların dereceleri $n_1 \geq \dots \geq n_t$ ise bu uzayın boyutu

$$N = \sum_{i=1}^t (2i - 1)n_i.$$

kadardır. Bu, kullanılabilecek değişmeli matrislerin uzayının boyutudur; elde edilen köklerdeki bağımsız parametrelerin sayısı olmak zorunda değildir, çünkü farklı Z ’ler aynı kökü verebilir. Örneğin $A = I_2$ için değişmeli matrisler uzayının boyutu 4 iken skaler olmayan involüsyonlar iki boyutlu bir aile oluşturur.

Kaynak bu konudaki sonuçlar için Lusternik–Sobolev, *Elements of Functional Analysis*, s. 283; Dunford–Schwartz, *Linear Operators*, I. Kısım, s. 583, problem 31; Bellman, *Introduction to Matrix Analysis*, s. 93, problem 1–3’e başvurur.^[E050]

Verilen probleme açık editöryal yanıt. $\tau = \text{tr } A$, $\delta = \det A$ yazalım. A skaler değilse bütün karmaşık karekökleri şunlardır:

$$X = \frac{A + sI_2}{t}, \quad s^2 = \delta, \quad t^2 = \tau + 2s, \quad t \neq 0.$$

Gerçekten $A^2 - \tau A + \delta I_2 = 0$ bağıntısı formülü doğrular. Tersine $X^2 = A$, $XA = AX$ ’i gerektirir. Skaler olmayan bir 2×2 matrisle değişmeli matrisler $\alpha A + \beta I_2$ biçimindedir. Katsayılar karşılaştırılınca $\alpha^2 \tau + 2\alpha \beta = 1$, $\beta^2 = \alpha^2 \delta$ elde edilir; bunlar gösterilen ifadeyi verir. Formül, izi sıfırdan farklı olan tekil ve skaler olmayan A ’ları da kapsar. Sıfırdan farklı nilpotent bir 2×2 matrisin karekökü yoktur; çünkü bu durumda $\tau = \delta = 0$, $t = 0$ ’ı zorunlu kılar.

$A = \lambda I_2$, $\lambda \neq 0$ ise kökler $\pm \sqrt{\lambda} I_2$ ve $\text{diag}(\sqrt{\lambda}, -\sqrt{\lambda})$ ’nın bütün eşlenikleridir. $A = 0$ ise kökler tam olarak $X^2 = 0$ sağlayan matrislerdir: sıfır matrisi ve $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ’in eşlenikleri. Bunlar $\mathbb{C}$ üzerindeki açıklamalardır; elde edilen matrisin elemanları gerçel olduğunda ve ancak o zaman bir gerçel kök bulunur.^[E050]

Diğer çözenler: Brother U. Alfred, St. Mary’s College, California; J. A. H. Hunter, Toronto, Kanada; Francis D. Parker, University of Alaska; Gilbert Labelle, University of Montreal, Kanada; C. F. Pinzka, University of Cincinnati; J. L. Stearn, Washington, D. C.; ve problemi öneren.

498: Çarpımsal Fonksiyonların Bir Özelliği

Mathematics Magazine **36** (1963), 201; öneri: Kasım 1962

Kaynak PDF s. 130–131.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

m, n pozitif tam sayılar; δ, D sırasıyla bunların en büyük ortak böleni ve en küçük ortak katı olsun. $d(n)$, n ’nin pozitif bölenlerinin sayısını; $\varphi(n)$ ise Euler fonksiyonunu göstermek üzere şu bağıntıları ispatlayınız:

$$d(m)d(n) = d(\delta)d(D), \tag{1}$$

$$\varphi(m)\varphi(n) = \varphi(\delta)\varphi(D). \tag{2}$$

Çözüm: L. Carlitz, Duke University. Sonuç, aşağıdaki teoremin özel bir durumudur. $f(n)$ herhangi bir çarpımsal fonksiyon olsun; yani $(m, n) = 1$ sağlayan bütün pozitif m, n için $f(mn) = f(m)f(n)$ olsun. O zaman

$$f(m)f(n) = f(\delta)f(D), \quad (*)$$

geçerlidir; burada $\delta = (m, n)$ en büyük ortak bölen, $D = [m, n]$ en küçük ortak kattır.

İspat doğrudandır. $m = \prod_p p^{r_p}$, $n = \prod_p p^{s_p}$ ise

$$\delta = \prod_p p^{r'_p}, \quad D = \prod_p p^{s'_p}, \quad r'_p = \min(r_p, s_p), \quad s'_p = \max(r_p, s_p).$$

olur. Sırasız $\{r'_p, s'_p\}$ ve $\{r_p, s_p\}$ çiftleri aynı olduğundan

$$f(\delta)f(D) = \prod_p f(p^{r'_p})f(p^{s'_p}) = \prod_p f(p^{r_p})f(p^{s_p}) = f(m)f(n).^{[E051]}$$

Diğer çözenler: Stephen R. Cavior, Duke University; Daniel I. A. Cohen, Brooklyn, New York; George Diderick, University of Wisconsin; Murray S. Klamkin, State University of New York at Buffalo; David A. Klarner, Humboldt College, California; Gilbert Labelle, Université de Montréal; Jerry L. Pietenpol, Columbia University; Robert Prielipp, University of Wisconsin; Sam Sesskin, Hempstead, New York; David L. Silverman, Beverly Hills, California; Irene Williams, Converse College, South Carolina; ve problemi öneren.

509: Amerika Üzerine Bir Harfli İşlem

Mathematics Magazine **36** (1963), 321; öneri: Mart 1963

Kaynak PDF s. 132–133.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Aşağıdaki harfli işlem bulmacasını, α rakamını da kullanarak 11 tabanında çözünüz:

$$\begin{array}{rcccccc} U & N & I & T & E & D \\ S & T & A & T & E & S \\ \hline A & M & E & R & I & C & A \end{array}$$

Çözüm: Anton Glaser, Ogontz Campus, Pennsylvania State University. Çözümümü şu şekilde elde ettim:

- (1) $A = 1$ 'dir. Her sayı sisteminde iki rakam toplanırken elde en fazla 1 olabilir.
- (2) $D \neq 0$ 'dır. $D = 0$ varsayılırsa $S \neq A$ ile çelişen $S = A = 1$ elde edilir.
- (3) (2)'ye benzer biçimde $S \neq 0$ 'dır.
- (4) $E \neq 0$ 'dır. $E = 0$ varsayılırsa $C \neq A$ ile çelişen $C = A = 1$ elde edilir.
- (5) $T \neq 0$ 'dır. $T = 0$ ise ya $I = A = 1$, $I \neq A$ ile; ya da $T = I = 0$, $T \neq I$ ile çelişir.
- (6) Harfli işlem bulmacalarının olağan kurallarına göre $U \neq 0$ ve $S \neq 0$ 'dır.
- (7) $E \neq \alpha$ 'dır. $E = \alpha$ ise $C = E = \alpha$ olur ve $C \neq E$ ile çelişir.
- (8) $U + S > 9$.
- (9) N sütunundan elde gelmiyorsa $U + S > \alpha$ 'dır.

(10) $D + S = 11_{(\text{on bir})} = 12_{\text{on}} = \text{on iki'dir.}$

D, S için yalnızca şu eşleşmeler mümkündür:

D	2	3	4	5	7	8	9	α
S	α	9	8	7	5	4	3	2

$A = 1$ olduğundan ne D ne de S , 1 olabilir. İkisi de 6 olamaz; çünkü bu durumda $D = S = 6$ olur ve $D \neq S$ ile çelişir.

(11) $T \neq 2, 3, 4, 5$ 'tir. Bu değerlerin her biri ve E 'nin kalan olası değerleri bir çelişki verir.^[E052]

(12) $T = 6, E = 5$ için kalan harflerle kalan rakamlar arasında, bulmacayı sağlayan bire bir eşleme yapılabilir:

8	α	2	6	5	3	
9	6	1	6	5	9	
1	7	5	4	2	0	1

Editöryal doğrulama. Farklı rakamlar ve sıfırdan farklı baş harfler koşuluyla 11 tabanındaki sütun denklemlerinin tüm olasılıkları sayıldığında tam olarak bu tek çözüm bulunur.^[E052]

Diğer çözenler: Josef Andersson, Vaxholm, İsveç; Merrill Barneby, University of North Dakota; Maxey Brooke, Sweeny, Texas; Harry M. Gehman, State University of New York at Buffalo; Wahin Ng, San Francisco, California; Norman Harelik, Mather High School, Chicago, Illinois; J. A. H. Hunter, Toronto, Ontario, Kanada; Robert Sandling, Columbia University; Anita Skelton, Watervliet Arsenal, New York; David L. Silverman, Beverly Hills, California; Orvan Sommers, West Bend High School, Wisconsin; C. W. Trigg, Los Angeles City College; Hazel S. Wilson, Jacksonville University, Florida; Brother Louis F. Zirkel, Archbishop Molloy High School, Jamaica, New York; ve problemi öneren.

517: Parabolik Alanlar

Mathematics Magazine **37** (1964), 56; öneri: Mayıs 1963

Kaynak PDF s. 133–135.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Buradaki iki bölgenin ortak sınırı, doğru parçası olan MN kirişi değil, parabolün MN yayıdır.^[E030] *Bir parabolün odağı F , doğrultmanı d olsun. M, N parabol üzerinde herhangi iki nokta ve M', N' bunların d üzerindeki dik izdüşümleri ise şu oranın sabit olduğunu gösteriniz:*

$$\frac{\text{Alan } FMN}{\text{Alan } N'M'MN} = \text{Sabit.}$$

I. Çözüm: Francis D. Parker, University of Alaska. Odak uzaklığını f alıp doğrultmanı x eksenine, odağı y eksenine yerleştirirsek parabolün denklemi $y = x^2/(4f) + f$ olur. M, N 'nin apsisiyle sırasıyla a, b ve $a < b$ ise doğrudan hesapla

$$\text{Alan } MM'N'N = \int_a^b y \, dx = \frac{b-a}{12f} (12f^2 + a^2 + ab + b^2)$$

ve

$$\text{Alan } FMN = \frac{b-a}{24f} (12f^2 + a^2 + ab + b^2).$$

bulunur. Dolayısıyla alanların oranı f, a, b 'den bağımsızdır ve $1/2$ 'ye eşittir. Burada, odak noktasından ayırmak için kaynakta F denilen odak uzaklığı f ile gösterilmiştir. Her iki alanın sınırında parabol yayı vardır.^[E030]

Editöryal ayrıntı. Odak $(0, 2f)$ 'dir. Buradan çıkan konum vektörünün taradığı alan

$$\frac{1}{2} \int_a^b (xy' - (y - 2f)) dx = \frac{1}{2} \int_a^b y dx,$$

olur; bu, atlanan hesabı doğrudan verir.

II. Joel Kugelmass, Stanford University ve National Bureau of Standards tarafından verilen tarihsel akıl yürütme (geçerli bir ispat değildir). Herhangi bir $f_1(x)$ parabolünün, bir projektif P dönüşümü, ortogonal O dönüşümü ve uygun dönme ve ötelemelerle başka bir $f_2(x)$ parabolüne dönüştürülebileceği açıktır. Bu dönüşümlerin tümü, üçgensel bölgenin alanının yamuksal bölgenin alanına oranını korur. Dolayısıyla her parabolü $y = x^2$ biçimine dönüştürebiliriz. Yeniden dönüştürüp $\lim M - N = 0$ yaparsak alanlar açıkça yüksekliklerinin uzunluklarına, bunlar da odaktan merkeze uzaklık olan p 'ye yaklaşır. Pay ve paydanın bölge alanları olduğu $z = (p + \epsilon_1)/(p + \epsilon_2)$ fonksiyonu, yeterince çok dönüşümden sonra $(\epsilon_1 + \epsilon_2 < \delta)$ monotondur ve dolayısıyla limite yaklaşır. Verilen dönüşümler altında bütün oranlar aynı olduğundan başlangıçtaki oran bir sabite eşittir ve teorem ispatlanmıştır.

Editöryal değerlendirme. Genel projektif dönüşümler alan oranlarını veya Öklid geometrisindeki odak-doğrultman verilerini korumaz. Limit akıl yürütmesi de alanların uzunluklarla değiştirilmesini ya da öne sürülen monotonluğu gerekçelendirmez. I. çözüm, düzeltilmiş eğrisel bölge ifadesini bu iddialara başvurmadan ispatlar.^[E053]

Diğer çözenler: Josef Andersson, Vaxholm, İsveç; Michael J. Pascual, Watervliet Arsenal, New York; Hazel S. Wilson, Jacksonville University, Florida; ve problemi öneren.

Editör notu (özgün dergi). Dermott A. Breault, Sylvania Electric Products, Inc., Waltham, Massachusetts; P. R. Nolan, Department of Education, Dublin, İrlanda; Brother Louis F. Zirkel, Archbishop Molloy High School, Jamaica, New York; her biri, *FMN* ve $N'M'MN$ bölgeleri parabolün MN yayıyla sınırlı alanlar yerine doğru parçalarıyla sınırlı alanlar olarak alınırsa önerinin yanlış olduğunu belirtmiştir. Bir yanlış çözüm alınmıştır.

517 Numaralı Problem Üzerine Açıklama

Mathematics Magazine **37** (1964), 517 [derlemedeki künye; dergi sayfası bağımsız olarak doğrulanmamıştır].

Kaynak PDF s. 134–135.

Açıklama: Josef Andersson, Vaxholm, İsveç. Alanların bu özelliği parabolü bir bakıma karakterize eder. Gerçekten, $X'OX, Y'OY$ ortonormal koordinatlarına bağlı kutupsal koordinatlarda K eğrisinin denklemi $r = f(\phi)$ olsun. K 'nin her P noktasında $OQ(r, 0)$ vektörüne eşit PP' çizilirse P' noktası K' eğrisini tarar. Sırasıyla $X'OX, OP, K$ ve $K, PP', K', X'OX$ arasında kalan alanları A_1, A_2 ile gösterelim. Şu koşul

$$\frac{1}{2}r^2 = \frac{dA_1}{d\phi} = \frac{1}{2} \frac{dA_2}{d\phi} = \frac{1}{2} \frac{dA_2}{d(r \sin \phi)} \frac{d(r \sin \phi)}{d\phi} = \frac{1}{2}r \frac{d(r \sin \phi)}{d\phi} \quad (1)$$

şu bağıntıları verir:

$$\frac{d(r \sin \phi)}{r \sin \phi} + \frac{d(\cot(\phi/2))}{\cot(\phi/2)} = 0, \quad 2r \cos^2 \frac{\phi}{2} = \text{sabit}.$$

Dolayısıyla K , odağı O , eksenini $X'OX$ olan bir paraboldür; K' ise doğrultmanıdır. Başlangıçta noktalardan biri tepe noktasında alınırsa varsayım ve $1/2$ oranı (1)'den hemen çıkar.

529: Eğrilik Merkezi

Mathematics Magazine **37** (1964), 124; öneri: Eylül 1963

Kaynak PDF s. 135–136.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Bir sikloid (kardiyoid), bir doğru üzerinde kaymadan yuvarlanmaktadır. Değme noktasındaki eğrilik merkezinin geometrik yerinin bir çember (elips) üzerinde bulunduğunu ispatlayınız; bir yay (bir tam tur) boyunca çizilen kısmı belirleyiniz.^[E054]

Çözüm: P. R. Nolan, Department of Education, Dublin, İrlanda. Sikloid. Olağan durumda $\omega t = \alpha$ yazılırsa

$$x = a(\alpha - \sin \alpha), \quad y = a(1 - \cos \alpha).$$

elde edilir. Olağan yöntemlerle başlangıçtan itibaren yay uzunluğu ve eğrilik yarıçapı

$$S_\alpha = 4a(1 - \cos(\alpha/2)), \quad P_\alpha = 4a \sin(\alpha/2).$$

olarak bulunur. Bir yay, y eksenini boyunca bir kez yuvarlanırsa değme noktasındaki eğrilik merkezinin koordinatları (P_α, S_α) olur. Dolayısıyla geometrik yeri

$$x^2 + (y - 4a)^2 = (4a)^2,$$

ile verilen bir yarım çemberdir; $x(P)$ 'nin negatif değerleri alınmaz. Geometrik yeri tam çembere tamamlamak için sonraki yayın y eksenini boyunca geri yuvarlandığını düşünmek gerekir.

Kardiyoid. Kutupsal koordinatlarda $r = a(1 - \cos \theta)$ 'dir. Önceki gibi

$$S_\theta = 4a(1 - \cos(\theta/2)), \quad P_\theta = \frac{4a}{3} \sin(\theta/2).$$

elde edilir. Kardiyoid x ekseninin üst tarafında bir kez yuvarlanırsa değme noktasındaki eğrilik merkezinin koordinatları (S_θ, P_θ) olur. Geometrik yeri

$$(x - 4a)^2 + 9y^2 = (4a)^2,$$

ile verilen bir elipsin üst yarısıdır; $y(P)$ 'nin negatif değerleri alınmaz. Diğer yarı için aynı kardiyoidin eksenin alt tarafında da yuvarlanması gerekir.^[E054]

Diğer çözenler: problemi öneren.

537: Ortak Alanın Ekstremleri

Mathematics Magazine **37** (1964), 277; öneri: Ocak 1964

Kaynak PDF s. 136–137.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Aynı çembere içten çizilmiş bir eşkenar üçgen ile bir karenin ortak alanının ekstremum olması için birbirlerine göre konumlarını belirleyiniz.

Çözüm: Michael Goldberg, Washington, D. C. Ekstremler, kare ile üçgenin birbirine göre simetrik konumlarında oluşur.

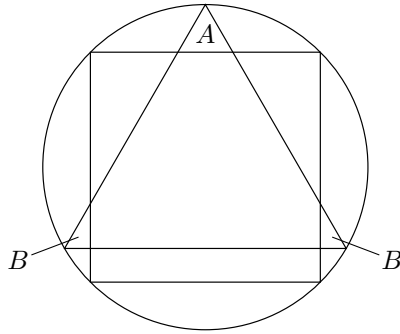
En küçük ortak alan, soldaki şekilde olduğu gibi karenin bir kenarı üçgenin bir kenarına paralelken oluşur. Üçgenin dışarı taşan parçaları A, B ile gösterilmiştir. Bu konumdan sonsuz küçük bir dönmeye, B alanlarından birindeki artış diğerindeki azalmayla dengelenirken A alanı küçülür.

En büyük ortak alan, sağdaki şekilde olduğu gibi karenin bir köşesi üçgenin bir köşesiyle çakışırken oluşur. Üçgenin eşit taşan parçaları C ile gösterilmiştir. Sonsuz küçük bir dönmeye bir C alanındaki artış diğerindeki azalmayla dengelenir; ancak üçüncü köşedeki bir parça artık dışarı taşar.

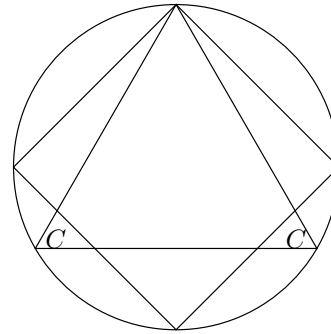
Çemberin yarıçapı birim alınırsa, basılı ilk iki ifade düzeltilerek alanlar şöyle bulunur:

$$A = \frac{(\sqrt{2} - 1)^2}{2\sqrt{3}}, \quad 2B = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2}{4}, \quad 2C = \frac{9 - 5\sqrt{3}}{4}.$$

Böylece $A + 2B \approx 0.0933$ en büyük taşma (en küçük ortak alan), $2C \approx 0.0849$ en küçük taşmadır (en büyük ortak alan). Ortak alanlar sırasıyla $3\sqrt{3}/4 - A - 2B$ ve $3\sqrt{3}/4 - 2C$ 'dir.^[E055]



Paralel kenarlar



Ortak bir köşe

Şekil 7.4: 537 numaralı problemdeki iki simetrik konum: solda en küçük, sağda en büyük ortak alan. Harfler üçgenin kare dışında kalan parçalarını gösterir.

544: Koşullu Bir Harfli İşlem

Mathematics Magazine **37** (1964), 354; öneri: Mart 1964

Kaynak PDF s. 137–138.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Aşağıdaki harfli işlem bulmacasını

$$ONE + TWO + SIX = NINE$$

10 tabanında, şu koşullar altında çözünüz:

(a) $ONE < TWO < SIX$;

(b) $2 \mid TWO$, $6 \mid SIX$, $9 \mid NINE$; burada $a \mid b$, “ a , b ’yi böler” anlamındadır.

Çözüm: Sister Mary Joy, Notre Dame College, St. Louis, Missouri. Her harf farklı bir rakamı gösterdiğinden (a) koşulundan $O < T < S$, $S \geq O + 2$, $T \geq O + 1$; (b) koşulundan ise TWO ve SIX ’in çift olduğu hemen görülür.

Toplamın birler basamağında E bulunduğuna dikkat edelim. Böylece $O + X = 10$ olur. X, O birer rakamdır; hiçbirisi sıfır olamaz ve toplam $1E$ ’yi aşamaz. Toplamın onlar basamağında N bulunduğundan $W + I = 9$ elde edilir. Birler sütunundan 1 elde geldiği için $W + I \neq 10$ ’dur.

Böylece X, O için dört sıralı çift mümkündür: $(8, 2), (2, 8), (6, 4), (4, 6)$. W, I için toplanan çiftleri, daha önce kullanılan rakamları yinelemeyecek biçimde seçilir. $S \geq O + 2$ olmak üzere $6 \mid SIX$ sağlayan S değerleri alınır. Şimdiye kadar tekrar yoksa $T, O + T + S + 1 = 10N + I$

olacak biçimde seçilir.^[E056] Yine rakam tekrarı olmadan $E, 9 \mid NINE$ koşuluyla belirlenir. Sonuçta çözüm şöyledir:

<i>ONE</i>	217
<i>TWO</i>	392
<i>SIX</i>	408
<i>NINE</i>	1017

Diğer çözenler: Josef Andersson, Vaxholm, İsveç; Merrill Barneby, University of North Dakota; Maxey Brooke, Sweeny, Texas; J. L. Brown, Jr., Ordnance Research Laboratory, State College, Pennsylvania; David M. Cohen, East Midwood Day School, Brooklyn, New York; Martin J. Cohen, Beverly Hills, California; Michael P. Commonoff, Lew Wallace High School, Gary, Hindistanna; John A. Dossy, Illinois State University, Normal, Illinois; Joseph M. Fice, Massachusetts Institute of Technology; C. E. Franti, Berkeley, California; Philip Fung, Fenn College, Ohio; Harry M. Gehman, SUNY at Buffalo, New York; Murray Geller, Jet Propulsion Laboratory, Pasadena, California; Anton Glasser, Pennsylvania State University, Abington, Pennsylvania; Garold F. Gregory, Forest Disease Research Laboratory, Delaware, Ohio; C. T. Haskell, California State Polytechnic College, San Luis Obispo, California; Burton S. Holland, Harpur College, New York; William R. Holt, Delaware, Ohio; J. A. H. Hunter, Toronto, Ontario, Kanada; Joseph D. E. Konhauser, HRB-Singer, Inc., State College, Pennsylvania; Janice Langan, Lew Wallace High School, Gary, Hindistanna; John W. Malsom, Texas A and I, Kingsville, Texas; Wa Hin Ng, San Francisco, California; C. C. Rice, IBM, Endicott, New York; Perry A. Scheinok, Hahnemann Medical College, Philadelphia, Pennsylvania; C. W. Trigg, San Diego, California; A. M. Vaidya, Pennsylvania State University; J. S. Vider, Ottawa, Kanada; Thomas Wotain, Lew Wallace High School, Gary, Hindistanna; Dale Woods, Northeast Missouri State Teachers College; Charles Ziegenfus, Madison College, Virginia; ve problemi öneren.

563: Altıgende Açılar

Mathematics Magazine **38** (1965), 122; öneri: Eylül 1964

Kaynak PDF s. 139.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

A, B', A', B bir düzgün altıgenin ardışık dört köşesi olsun. M , çevrel çemberin uç noktaları hariç küçük $A'B'$ yayı üzerinde bulunsun.^[E057] MA, MB doğruları BB', AA' doğrularını sırasıyla E, F noktalarında kesiyorsa aşağıdaki eşitlikleri ispatlayınız:

$$\angle MEF = 3\angle MAF, \quad (a)$$

$$\angle MFE = 3\angle MBE. \quad (b)$$

Çözüm: Richard A. Jacobson, South Dakota State University. $AB' = x$, $\angle MAF = a$ olsun. $\angle AB'B = \angle AA'B = \angle AMB = 90^\circ$ olduğundan $AMB, AB'E, AA'B$ üçgenlerinden

$$AM = 2x \cos(30^\circ + a), \quad BM = 2x \sin(30^\circ + a), \quad AE = \frac{x}{\cos(30^\circ - a)}, \quad BF = \frac{x}{\cos a}.$$

elde edilir. Böylece EMF üçgeninde

$$\begin{aligned}
 \tan \angle MEF &= \frac{MF}{ME} = \frac{BM - BF}{AM - AE} \\
 &= \frac{2 \sin(30^\circ + a) - 1/\cos a}{2 \cos(30^\circ + a) - 1/\cos(30^\circ - a)} \\
 &= \frac{2 \sin(30^\circ + a) \cos a - 1}{\cos a} \frac{\cos(30^\circ - a)}{2 \cos(30^\circ + a) \cos(30^\circ - a) - 1} \\
 &= \frac{2 \sin(30^\circ + 2a) - 1}{\cos a} \frac{\cos(30^\circ - a)}{2 \cos(2a) - 1} \\
 &= \frac{2 \sin(30^\circ + 2a) \cos(30^\circ - a) - \cos(30^\circ - a)}{2 \cos(2a) \cos a - \cos a} \\
 &= \frac{\sin(60^\circ + a) + \sin(3a) - \cos(30^\circ - a)}{\cos(3a) + \cos a - \cos a} = \frac{\sin(3a)}{\cos(3a)} = \tan(3a).
 \end{aligned}$$

bulunur. Verilen açık yay konumunda $0 < a < 30^\circ$ olduğundan $\angle MEF = 3\angle MAF$ 'dir. (b) kısmı da benzer biçimde yapılır.^[E057]

Diğer çözenler: Leon Bankoff, Los Angeles, California; J. D. E. Konhauser, HRB-Singer, State College, Pennsylvania; Stanley Rabinowitz, Far Rockaway, New York; Sidney Spital, California State Polytechnic College; ve problemi öneren.

572: Bir Anma Bulmacası

Mathematics Magazine **38** (1965), 242; öneri: Ocak 1965

Kaynak PDF s. 140.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Başkan Kennedy'nin anısına. J. F. Kennedy, 22 Kasım 1963'te, yani ay-gün-yıl sırasıyla 11-22-1963 tarihinde öldürülmüştür. Aşağıdaki harfli işlem bulmacasını

$$JF \cdot (KEN + NEDY) = (11 + 22) \cdot 1963$$

onluk sayı sisteminde çözünüz.

Çözüm: Harry M. Gehman, SUNY at Buffalo, New York. $(11+22) \cdot 1963$, 3, 11, 13, 151 asallarının çarpımı olduğundan JF için yalnızca 13 ve 39 mümkündür. İkinci durum çelişki verdiği için $J = 1$, $F = 3$ olur. Buradan $KEN + NEDY = 4983$, dolayısıyla $N = 4$, $Y = 9$ ve ya $K = 2$, $E = 7$, $D = 0$ ya da $K = 7$, $E = 2$, $D = 5$ elde edilir. Böylece

$$(11 + 22) \cdot 1963 = 13 \cdot (274 + 4709) = 13 \cdot (724 + 4259).$$

Bu problemin iki çözümü olması, (bir Cumhuriyetçiye göre) JFK 'nin *biricik olmadığı* anlamına gelir.

Diğer çözenler: Robert H. Anglin, Danville, Virginia; Merrill Barneby, University of North Dakota; Murray Berg, Standard Oil Company, San Francisco, California; Charles R. Berndtson, Institute of Naval Studies, Cambridge, Massachusetts; Dermott A. Breault, Sylvania A.R.L., Waltham, Massachusetts; Robert Brodeur, Lachine, Kanada; Maxey Brooke, Sweeny, Texas; Allan Chuck, San Francisco, California; R. J. Cormier, Northern Illinois University; Monte Derham, San Francisco, California; Herta T. Freitag, Roanoke, Virginia; Philip Fung, Fenn College, Ohio; Anton Glaser, Pennsylvania State University, Ogontz Campus; Elmer E. Hunt, Jr., Boise

Junior College, Boise, Idaho; J. A. H. Hunter, Toronto, Ontario, Kanada; Joel V. Kamer, Cambridge, Massachusetts; John Koelzer, University of Iowa; Wahin Ng, San Francisco, California; C. C. Oursler, Southern Illinois University (Edwardsville); Harry Panish, Pomona, California; Laurence A. Ringenberg, Eastern Illinois University; Sidney Spital, California State Polytechnic College; P. K. Subramanian, Miami University, Ohio; Charles W. Trigg, San Diego, California; William K. Viertel, State University Agricultural and Technical College, Canton, New York; Dale Woods, Northeast Missouri State Teachers College; Charles Ziegenfus, Madison College, Virginia; ve problemi öneren.

587: Bir Trigonometrik Eşitsizlik

Mathematics Magazine **39** (1966), 127; öneri: Mayıs 1965

Kaynak PDF s. 141–142.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Aşağıdaki eşitsizliği ispatlayınız:^[E029]

$$\left(\frac{\theta + \sin \theta}{\pi}\right)^2 + \cos^4 \frac{\theta}{2} < 1, \quad 0 < |\theta| < \pi.$$

Çözüm: Samuel Wolf, Linthicum Heights, Maryland. Şöyle tanımlayalım:

$$F(\theta) = \left(\frac{\theta + \sin \theta}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{1 + \cos \theta}{2}\right)^2.$$

Türev alıp sonucu sıfıra eşitlersek

$$\frac{2}{\pi^2}(\theta + \sin \theta)(1 + \cos \theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos \theta) \sin \theta.$$

Açık aralıkta $\cos \theta \neq -1$ olduğundan bu eşitlik

$$\frac{4}{\pi^2}\theta + \left(\frac{4}{\pi^2} - 1\right) \sin \theta = 0.$$

biçimine dönüşür. Bir çözüm $\theta = 0$ 'dır; sıfırdan farklı çözümler ise

$$\frac{\sin \theta}{\theta} = \frac{4}{\pi^2 - 4} \approx 0.6815, \quad \theta \approx \pm 1.46$$

bağıntısını sağlar (Jahnke ve Emde, ek, s. 33). Karşılık gelen değerler $F(0) = 1$ ve $F(\pm 1.46) \approx 0.92$ 'dir. İkinci türev

$$\begin{aligned} F''(\theta) &= \frac{2}{\pi^2} [(1 + \cos \theta)^2 - (\theta + \sin \theta) \sin \theta] \\ &\quad - \frac{1}{2} [-\sin^2 \theta + (1 + \cos \theta) \cos \theta]. \end{aligned}$$

olup sıfırda negatif, sıfırdan farklı iki durağan noktada pozitifdir. Dolayısıyla $F \leq 1$ 'dir. Sıfır tanım kümesinde tutulacaksa eşitlik işareti gereklidir.^[E029]

Diğer çözenler: Murray S. Klamkin, Ford Scientific Laboratory, Dearborn, Michigan; C. B. A. Peck, State College, Pennsylvania; Simeon Reich, Haifa, Israel; Sidney Spital, California State Polytechnic College; K. L. Yocom, South Dakota State University; ve problemi öneren.

Editör notu (özgün dergi). Raymond E. Whitney, Lock Haven State College, Pennsylvania, eşitsizliğe eşitlik işaretinin de eklenmesi gerektiğini belirtmiştir.

Editöryal tamamlama. Durağan noktalara ilişkin sayısal gerekçenin yerine kesin bir kanıt koymak için $\sin \theta / \theta$ 'nın $(0, \pi)$ üzerinde 1'den 0'a kesin azaldığına dikkat edelim. Gerçekten, türevin payı $\theta \cos \theta - \sin \theta$ sıfırdan başlar ve türevi $-\theta \sin \theta < 0$ 'dır. Ayrıca

$$F'(\theta) = \frac{1 + \cos \theta}{2} \left[\frac{4\theta}{\pi^2} - \left(1 - \frac{4}{\pi^2} \right) \sin \theta \right].$$

$(0, \pi)$ içinde tam bir durağan nokta vardır ve bu nokta kesin minimumdur. $F(0) = F(\pi) = 1$ olduğundan $0 < \theta < \pi$ için $F(\theta) < 1$ elde edilir; fonksiyonun çift olması savın negatif yarısını da kanıtlar.^[E058]

587 Numaralı Problem Üzerine Yorum

Mathematics Magazine **39** (1966), 188.

Problemi önerenin yorumu (elipsin paydası düzeltilmiştir). Verilen eşitsizlik

$$\left(\frac{\theta + \sin \theta}{\pi} \right)^2 + \left(\frac{1 + \cos \theta}{2} \right)^2 < 1.$$

ile eşdeğerdir. Şimdi $x = \theta + \sin \theta$, $y = 1 + \cos \theta$ sikloidini ve

$$\frac{x^2}{\pi^2} + \frac{y^2}{4} = 1. \text{ [E058]}$$

elipsini ele alalım. Bunların başlangıçları ortak, çapları eşittir. İki eğri üç köşe noktasında kesişir. Bu noktaların komşuluklarında sikloidin elipsin içinde kaldığını gösterebiliriz. İçbükeylikleri aynı yönde olduğundan sikloid, bu üç nokta dışında bütünüyle elipsin içindedir. Yukarıdaki eşitsizlik, bu özelliğin analitik ifadesidir.

Editöryal açıklama. Son çıkarım yalnızca içbükeyliklerin aynı yönde olmasından elde edilemez. Yukarıdaki kesin türev kanıtı, gerekli küresel kapsama sonucunu sağlar; üç ortak nokta $\theta = -\pi, 0, \pi$ değerlerine karşılık gelir.^[E058]

599: Doğrusal Bağımlı Vektörler

Mathematics Magazine **39** (1966), 134; öneri: Eylül 1965

Kaynak PDF s. 143.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

a, b, c, üç boyutlu uzayda herhangi üç vektör ise

$$a \times (b \times c), \quad b \times (c \times a), \quad c \times (a \times b)$$

vektörlerinin doğrusal bağımlı olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Carl G. Wagner, Duke University. Vektör analizinin iyi bilinen bir teoremine göre (vektörel çarpım aksiyomlarına dayanan kanıt için Nickerson, Steenrod ve Spencer'in *Advanced Calculus* kitabının 90. sayfasına bakınız)

$$A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C.$$

Diğer vektörel çarpımları da yazarsak

$$\begin{aligned} B \times (C \times A) &= (B \cdot A)C - (B \cdot C)A \\ &= (A \cdot B)C - (B \cdot C)A, \\ C \times (A \times B) &= (C \cdot B)A - (C \cdot A)B \\ &= (B \cdot C)A - (A \cdot C)B. \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla

$$A \times (B \times C) + B \times (C \times A) + C \times (A \times B) = 0.$$

elde edilir. Bu, Jacobi özdeşliği olarak bilinir.

Diğer çözenler: Joseph B. Bohac, St. Louis, Missouri; Dermott A. Breault, Sylvania Applied Research Laboratory, Waltham, Massachusetts; Dewey C. Duncan, Los Angeles, California; Philip Fung, Cleveland State University, Ohio; Mrs. A. C. Garstang, Boulder, Colorado; Carl Harris, Western Electric Company, Princeton, New Jersey; Stephen Hoffman, Trinity College, Connecticut; John E. Homer, Jr., St. Procopius College, Illinois; Murray S. Klamkin, Ford Scientific Laboratory, Dearborn, Michigan; John Kiefer, University of Missouri at Rolla; E. S. Langford, U.S. Naval Postgraduate School; Lieselotte Müller, Georgia Institute of Technology; Stanley Rabinowitz, Far Rockaway, New York; Kenneth A. Ribet, Brown University; Richard Riggs, Jersey City State College; Howard L. Walton, Yorktown High School, Arlington, Virginia; K. L. Yocom, South Dakota State University; ve problemi öneren.

600: İlişkili Üçgenler

Mathematics Magazine **39** (1966), 189; öneri: Kasım 1965

Kaynak PDF s. 144.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

ABC üçgeninin alanı S ; içteğet ve dışteğet çemberlerinin değme noktalarının oluşturduğu üçgenlerin alanları sırasıyla T, T_a, T_b, T_c olsun. Şu bağıntıları gösteriniz:

$$T_a + T_b + T_c - T = 2S, \quad (1)$$

$$T_a^{-1} + T_b^{-1} + T_c^{-1} - T^{-1} = 0. \quad (2)$$

Çözüm: problemi öneren (eksik çarpan tamamlanmıştır). I , ABC üçgeninin içmerkezi, DEF içteğet çemberinin değme noktalarının oluşturduğu üçgen; R, r sırasıyla çevrel ve içteğet çemberlerin yarıçapları olsun. XYZ üçgeninin alanını $[XYZ]$ ile gösterelim ve $s = (a + b + c)/2$ yazalım. O hâlde

$$\frac{[IEF]}{S} = \frac{\frac{1}{2}r^2 \sin(\pi - A)}{\frac{1}{2}bc \sin A} = \frac{r^2}{bc} = \frac{ar^2}{abc} = \frac{ar^2}{4RS},$$

yani $[IEF] = ar^2/(4R)$ olur; benzer biçimde $[IFD] = br^2/(4R)$ ve $[IDE] = cr^2/(4R)$ bulunur. Böylece

$$T = [IEF] + [IFD] + [IDE] = \frac{(a + b + c)r^2}{4R} = \frac{2sr^2}{4R} = \frac{Sr}{2R}, \quad [E059]$$

ve benzer biçimde

$$T_a = \frac{Sr_a}{2R}, \quad T_b = \frac{Sr_b}{2R}, \quad T_c = \frac{Sr_c}{2R}.$$

elde edilir. $r_a + r_b + r_c = 4R + r$ ve $r_a^{-1} + r_b^{-1} + r_c^{-1} = r^{-1}$ kullanılarak

$$T_a + T_b + T_c - T = \frac{S(r_a + r_b + r_c - r)}{2R} = 2S,$$

$$T_a^{-1} + T_b^{-1} + T_c^{-1} - T^{-1} = \frac{2R}{S} \left(\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} - \frac{1}{r} \right) = 0.$$

Diğer çözenler: P. N. Bajaj, Western Reserve University; Stanley Rabinowitz, Far Rockaway, New York; G. L. N. Rao, J. C. College, Jamshedpur, Hindistan.

609: Harfli Bir Eşitlik

Mathematics Magazine **39** (1966), 248; öneri: Ocak 1966

Kaynak PDF s. 145.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Aşağıdaki harfli işlem bulmacasını onluk sayı sisteminde çözünüz:

$$4 \cdot NINE = 9 \cdot FOUR.$$

Çözüm: J. D. E. Konhauser, University of Minnesota. $4E$ ile $9R$ çarpımlarının birler basamakları aynı olmalıdır. Bu nedenle olası (E, R) çiftleri yalnızca $(1, 6)$, $(3, 8)$, $(5, 0)$, $(7, 2)$ ve $(9, 4)$ 'tür. 4 ile 9 aralarında asal olduğundan 9, $2N + I + E$ 'yi bölmelidir.

$(1, 6)$ durumu. $E = 1$ ise 9, $2N + I + 1$ 'i bölmelidir. Buradan şu (N, I) çiftleri elde edilir:

$$(4, 0), (3, 2), (7, 3), (2, 4), (5, 7), (9, 8), (4, 9).$$

Bunlara karşılık gelen *FOUR* değerleri 1796, 1436, 3276, 1076, 2556, 4396 ve 2196'dır. $E = 1$ olduğundan ilk ikisi, dördüncüsü ve sonuncusu elenir. $N = 7$ olduğundan üçüncü; 5 tekrarlandığından beşinci; $N = 9$ olduğundan altıncı da elenir.

Kalan durumlara benzer bir inceleme uygulanınca şu çözümler bulunur:

(E, R)	$4 \cdot NINE = 9 \cdot FOUR$
$(3, 8)$	$4 \cdot 4743 = 9 \cdot 2108,$
$(5, 0)$	$4 \cdot 6165 = 9 \cdot 2740,$
$(7, 2)$	$4 \cdot 6867 = 9 \cdot 3052,$
$(9, 4)$	$4 \cdot 5859 = 9 \cdot 2604.$

Diğer çözenler: Monte Dernham, San Francisco, California; Samuel P. Hoyle, Jr., University of Virginia; Sidney Kravitz, Dover, New Jersey; C. C. Oursler, Southern Illinois University (Edwardsville); Richard Riggs, Jersey City State College, New Jersey; Jerome J. Schneider, Chicago, Illinois; ve Charles W. Trigg, San Diego, California.

Kısmi çözüm gönderenler: Merrill Barney, Wisconsin State University (La Crosse); Charles R. Berndtson, Massachusetts Institute of Technology; Lindley J. Burton, Lake Forest College, Illinois; Anton Glaser, Pennsylvania State University (Ogontz); J. A. H. Hunter, Toronto, Kanada; Beatriz Margolis, University of Maryland; John W. Milsom, Slippery Rock State College, Pennsylvania; William L. Mrozek, Wyandotte, Michigan; Sam Newman, Atlantic City, New Jersey; C. R. J. Singleton, Petersham, Surrey, England; Lowell Van Tassel, San Diego City College; Gary B. Weiss, New York University, School of Medicine; Donald R. Wilder, Rochester, New York; Dale Woods, Missouri State Teachers College; ve problemi öneren.

628: Pisagor Bağıntılı Bir Harfli İşlem

Mathematics Magazine **40** (1967), 102; öneri: Eylül 1966

Kaynak PDF s. 146.

Öneren: B. Süer ve Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Aşağıdaki harfli işlem bulmacasını

$$\text{COS}^2 + \text{SIN}^2 = \text{UNO}^2$$

onluk sayı sisteminde çözünüz.

Çözüm: J. A. H. Hunter, Toronto, Ontario, Kanada. $S^2 + N^2 \equiv O^2 \pmod{10}$ ve açıkça $S \neq 0$ 'dır. Her $N = 0, 1, \dots, 9$ için karelerin son basamaklarını göz önünde tutarak olası S ve karşılık gelen O değerlerini tabloya yerleştiririz.

$U > S$ olduğundan, olası her UNO değerinin iki karenin toplamı olarak yazılışlarını (varsa) bunun için gerekli koşulları gözeterek araştırırız. Böyle bir gösterim varsa karşılık gelen SIN ve COS değerleri, iyi bilinen

$$(x^2 + y^2)^2 k^2 = (x^2 - y^2)^2 k^2 + (2xy)^2 k^2.$$

çözümü yardımıyla belirlenebilir. İşlem biraz zahmetlidir, ancak aşırı değildir. Tek çözümün

$$391^2 + 120^2 = 409^2.$$

Diğer çözenler: R. H. Anglin, Danville, Virginia; Merrill Barney, Wisconsin State University at La Crosse; Sarah Brooks, Utica Free Academy, New York; Jack Dix, Rutgers University; Charles R. Fleenor, Ball State University, Hindistanna; Michael Goldberg, Washington, D.C.; Jerome J. Schneider, Chicago, Illinois; Charles W. Trigg, San Diego, California; ve problemi önerens.

639: Dışbükey Dörtgen İçin Bir Eşitsizlik

Mathematics Magazine **40** (1967), 166; öneri: Kasım 1966

Kaynak PDF s. 147.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

$ABCD$ dışbükey bir dörtgen, P ise AC ve BD köşegenlerinin kesişim noktası olsun. P 'nin $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$ kenarlarına uzaklıkları sırasıyla x, y, z, t olsun. Şu eşitsizliği ispatlayınız:

$$x + y + z + t < \frac{3}{4}(a + b + c + d).$$

Çözüm: Leon Bankoff, Los Angeles, California. AC ile BD köşegenleri arasındaki açıların açıortayları AB, BC, CD, DA kenarlarını sırasıyla R, S, T, U noktalarında kessin. Erdős–Mordell teoreminin bir sonucuna göre

$$\begin{aligned} 2(PS + PT) &< PB + PC + PD, \\ 2(PT + PU) &< PC + PD + PA, \\ 2(PU + PR) &< PD + PA + PB, \\ 2(PR + PS) &< PA + PB + PC. \end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$4(PR + PS + PT + PU) < 3(PA + PB + PC + PD).$$

elde edilir. Bu eşitsizlik, önerilen eşitsizlikten daha güçlüdür; çünkü

$$x + y + z + t \leq PR + PS + PT + PU$$

ve $PA + PB + PC + PD < a + b + c + d$ 'dir.

Diğer çözenler: Leon Bankoff, Los Angeles, California (ikinci çözüm); Murray S. Klamkin, Ford Scientific Laboratory, Dearborn, Michigan; C. B. A. Peck, Ordnance Research Laboratory, State College, Pennsylvania; Stanley Rabinowitz, Far Rockaway, New York; ve problemi öneren.

649: Bir Harfli İşlem

Mathematics Magazine **40** (1967), 279; öneri: Mart 1967

Kaynak PDF s. 147–148.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Aşağıdaki harfli işlem bulmacasını

$$\begin{array}{rcccccc} & T & H & R & E & E & \\ + & & F & O & U & R & \\ \hline & S & E & V & E & N & \end{array}$$

onluk sayı sisteminde şu koşullarla çözünüz:

- *THREE* sayısı 3'e bölünmez ve yazılışında 3 rakamı bulunmaz;
- *FOUR* sayısı 4'e bölünmez ve yazılışında 4 rakamı bulunmaz;
- *SEVEN* sayısı 7'ye bölünmez ve yazılışında 7 rakamı bulunmaz.

Çözüm: Harry M. Gehman, SUNY at Buffalo, New York. Önce yalnızca (a) *THREE*'de 3 rakamının; (b) *FOUR*'da 4 rakamının; (c) *SEVEN*'da 7 rakamının bulunmadığı koşullarıyla harfli işlemi çözelim. Problemin yedi çözümü vardır:

- (1) $16544 + 7805 = 24349$
- (2) $47266 + 9102 = 56368$
- (3) $75244 + 9102 = 84346$
- (4) $79244 + 5102 = 84346$
- (5) $17544 + 6805 = 24349$
- (6) $49266 + 7102 = 56368$
- (7) $24811 + 6708 = 31519$

(d) 3'ün *THREE*'yi bölmemesi koşulu (5) ve (6) çözümlerini eler. (e) 4'ün *FOUR*'u bölmemesi koşulu (7)'yi eler. (f) 7'nin *SEVEN*'i bölmemesi koşulu hiçbir çözümü elemez. Dolayısıyla önerilen problemin dört çözümü vardır: (1)–(4).

(d), (e), (f) koşullarını göz ardı edip (a), (b), (c)'yi korur ve aşağıdaki ek koşulları ayrı ayrı uygularsak belirtilen tek çözümleri elde ederiz:

	Ek koşul	Çözüm
(g)	<i>THREE</i> , 8 rakamını içerir	(7)
(h)	<i>SEVEN</i> , 1 rakamını içerir	(7)
(i)	<i>FOUR</i> , 5 ve 6 rakamlarını içerir	(5)
(j)	<i>THREE</i> , ne 6 ne de 7 içerir	(7)
(k)	<i>THREE</i> , 6 ve 7 rakamlarını içerir	(2)
(l)	<i>THREE</i> , 1 ve 2 rakamlarını içerir	(7)
(m)	<i>THREE</i> , 5, 6 ve 7'nin hiçbirini içermez	(7)
(n)	<i>THREE</i> , 5, 7 ve 9'un hiçbirini içermez	(7)

Bu şekilde devam edilebilir. (7) çözümünün bu listede böylesine sık görülmesi, rakam örüntüsünün diğer altı çözümden esaslı biçimde farklı olduğunu düşündürüyor. Numeroloji açısından bunun derin bir anlam taşıdığından eminim.

680: Çembersel Bir Geometrik Yer

Mathematics Magazine **41** (1968), 219; öneri: Ocak 1968

Kaynak PDF s. 149–150.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

E bir elips; t', t'' ona çizilmiş değişken, birbirine paralel iki teğet olsun. t', t'' doğrularına ve E 'ye dıştan teğet bir C çemberi düşününüz. C 'nin merkezinin geometrik yerinin bir çember olduğunu gösteriniz.

Çözüm: problemi öneren (ardından editöryal tamamlama verilmiştir). Elipsin denklemi

$$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1. \quad (1)$$

olsun. Çemberin merkezini (α, β) , yarıçapını r ile gösterirsek

$$r^2 = \frac{a^2\beta^2 + b^2\alpha^2}{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (2)$$

elde edilir. Çember ayrıca

$$(x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 = r^2, \quad (3)$$

denklemiyle verilir; elipsin $T = (x, y)$ noktasındaki normali C merkezinden geçer. CT uzaklığı, C 'den elipse olan uzaklığın bir uç değeridir. Bunu belirlemek için Lagrange çarpanları yöntemini kullanalım. Şöyle tanımlayalım:

$$F(x, y) = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + \lambda(x^2/a^2 + y^2/b^2 - 1).$$

T noktası (1) ile

$$x - \alpha + \lambda x/a^2 = 0, \quad y - \beta + \lambda y/b^2 = 0. \quad (4)$$

denklemlerince belirlenir. x, y, α, β 'nin elenmesi λ için dördüncü dereceden bir denklem verdiği için başka bir yol izleyelim. Önermenin doğru olduğunu varsayarsak

$$OC^2 = \alpha^2 + \beta^2 = (a + b)^2. \quad (5)$$

olur. (4)'ten α, β 'yı çözüp (5)'te yerine koyar ve sonucu (1) ile karşılaştırırsak $\lambda = ab$ bulunur. $\lambda = ab$ seçilirse (1), (2), (3) denklemleri tutarlıdır ve bu tutarlılık $\alpha^2 + \beta^2 = (a + b)^2$ verir.

Gerekliklik ve ters yönün editöryal tamamlaması. Yalnızca tutarlılık gerekçesi başka merkezleri dışlamaz. Şöyle yazalım:

$$T = (a \cos t, b \sin t), \quad q = \frac{\cos^2 t}{a^2} + \frac{\sin^2 t}{b^2} > 0.$$

Dıştan teğetlik (4)'te $\lambda > 0$ olmasını gerektirir ve

$$\alpha = (a + \lambda/a) \cos t, \quad \beta = (b + \lambda/b) \sin t, \quad r^2 = \lambda^2 q.$$

verir. (2)'de yerine koyunca şu çarpanlara ayırma elde edilir:

$$r^2(\alpha^2 + \beta^2) - a^2\beta^2 - b^2\alpha^2 = (\lambda^2 - a^2b^2)(1 + \lambda q)^2 = 0.$$

Böylece $\lambda = ab$ ve

$$C = ((a + b) \cos t, (a + b) \sin t).$$

olur. Tersine, bu biçimdeki her merkez, $r = ab\sqrt{q}$ ile (2)'yi sağlar ve T 'deki dış normal üzerinde bulunur. Çember, T 'deki destek teğetinin elipse göre karşı tarafında kaldığından teğetlik dış-tandır. (2), OC 'ye paralel iki destek doğrusuna teğetliği sağlar. Dolayısıyla yarıçapı $a + b$ olan çemberin her noktası elde edilir.^[E060]

Diğer çözenler: Michael James Smithson, Bellevue, Washington.

680 Numaralı Problem Üzerine Yorum

Mathematics Magazine **42** (1969), 162.

A. W. Walker'ın yorumu, Toronto, Kanada. Elipsin birçok ilginç özelliği, onunla eş merkezli, yarıçapları $a \pm b$ olan ve Chasles çemberleri denilen çemberlerle ilişkilidir. Değişken çemberin C merkezi iç normal üzerinde ise geometrik yeri iç Chasles çemberidir. 680 numaralı problemdeki sonuç Mannheim tarafından kanıtlanmıştır: *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 4. seri, **3** (1903), 483. Bu sonuç, aşağıdaki eski Japon teoremiyle eşdeğerdir (Iwata, 1862):

Bir elips, kesismeyen eş iki sabit çembere dıştan ve bunların paralel ortak teğetlerine teğetse büyük ve küçük eksenlerinin toplamı, çemberlerin merkezleri arasındaki uzaklığa eşittir.

Teoremin, oldukça belirsiz bir gerekçeyle, doğru olmadığının ileri sürüldüğü *Tôhoku Mathematical Journal*, 1. seri, **11** (1917), 65'e bakınız!

724: Üçgen Oluşma Olasılığı

Mathematics Magazine **42** (1969), 274; öneri: Mart 1969

Kaynak PDF s. 150–151.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

ABC üçgeninin ($a \geq b \geq c$) içinden rastgele seçilen bir P noktasının, üçgenin kenarlarına uzaklıklarının bir üçgenin kenar uzunluklarını oluşturma olasılığını bulunuz.

Çözüm: L. Carlitz, Duke University. İç açıortaylar BC, CA, AB kenarlarını sırasıyla L, M, N noktalarında kessin. P 'nin BC, CA, AB 'ye uzaklıklarını x, y, z ile gösterelim. $x = y + z$ denklemi MN doğrusunu temsil eder. Benzer biçimde $y = z + x$, NL 'yi; $z = x + y$, LM 'yi temsil eder. İçmerkez I , LMN 'nin içindedir; dolayısıyla P , LMN 'nin iç bölgesiyle sınırlanmalıdır. Alan üzerinde düzgün dağılım altında istenen olasılık

$$p = \frac{\text{Alan } LMN}{\text{Alan } ABC} = \frac{\Delta_0}{\Delta}.$$

olur. $CL = ab/(b + c)$ ve $CM = ab/(a + c)$ olduğundan

$$\text{Alan } CLM = \frac{1}{2} \frac{a^2 b^2 \sin \gamma}{(a + c)(b + c)} = \frac{ab\Delta}{(a + c)(b + c)}.$$

Simetriden

$$\text{Alan } AMN = \frac{bc\Delta}{(b + a)(c + a)}, \quad \text{Alan } BLN = \frac{ac\Delta}{(a + b)(c + b)}.$$

elde edilir. Böylece, devirli toplamlar kullanılarak

$$\begin{aligned}\Delta_0 &= \Delta - \sum_{\text{cyc}} \frac{bc\Delta}{(b+a)(c+a)} \\ &= \Delta \left(1 - \frac{\sum_{\text{cyc}} bc(b+c)}{(a+b)(b+c)(c+a)} \right) = \frac{2abc\Delta}{(a+b)(b+c)(c+a)}.\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$p = \frac{2abc}{(a+b)(b+c)(c+a)} \leq \frac{1}{4},$$

elde edilir; $a+b \geq 2\sqrt{ab}$ ve devirli benzerleri gereğince eşitlik yalnızca $a=b=c$ iken sağlanır.

Diğer çözenler: Michael Goldberg, Washington, D.C.; C. B. A. Peck, Ordnance Research Laboratory, State College, Pennsylvania; F. G. Schmitt, Jr., Berkeley, California (kısmen); Paul J. Zwier, Palo Alto, California; ve problemi öneren.

738: Bir Feribot ve Nehir Akıntısı

Mathematics Magazine **43** (1970), 109

Kaynak PDF s. 151–152.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Tarihsel veriler (pozitif genişlikli bir nehir için tutarsızdır).^[E061] *Kıyıları birbirine paralel doğrular olan bir nehirde, A bir kıyıda ve B diğer kıyıda bulunmakta, AB = 72 mil olmaktadır. Bir feribot doğrusal AB yolunu A'dan B'ye dört saatte, B'den A'ya dokuz saatte almaktadır. Feribotun durgun sudaki sürati v = 13 mil/saat ise akıntının hızı nedir?*

Editöryal yanıt. Sabit akıntının olağan yorumunda bu veriler pozitif genişlikli bir nehre olanak tanımaz. e , A'dan B'ye yönelen birim vektör, c akıntının hız vektörü olsun. Yere göre hızlar saatte $18e$ ve $-8e$ mildir. Dolayısıyla

$$|18e - c| = |-8e - c| = 13.$$

Denklemlerin karelerini çıkarırsak $e \cdot c = 5$, yerine koyarsak $|c|^2 = 25$ bulunur. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinde eşitlik $c = 5e$ 'yi gerektirir: rota akıntıya, dolayısıyla kıyıları paralel olmalıdır. Pozitif genişlikli bir nehrin karşı kıyıları birleştiremez. Tarihsel 5 mil/saat yanıtı yalnızca sıfır genişlikli sınır durumunda mümkündür.^[E061]

Tarihsel çözümün parçası (sağlanan kopyada başlangıç ve yazar bilgisi eksiktir).

13 mil/saat + $s \geq 18$ mil/saat, dolayısıyla $s \geq 5$ mil/saat olur.

B'den A'ya dönüşte vektör toplamının mümkün en büyük büyüklüğü 13 mil/saat $-s$ 'dir. Dolayısıyla $13 \text{ mil/saat} - s \geq 8 \text{ mil/saat}$ ve $s \leq 5 \text{ mil/saat}$ olur. $s \geq 5 \text{ mil/saat}$ ve $s \leq 5 \text{ mil/saat}$ olduğundan $s = 5 \text{ mil/saat}$ 'tir.

Başka bir yöntem, nehrin genişliğini m mil alıp herhangi bir m için s 'yi bulmaktır. Bu yöntemle m bulunabilir. Bunun için şu denklem çözülür:

$$13\sqrt{5184 - m^2} = 4\sqrt{13689 - m^2} + 9\sqrt{2704 - m^2}.$$

Tek çözüm $m = 0$ mildir. Bu m değeriyle $s = 5 \text{ mil/saat}$ bulunur.

Editöryal açıklama. İleri sürülen $13 - s$ dönüş hızı sınırı, akıntıya tam karşı yönde hareketi varsayar ve eğik bir geçiş için geçerli değildir. Elde edilen sıfır genişlik, bir feribot geçişi vermek yerine tutarsızlığı ortaya koyar. Kaynakta m için yazılan “mil/saat” birimi “mil” olarak düzeltilmiştir; eksik başlangıç uydurularak tamamlanmamıştır.^[E061]

Diğer çözenler: Richard L. Breisch, University of Colorado; Bruce A. Broemser, El Sobrante, California; Raphael T. Coffman, Richland, Washington; George F. Corliss, Michigan State University; Mickey Dargitz, Ferris State College, Michigan; Gerald C. Dodds, HRB-Singer, Inc., State College, Pennsylvania; Frank Eccles, Phillips Academy, Massachusetts; W. W. Funkenbusch, Michigan Technological University; Michael Goldberg, Washington, D.C.; John M. Howell, Little Rock, California; Alfred Kohler, Long Island University, New York; Lew Kowarski, Morgan State College, Maryland; J. R. Kuttler, Johns Hopkins University; Joseph O'Rourke, St. Joseph's College, Pennsylvania; C. D. O'Shaughnessy, University of Saskatchewan; John E. Prussing, University of Illinois; John R. Ray, Clemson University; Simeon Reich, Israel Institute of Technology, Haifa, Israel; Ray B. Robinson, Butler, Tennessee; Steve Rohde, Lehigh University; E. F. Schmeichel, College of Wooster, Ohio; W. A. Schmidt, Texas A&M University; E. P. Starke, Plainfield, New Jersey; Charles W. Trigg, San Diego, California; A. W. Walker, Toronto, Kanada; Sam Zaslavsky, City University of New York; ve problemi öneren.

743: Dörtüzlü İçin Bir Eşitsizlik

Mathematics Magazine **43** (1970), 169; öneri: Kasım 1969

Kaynak PDF s. 153–154.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Tarihsel öneri (basıldığı biçimiyle yanlıştır).^[E062] $P, T \equiv A_1A_2A_3A_4$ düzgün dörtüzlüsünün bir iç noktası olsun. $p_i = PA_i$ ve x_{ij} , P 'nin A_iA_j ayrıtına uzaklığı olmak üzere şu eşitsizliği ispatlayınız:

$$\sum_{i=1}^4 p_i \geq \frac{2\sqrt{3}}{3} \sum_{i<j} x_{ij},$$

Eşitlik ancak ve ancak P, T 'nin merkezi O 'da iken sağlanır.

Michael Goldberg'in tarihsel gerekçesi, Washington, D.C. (önermenin kanıtı olarak geçersizdir). Taban uzunluğu ve diğer iki kenarın toplamı verildiğinde yüksekliği en büyük üçgen ikizkenar üçgendir. Benzer biçimde, aynı taban ve diğer üç uzunluğun toplamı verilip bu üç kenarın ikilileriyle üç üçgen oluşturulduğunda, yükseklikler toplamı üçgenler eş ikizkenar üçgenler olduğunda en büyüktür. Bu, n üçgene genellenebilir. Dolayısıyla P 'nin düzgün bir dörtüzlünün ayrıtlarına uzaklıkları toplamının köşelerine uzaklıkları toplamına oranı, P dörtüzlünün merkezindeyken en büyüktür.

Ayrıt uzunluğu e ise karşıt ayrıtlar arasındaki h uzaklığı

$$h^2 + (e/2)^2 + (e/2)^2 = e^2, \quad h = e/\sqrt{2}.$$

ile verilir. Merkezden bir köşeye olan R uzaklığı ise

$$R^2 = (e/2)^2 + (h/2)^2 = e^2/4 + e^2/8, \quad R = \frac{\sqrt{3}e}{2\sqrt{2}}.$$

ile verilir. Böylece P merkezdeyken toplamların oranı

$$\frac{4R}{3h} = \frac{2e\sqrt{3}/\sqrt{2}}{3e/\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

olur. Her düzgün çokyüzlü ve her düzgün çokgen için benzer bir uç değer elde edilir. Elbette iki toplamın oranı ele alınan şekle bağlıdır.

Editör notu (özgün dergi). Problemi öneren de çözmüştür. Bir yanlış çözüm alınmıştır.

Editöryal açıklama. Ayrı üçgenlerin yüksekliklerinin enbüyüklenmesinden dörtyüzlü oranına geçiş geçersizdir; aşağıda yayımlanmış karşıörnek bunu gösterir. Merkezdeki hesap ise doğrudur.^[E062]

743 Numaralı Problem Üzerine Yorum

Mathematics Magazine **44** (1971), 44.

E. F. Schmeichel'in yorumu, College of Wooster, Ohio. Eşitsizlik şöyle olmalıdır:

$$\sum_{i=1}^4 p_i \geq \frac{2\sqrt{2}}{3} \sum_{i<j} x_{ij}.$$

Görünüşe göre yukarıdaki $\sqrt{2}$ yerine yanlışlıkla $\sqrt{3}$ basılmıştır. Basılı eşitsizliğin yanlışlığını göstermek için ayrıt uzunluğu 1 olan düzgün bir dörtyüzlü alalım. P , A_1A_2 ayrıtının orta noktası olsun. O hâlde

$$\begin{aligned} p_1 = p_2 = \frac{1}{2}, \quad p_3 = p_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad x_{12} = 0, \\ x_{13} = x_{14} = x_{23} = x_{24} = \frac{\sqrt{3}}{4}, \quad x_{34} = \frac{\sqrt{2}}{2}. \end{aligned}$$

Böylece

$$\sum_i p_i = 1 + \sqrt{3} < 2.8, \quad \sum_{i<j} x_{ij} = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

bulunur. $\sqrt{6} > 2.4$ olduğundan

$$\frac{2\sqrt{3}}{3} \sum_{i<j} x_{ij} = 2 + \frac{\sqrt{6}}{3} > 2.8,$$

elde edilir; yani basılı eşitsizlik bu noktada ters yöndedir. İlgili uzaklıkların sürekliliği gereğince bu kesin ters eşitsizlik, P 'ye yeterince yakın iç noktalarda da geçerlidir.

Düzeltilmenin editöryal değerlendirmesi. Bu, tarihsel önermeyi çürütür. Katsayıyı yalnızca $2\sqrt{2}/3$ ile değiştirmek ifadenin tamamını düzeltmez: merkezde oran $2\sqrt{3}/3$ olduğundan orada artık eşitlik sağlanmaz. Yorum, yeni sınırın kanıtını vermediği gibi eşitlik durumlarını da belirlememektedir. Bu nedenle ilk önerme yanlış olarak işaretlenmiş, bu baskıda doğrulanmamış bir en iyi sınır ileri sürülmemiştir.^[E062]

756: Merkezî Simetrili Eğriler

Mathematics Magazine **43** (1970), 283; öneri: Mart 1970

Kaynak PDF s. 155.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Merkezden çıkan birbirine dik iki yarıçap vektörünün uzunlukları çarpımı sabit olan, çember dışındaki kapalı ve merkezî simetrik C eğrilerini belirleyiniz.

Çözüm: Harry W. Hickey, Arlington, Virginia. Problemin bir genellemesini ele alalım: N pozitif bir çift tam sayı olmak üzere, merkezden çıkan iki yarıçap vektörünün aralarındaki açı π/N

iken uzunluklarının çarpımı sabit olan, çember dışındaki kapalı ve merkezî simetrik eğrileri belirleyelim. Merkezi O , sabit çarpımı R^2 ile gösterelim. Merkezi O , yarıçapı R olan K çemberini çizelim. C 'nin bu çember içindeki her noktasına karşılık, dışında, O 'ya uzaklıklarının çarpımı R^2 olan bir nokta vardır. Dolayısıyla C , K 'yi bir A noktasında, sonra da $\angle AOB = \pi/N$ olacak biçimde bir B noktasında keser.

A 'dan B 'ye, O 'dan geçmeyen ve O 'dan geçen hiçbir doğruyu birden fazla noktada kesmeyen bir yay çizelim. Bu kısıtlamalar dışında yayın biçimi keyfidir. Kutupsal denklemi $\rho = f(\theta)$ olsun. Kısıtlamalar, $1/f$ 'nin sonlu ve f 'nin tek değerli olmasını sağlar; çok değerli bir f , yarıçap vektörünün uzunluğunu belirsizleştirir. Şimdiye kadar f , uzunluğu π/N olan bir aralıkta tanımlıdır. Fonksiyonu

$$f(\theta + \pi/N) = \frac{R^2}{f(\theta)} \quad \text{her } \theta \text{ için}$$

ile genişletelim. Böylece C eğrisi tanımlanır. f fonksiyonu $2\pi/N$ periyotludur ve N çift olduğundan $f(\theta + \pi) = f(\theta)$ sağlanır; dolayısıyla C merkezî simetrikliktir. Simetri koşulu kaldırılırsa N tek de olabilir.

Editöryal açıklama. Çember olmayan kapalı bir eğri elde etmek için uç noktalarında yarıçapı R olan pozitif, sürekli, sabit olmayan bir başlangıç yayı seçilmelidir. Örneğin $\varepsilon \neq 0$ ve çift N için $f(\theta) = R \exp(\varepsilon \sin N\theta)$ bu yapıyı sağlar. İlk problemdeki diklik durumu $N = 2$ 'dir.

Diğer çözenler: Michael Goldberg, Washington, D.C.; Murray S. Klamkin, Ford Scientific Laboratory, Dearborn, Michigan; Lew Kowarski, Morgan State College, Maryland; John Oman, Wisconsin State University, Oshkosh; E. F. Schmeichel, College of Wooster, Ohio; ve problemi öneren.

763: Zeta Benzeri Fonksiyonlar

Mathematics Magazine **44** (1971), 108; öneri: Mayıs 1970

Kaynak PDF s. 156.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Aşağıdaki eşitliği ispatlayınız:

$$\left(1 + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \cdots\right) = \left(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \cdots\right) \left(1 - \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} - \frac{1}{4^6} + \cdots\right).$$

Çözüm: M. G. Greening, University of New South Wales, Avustralya (yakınsaklık koşulu ve çarpan düzeltilmiştir). Gerçek $s > 1$ (veya $\operatorname{Re} s > 1$ sağlayan karmaşık s) için

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}.^{[E063]}$$

Çift indisli terimler ayrılırsa

$$\begin{aligned} 1 + 3^{-4} + 5^{-4} + \cdots &= (1 - 2^{-4})\zeta(4) = \frac{15}{16}\zeta(4), \\ 1 - 2^{-6} + 3^{-6} - 4^{-6} + \cdots &= (1 - 2^{-5})\zeta(6), \\ 1 + 3^{-10} + 5^{-10} + \cdots &= (1 - 2^{-10})\zeta(10) \\ &= (1 - 2^{-5})\frac{33}{32}\zeta(10).^{[E063]} \end{aligned}$$

Kaynağın işaretli Bernoulli sayıları gösteriminde

$$\zeta(2n) = \frac{2^{2n-1} B_n \pi^{2n}}{(2n)!}, \quad B_2 = \frac{1}{30}, \quad B_3 = \frac{1}{42}, \quad B_5 = \frac{5}{66}.$$

Buradaki B_n 'ler, günümüzdeki B_{2n} 'lerin mutlak değerleridir. Dolayısıyla

$$\zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \quad \zeta(10) = \frac{\pi^{10}}{93555},$$

olur ve sadeleştirme sonucu verir.

Diğer çözenler: Bernard August, Glassboro State College, New Jersey; Miguel Bamberger, Monterey, California; Walter Blumberg, New Hyde Park, New York; Wray G. Brady, Slippery Rock State College, Pennsylvania; Richard L. Breisch, Pennsylvania State University; Donald R. Childs, Naval Underwater Weapons Research and Engineering Station, Rhode Island; Gerald C. Dodds, HRB-Singer, Inc., State College, Pennsylvania; D. Dummit, San Mateo High School, California; Louis Grinstein, New York, New York; Jeffrey Hoffstein, Bronx High School of Science, New York; Robert F. Jackson, University of Toledo, Ohio; Shiv Kumar, Panjabi University, ve Miss Nirmal, Government Girls' High School, Panipat, Hindistan (ortak çözüm); J. R. Kuttler, Johns Hopkins Applied Physics Laboratory, Maryland; Herbert R. Leifer, Pittsburgh, Pennsylvania; Michael J. Martino, IBM, Poughkeepsie, New York; Kenneth Rosen, University of Michigan; L. E. Schaefer, General Motors Institute, Flint, Michigan; E. F. Schmeichel, College of Wooster, Ohio; E. P. Starke, Plainfield, New Jersey; Paul D. Thomas, Naval Research Laboratory, Washington, D.C.; Graham C. Thompson, Binghamton, New York; Michael R. Wise, University of Colorado; Gregory Walczun, Bucknell University; K. L. Yocom, University of Wyoming; ve problemi öneren.

775: Ters Fonksiyonlar

Mathematics Magazine **44** (1971), 230; öneri: Kasım 1970

Kaynak PDF s. 157–158.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Aşağıdaki eşitliği ispatlayınız:

$$\int_0^1 \sqrt[p]{1-x^p} dx = \int_0^1 \sqrt[q]{1-x^q} dx, \quad p, q > 0.$$

I. Çözüm: J. C. Binz, Bern, İsviçre (varsayımlar açıklığa kavuşturulmuştur). Daha genel olarak f , $[a, b]$ üzerinde kesin azalan ve sürekli olsun. O zaman tersi g , $[f(b), f(a)]$ üzerinde vardır ve o da kesin azalan ve sürekli. Aşağıdaki değişken değiştirme ve kısmi integrasyonun geçerli olduğu durumda

$$\begin{aligned} \int_{f(b)}^{f(a)} g(y) dy &= \int_b^a g(f(t)) f'(t) dt = \int_b^a t f'(t) dt \\ &= af(a) - bf(b) + \int_a^b f(t) dt. \end{aligned}$$

hesaplanır. Ayrıca $f(a) = b$ ve $f(b) = a$ ise

$$\int_a^b g(t) dt = \int_a^b f(t) dt.$$

bulunur. $[0, 1]$ üzerinde $f(x) = (1 - x^q)^{1/p}$ ve $g(x) = (1 - x^p)^{1/q}$ fonksiyonları bunun özel bir durumunu oluşturarak önermeyi kanıtlar.

Editöryal açıklama. Yalnızca artmayan bir fonksiyonun tersi bulunmayabilir; ayrıca süreklilik tek başına türev almayı haklı kılmaz. Gösterilen alan özdeşliği, ters fonksiyonların grafikleri arasındaki alanın parçalanmasıyla (veya Riemann–Stieltjes integrallerinde kısmi integrasyonla), her sürekli ve kesin azalan fonksiyon için geçerlidir. Bu problemdeki fonksiyonlar için uç noktalarda genelleştirilmiş integrallere izin verilerek türev hesabı uygulanabilir.^[E064]

II. Çözüm: Václav Konečný, Jarvis Christian College, Hawkins, Texas (beta çarpanı düzeltilmiştir). $z = x^p$ ve $p, q > 0$ için

$$\begin{aligned} \int_0^1 (1 - x^p)^{1/q} dx &= \frac{1}{p} \int_0^1 z^{-1+1/p} (1 - z)^{1/q} dz \\ &= \frac{1}{p} B\left(\frac{1}{p}, 1 + \frac{1}{q}\right) = \frac{1}{p+q} B\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right). \end{aligned} \quad [E064]$$

bulunur. Burada B , beta fonksiyonudur. $B(x, y) = B(y, x)$ olduğundan p ile q yer değiştirdiğinde integralin değeri değişmez.

Diğer çözenler: Joseph Beer ve Bernard August (ortak çözüm), Glassboro State College, New Jersey; Walter Blumberg, Flushing High School, New York; Dermott A. Breault, Cyber, Inc., Cambridge, Massachusetts; Robert B. Brennan, Dover, New Jersey; Robert J. Bridgman, Mansfield State College, Pennsylvania; David C. Brooks, Seattle Pacific College, Washington; G. R. Desai, St. Louis University; Robert Desko, Davenport, Iowa; Ellis Detwiler, Adams, New York; Santo M. Diano, Havertown, Pennsylvania; Fred Dodd, University of South Alabama; M. G. Greening, University of New South Wales, Australia; Robert G. Griswold, University of Hawaii, Hilo College; Philip Haverstick, Fort Belvoir, Virginia; Harry W. Hickey, Arlington, Virginia; John E. Homer, Lisle, Illinois; N. J. Kuenzi, Oshkosh, Wisconsin; David E. Mannes, SUNY, Oneonta, New York; Stephen B. Maurer, Phillips Exeter Academy; Edward Moylan, Ford Motor Company, Dearborn, Michigan; Albert J. Patsche, Rock Island Arsenal, Illinois; V. V. Ramana Rao, Andhra University, South Hindistan; B. E. Rhoades, Hindistanna University; Steve M. Rohde, General Motors Research Laboratories, Warren, Michigan; E. F. Schmeichel, College of Wooster, Ohio; Harry Siller, Hofstra University; A. Swanavayanamuti¹, Andhra University, Waltair, South Hindistan; R. A. Struble, North Carolina State University; Philip Tracy, APO San Francisco; C. S. Venkataraman, Sree Kerala Varma College, Trichur, South Hindistan; John R. Ventura, Jr., Naval Underwater Systems Center, Newport, Rhode Island; R. L. Woodruff, Menlo College, Menlo Park, California; Thomas Wray, Department of Energy, Mines and Resources, Ottawa, Kanada; Robert L. Young, Cape Cod Community College, Massachusetts; Paul Zwier, Calvin College, Michigan; ve problemi öneren.

775 Numaralı Problem Üzerine Yorum

Mathematics Magazine **45** (1972), 293.

Ralph Leung'un yorumu, Berkeley, California. Eşitlik

$$\int_0^1 \sqrt[q]{1 - x^p} dx = \int_0^1 \sqrt[p]{1 - y^q} dy.$$

biçiminde yazılırsa sonuç hemen görülür. Her iki taraf, birinci bölgede x eksenini, y eksenini ve $x^p + y^q = 1$ eğrisiyle sınırlanan bölgenin alanını verir: solda x 'e, sağda y 'ye göre integral alınır.

¹Sağlanan kopyada (kaynak PDF s. 157) bu adın okunuşu kesin değildir.

806: Bir Doğruya Göre Simetri

Mathematics Magazine **45** (1972), 171; öneri: Eylül 1971

Kaynak PDF s. 158–159.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

H, dik olmayan bir ABC ikizkenar üçgeninin diklik merkezi olsun. AH, BH, CH doğruları karşı kenarları sırasıyla D, E, F'de kessin. HBD, HDC, HCE, HEA, HAF, HFB dik üçgenlerinin içteğet merkezlerinin, yozlaşmış da olabilen bir konik üzerinde bulunduğunu ispatlayınız.^[E065]

Çözüm: Vladimir F. Ivanoff, San Carlos, California (simetri varsayımı kesinleştirilmiştir).

Problem şu teoremin özel bir durumudur: Bir doğruya göre birbirinin yansıması olan üç çift hâlindeki altı nokta, dejenere de olabilen bir konik üzerinde bulunur. Bu, Pascal teoreminin tersiyle veya analitik olarak kanıtlanabilir.^[E065]

Teorem, bir noktaya göre simetrik üç çift için de geçerlidir. Bu nokta başlangıç alınırsa altı noktanın koordinatları

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), (-x_1, -y_1), (-x_2, -y_2), (-x_3, -y_3).$$

olur. Sabit üç satır bağımsız olduğunda konik

$$\begin{vmatrix} x^2 & y^2 & xy & 1 \\ x_1^2 & y_1^2 & x_1y_1 & 1 \\ x_2^2 & y_2^2 & x_2y_2 & 1 \\ x_3^2 & y_3^2 & x_3y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Editöryal tamamlama. y eksenine göre yansıma için çiftleri $(\pm x_i, y_i)$ biçiminde yazalım. Üç denklemden oluşan

$$Ax_i^2 + By_i^2 + Cy_i + D = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

sistemi, dört katsayı için sıfırdan farklı bir çözüme sahiptir. Bu, altı noktadan geçen bir konik verir. İkizkenar üçgendeki içmerkezler tam böyle çiftler oluşturur. Dik ikizkenar üçgen dışlanmalıdır; çünkü küçük üçgenlerden bazıları çöker ve içmerkezleri tanımsız kalır.

Merkezî simetri durumunda bunun yerine $Ax^2 + By^2 + Cxy + D = 0$ kullanılır. Tarihsel çözümdeki determinant sabit satırları bağımlı olduğu için özdeş olarak sıfırsa bu satırların çekerdiğinden sıfırdan farklı bir katsayı vektörü seçilir; böylece yine bir koniğin varlığı elde edilir. Dejenere koniklere izin verilir.^[E065]

Diğer çözenler: Leon Bankoff, Los Angeles, California (üç çözüm); Ragnar Dybvik, Tingvoll, Norway; Michael Goldberg, Washington, D.C.; M. G. Greening, University of New South Wales, Australia; ve problemi öneren.

839: Değişmeme Olasılığı

Mathematics Magazine **46** (1973), 169; öneri: Eylül 1972

Kaynak PDF s. 159–160.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Her birinde aynı biçimde w beyaz ve r kırmızı top bulunan üç kutu verilsin. Birinci kutudan bir top alıp ikinciye, sonra ikinci kutudan bir top alıp üçüncüye, son olarak üçüncü kutudan bir top alıp birinciye koyunuz. Kutuların renk bakımından başlangıçtaki içeriklerine dönme olasılığını bulunuz.

Çözüm: Thomas Spencer, Trenton State College, New Jersey. Kısa bir düşünmeyle, üç kutunun da renk bileşimini değiştirmeyen tek olayların beyaz, beyaz, beyaz veya kırmızı, kırmızı, kırmızı seçimleri olduğu görülür. Çarpım kuralına göre bunların olasılıkları sırasıyla

$$\frac{w}{w+r} \frac{w+1}{w+r+1} \frac{w+1}{w+r+1} = \frac{w(w+1)^2}{(w+r)(w+r+1)^2}$$

ve

$$\frac{r}{w+r} \frac{r+1}{w+r+1} \frac{r+1}{w+r+1} = \frac{r(r+1)^2}{(w+r)(w+r+1)^2},$$

olur. Bu olaylar ayrık olduğundan istenen olasılık toplamlarıdır:

$$\frac{w(w+1)^2 + r(r+1)^2}{(w+r)(w+r+1)^2}.$$

N kutu durumunda çözüm

$$\frac{w(w+1)^{N-1} + r(r+1)^{N-1}}{(w+r)(w+r+1)^{N-1}}.$$

olur. Burada seçimler düzgün dağılımlıdır; $w, r, w+r > 0$ koşulunu sağlayan negatif olmayan tam sayılardır.

Diğer çözenler: Gladwin Bartel, La Junta, Colorado; Melvin Billick, Midland High School, Michigan; J. L. Brown, Jr., Pennsylvania State University; Joseph B. Browne, Oklahoma State University; Daniel L. Calloway, Ashville, North Carolina; Abraham L. Epstein, Hanscom Field, Massachusetts; George Fabian, Park Forest, Illinois; Michael Goldberg, Washington, D.C.; Kathleen Harris, New Hampton, Iowa; Karl Heuer, Moorhead, Minnesota; John M. Howell, Little Rock, California; Václav Konečný, Jarvis Christian College, Texas; Lew Kowarski, Morgan State College, Maryland; Michael W. O'Donnell, Carnegie-Mellon University; George Pfeiffer, Old Dominion University, Virginia; Louisa Russo, Michigan Technological University; R. Shantaram, University of Michigan-Flint; ve problemi öneren.

859: Tek Çözümü Olmayan Bir Harfli İşlem

Mathematics Magazine **47** (1974), 49; öneri: Mart 1973

Kaynak PDF s. 161–162.

Öneren: B. Süer ve Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Aşağıdaki harfli işlem bulmacasını çözünüz:

$$THREE + NINE = EIGHT + FOUR.$$

I. Çözüm: Harry L. Nelson, Livermore, California (başta sıfır bulunması kuralı açıklanmıştır). FOUR'un başında sıfıra izin verilirse onluk tabanda on iki çözüm vardır. Bunların altı temsilcisi şöyledir:

$$\begin{array}{r} THREE + NINE = EIGHT + FOUR \\ 30122 + 4542 = 25703 + 8961 \\ 29433 + 7073 = 30692 + 5814 \\ 40233 + 5653 = 36104 + 9782 \\ 59766 + 4346 = 63295 + 0817 \\ 70566 + 2926 = 69107 + 4385 \\ 69877 + 5457 = 74096 + 1238 \end{array}$$

Her birinde G ile O yer değiştirilerek bir çözüm daha elde edilir; toplam on iki çözüm bulunur. İlk basamağın sıfır olamayacağı olağan kurala göre dördüncü satır ve eşi çıkarılır; böylece on çözüm kalır.^[E066]

$THREE$ 'nin asal olması koşulu da eklenirse yalnızca

$$69877 + 5457 = 74096 + 1238 = 74296 + 1038$$

çifti uygundur. Ayrıca $FOUR$, 3'e bölünmüyorsa çözüm tektir: sağ tarafta $74096 + 1238$ bulunur.

II. Çözüm: John Tabor ve John Beidler (ortak çözüm), University of Scranton, Pennsylvania (tablo düzeltilmiştir). Toplamaya dayanan harfli işlemler, TABOR-AUTOMATIC CRYPTARITHM SOLVER ile artık kolayca çözülmektedir. Bu program birkaç toplama ve bir eşitlik işareti içeren her harfli işlemi kabul edip herhangi bir tabanda çözer. Program, VERİ YAPILARI dersinde dönem projesi olarak yazılmıştır.

$THREE + NINE = FOUR + EIGHT$ harfli işlemi, on çözümü olması bakımından ilginçtir. Bu çözümleri veren yerine koymalar şöyledir:

E	T	R	N	H	U	I	G	O	F
2	3	1	4	0	6	5	7	9	8
2	3	1	4	0	6	5	9	7	8
3	2	4	7	9	1	0	6	8	5
3	2	4	7	9	1	0	8	6	5
3	4	2	5	0	8	6	1	7	9
3	4	2	5	0	8	6	7	1	9
6	7	5	2	0	8	9	1	3	4
6	7	5	2	0	8	9	3	1	4
7	6	8	5	9	3	4	0	2	1
7	6	8	5	9	3	4	2	0	1

[E066]

XDS Sigma 5 üzerinde toplam işlemci süresi 20 saniyedir. Program FORTRAN dilindedir.

Diğer çözenler: Merrill Barney, University of Wisconsin at La Crosse; Harold Biller, Brooklyn, New York; Dorothy Brunet, Sherman Oaks, California; Robert Copus, Rose Hulman Institute of Technology; H. Marlon Hewit, Reedley High School, California; J. A. H. Hunter, Toronto, Kanada; Janice A. McGoldrick, Cranston High School, Rhode Island; Sam Newman, Atlantic City, New Jersey; Erwin Schmidt, Washington, D.C.; S. O. Shachter, Philadelphia, Pennsylvania; Mary F. Turner, Glen Allen, Virginia; C. S. Venkataraman, Trichur, Hindistan; ve problemi önerens.

916: Üçdoğrusal Koordinatlar

Mathematics Magazine **48** (1975), 296; öneri: Kasım 1974

Kaynak PDF s. 162.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

XYZ , bir P noktasının ABC üçgenine göre pedal üçgeni olsun. Aşağıdaki koşulu sağlayan P 'nin trilineer koordinatları x, y, z 'yi bulunuz:

$$YA + AZ = ZB + BX = XC + CY.$$

Çözüm: M. S. Klamkin, University of Waterloo. P 'den sırasıyla AB ve AC 'ye paralel, BC üzerinde sonlanan doğru parçaları çizilirse

$$BX = x \cot B + z \csc B, \quad CX = x \cot C + y \csc C.$$

elde edilir. Burada x, y, z , kenar doğrularına olan normalize edilmiş işaretli uzaklıklardır; doğru parçası ifadeleri başlangıçta yönlüdür. Diğer CY, AY, AZ, BZ uzaklıkları devirli yer değiştirmeye bulunur. Dikme ayakları kenar parçaları üzerinde olan bir nokta arandığında ortak toplam, s yarı çevre olmak üzere $2s/3$ olmalıdır. Dolayısıyla

$$\begin{aligned}(y+z)(\cot A + \csc A) &= (z+x)(\cot B + \csc B) \\ &= (x+y)(\cot C + \csc C) = \frac{2s}{3}.\end{aligned}$$

Bu sistem çözülürse

$$\begin{aligned}x &= \frac{s}{3} \left(\tan \frac{B}{2} + \tan \frac{C}{2} - \tan \frac{A}{2} \right), \\ y &= \frac{s}{3} \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{C}{2} - \tan \frac{B}{2} \right), \\ z &= \frac{s}{3} \left(\tan \frac{A}{2} + \tan \frac{B}{2} - \tan \frac{C}{2} \right).\end{aligned}$$

Doğru parçası yorumunun editöryal doğrulaması. Hepsi pozitif olmak üzere $u = s - a$, $v = s - b$, $w = s - c$ alalım. İçteğet çemberin yarıçapı r ile $\tan(A/2) = r/u$ ve devirli benzerleri, ayrıca $r^2 = uvw/s$ sağlanır. İzdüşüm formüllerinde yerine koyunca

$$\begin{aligned}AZ &= (u + 2v)/3, & ZB &= (2u + v)/3, \\ BX &= (v + 2w)/3, & XC &= (2v + w)/3, \\ CY &= (w + 2u)/3, & YA &= (2w + u)/3.\end{aligned}$$

bulunur. Altı uzunluk da pozitiftir; ilgili kenarları böler ve istenen eşit komşu toplamaları verir. Ayrıca $ax + by + cz = 2sr$ olduğundan işaretli uzaklıklar doğru biçimde normalize edilmiştir. Böylece önerilen nokta olağan doğru parçası uzunlukları için doğrulanır. Çözüm, dikme ayakları kenar parçaları dışında kalan başka olası noktaları sınıflandırmamaktadır; bir teklik iddiası eklenmemiştir.

Diğer çözenler: D. M. Bailey, Gordon Bennett, Alfred Brousseau, Michael Goldberg, J. M. Stark, and problemi öneren.

963: Dışbükey Dörtgenler

Mathematics Magazine **50** (1977), 53; öneri: Ocak 1976

Kaynak PDF s. 163.

Öneren: Hüseyin Demir, Ankara, Türkiye

Kenarları a, b, c, d olup aşağıdaki koşulu sağlayan dışbükey dörtgenleri karakterize ediniz:

$$\begin{vmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{vmatrix} = 0.$$

Çözüm: Clayton W. Dodge, University of Maine at Orono. Satır ve sütunlar toplanıp çıkarılarak determinant denklemi

$$(a + c + b + d)(a + c - b - d)[(a - c)^2 + (b - d)^2] = 0.$$

biçimine getirilir. a, b, c, d pozitif olduğundan ya $a + c = b + d$ ya da $a = c$ ve $b = d$ 'dir. İlk durumda dışbükey dörtgenin bir içteğet çemberi vardır; ikinci durumda dörtgen bir paralelkenardır. Gerekçe tersine işletilerek bir dörtgen paralelkenarsa veya içteğet çemberi varsa determinantının sıfır olduğu da görülür.

Diğer çözenler: Gerald Bergum, M. G. Greening (Avustralya), Daniel Mark Rosenblum, J. M. Stark, and problemi öneren.

998: 120° Açılı Bir Üçgen

Mathematics Magazine **51** (1978), 199; öneri: Kasım 1976

Kaynak PDF s. 163–164.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

İç açıortaylarının ayaklarının oluşturduğu üçgen dik olan bütün üçgenleri karakterize ediniz.

Çözüm: John Oman, University of Wisconsin–Oshkosh. A', B', C' , sırasıyla A, B, C açıortaylarının ayakları olsun. O zaman $\angle A'C'B'$ ancak ve ancak $\angle ACB = 120^\circ$ ise dik açıdır.

a, b, c (sırasıyla a', b', c'), A, B, C (sırasıyla A', B', C') karşısındaki kenarların uzunlukları olsun. Kosinüs ve açıortay teoremleri

$$\begin{aligned}(c')^2 &= \left(\frac{ab}{a+c}\right)^2 + \left(\frac{ab}{b+c}\right)^2 - 2\frac{ab}{a+c}\frac{ab}{b+c}\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}, \\(b')^2 &= \left(\frac{ac}{b+c}\right)^2 + \left(\frac{ac}{a+b}\right)^2 - 2\frac{ac}{b+c}\frac{ac}{a+b}\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, \\(a')^2 &= \left(\frac{bc}{a+c}\right)^2 + \left(\frac{bc}{a+b}\right)^2 - 2\frac{bc}{a+c}\frac{bc}{a+b}\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.\end{aligned}$$

verir. $A'C'B'$ açısının dik olması için gerek ve yeter koşul $(a')^2 + (b')^2 - (c')^2 = 0$ 'dır. Sadeleştirilmeden sonra bu koşul

$$\frac{2abc^2(a^2 + b^2 - c^2 + ab)}{(a+b)^2(a+c)(b+c)} = 0.$$

biçimine dönüşür. Dolayısıyla $A'C'B'$ açısı ancak ve ancak $a^2 + b^2 - c^2 + ab = 0$ iken diktir; kosinüs teoremine göre bu, $\angle ACB = 120^\circ$ ile eşdeğerdir. Devirli yer değiştirme sınıflandırmayı tamamlar.

Diğer çözenler: Gordon Bennett, Howard Eves, Michael Goldberg, Leonard D. Goldstone, M. G. Greening (Avustralya), Hubert J. Ludwig, J. M. Stark, Pambuccian Victor (Romanya), Robert L. Young, and problemi öneren.

1197: Yükseklik Orta Noktalarının Doğrudaşlığı

Mathematics Magazine **58** (1985), 240; öneri: Eylül 1984

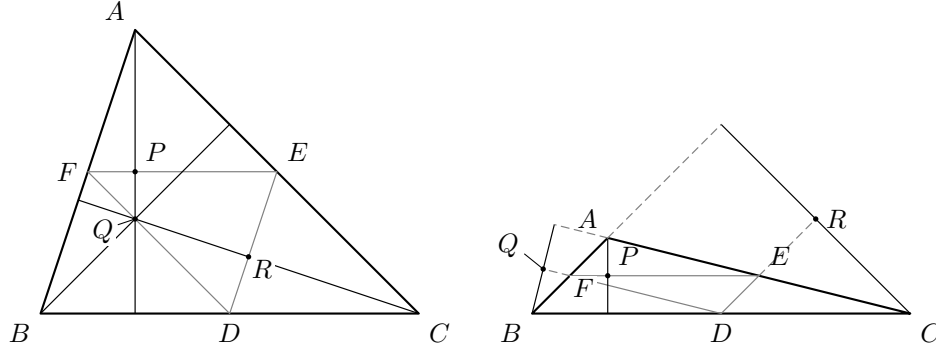
Kaynak PDF s. 164–165.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Yüksekliklerinin orta noktaları doğrusal olan üçgenleri karakterize ediniz.

I. Çözüm: J. H. Webb, University of Cape Town, Güney Afrika. Bir üçgenin yüksekliklerinin orta noktaları ancak ve ancak üçgen dik açılysa doğrudur.

Dar açılı üçgende bütün yükseklikler içeride, geniş açılı üçgende ise ikisi dışarıdadır. A, B, C 'den çizilen yüksekliklerin orta noktaları sırasıyla P, Q, R olsun. D, E, F , BC, CA, AB 'nin orta noktaları ise P, Q, R , gerektiğinde uzatılmış EF, FD, DE üzerinde bulunur. DEF üçgenine uygulanan Pasch aksiyomuna göre P, Q, R ancak ve ancak bunların ikisi D, E, F 'den ikisiyle çakışırsa, başka bir deyişle ABC üçgeninin kenarları üzerinde bulunursa doğrudur. Bu da ancak ve ancak ABC dik üçgen ise gerçekleşir.



Şekil 7.5: Dar ve geniş açılı üçgenlerde yüksekliklerin orta noktaları; kaynaktaki iki şeklin yeniden çizimi.

II. Çözüm: J. F. Rigby, University College, Cardiff, Galler. Bir üçgenin yükseklikleri diklik merkezinde noktadadır. Yüksekliklerin kullanacağımız tek özelliği budur; yanıt, aşağıdaki daha genel sonucun özel bir durumudur.

ABC üçgeninin BC, CA, AB kenar doğruları üzerinde sırasıyla D, E, F noktaları bulunsun ve AD, BE, CF , P 'de noktadaş olsun. Bunların orta noktaları ancak ve ancak P bir köşeyle çakışırsa veya ABC 'nin bir kenar doğrusu üzerinde bulunursa doğrudur.

P bir köşeyle çakışıyorsa genelliği bozmadan $P = A$ alalım. O zaman $E = F = A$ olur ve D , BC üzerinde herhangi bir yerdedir; orta noktalar BC 'ye paralel bir doğru üzerindedir.

P bir köşe değilse eğik koordinat eksenleri olarak AB, AC 'yi seçip uygun birimlerle $A = (0, 0)$, $B = (2, 0)$, $C = (0, 2)$ alalım. $P = (p, q)$ olsun. O hâlde

$$D = \left(\frac{2p}{p+q}, \frac{2q}{p+q} \right), \quad E = \left(0, \frac{2q}{2-p} \right), \quad F = \left(\frac{2p}{2-q}, 0 \right).$$

$p+q \neq 0$, $2-p \neq 0$, $2-q \neq 0$ gerekir; aksi hâlde D, E, F 'den en az biri tanımsızdır (örneğin $p+q=0$ ise AP , BC 'ye paraleldir). Orta noktalar

$$\left(\frac{p}{p+q}, \frac{q}{p+q} \right), \quad \left(1, \frac{q}{2-p} \right), \quad \left(\frac{p}{2-q}, 1 \right).$$

olur. Bu noktaların doğrudaki için gerek ve yeter koşul

$$\begin{vmatrix} p/(p+q) & q/(p+q) & 1 \\ 1 & q/(2-p) & 1 \\ p/(2-q) & 1 & 1 \end{vmatrix} = \frac{2pq(2-p-q)}{(p+q)(2-p)(2-q)} = 0.$$

olmasıdır. Bu, ancak ve ancak $p=0$, $q=0$ veya $p+q=2$ iken, yani P üçgenin bir kenar doğrusu üzerindeyken gerçekleşir; bu durumda iki orta nokta çakışır.

Diklik merkezi, bir köşeyle çakışmadıkça, yani üçgen dik açılı olmadıkça, bir kenar doğrusu üzerinde bulunamaz. Dolayısıyla yüksekliklerin orta noktaları ancak ve ancak üçgen dik açılıysa doğrudur.

Diğer çözümler: I. çözümdeki gibi: Jordi Dou (İspanya), Howard Eves, Syrous Mairivani, Nikie Molloy (öğrenci, Kanada), Richard Parris, Cem Tezer (Türkiye) ve Michael Woltermann; genelleştirilmiş II. çözümdeki gibi (ancak Ceva ve Menelaus teoremleriyle): Cem Tezer (Türkiye, ikinci çözüm); analitik geometriyle: S. F. Barger, Kenneth Bernstein, Ragnar Dybvik (Norveç), Cornelius Groenewoud, Boulkhodra Hacene, L. Kuipers (İsviçre), Hubert J. Ludwig, Bill Oik (öğrenci), John Oman, Harry Seidanger, Robert S. Stacy (Batı Almanya), John S. Sumner, Michael Vowe (İsviçre), Jihad Yamout (öğrenci) ve Robert L. Young; barisentrik veya benzer koordinat sistemleriyle: O. Bottema (Hollanda), J. T. Groenman (Hollanda, iki çözüm), J. C. Linders (Hollanda) ve problemi öneren; eşlenik karmaşık koordinatlarla: Howard Eves (ikinci çözüm) ve Stephanie Sloyan; vektör analiziyle: Leonard D. Goldstone ve Harry D. Ruderman.

1206: Parçalara Ayrılmış Bir Üçgende İçyarıçapların Toplamı

Mathematics Magazine **59** (1986), 46; öneri: Ocak 1985

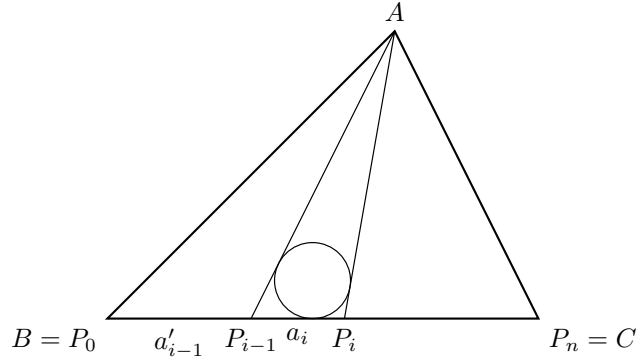
Kaynak PDF s. 166–167.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

ABC , kenarları a, b, c ve yarı çevresi s olan bir üçgen olsun. BC kenarı, bu sırayla alınan $B = P_0, P_1, \dots, P_{n-1}, P_n = C$ noktalarıyla bölünsün. $i = 1, \dots, n$ için r_i , $AP_{i-1}P_i$ üçgeninin içteğet yarıçapı ise aşağıdaki eşitsizliği ispatlayınız:

$$r_1 + \dots + r_n < \frac{1}{2} h_a \ln \frac{s}{s-a},$$

Burada h_a , A köşesinden indirilen yüksekliğin uzunluğudur.



Şekil 7.6: Tabanın bir bölümlemesi ve alt üçgenlerden birinin içteğet çemberi.

Çözüm: Vania D. Mascioni, öğrenci, ETH Zürich, İsviçre. $i = 1, \dots, n$ için $a_i = P_{i-1}P_i$ ve s_i , $AP_{i-1}P_i$ 'nin yarı çevresi olsun. ABP_i için karşılık gelen nicelikler a'_i, s'_i olsun. Şu eşitliği göstereceğiz:

$$\frac{s'_{i-1} - a'_{i-1}}{s'_{i-1}} \frac{s_i - a_i}{s_i} = \frac{s'_i - a'_i}{s'_i} \quad (2 \leq i \leq n). \quad (1)$$

Bundan tümevarımla

$$\frac{s-a}{s} = \prod_{i=1}^n \frac{s_i - a_i}{s_i}.$$

elde edilir. Aritmetik-geometrik ortalama eşitsizliği ve $r_i s_i = \frac{1}{2} a_i h_a$ kullanılarak

$$\begin{aligned} \left(\frac{s-a}{s} \right)^{1/n} &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{s_i - a_i}{s_i} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \left(1 - \frac{a_i}{s_i} \right) \\ &= 1 - \frac{2}{n h_a} \sum_{i=1}^n r_i. \end{aligned}$$

bulunur. Burada eşitliğe izin veren karşılaştırma gereklidir.^[E067] Dolayısıyla

$$\sum_{i=1}^n r_i \leq \frac{n h_a}{2} \left[1 - \left(\frac{s-a}{s} \right)^{1/n} \right],$$

elde edilir; bu, önerilen eşitsizlikten daha güçlüdür. Önerilen eşitsizlik, $x = (s/(s-a))^{1/n}$ alınarak $x > 1$ için $1 - 1/x < \ln x$ bağıntısından çıkar.

(1)'in kanıtı. ABP_{i-1} ve $AP_{i-1}P_i$ üçgenlerinin kenarlarını şekildeki gibi yeniden adlandıralım. (1) şu biçime dönüşür:

$$\frac{u+v-p}{u+v+p} \frac{v+w-q}{v+w+q} = \frac{u+w-p-q}{u+w+p+q}.$$

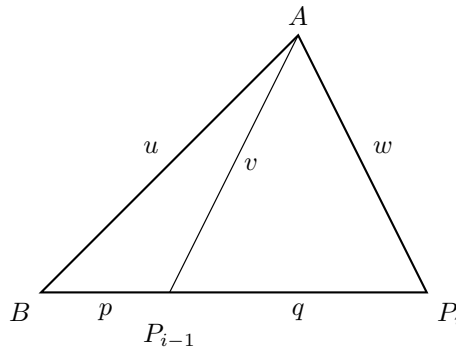
Kolay (ama sıkıcı) bir cebirsel işlem, bunun

$$(v^2 + p^2 - u^2)q + (v^2 + q^2 - w^2)p = 0.$$

ile eşdeğer olduğunu gösterir. Kosinüs teoremine göre bu da

$$2pqv(\cos \angle AP_{i-1}B + \cos \angle AP_{i-1}P_i) = 0,$$

ile eşdeğerdir; açılar toplamı π olduğundan son eşitlik açıktır. Ayrıca Stewart teoremi ve Greitzer, *Geometry Revisited*, s. 6 ile karşılaştırmız.



Şekil 7.7: Çarpım özdeşliğinin kanıtında kullanılan iki komşu üçgen (Stewart teoremi).

Diğer çözenler: Jordi Dou (İspanya), Václav Konečný ve Ronald Shepler, L. Kuipers (İsviçre), Syrous Mairivani, William A. Newcomb, Bjorn Poonen (öğrenci), J. M. Stark, Paul J. Zwier, and problemi öneren.

Editör notu (özgün dergi). Çözüm gönderenlerin çoğu şu tür bir kestirim kullanmıştır. $A = (0, h_a)$, $B = (t, 0)$, $C = (t + a, 0)$ alalım. $j = 0, \dots, m$ için $P'_j = (x'_j, 0)$, $m > n$ olmak üzere

$P_0, \dots, P_n$ 'nin gerçek bir inceltilmesi olsun. $AP'_{j-1}P'_j$ 'nin içyarıçapı r'_j ise

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n r_i &\leq \sum_{j=1}^m r'_j \\ &= \sum_{j=1}^m \frac{h_a(x'_j - x'_{j-1})}{x'_j - x'_{j-1} + \sqrt{(x'_{j-1})^2 + h_a^2} + \sqrt{(x'_j)^2 + h_a^2}} \\ &\approx \int_t^{t+a} \frac{h_a dx}{2\sqrt{x^2 + h_a^2}}. \end{aligned}$$

Editöryal tamamlama. Son yaklaşıklık, bölümlenmenin en büyük aralık uzunluğu sıfıra giderken bir limite dönüşür. İntegral $\frac{1}{2}h_a \ln(s/(s-a))$ 'dır. Yukarıdaki ana kanıt, belirsiz bir yaklaşıklıkla başvurmadan istenen kesin eşitsizliği sağlar.

1211: Bir Elipsin İzoptiği

Mathematics Magazine **59** (1986), 113; öneri: Mart 1985

Kaynak PDF s. 168–169.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Bir elipsin sabit bir açı altında görüldüğü noktaların geometrik yerini bulunuz.

Çözüm: Volkhard Schindler, Berlin, Doğu Almanya. $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ elipsini ele alalım. (x_1, y_1) noktasındaki teğetin denklemi $xx_1/a^2 + yy_1/b^2 = 1$ 'dir. Eksenleri kestiği değerler a^2/x_1 ve b^2/y_1 olduğundan, dışarıdaki bir (x, y) noktasından geçen teğetin eğimi

$$m = \frac{y}{x - a^2/x_1} = \frac{y - b^2/y_1}{x}.$$

olur. Dolayısıyla bu bölmelerin tanımlı olduğu yerlerde

$$\frac{x_1}{a} = \frac{ma}{mx - y}, \quad \frac{y_1}{b} = \frac{b}{y - mx}. \quad (1)$$

(x_1, y_1) elips üzerinde olduğundan yerine koyma

$$(x^2 - a^2)m^2 - 2xym + (y^2 - b^2) = 0. \quad (2)$$

denklemini verir. Elipsin görüldüğü sabit açı α ise kökleri $\tan \alpha = (m_1 - m_2)/(1 + m_1m_2)$ olacak biçimde m_1, m_2 diye sıralayalım. Dolayısıyla

$$\tan^2 \alpha = \frac{(m_1 + m_2)^2 - 4m_1m_2}{(1 + m_1m_2)^2}.$$

elde edilir. α yerine $180^\circ - \alpha$ yazılırsa bu değişmez. Kökler toplamı ve çarpımı kullanılarak

$$\tan^2 \alpha = 4 \frac{b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2}{(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2}. \quad (3)$$

bulunur. 180° sınırı ilk elipstir. $\alpha = 90^\circ$ için limit bağıntısı, yarıçapı $\sqrt{a^2 + b^2}$ olan $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ ortoptik çemberini verir; gösterilen bölüm bu çember üzerinde tanımlı değildir.^[E068]

$x = \rho \cos \theta$, $y = \rho \sin \theta$ kutupsal koordinatlarını kullanalım. $\alpha \neq 90^\circ$ için (3), $\rho^4 - 2A\rho^2 + B = 0$ olur; burada

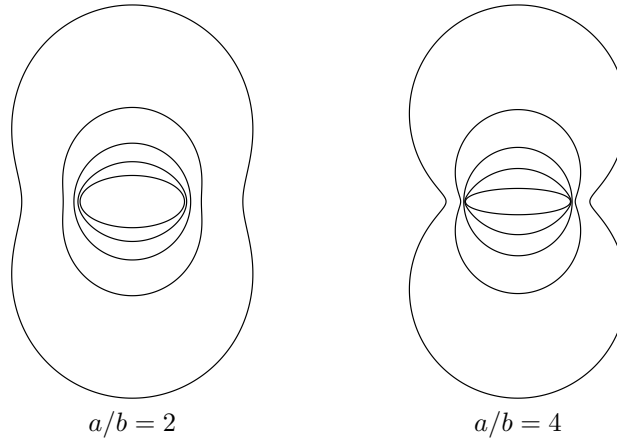
$$A = a^2 + b^2 + 2(b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta) \cot^2 \alpha,$$

$$B = (a^2 + b^2)^2 + 4a^2b^2 \cot^2 \alpha.$$

Dolayısıyla

$$\rho^2 = A \pm \sqrt{A^2 - B}. \quad (4)$$

Sabit θ için α arttıkça uzaklık azalır. Artı işareti $0 < \alpha < 90^\circ$, eksi işareti $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ durumunu verir. Süreklilikle ikisi de 90° için $\rho^2 = a^2 + b^2$ verir. Geometrik yerler geniş açılarda elipse, dar açılarda Cassini ovalerine veya Booth lemniskatlarına yakındır. $a = b$ ise bütün geometrik yerler çemberdir.



Şekil 7.8: $a/b = 2$ ve $a/b = 4$ için izoptikler. Dıştan içe açılar 30° , 60° , 90° , 120° ve sınırdaki 180° elipsidir. İki panel ayrı ayrı ölçeklendirilmiştir.

İstisnai yönler ve açı dalı için editöryal tamamlama. $D = b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2$ yazalım. Dışarıdaki bir nokta için $D > 0$ 'dır ve yön seçiminden bağımsız biçim

$$\cot \alpha = \frac{x^2 + y^2 - a^2 - b^2}{2\sqrt{D}}, \quad 0 < \alpha < \pi. \quad [E068]$$

olur. Bu bağıntı iki teğet ışının yön vektörleri kullanılarak elde edilir ve eğim hesabını düşey teğetlere ve eksenler üzerindeki noktalara sürekli biçimde genişletir. İşareti, (3)'te kare alma sırasında ayrımı kaybolan dar ve geniş açıları ayırır; $\alpha = 90^\circ$ durumunu da doğrudan kapsar. Elips üzerindeki noktalar yalnızca $\alpha \rightarrow \pi$ sınırına karşılık gelir; dışarıdaki bir noktadan çıkan iki farklı teğet ışını temsil etmez. Şekiller (4)'ten üretilmiş; bu sınır için ilk elips ayrıca çizilmiştir.

Diğer çözenler: Michael V. Finn, J. T. Groenman (Hollanda), L. Kuipers (İsviçre), Vania Mascioni (öğrenci, İsviçre), William A. Newcomb, Richard Parris, Stephanie Sloyan ve Robert L. Young. Zachary Franco (öğrenci) ve problemi öneren kısmen çözmüştür.

Editör notu (özgün dergi). M. S. Klamkin (Kanada), sonucu R. C. Yates'in *A Handbook on Curves and their Properties*, J. W. Edwards, Ann Arbor, 1947 (*Curves and their Properties* adıyla yeniden basım, NCTM, 1974), s. 138–140'ta bulmuştur; burada izoptik ve ortoptik terimleri tanımlanmaktadır. Çözüm gönderenlerin hiçbirisi, örneğin (1)'de x, x_1, y, y_1 veya m 'nin sıfır, ya da m 'nin sonsuz olmasıyla ortaya çıkan istisnai durumları incelememiştir.

1298: İçteğet Çemberli Bir Dörtgen

Mathematics Magazine **62** (1989), 200; öneri: Haziran 1988

Kaynak PDF s. 170–171.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

$ABCD$ dörtgeni bir çembere dıştan çizilmiş; AB, BC, CD, DA kenarlarının değme noktaları sırasıyla P, Q, R, S olsun. $a = |AB|$, $b = |BC|$, $c = |CD|$, $d = |DA|$ ve $p = |QS|$, $q = |PR|$ olmak üzere şu bağıntıyı gösteriniz:

$$\frac{ac}{p^2} = \frac{bd}{q^2}.$$

I. Çözüm: J. M. Stark, Lamar University, Texas (açı indisi düzeltilmiştir). İçteğet çemberin yarıçapını r ile gösterelim; SP, PQ, QR, RS 'nin gördüğü ardışık merkez açılar $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ olsun. Şu eşitlikler vardır:

$$a = |AP| + |PB|, \quad b = |BQ| + |QC|, \quad c = |CR| + |RD|, \quad d = |DS| + |SA|.$$

Dik üçgen geometrisinden $|AP| = |SA| = r \tan(\alpha/2)$ ve devirli olarak karşılık gelen $r \tan(\beta/2)$, $r \tan(\gamma/2)$, $r \tan(\delta/2)$ teğet uzunlukları bulunur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} ac &= r^2 \left(\tan \frac{\alpha}{2} + \tan \frac{\beta}{2} \right) \left(\tan \frac{\gamma}{2} + \tan \frac{\delta}{2} \right), \\ bd &= r^2 \left(\tan \frac{\beta}{2} + \tan \frac{\gamma}{2} \right) \left(\tan \frac{\delta}{2} + \tan \frac{\alpha}{2} \right). \end{aligned} \quad (1)$$

$\tan x + \tan y = \sin(x+y)/(\cos x \cos y)$ özdeşliği

$$\frac{ac}{bd} = \frac{\sin((\alpha+\beta)/2) \sin((\gamma+\delta)/2)}{\sin((\beta+\gamma)/2) \sin((\alpha+\delta)/2)}. \quad (2)$$

verir. $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$ olduğundan bu,

$$\frac{ac}{bd} = \frac{\sin^2((\alpha+\beta)/2)}{\sin^2((\beta+\gamma)/2)}. \quad (3)$$

biçimine indirgenir. Son olarak

$$p^2 = \left(2r \sin \frac{\alpha+\beta}{2} \right)^2, \quad q^2 = \left(2r \sin \frac{\beta+\gamma}{2} \right)^2, \quad [E069]$$

olduğundan (3), $ac/bd = p^2/q^2$ verir.

II. Çözüm: O. Nouhaud, Faculté des Sciences de Limoges, Fransa. Merkezi O , yarıçapı r olan içteğet çembere göre inversiyonda A, B, C, D 'nin görüntüleri A', B', C', D' olsun. Bilindiği gibi

$$|A'B'| = r^2 \frac{|AB|}{|OA||OB|}$$

bağıntısı vardır (Howard Eves, *A Survey of Geometry*, Allyn and Bacon, Boston, 1963, Teorem 3.4.20, s. 153). Devirli yer değiştirme üç benzer bağıntı verir. Ayrıca A', SP 'nin; B', PQ 'nin orta noktası olduğundan $2|A'B'| = |SQ|$ 'dur. Benzer biçimde $2|C'D'| = |SQ|$ ve $2|A'D'| = 2|B'C'| = |RP|$ 'dir. İstenen sonuç bu bağıntılardan çıkar.

Diğer çözenler: Mangho Ahuja, Wadie A. Bassali (Kuveyt), J.-M. Becker (Fransa), Bilkent University Problem Solving Group (Türkiye), J. C. Binz (İsviçre), Duane M. Broline, Brown

University Fly-Fishing Club, Onn Chan (öğrenci), Gang Chang (öğrenci), Chico Problem Group, Timothy Chow, Ragnar Dybvik (Norveç), E. C. Friedman, Francis M. Henderson, J. Heuver (Kanada), Geoffrey A. Kandall, Hans Kappus (İsviçre), Václav Konečný, L. Kuipers (İsviçre), Helen M. Marston, Richard E. Pfefer, James S. Robertson, Harry D. Ruderman, Raul A. Simon (Şili), László Szűcs, R. S. Tiberio, George Vakanas (öğrenci), and problemi öneren.

1305: İçyarıçaplar İçin Bir Özdeşlik

Mathematics Magazine **62** (1989), 278; öneri: Ekim 1988

Kaynak PDF s. 172–173.

Öneren: Hüseyin Demir ve Cem Tezer, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

$P_0 = B, P_1, P_2, \dots, P_n = C$, ABC üçgeninin BC kenarı üzerinde bu sırayla alınmış noktalar olsun. r ve r_i , sırasıyla ABC ve $AP_{i-1}P_i$ üçgenlerinin içteğet yarıçaplarını; h ise ortak yüksekliklerini gösterebilir. Şu eşitliği ispatlayınız:

$$\prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{2r_i}{h}\right) = 1 - \frac{2r}{h}.$$

Çözüm: Jim Francis, University of Washington, Seattle, Washington. $n = 2$ durumunu kanıtlamak yeterlidir; formül daha sonra tümevarımla elde edilir. Bir üçgenin içyarıçapı, alanının yarı çevresine bölümüdür. $x_1 = BP_1$, $x_2 = P_1C$, $a_1 = AB$, $a_2 = AP_1$, $a_3 = AC$ olsun. O hâlde

$$r_1 = \frac{x_1 h}{x_1 + a_1 + a_2}, \quad r_2 = \frac{x_2 h}{x_2 + a_2 + a_3}, \quad r = \frac{(x_1 + x_2)h}{x_1 + x_2 + a_1 + a_3}.$$

Böylece

$$\left(1 - \frac{2r_1}{h}\right) \left(1 - \frac{2r_2}{h}\right) = \frac{(a_1 + a_2 - x_1)(a_2 + a_3 - x_2)}{(a_1 + a_2 + x_1)(a_2 + a_3 + x_2)},$$

iken

$$1 - \frac{2r}{h} = \frac{a_1 + a_3 - x_1 - x_2}{a_1 + a_3 + x_1 + x_2}.$$

Şu eşitliği kanıtlamak kalır:

$$\begin{aligned} & (a_1 + a_2 + x_1)(a_2 + a_3 + x_2)(a_1 + a_3 - x_1 - x_2) \\ &= (a_1 + a_2 - x_1)(a_2 + a_3 - x_2)(a_1 + a_3 + x_1 + x_2). \end{aligned}$$

Açıp ortak terimleri çıkardığımızda sağda

$$(-a_1^2 + a_2^2 + x_1^2)x_2 + (-a_3^2 + a_2^2 + x_2^2)x_1,$$

ifadesi, solda ise bunun toplamsal tersi kalır. Kosinüs teoremine göre bu ifade sıfırdır: $\alpha = \angle AP_1B$ ise

$$\begin{aligned} -a_1^2 + a_2^2 + x_1^2 &= 2a_2x_1 \cos \alpha, \\ -a_3^2 + a_2^2 + x_2^2 &= 2a_2x_2 \cos(\pi - \alpha) = -2a_2x_2 \cos \alpha. \end{aligned}$$

Kanıt tamamlanmıştır.

Diğer çözenler: S. Belbas, Francisco Bellot-Rosado (İspanya), Anne Boettcher ve Václav Konečný, Duane M. Broline, Michael V. Finn, John F. Goehl, Jr., Francis M. Henderson, J. Heuver

(Kanada), Hans Kappus (İsviçre), L. Kuipers (İsviçre), Lamar University Problem Solving Group, J. C. Linders (Hollanda), Vania Mascioni (İsviçre), The Oxford Running Club, Werner Ratzke (Batı Almanya), John P. Robertson, Hyman Rosen, Volkhard Schindler (Doğu Almanya), Michael Vowe (İsviçre), A. Zulauf (Yeni Zelanda), and problemi öneren.

Editöryal çapraz gönderme. $1 - 2r_i/h = (s_i - a_i)/s_i$ olduğundan bu, 1206 numaralı problemde kullanılan çarpım özdeşliğidir.

1327: Teğet Dörtgenlerin Köşegenleri

Mathematics Magazine **63** (1990), 275; öneri: Ekim 1989

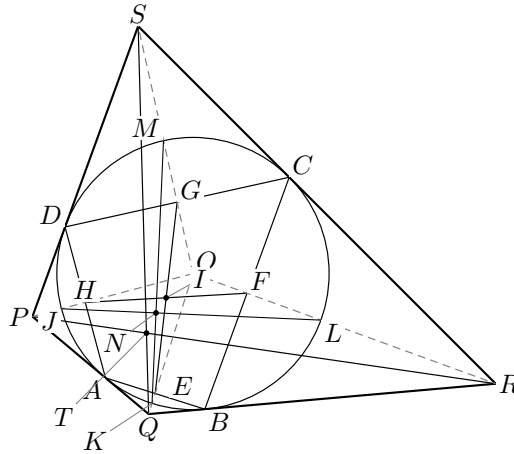
Kaynak PDF s. 174–175.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

$PQRS$ dışbükey dörtgeninin PQ, QR, RS, SP kenarları, içteğet çemberine sırasıyla A, B, C, D noktalarında değsin. AB, BC, CD, DA parçalarının orta noktaları E, F, G, H olsun. PR, QS köşegenleri arasındaki açının, karşılıklı kenarların orta noktalarını birleştiren EG, FH doğruları arasındaki açuya eşit olduğunu gösteriniz.

I. Çözüm: Jordi Dou, Barcelona, İspanya. İçteğet çemberin yarıçapı r , merkezi O olsun. Çemberin OHP, OEQ, OFR, OGS ışınlarıyla kesişimlerini sırasıyla J, K, L, M ile gösterelim. $N = JL \cap KM, T = PR \cap QS, I = EG \cap FH$ alalım.

JAK ve LCM yayları birlikte çevrenin yarısını oluşturduğundan JL ile KM diktir. $\triangle JOL$ ikizkenar olduğundan $KM, \angle JOL$ 'nin açıortayına paraleldir. PR, HF doğruları $\angle JOL$ 'nin kenarlarına göre antiparaleldir: $\angle OHF = \angle ORP$ ve $\angle OFH = \angle OPR$. Gerçekten, $OH \cdot OP = OF \cdot OR = r^2$ olduğundan $\triangle OHF$ ile $\triangle ORP$ benzerdir. Buradan PR ile HF 'nin JL ile eşit, diyelim α , açıları yaptığı çıkar. Benzer biçimde QS ile EG, KM ile eşit, diyelim β , açıları yapar. Çizilen durumda $\angle GIF = 90^\circ - (\alpha + \beta)$ ve $\angle RTS = 90^\circ + (\alpha + \beta)$ olur. Bunlar bütünler olduğundan ilgili doğru çiftleri arasındaki küçük açılar eşittir.



Şekil 7.9: Değme noktaları, JL, KM kirişleri ve karşılıklı kenar orta noktalarını birleştiren EG, FH doğru parçaları.

II. Çözüm: Jiro Fukuta, Motosu-gun, Gifu-ken, Japonya. Yarıçapı r olan içteğet çemberin merkezi O olsun. Başlangıcı O alıp P, Q, R, S 'yi $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ karmaşık sayılarıyla temsil edelim. O zaman E, F, G, H sırasıyla $r^2/\bar{\beta}, r^2/\bar{\gamma}, r^2/\bar{\delta}, r^2/\bar{\alpha}$ 'ya karşılık gelir. Sonucu elde etmek için

$$\mathcal{F} = \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \delta} \div \frac{r^2/\bar{\beta} - r^2/\bar{\delta}}{r^2/\bar{\alpha} - r^2/\bar{\gamma}}$$

ifadesinin gerçek olduğunu göstermek yeterlidir. Şöyle yazılır:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \frac{\alpha - \gamma}{\beta - \delta} \frac{\bar{\alpha} - \bar{\gamma}}{\bar{\beta} - \bar{\delta}} \frac{\beta \bar{\delta}}{\alpha \bar{\gamma}} \\ &= \frac{|\alpha - \gamma|^2}{|\beta - \delta|^2} \left(\frac{\delta}{\alpha} \frac{\beta}{\gamma} \right).\end{aligned}$$

Ancak karşılık gelen $\angle POS$ ve $\angle ROQ$ merkez açılarının toplamı π olduğundan $(\delta/\alpha)(\beta/\gamma)$ gerçektir. Kanıt tamamlanmıştır.

Diğer çözenler: Duane M. Broline, Timothy V. Craine, John F. Goehl, Jr., Francis M. Henderson, Paul Martin, and problemi öneren.

1356: Doğrudaşlık ve Simetri

Mathematics Magazine **64** (1991), 278; öneri: Ekim 1990

Kaynak PDF s. 175.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

P, Q, ABC üçgeninin BC kenarı üzerinde B, P, Q, C sırasıyla alınmış noktalar olsun. PAB, QAC üçgenlerinin çevrel çemberleri $M \neq A$ 'da; PAC, QAB üçgenlerinin çevrel çemberleri ise $N \neq A$ 'da yeniden kesişsin. Her iki farklı ikinci kesişimin de var olduğu varsayılmaktadır.^[E070] A, M, N 'nin doğrusal olması için gerek ve yeter koşulun P, Q noktalarının BC 'nin orta noktası A' 'ya göre simetrik olması olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Christos Athanasiadis, öğrenci, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Massachusetts. BC 'nin AM, AN ile kesişimleri sırasıyla K, L olsun. BC 'yi, başlangıcı B olan x eksenini alıp C, P, Q, K, L 'nin koordinatlarını a, p, q, k, l ile gösterelim. K, PAB, QAC çemberlerinin kuvvet ekseninde olduğundan kuvvetleri eşittir:

$$k(k - p) = (k - q)(k - a).$$

Buradan $k = aq/(a + q - p)$ çıkar. Benzer biçimde p, q yer değiştirilerek $l = ap/(a + p - q)$ elde edilir. $0 < p < q < a$ olduğundan paydalar pozitif ve $l = k$ ancak ve ancak $p + q = a$ iken sağlanır. Sonuç kanıtlanmıştır.

Editöryal açıklama. Belirtilen ikinci kesişimler var olmalı ve A 'dan farklı olmalıdır. Bu, A 'da teğetlikten doğan dejenere durumu dışlar; $M \neq A$ 'nın varlığı kaynakta zaten açıkça belirtilmiş olup aynı kabul N için de gereklidir.^[E070]

Diğer çözenler: Raúl Marín Carrera (öğrenci, Meksika), Jordi Dou (İspanya), Jiro Fukuta (Japonya), Václav Konečný, Alvaro Avila Márquez (öğrenci, Meksika), Richard E. Pfefer, Ioan Sadoveanu, Jyotirmoy Sarkar (öğrenci), Seshadri Sivakumar (Kanada), John S. Sumner, and problemi öneren.

Editör notu (özgün dergi). Pfefer, şekli merkezi A olan bir çembere göre inversiyona tabi tutarak çözümünü elde etmiştir.

1371: Bir Üçgen Değişmezi

Mathematics Magazine **65** (1992), 133; öneri: Nisan 1991

Kaynak PDF s. 176–177.

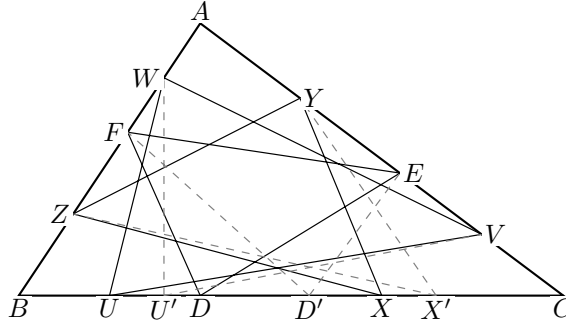
Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

A, B, C bir üçgenin köşeleri, D, E, F ise sırasıyla BC, AC, AB kenarları üzerinde noktalar olsun. U, X, V, Y, W, Z , sırasıyla BD, DC, CE, EA, AF, FB parçalarının orta noktaları olsun. Şu ifadenin

$$\text{Alan}(\triangle UVW) + \text{Alan}(\triangle XYZ) - \frac{1}{2} \text{Alan}(\triangle DEF)$$

D, E, F 'den bağımsız bir sabit olduğunu ispatlayınız.

I. Çözüm: Jordi Dou, Barcelona, İspanya. 80. doğum günü vesilesiyle gönderilmiştir. Önce D', C ile D arasında herhangi bir nokta olsun; $BD', D'C$ 'nin orta noktalarını U', X' alalım. O zaman $XX' = UU' = \frac{1}{2}DD'$ olur. $F, A, W, \dots$ noktalarının BC 'ye uzaklıkları $h_F, h_A, h_W, \dots$ olsun.



Şekil 7.10: E, F sabit tutulup D 'nin D' 'ye taşınması; kesikli çizgiler yeni üçgenleri gösterir.

$h_Z = h_F/2$ ve $h_W = (h_F + h_A)/2$ olduğundan

$$h_Z + h_W - h_F = \frac{1}{2}h_A = h_Y + h_V - h_E.$$

PQR üçgeninin alanını $[PQR]$ ile gösterip $S = [ABC]$, $\sigma = [DEF]$, $\sigma_1 = [XYZ]$, $\sigma_2 = [UVW]$, $\sigma' = [D'EF]$, $\sigma'_1 = [X'YZ]$, $\sigma'_2 = [U'VW]$ yazalım. O hâlde

$$\begin{aligned}\sigma' - \sigma &= \frac{1}{2}DD'(h_E - h_F), \\ \sigma'_1 - \sigma_1 &= \frac{1}{2}XX'(h_Y - h_Z) = \frac{1}{4}DD'(h_Y - h_Z), \\ \sigma'_2 - \sigma_2 &= \frac{1}{4}DD'(h_V - h_W).\end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned}(\sigma'_1 + \sigma'_2 - \frac{1}{2}\sigma') - (\sigma_1 + \sigma_2 - \frac{1}{2}\sigma) \\ = \frac{1}{4}DD'(h_Y - h_Z + h_V - h_W - h_E + h_F) \\ = \frac{1}{4}DD'((h_Y + h_V - h_E) - (h_Z + h_W - h_F)) = 0.\end{aligned}$$

elde edilir. Simetriden, D' , B ile D arasında olduğunda da aynı sonuç geçerlidir. F 'yi AB , E 'yi AC boyunca aynı biçimde hareket ettirerek DEF 'ye göre değişmezlik kanıtlanır.

Değeri bulmak için $E = A$, $F = B$, $D = C$ alalım. O zaman $X = C$, $Y = A$, $Z = B$; U, V, W ise BC, CA, AB 'nin orta noktaları olur. Böylece $\sigma = S$, $\sigma_1 = S$, $\sigma_2 = S/4$ ve değişmez $3S/4$ 'tür.

II. Çözüm: László Szűcs, Fort Lewis College, Durango, Colorado. $[ABC] = \text{Alan}(\triangle ABC)$ yazalım. Verilen ifade

$$\begin{aligned} & [ABC] - ([AWV] + [BUW] + [CVU]) \\ & + [ABC] - ([AZY] + [BXZ] + [CYX]) \\ & - \frac{1}{2}([ABC] - ([AFE] + [BDF] + [CED])). \end{aligned}$$

olur. $[AFE] = 4[AWY]$, $[BDF] = 4[BUZ]$ ve $[CED] = 4[CVX]$ olduğundan bu,

$$\begin{aligned} & \frac{3}{2}[ABC] - ([AWV] - [AWY] + [AZY] - [AWY] \\ & + [BUW] - [BUZ] + [BXZ] - [BUZ] \\ & + [CVU] - [CVX] + [CYX] - [CVX]). \end{aligned}$$

biçimine dönüşür. $[AWV] - [AWY] = [VYW] = \frac{1}{4}[CAF]$ ve benzer beş bağıntı kullanılarak

$$\frac{3}{2}[ABC] - \frac{1}{4}([CAF] + [EAB] + [ABD] + [FBC] + [BCE] + [DCA]) = \frac{3}{4}[ABC].$$

Diğer çözenler: Larry E. Askins, Eynshteyn Averbukh, Seung-Jin Bang (Kore), Karen Benbury, Francisco Bellot Rosado (İspanya), Scott D. Cohen (öğrenci), C. Patrick Collier, Miguel Amengual Covas (İspanya), Jordi Dou (İspanya), Ragnar Dybvik (Norveç), Kao H. ve Irene C. Sze, Milton P. Eisner, Jiro Fukuta (Japonya), Thomas E. Gartner, John F. Goehl, Jr., Cornelius Groenewoud, H. Guggenheimer, Francis M. Henderson, Ralph P. Grimaldi, Russell Jay Hendel, Paul Irwin, Geoffrey A. Kandall, Václav Konečný, Philip Lau, Eugene Lee, Peter W. Lindstrom, James Pfagendtner, Richard E. Pfefer, Rolf Rosenkranz (Romanya), Ioan Sadoveanu, Jyotirmoy Sarkar, Volkhard Schindler (Almanya), Mohammad Parvez Shaikh (öğrenci), Ching-Kuang Sheue, John S. Sumner, Jordan Tabov (Bulgaristan), Michael Vowe, and problemi öneren.

Editör notu (özgün dergi). Tabov daha genel bir sonucu kanıtlamıştır. Bir $A_1A_2A_3$ üçgeni, $\alpha \neq 0, 1$ gerçekte sayı ve λ, μ gerçekte sayıları ele alınsın. Sırasıyla A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 doğruları üzerinde keyfi X_1, X_2, X_3 noktaları için $i \neq j$ iken C_{ij} noktaları

$$\overrightarrow{OC_{ij}} = \alpha \overrightarrow{OA_i} + \beta \overrightarrow{OX_j}, \quad \alpha + \beta = 1,$$

ile tanımlansın; burada O , $A_1A_2A_3$ düzlemi dışında herhangi bir noktadır.

$$F(X_1, X_2, X_3) = \lambda[C_{23}C_{31}C_{12}] + \mu[C_{13}C_{21}C_{32}] - [X_1X_2X_3],$$

olsun; köşeli parantezler işaretli alanı gösterir ve her X_i kendi doğrusu üzerinde bağımsız olarak değişir. O zaman F ancak ve ancak $\lambda = \mu = \frac{1}{2}(1 - \alpha)^{-2}$ iken sabittir. Verilen problem $\alpha = 1/2$ 'ye karşılık gelir.

1377: Bir Üçgen Değişmezi

Mathematics Magazine **65** (1992), 199; öneri: Haziran 1991

Kaynak PDF s. 178.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

D, E, F , ABC üçgeninin sırasıyla BC, CA, AB kenar parçaları üzerinde bulunsun. U, X, V, Y, W, Z , sırasıyla BD, DC, CE, EA, AF, FB doğru parçalarının orta noktaları olsun. Alanlar için yazılan

$$|UVW| + |XYZ| - \frac{1}{2}|DEF|$$

ifadesinin sabit olduğunu gösteriniz.^[E071]

Çözüm: Hans Kappus, Mathematisches Institut der Universität, Basel, İsviçre. İfadeyi S ile göstereyim. $S = \frac{3}{4}$ Alan ABC olduğunu göstereceğiz. Alan ABC 'ye oran afin dönüşümler altında değişmediğinden $A = (0, 0)$, $B = (1, 0)$, $C = (0, 1)$ koordinatlarını seçelim. Şöyle alalım:

$$D = (1 - r, r), \quad E = (0, s), \quad F = (t, 0), \quad 0 \leq r, s, t \leq 1.$$

O zaman

$$\begin{aligned} U &= (1 - r/2, r/2), & V &= (0, (1 + s)/2), & W &= (t/2, 0), \\ X &= ((1 - r)/2, (1 + r)/2), & Y &= (0, s/2), & Z &= ((1 + t)/2, 0). \end{aligned}$$

Doğrudan alan hesapları

$$\begin{aligned} [UVW] &= \frac{1}{8}(2 - r + 2s - t - rs + rt - st), \\ [XYZ] &= \frac{1}{8}(1 + r + t - rs + rt - st), \\ [DEF] &= \frac{1}{2}(s - rs + rt - st). \end{aligned}$$

verir. Dolayısıyla $S = 3/8 = \frac{3}{4}[ABC]$ 'dir.

Diğer çözenler: Benno Arbel (İsrail), H. Guggenheimer, Francis M. Henderson, John G. Heuver (Kanada), Thomas Jager, Václav Konečný, Helen M. Marston, Ralph Merrill, José Heberto Nieto (Venezuela), Chrysostom G. Petalas (Yunanistan), F. C. Rembis, Robert L. Young, imzasız bir çözüm, and problemi öneren.

Editör notu (özgün dergi). Birçok kişi problemin verilen biçimiyle yanlış olduğunu belirtmiştir. Kastedilen, D, E, F 'nin sırasıyla BC, CA, AB doğru parçaları üzerinde olmasıydı. Düzeltilmiş biçim, Nisan 1991'de 1371 numaralı problem olarak; çeşitli çözümleri de Nisan 1992'de yayımlandı. Her nasılsa düzeltilmemiş sürüm kabul edilen öneriler dosyasından çıkarılmadığı için yanlışlıkla yeniden yayımlandı. Özür dileriz.^[E071]

1405: İzogonal İlişkili Çemberler

Mathematics Magazine **66** (1993), 269; öneri: Ekim 1992

Kaynak PDF s. 179–180.

Öneren: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Bir üçgenin farklı iki açısına içten teğet çizilen iki çember için, üçüncü köşeden çizilen ve kenarlarla çakışmayan teğetler üçüncü açının açıortayına göre simetrik ise bu çemberlere izogonal ilişkili denir. Bir üçgenin farklı açılarına içten teğet üç çember verildiğinde, oluşan üç çember çiftinden herhangi ikisi izogonal ilişkili ise üçüncü çiftin de izogonal ilişkili olduğunu ispatlayınız.

Çözüm: problemi öneren (son biçimde sıfıra bölme önlenmiştir). $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ sırasıyla BAC, CBA, ACB açılarının içine çizilen çemberler olsun. Γ_i 'nin merkezi ve yarıçapı I_i, r_i olsun. AB üzerinde, A, B 'den farklı ve CE, CF sırasıyla Γ_1, Γ_2 'ye teğet olacak biçimde E, F noktaları alınsın. $\gamma = \angle ACE$, $\mu = \angle FCB$ yazalım; BC, CA, AB uzunlukları a, b, c olsun.

Sırasıyla AI_1C ve I_2BC üçgenleri ele alınarak

$$b = \left(\cot \frac{A}{2} + \cot \frac{\gamma}{2} \right) r_1, \quad a = \left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{\mu}{2} \right) r_2.$$

elde edilir. Γ_1, Γ_2 ancak ve ancak $\gamma = \mu$ iken izogonal ilişkilidir. Denklemler bunun

$$\frac{b}{r_1} - \cot \frac{A}{2} = \frac{a}{r_2} - \cot \frac{B}{2},$$

ile veya ABC 'nin yarı çevresi s ve içyarıçapı r kullanılarak

$$\frac{b}{r_1} - \frac{s-a}{r} = \frac{a}{r_2} - \frac{s-b}{r}.$$

ile eşdeğer olduğunu gösterir. Eşdeğer olarak

$$\frac{1/r_1 - 1/r}{a} = \frac{1/r_2 - 1/r}{b}. \quad (1)$$

yazılır. Benzer biçimde Γ_2, Γ_3 ancak ve ancak

$$\frac{1/r_2 - 1/r}{b} = \frac{1/r_3 - 1/r}{c}. \quad (2)$$

iken izogonal ilişkilidir. (1) ve (2) birleştirilirse

$$\frac{1/r_1 - 1/r}{a} = \frac{1/r_3 - 1/r}{c},$$

elde edilir; bu, Γ_1, Γ_3 'ün izogonal ilişkili olmasıyla eşdeğerdir. Kaynak, bu eşitlikleri iki tarafın çarpmaya göre terslerini kullanarak ifade eder; buradaki biçim $1/r_i - 1/r$ 'ye bölmeyi önler.^[E072]

Diğer çözenler: Richard Darley, Francis M. Henderson, Kee-Wai Lau, Francisco Bellot Rosado ve María Ascensión López Chamorro (İspanya).

Mathematics Magazine için Kısa Problemler

Hüseyin Demir'in hazırladığı on dört kısa problem (Quickies), dergi künyeleriyle birlikte 13. bölümde listelenmiştir. Özgün “Q” öneki, bu problemleri aynı numaralı olağan problem önerilerinden ayırır.

Q117

Mathematics Magazine **28** (1954–1955), 37

Kaynak PDF s. 182.

Gönderen: Hüseyin Demir

Satranç tahtasında kaç kare vardır?

Q138

Mathematics Magazine **28** (1954–1955), 241

Kaynak PDF s. 182.

Gönderen: Hüseyin Demir

$S_n = 1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n!$ toplamını bulunuz.

Q141

Mathematics Magazine **28** (1954–1955), 292

Kaynak PDF s. 183.

Gönderen: Hüseyin Demir

Yılın on iki ayı $5n + 2 \pmod{12}$, $n = 1, 2, 3, \dots, 12$, ifadesinin verdiği sırayla yazılırsa ilk yedi, sonraki dört ve son ayın özellikleri hakkında ne söylenebilir?

Q166

Mathematics Magazine **29** (1955–1956), 229

Kaynak PDF s. 183.

Gönderen: Hüseyin Demir

İlk m pozitif tam sayının küplerinin toplamı, onları izleyen n ardışık tam sayının küplerinin toplamına eşit olabilir mi?

Q188

Mathematics Magazine **30** (1956–1957), 172

Kaynak PDF s. 183.

Gönderen: Hüseyin Demir

Bir saatin akrep ve yelkovanı hangi zamanlarda yer değiştirdiğinde yine geçerli bir saat gösterimi elde edilir?

Q227

Mathematics Magazine **32** (1958–1959), 32

Kaynak PDF s. 183.

Gönderen: Hüseyin Demir

$f(1), f(2), f(3), \dots, f(13), f(14)$ değerlerinin hepsi asal olacak, ancak bu değerlerin ne hepsi eşit ne de hepsi birbirinden farklı olacak biçimde bir $f(n)$ fonksiyonu bulunuz.^[E019]

Q234

Mathematics Magazine **32** (1958–1959), 113

Kaynak PDF s. 183.

Gönderen: Hüseyin Demir

$A(x)B(x)$ çarpımının katsayıları toplamı sıfırsa çarpan polinomlardan birinin katsayıları toplamı zorunlu olarak sıfırdır.

Q242

Mathematics Magazine **32** (1958–1959), 229

Kaynak PDF s. 183.

Gönderen: Hüseyin Demir

n çiftken $f(n) = \frac{1}{2}$, tekken $f(n) = 1$ olacak biçimde bir $f(n)$ bulunuz.

Q266

Mathematics Magazine **33** (1959–1960), 302

Kaynak PDF s. 184.

Gönderen: Hüseyin Demir

p , 3'ten büyük bir asal sayıysa $p^2 + 2$ bileşik sayıdır.

Q281

Mathematics Magazine **34** (1961), 303

Kaynak PDF s. 184.

Gönderen: Hüseyin Demir

Bir üçgenin dışteğet çemberlerinin üçüne de teğet olan içteki çemberin yarıçapını hesaplayınız.

Q284

Mathematics Magazine **34** (1961), 303

Kaynak PDF s. 184.

Gönderen: Hüseyin Demir

Bir üçgenin kenar doğruları üzerindeki dik izdüşümleri doğrudan olan noktaların geometrik yeri nedir?

Q341

Mathematics Magazine **37** (1964), 251

Kaynak PDF s. 184.

Gönderen: Hüseyin Demir

n sonsuza giderken

$$\frac{\varphi(1) + \varphi(2) + \varphi(3) + \cdots + \varphi(n)}{1 + 2 + 3 + \cdots + n}$$

kesrinin limitini bulunuz; burada $\varphi(n)$, Euler'in fi fonksiyonudur.

Q343

Mathematics Magazine **37** (1964), 251

Kaynak PDF s. 184.

Gönderen: Hüseyin Demir

Aşağıdaki eşitlikleri sağlayan θ açısını bulunuz:

$$\frac{\sin(\theta + 15^\circ)}{\sqrt{1}} = \frac{\sin(2\theta + 15^\circ)}{\sqrt{2}} = \frac{\sin(3\theta + 15^\circ)}{\sqrt{3}}.$$

Q710

Mathematics Magazine **59** (1986), 112

Kaynak PDF s. 184.

Gönderen: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

n herhangi bir pozitif tam sayı olmak üzere, $T = \frac{1}{8}n(n+1)(n+2)(n+3)$ sayısının bir üçgensel sayı olduğunu gösteriniz.

BÖLÜM 9

Kısa Problemlerin Çözümleri

Q117

Mathematics Magazine **28** (1954–1955), 37

Kaynak PDF s. 186.

Yanıt 64 değil, aşağıdaki toplamdır:^[E020]

$$1^2 + 2^2 + \cdots + 8^2 = \frac{8 \cdot 9 \cdot 17}{6} = 204.$$

Q138

Mathematics Magazine **28** (1954–1955), 241

Kaynak PDF s. 186.

$$\begin{aligned} S &= \sum_{p=1}^n p \cdot p! = \sum_{p=1}^n (p+1-1)p! \\ &= \sum_{p=1}^n (p+1)! - \sum_{p=1}^n p! \\ &= (n+1)! - 1. \end{aligned}$$

Q141

Mathematics Magazine **28** (1954–1955), 292

Kaynak PDF s. 186.

Listelenen ilk yedi ayın her biri 31, sonraki dört ayın her biri 30 ve son ay 29 veya 28 gün sürer.

Q166

Mathematics Magazine **29** (1955–1956), 229^[E021]

Kaynak PDF s. 186.

Eğer

$$1^3 + 2^3 + \cdots + m^3 = (m+1)^3 + \cdots + (m+n)^3,$$

ise

$$2(1^3 + 2^3 + \cdots + m^3) = 1^3 + 2^3 + \cdots + (m+n)^3,$$

yani

$$2 \left[\frac{1}{2} m(m+1) \right]^2 = \left[\frac{1}{2} (m+n)(m+n+1) \right]^2,$$

dolayısıyla

$$\frac{1}{2}m(m+1)\sqrt{2} = \frac{1}{2}(m+n)(m+n+1).$$

olur. Ancak bu son eşitlik olanaksızdır. Dolayısıyla yanıt olumsuzdur.

Q188

Mathematics Magazine **30** (1956–1957), 172

Kaynak PDF s. 187.

t anındaki tam saat sayısını p , saatin kesir kısmını α ile gösterelim. Akrep ile yelkovanın yerleri değiştirildiğinde elde edilen yeni zaman t' ve buna karşılık gelen sayılar p', α' olsun ($p' \geq p$ varsayabiliriz). t anında yelkovanın saat birimiyle ölçülen açısı $p' + \alpha'$, α değerinin 12 katıdır.^[E022]

$$\begin{aligned} p' + \alpha' &= 12\alpha, & 0 \leq p' < 12, & 0 \leq \alpha' < 1, \\ p + \alpha &= 12\alpha', & 0 \leq p < 12, & 0 \leq \alpha < 1. \end{aligned}$$

Buradan

$$\alpha = \frac{12p' + p}{143}, \quad \alpha' = \frac{p' + 12p}{143}.$$

elde edilir. Dolayısıyla (11, 11) çifti dışında, $0 \leq p, p' < 12$ koşulunu sağlayan herhangi iki p, p' tam sayısı verildiğinde α ve α' , dolayısıyla istenen zamanlar bulunur. “Yeni” sözcüğü farklı bir zaman anlamında kullanılıyorsa $p = p'$ olan çiftler çıkarılmalıdır.

Q227

Mathematics Magazine **32** (1958–1959), 32

Kaynak PDF s. 187.

$$f(n) = 1 + \varphi(n).^{[E019]}$$

Editöryal doğrulama. φ , Euler’in totient fonksiyonunu göstermek üzere, on dört değer şöyledir:

$$2, 2, 3, 3, 5, 3, 7, 5, 7, 5, 11, 5, 13, 7.$$

Bu değerlerin hepsi asaldır; tekrar eden değerler vardır ve birden fazla farklı değer elde edilir.

Q234

Mathematics Magazine **32** (1958–1959), 113

Kaynak PDF s. 187.

$x = 1$ için $\sum a_i \cdot \sum b_i = \sum c_i$ olur ve sonuç çıkar.

Q242*Mathematics Magazine* **32** (1958–1959), 229

Kaynak PDF s. 187.

 $f(n)$ fonksiyonunu

$$f(n) = \frac{1}{2} \left(n + 1 - 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \right),$$

biçiminde tanımlayalım. Burada $\lfloor n/2 \rfloor$, $n/2$ sayısını aşmayan en büyük tam sayıdır.**Q266***Mathematics Magazine* **33** (1959–1960), 302

Kaynak PDF s. 187.

 p , 3'ten büyük bir asal sayı ise şu bağıntı geçerlidir:

$$p^2 + 2 = (6m \pm 1)^2 + 2 \equiv 0 \pmod{3}.$$

Q281*Mathematics Magazine* **34** (1961), 303

Kaynak PDF s. 188.

Bu çember, üçgenin dokuz nokta çemberi olduğundan yarıçapı $\frac{1}{2}R$ 'dir.**Q284***Mathematics Magazine* **34** (1961), 303

Kaynak PDF s. 188.

Noktaların üçgenin düzleminde bulunması şart koşulsaydı geometrik yer, üçgenin çevrel çemberi olurdu. Böyle bir kısıtlama olmadığından geometrik yer, bu çevrel çemberi dik kesit olarak alan dik silindirdir.

Q341*Mathematics Magazine* **37** (1964), 251

Kaynak PDF s. 188.

$k \geq 2$ için $\varphi(k)$, k 'dan küçük ve k ile aralarında asal olan pozitif tam sayıların sayısını gösterir. Dolayısıyla^[E023]

$$\sum_{k=2}^n \varphi(k)$$

toplamı, ilk n pozitif tam sayı arasındaki aralarında asal çiftlerin toplam sayısıdır; bütün çiftlerin sayısı ise $\binom{n}{2}$ 'dir. Verilen kesrin limiti,

$$\frac{\sum_{k=2}^n \varphi(k)}{\binom{n}{2}}.$$

kesrinin limitiyle aynıdır. Bu, ilk n pozitif tam sayı arasından seçilen iki tam sayının aralarında asal olma olasılığının limitidir. Bu olasılığın $6/\pi^2$ olduğu bilinmektedir. Dolayısıyla verilen kesrin limiti $6/\pi^2$ 'dir.

Q343

Mathematics Magazine **37** (1964), 251

Kaynak PDF s. 188.

θ açısının 15° olduğu açıktır.

Q710

Mathematics Magazine **59** (1986), 112

Kaynak PDF s. 188–189.

Bir k pozitif tam sayısı için

$$\frac{1}{8}n(n+1)(n+2)(n+3) = \frac{1}{2}k(k+1).$$

eşitliği sağlanıyorsa T bir üçgensel sayıdır. Teklik–çiftlik durumunu inceleyip $n(n+3) < (n+1)(n+2)$ eşitsizliğini göz önüne aldığımızda $k = n(n+3)/2$ değerini denemek doğal görünür. Bu durumda

$$k+1 = \frac{n(n+3)}{2} + 1 = \frac{(n+1)(n+2)}{2},$$

olur ve sonuç çıkar.

Mathematics Magazine Problemlerine Sunulan Çözümler

Aşağıdaki liste, bu bölümde yer alan bütün katkıları içerir. Derleyenin bölüm başındaki listesinde bulunmayan yedi kayıt eklenmiştir.^[E095] Dergi künyeleri, burada aktarılan çözümlere aittir.

Problem	Cilt	Yıl	Sayfa
192	28	1954–1955	36
203	28	1954–1955	163
204	28	1954–1955	165
221	28	1954–1955	291
226	29	1955–1956	48 ^[E073]
270	30	1956–1957	108
273 ^[E079]	30	1956–1957	166
332	32	1958–1959	52
353	32	1958–1959	226
374	33	1959–1960	113
383	33	1959–1960	228
387	33	1959–1960	233
400	34	1960–1961	53
401	34	1960–1961	55
412	34	1961	175
427	34	1961	303
428	34	1961	303
432	34	1961	365
435	34	1961	368
445	35	1962	317
476	35	1962	312
646	40	1967	226
653	42	1969	283
1199	58	1985	243
1256	61	1988	54

Kaynak PDF s. 190.

192

Mathematics Magazine **28** (1954–1955), 36; öneri: Ocak 1954

Kaynak PDF s. 190–191.

Öneren: V. Thebault, Tennie, Sarthe, Fransa

ABC üçgeninin köşelerinin sabit bir noktaya göre simetrikleri A', B', C' olsun. $AB'C'$, $BC'A'$, $CA'B'$ üçgenlerinin çevrel çemberlerinin, ABC üçgeninin çevrel çemberi üzerinde bulunan ortak bir noktası vardır.

Editöryal açıklama. Kuruluş genel konumda anlaşılmalıdır: belirtilen üçgenlerin çevrel çemberleri var olmalı ve aşağıda kullanılan kesişim, ortak köşelerinden farklı olmalıdır.^[E074]

Çözüm: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye. Çevrel çemberlerden herhangi ikisinin ABC 'nin (O) çevrel çemberi üzerinde kesiştiğini kanıtlamak yeterlidir. $BC'A'$ ve $CA'B'$ çemberlerinin A' dışındaki kesişimi I olsun. I 'nın (O) üzerinde bulunduğunu göstermek için $\angle BIC = \angle BAC = \angle A$ olduğunu kanıtlayalım. $K = CA \cap A'B'$ alalım; aşağıdaki açılar π modülünde yönlüdür:

$$\begin{aligned}\angle BIC &= \angle BIA' + \angle A'IC \\ &= \angle BC'A' + \angle A'B'C \\ &= \angle B'CA + \angle KB'C \\ &= \angle B'CK + \angle KB'C \\ &= \angle A'KC = \angle BAC = \angle A.\end{aligned}$$

İlk çevre açısı eşitlikleri, bir yanda B, I, C', A' , diğer yanda I, B', C, A' noktalarının ilgili çevrel çemberlerde bulunmasından çıkar; diğer eşitlikler ise aşağıdaki paralelliklerden çıkar:

$$BC' \parallel CB', \quad A'C' \parallel AC, \quad A'B' \parallel AB.$$

Ortak nokta sonucunun editöryal tamamlaması. Aynı gerekçeyi devirli olarak $AB'C'$ ve $BC'A'$ çemberlerine uygulayalım. Bunların ikinci kesişimi de (O) üzerindedir. Bu nokta ile I , ilk kesişimi B olan $BC'A'$ ile (O) çemberlerinin ikinci kesişimi olduğundan genel konumda çakışır. Önerme böylece kanıtlanır.

Diğer çözenler: H. E. Fettis, Dayton, Ohio; O. J. Ramler, Catholic University of America; ve problemi öneren.

203

Mathematics Magazine **28** (1954–1955), 163; öneri: Mayıs 1954

Kaynak PDF s. 191.

Öneren: Norman Anning, Alhambra, California

Aşağıdaki eğrilerin kesişim noktalarından üçünün, bu üç noktadan geçen çemberi eşit üç yaya ayırdığını kanıtlayınız:

$$x^2 - y^2 + ax + by = 0, \quad x^2 + y^2 - a^2 - b^2 = 0$$

Burada a, b gerçekte sayılar ve $a^2 + b^2 > 0$ 'dır.^[E075]

II. Çözüm: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye. $r^2 = a^2 + b^2$ yazalım. Başlangıçta $b \neq 0$ varsayarak iki denklemin toplamından elde edilen y değerini ilk denklemde yerine koyalım. Şu dördüncü derece denklem elde edilir:

$$4x^4 + 4ax^3 - 3r^2x^2 - 2ar^2x + a^2r^2 = 0,$$

Kökler x_1, x_2, x_3, x_4 olsun. x_1, x_2, x_3 'e karşılık gelen $A_1A_2A_3$ üçgeni eşkenarsa merkezi $x^2 + y^2 = r^2$ çemberinin O merkezi olduğundan $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ 'dır. x^3 katsayısından $x_4 = -a$ bulunur.

Bölme işlemi

$$4x^4 + 4ax^3 - 3r^2x^2 - 2ar^2x + a^2r^2 = (x + a)(4x^3 - 3r^2x + ar^2).$$

verir. Üçüncü derece çarpanda ikinci derece terim yoktur; bu, belirtilen koşulla uyumludur. Kaynak buradan $A_1A_2A_3$ 'ün eşkenar olduğu sonucuna varır.

Editöryal tamamlama. Eksik ters yön ve $b = 0$ durumu birlikte, $a = r \cos \phi$, $b = r \sin \phi$, $(x, y) = r(\cos t, \sin t)$ yazılarak elde edilir. İlk denklem

$$\cos 2t + \cos(t - \phi) = 2 \cos \frac{3t - \phi}{2} \cos \frac{t + \phi}{2} = 0.$$

olur. $t = (\phi + \pi)/3 + 2k\pi/3$, $k = 0, 1, 2$, değerleri eşit aralıklı üç farklı nokta verir. Kalan kesişim bunlardan biriyle çakışsa da sonuç geçerlidir.^[E075]

204

Mathematics Magazine **28** (1954–1955), 165; öneri: Mayıs 1954

Kaynak PDF s. 192–194.

Öneren: C. W. Trigg, Los Angeles City College

ABC üçgeninde a kenarına ait kenarortay (m_a), iç açıortay (t_a), içteğet çemberin a ile değme noktasına çizilen köşe doğrusu (p_a) ve A 'ya ait dışteğet çemberin a ile değme noktasına çizilen köşe doğrusu (q_a), kenarı sırasıyla A_m, A_t, A_p, A_q noktalarında kessin. b, c için karşılık gelen doğrularda benzer gösterimler kullanılsın.

1. Aşağıdaki doğru üçlüleri belirtilen noktalarda noktadaşa kenarlar arasındaki bağıntıyı belirleyiniz:

$$\begin{array}{c|c} p_a, m_b, t_c & S \\ p_a, q_b, m_c & R \\ m_a, p_b, t_c & T \\ q_a, p_b, m_c & V \end{array}$$

2. $A_p B_q$ ve $A_q B_p$ 'nin AB 'ye; $C_t B_p$ ve SV 'nin BC 'ye; $C_t A_p$ ve RT 'nin AC 'ye paralel olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye (indisler düzeltilmiştir). 1. a_u, b_v, c_w köşe doğrularının veya bunların BC, CA, AB üzerindeki A_u, B_v, C_w ayaklarının konumlarını şu yönlü oranlarla belirleyelim:

$$k(A_u) = \frac{\overline{A_u B}}{\overline{A_u C}}, \quad k(B_v) = \frac{\overline{B_v C}}{\overline{B_v A}}, \quad k(C_w) = \frac{\overline{C_w A}}{\overline{C_w B}}.$$

Bunlar kenarların iç noktaları olduğundan bütün oranlar negatiftir. $s = (a + b + c)/2$ ile değerleri şöyledir:

	m	t	p	q
$k(A_\bullet)$	-1	$-c/b$	$-(s-b)/(s-c)$	$-(s-c)/(s-b)$
$k(B_\bullet)$	-1	$-a/c$	$-(s-c)/(s-a)$	$-(s-a)/(s-c)$
$k(C_\bullet)$	-1	$-b/a$	$-(s-a)/(s-b)$	$-(s-b)/(s-a)$

Ceva teoremi, üç oranın her çarpımının -1 olmasını gerektirir:

Doğru üçlüsü	Nokta	Koşul
p_a, m_b, t_c	S	$(s-b)/(s-c) = a/b$
p_a, q_b, m_c	R	$(s-a)(s-b) = (s-c)^2$
m_a, p_b, t_c	T	$(s-c)/(s-a) = a/b$
q_a, p_b, m_c	V	$(s-c)^2 = (s-a)(s-b)$

Dört koşulun tümü aşağıdaki bağıntıyla eşdeğerdir:

$$c = \frac{a^2 + b^2}{a + b}.$$

2. (a) $A_p B_q \parallel A_q B_p \parallel AB$ için şu bağıntılara dikkat edelim:

$$k(A_p) = \frac{1}{k(B_q)}, \quad k(A_q) = \frac{1}{k(B_p)}.$$

(b) $C_t B_p \parallel BC$ için üçlünün koşulu olan $k(B_p) = 1/k(C_t)$ kullanılır. $SV \parallel BC$ için, sırasıyla ASA_p ve $AV A_q$ ile kesilen BCB_m ve BCC_m üçgenlerine Menelaus teoremini uygulayalım:

$$\begin{aligned} \frac{\overline{A_p B}}{\overline{A_p C}} \frac{\overline{AC}}{\overline{AB_m}} \frac{\overline{SB_m}}{\overline{SB}} &= 1, & \frac{\overline{SB}}{\overline{SB_m}} &= 2k(A_p), \\ \frac{\overline{A_q B}}{\overline{A_q C}} \frac{\overline{VC}}{\overline{VC_m}} \frac{\overline{AC_m}}{\overline{AB}} &= 1, & \frac{\overline{VC}}{\overline{VC_m}} &= \frac{2}{k(A_q)}. \end{aligned}$$

Buradan

$$\frac{\overline{SB}}{\overline{SB_m}} = 2k(A_p) = \frac{2}{k(A_q)} = \frac{\overline{VC}}{\overline{VC_m}}.$$

elde edilir. Böylece S, V, BB_m, CC_m 'yi aynı oranda böler. $B_m C_m \parallel BC$ olduğundan sonuç çıkar.

(c) $C_t A_p \parallel AC$ için ilk üçlünün koşulu olan $k(C_t) = 1/k(A_p)$ kullanılır. $RT \parallel AC$ için, sırasıyla BRB_q ve BTB_p ile kesilen CAC_m ve CAA_m üçgenlerine Menelaus teoremini uygulayalım:

$$\begin{aligned} k(B_q) \frac{\overline{BA}}{\overline{BC_m}} \frac{\overline{RC_m}}{\overline{RC}} &= 1, & \frac{\overline{RC}}{\overline{RC_m}} &= 2k(B_q), \\ k(B_p) \frac{\overline{TA}}{\overline{TA_m}} \frac{\overline{BA_m}}{\overline{BC}} &= 1, & \frac{\overline{TA}}{\overline{TA_m}} &= \frac{2}{k(B_p)}. \end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$\frac{\overline{RC}}{\overline{RC_m}} = 2k(B_q) = \frac{2}{k(B_p)} = \frac{\overline{TA}}{\overline{TA_m}}.$$

elde edilir. R, T, CC_m, AA_m 'yi aynı oranda böler. $C_m A_m \parallel CA$ olduğundan $RT \parallel CA$ olur.^[E076]

Diğer çözenler: Sister M. Stephanie, Georgian Court College, N. J.; ve problemi öneren.

221

Mathematics Magazine **28** (1954–1955), 291; öneri: Kasım 1954

Kaynak PDF s. 194.

Öneren: E. P. Starke, Rutgers University

Bir koni yüzeyi üzerinde her ana doğruyu sabit bir ψ açısıyla kesen bir spiral çiziliyor. Spiralin herhangi iki noktası arasındaki uzunluk için basit bir ifade bulunuz.

Çözüm: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye (integral gösterimi açıklanmıştır). Koni, düzleme açılabilir bir yüzeydir. Açıldığında koni üzerindeki ψ -spirali düzlemde bir ψ -logaritmik spirale dönüşür. $0 < \psi < \pi/2$ için tepeden olan eğik r uzaklığının arttığı yönü seçelim. Kutupsal denklem

$$r = Ce^{\theta \cot \psi}, \quad C > 0.$$

olur. O hâlde

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = \frac{C}{\sin \psi} e^{\theta \cot \psi} d\theta.$$

$\theta_0 < \theta_1$ değerlerine karşılık gelen noktalar arasında

$$\ell = \frac{C}{\sin \psi} \int_{\theta_0}^{\theta_1} e^{\theta \cot \psi} d\theta = \frac{C}{\cos \psi} \left[e^{\theta \cot \psi} \right]_{\theta_0}^{\theta_1} = \frac{b-a}{\cos \psi},$$

bulunur; burada a, b , uç noktaların koninin tepesine uzaklıkları olup $b > a$ 'dır.^[E077]

Editöryal uç durumlar. $\psi = 0$ için eğri bir ana doğruyu izler ve uzunluğu $|b-a|$ 'dır. $\psi = \pi/2$ için bir paralel çemberi izler; iki uç noktanın eğik uzaklıkları eşittir ve uzunluk taranan açı aralığına bağlıdır. Bu nedenle yalnızca a, b 'den belirlenemez.

Diğer çözenler: Walter B. Carver, Cornell University; M. S. Klamkin, Polytechnic Institute of Brooklyn; S. H. Sesskin, Hofstra College, New York; A. Sisk, Maryville College, Tennessee; ve problemi öneren.

226

Mathematics Magazine **29** (1955–1956), 48; öneri: Ocak 1955

Kaynak PDF s. 194–195.

Öneren: P. D. Thomas, Eglin Air Force Base, Florida

Bir P noktasından bir elipse teğetler çiziliyor. Değme noktaları R, Q, elipsin merkezi O olsun. PQOR dörtgeninin alanı sabit kaldığında P'nin geometrik yerini bulunuz.

II. Çözüm: Hüseyin Demir, Zonguldak, Türkiye. Elips bir çemberin dik izdüşümüdür. Karşılık gelen dörtgen $P'Q'O'R'$ olsun. İki dörtgenin alan oranı sabit olduğundan P' 'nin geometrik yeri eş merkezli bir çemberdir. Dolayısıyla P' 'nin izdüşümü olan P 'nin geometrik yeri, ilk elipsle homotetik bir elipstir.

Diğer çözenler: M. S. Klamkin, Brooklyn Polytechnic Institute; S. H. Sesskin, Hofstra College; E. P. Starke, Rutgers University; Chih-yi Wang, University of Minnesota; ve problemi öneren.

270: Hilal İçindeki Çemberler

Mathematics Magazine **30** (1956–1957), 108; öneri: Mart 1956

Kaynak PDF s. 195–196.

Öneren: Leon Bankoff, Los Angeles, California

Bir yarım çember ile bir çemberin dörtte bir yayının oluşturduğu hilale mümkün olan en büyük çember çiziliyor. Birincisi en büyük çembere, ikincisi birinciye ve böyle devam ederek birbirine ve hilalin kenarlarına teğet olan çemberlerin yarıçapları için genel bir ifade bulunuz.

Çözüm: Hüseyin Demir, Kandilli Bölgesi, Türkiye (ara formüller düzeltilmiştir). Verilen $(O), (O')$ çemberleri A, B 'de kesişsin; n . çemberin merkezi ve yarıçapı O_n, r_n olsun. $AB = 2R$ yazalım ve en büyük çembere $n = 0$ indisini verelim. Merkezi A , kuvveti $k^2 = AB^2 = 4R^2$ olan tersinimi uygulayalım. (O) çemberi kendi BH_0 teğet doğrusuna, (O') ise BO' doğrusuna dönüşür; bu iki doğru arasındaki açı $2\alpha = 45^\circ$ 'dir. Görüntü çemberler (Ω_n) bu açının içine çizilmiş bir zincir oluşturur. (Ω_n) , BH_0 'a H_n 'de teğetse yarıçapı

$$\rho_n = \left(\frac{1 - \sin \alpha}{1 + \sin \alpha} \right)^n \rho_0, \quad \rho_0 = \Omega_0 H_0 = BH_0 \tan \alpha = 2R \tan \alpha.$$

olur. $(O_n), (\Omega_n)$ 'ye ortak $AT_n T'_n$ teğetini çizelim. O zaman

$$r_n = \frac{AT_n \rho_n}{AT'_n} = \frac{k^2 \rho_n}{A\Omega_n^2 - \rho_n^2}.$$

Ω_n 'nin AB üzerindeki izdüşümü K_n ise

$$\begin{aligned} A\Omega_n^2 - \rho_n^2 &= AK_n^2 + K_n\Omega_n^2 - \rho_n^2 \\ &= (2R + \rho_n)^2 + BH_n^2 - \rho_n^2 \\ &= 4R^2 + 4R\rho_n + \rho_n^2 \cot^2 \alpha. \end{aligned}$$

Dolayısıyla^[E078]

$$r_n = \frac{4R^2 \rho_n}{4R^2 + 4R\rho_n + \rho_n^2 \cot^2 \alpha}.$$

Yerine koyma, $\alpha = \pi/8$ ile istenen sonucu verir:

$$r_n = \frac{R}{1 + \frac{1}{2}[(1 + \sin \alpha)^{2n} + (1 - \sin \alpha)^{2n}] \sec^{2n} \alpha \cot \alpha}.$$

Diğer çözenler: J. W. Clawson, Collegeville, Pennsylvania; ve problemi öneren.

273: Harmonik Nokta Dörtlüsü

Mathematics Magazine **30** (1956–1957), 166; öneri: Mayıs 1956

Kaynak PDF s. 197.

Öneren: N. A. Court, University of Oklahoma

Bir üçgenin bir kenarının uçlarında çevrel çembere çizilen teğetlerin kesişimi; karşı köşeden çizilen kenarortayın ve o köşeden ilgili kenara çizilen paralelin çemberle ikinci kesişimleriyle doğrudur.

Editöryal kimlik açıklaması. Derlemede öneri 272 olarak adlandırılmıştır; çoğaltılan dergi kaydının numarası 273'tür. Burada dergideki numara kullanılmıştır.^[E079]

II. Çözüm: Hüseyin Demir, Kandilli Bölgesi, Türkiye. A 'ya ait kenarortay ve dış kenarortay (karşı kenara paralel doğru), çevrel çemberi sırasıyla E, F 'de kessin. B, C 'deki teğetlerin kesişimi K_a olsun. Harmonik oranlardan şu eşitlik elde edilir:

$$A(B, C, E, F) = (AB, AC; AE, AF) = -1.$$

Sağlanan parçanın editöryal tamamlaması. Kopya bu eşitlikte sona erer. Doğrudan bir tamamlama şöyledir. $B = (-1, 0)$, $C = (1, 0)$, $A = (u, v)$, $v \neq 0$ alalım. Çevrel çember $x^2 + y^2 + Dy = 1$, $D = (1 - u^2 - v^2)/v$ denklemlidir. $D \neq 0$ ise B, C 'deki teğetleri $K_a = (0, 2/D)$ 'de kesişir. A 'dan geçen paralel üzerindeki diğer nokta $F = (-u, v)$, AM kenarortayı üzerindeki diğer nokta ise $M = (0, 0)$ ile $E = -A/(u^2 + v^2)$ 'dir. Doğrudan yerine koyma $\det(E - K_a, F - K_a) = 0$ verir. Çakışan kesişimler ve paralel teğetler, karşılık gelen teğet veya projektif limit yorumunu gerektirir.^[E079]

332: Bir Polinom Çarpanı

Mathematics Magazine **32** (1958–1959), 52; öneri: Ocak 1958

Kaynak PDF s. 197.

Öneren: Norman Anning, Alhambra, California

Rasyonel katsayılı, 22. dereceden hiçbir polinomun $x^{45} + 1$ 'i tam bölmediğini kanıtlayınız.^[E080]

II. Çözüm: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye (çarpan gerekçesi açıklanmıştır).

Köklerin tümü farklıdır. Aralarındaki ilkel kökler, derecesi $\varphi(90) = \varphi(45) = 24$ olan tek bir indirgenemez siklotomik çarpan oluşturur. 22. dereceden bir rasyonel çarpan bu çarpanı içeremez; yalnızca kalan $45 - 24 = 21$ kökü kullanabilir. Dolayısıyla böyle bir çarpan yoktur.

Editöryal çarpanlara ayırma. Açık olarak

$$x^{45} + 1 = \Phi_2(x)\Phi_6(x)\Phi_{10}(x)\Phi_{18}(x)\Phi_{30}(x)\Phi_{90}(x),$$

olup dereceler sırasıyla 1, 2, 4, 6, 8, 24'tür. Katsayı cismi önemlidir: $\mathbb{R}$ üzerinde on bir eşlenik ikinci derece çarpanın çarpımı 22. derecedendir.

Diğer çözenler: D. A. Breault, Station Hospital, Fort Monmouth, New Jersey; C. F. Pinzka, University of Cincinnati; Norman Anning, Alhambra, California; ve problemi öneren.

Editör notu (özgün dergi). Bir yanlış çözüm alınmıştır.

353: Teğet Çemberler

Mathematics Magazine **32** (1958–1959), 226; öneri: Eylül 1958

Kaynak PDF s. 198–199.

Öneren: Karl M. Herstein, New York City, New York

Bir doğru ve bu doğru üzerinde olmayan iki nokta veriliyor. Merkezleri verilen doğru üzerinde olan, sırasıyla verilen noktalardan geçen ve birbirine teğet iki eş çember çiziniz.

Çözüm: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye (sınıflandırma düzeltilmiştir). Verilen noktalar ve doğru A, B, d olsun. Farklı iki eş çember içten teğet olamaz. Kaynak, merkezi d ile AB 'nin orta dikmesinin kesişimi olan çakışık çemberleri ve sonsuzda değen limit doğrularını da tartışır; bunlar farklı teğet çember çiftleri değildir.

Dıştan teğetlik için d 'yi x eksenini alıp gerekirse noktaları bu eksene göre yansıtalım; $u > 0$, $a, b > 0$ ile $A = (-u, a)$, $B = (u, b)$ yazalım. Gerekirse noktaları değiştirerek $a \geq b$ varsayalım. Teğetlik noktası $L = (\lambda, 0)$, çemberlerin eksenle diğer kesişimleri $A' = (\xi, 0)$ ve $B' = (\eta, 0)$ olsun. $A'AL$ ve LBB' dik üçgenleri

$$a^2 = (\lambda + u)(-u - \xi), \quad b^2 = (\eta - u)(u - \lambda),$$

verir. Dolayısıyla

$$\xi = -\frac{a^2}{\lambda + u} - u, \quad \eta = -\frac{b^2}{\lambda - u} + u.$$

Çapları $\lambda - \xi = \eta - \lambda$ biçiminde eşitlemek

$$2\lambda^3 + (a^2 + b^2 - 2u^2)\lambda - u(a^2 - b^2) = 0.$$

denklemini verir. $a^2 - b^2 = 2c^2$ alınırsa denklem

$$\lambda^3 + p\lambda + q = 0, \quad p = b^2 + c^2 - u^2, \quad q = -uc^2.$$

olur. $\mathcal{D} = 4p^3 + 27q^2$ için $\mathcal{D} > 0$ ise bir gerçekte kök, $\mathcal{D} = 0$ ise katlı kök, $\mathcal{D} < 0$ ise üç farklı gerçekte kök vardır. Her gerçekte kök $(-u, u)$ içindedir: ilk kübik $-u$ 'da negatif, u 'da pozitifdir ve bu aralığın dışında kesin artar. Her kök, merkezleri $((\xi + \lambda)/2, 0)$ ve $((\lambda + \eta)/2, 0)$, ortak pozitif yarıçapı $(\lambda - \xi)/2$ olan bir çift verir.

Kaynakta olduğu gibi $\mathcal{D} \leq 0$, $p \leq 0$ gerektirir. $b^2 + c^2 = u^2 \cos^2 t$, $0 \leq t < \pi/2$ yazılırsa

$$\mathcal{D} = -4u^6 \sin^6 t + 27u^2 c^4 \leq 0, \quad \sqrt{27} c^2 \leq 2u^2 \sin^3 t \leq 2u^2.$$

elde edilir. Son gerekli sınır, diskriminant testine eşdeğer değildir; sınıflandırmada $\mathcal{D}$ kullanılmalıdır.^[E081]

Kuruluşa ilişkin editöryal açıklama. A, B 'nin d üzerindeki dik izdüşümleri çakışıyorsa farklı, dıştan teğet iki çember yoktur. Genel olarak kübik yalnızca cetvel ve pergelle çözülemez: $u = 1, a = 2, b = 1, \mathbb{Q}$ üzerinde indirgenemez $2\lambda^3 + 3\lambda - 3 = 0$ verir. Dolayısıyla genel kuruluş yalnızca Öklid tipi ikinci derece kuruluşları değil, bir kübik denklemin çözümünü gerektirir.

Diğer çözenler: Sam Kravitz, East Cleveland, Ohio.

374: Eş Alanlı Üçgenler

Mathematics Magazine **33** (1959–1960), 113; öneri: Mart 1959

Kaynak PDF s. 199–200.

Öneren: Victor Thebault, Tennie, Sarthe, Fransa

Bir d doğrusu BC, CA, AB 'yi A_1, B_1, C_1 'de kessin. Herhangi bir P için $A'_1, B'_1, C'_1, \overrightarrow{PA'_1} = -3\overrightarrow{PA_1}$ ve devirli benzerleriyle tanımlansın. $A_2, B_2, C_2, AA'_1, BB'_1, CC'_1$ 'in orta noktalarıysa oluşturdıkları üçgenin alanı ABC 'nin alanına eşittir.

II. Çözüm: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye. Bağıntıları vektörlerle ifade edip vektörel çarpımları kullanalım. Öncelikle P 'nin d üzerinde olması gerekmez. Şu bağıntılar vardır:

$$\overrightarrow{PA'_1} = -3\overrightarrow{PA_1}, \quad 2\overrightarrow{PA_2} = \overrightarrow{PA} - 3\overrightarrow{PA_1},$$

Böylece

$$2\overrightarrow{A_2B_2} = \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{A_1B_1}, \quad 2\overrightarrow{A_2C_2} = \overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{A_1C_1}.$$

Yönlü alanın iki katını $[XYZ]$ ile gösterelim; böylece $[ABC] = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$ olur. O hâlde

$$\begin{aligned} 4[A_2B_2C_2] &= [ABC] - 3(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{A_1C_1} + \overrightarrow{A_1B_1} \times \overrightarrow{AC}) + 9\overrightarrow{A_1B_1} \times \overrightarrow{A_1C_1} \\ &= [ABC] - 3(\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{A_1A} \times \overrightarrow{AC}) \\ &= [ABC] - 3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) \times \overrightarrow{A_1A} \\ &= [ABC] + 3\overrightarrow{BC} \times \overrightarrow{CA} = 4[ABC]. \end{aligned}$$

A_1, B_1, C_1 doğruduş olduğundan ilk satırdaki son çarpım sıfırdır.

Problem şöyle genellenir. $A_1 \in BC$, $B_1 \in CA$, $C_1 \in AB$ ve devirli olarak $\overrightarrow{PA'_1} = -n\overrightarrow{PA_1}$, $\overrightarrow{AA_2} = m\overrightarrow{AA'_1}$ ise düzeltilmiş özdeşlik^[E082]

$$[A_2B_2C_2] = (1 - m)(1 - m + mn)[ABC] + m^2n^2[A_1B_1C_1].$$

olur. $m = 1/2, n = 3$ ve doğruduş A_1, B_1, C_1 için ilk sonucu verir.

Diğer çözenler: Christopher Henrich (kısmen); ve problemi öneren.

383: Bir Karenin Parçalara Ayrılması

Mathematics Magazine **33** (1959–1960), 228; öneri: Eylül 1959

Kaynak PDF s. 201–202.

Öneren: *Raphael T. Coffman, Richland, Washington*

Herhangi bir kareyi, yeniden birleştirildiğinde yüzey alanı karenin alanına eşit bir küp oluşturacak en fazla altı parçaya ayırınız. Parçalar bükülebilir.

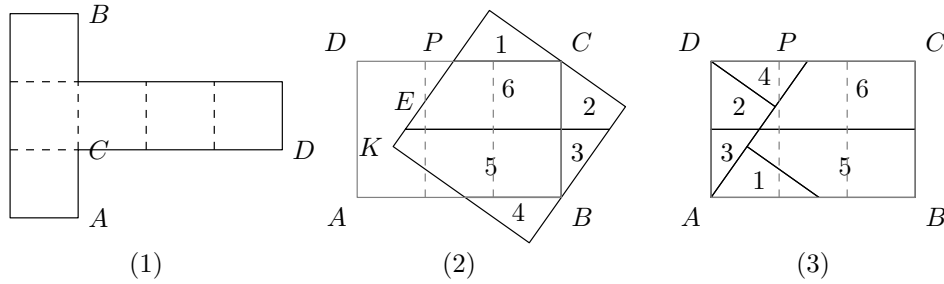
I. Çözüm: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye. Karenin kenarı a olsun. Küpün ayrıtı $6u^2 = a^2$, dolayısıyla $u = a\sqrt{6}/6$ sağlar. Küpü (1)'deki gibi açıp dikdörtgenleri (2)'deki $3u$ ve $2u$ kenarlı $ABCD$ dikdörtgeninde birleştirelim. Şöyle alalım:

$$AP = \sqrt{AB \cdot AD} = \sqrt{3u \cdot 2u} = u\sqrt{6}.$$

B 'nin AP üzerindeki dik izdüşümü E olsun.^[E083] Benzer ABE ve APD dik üçgenlerinden

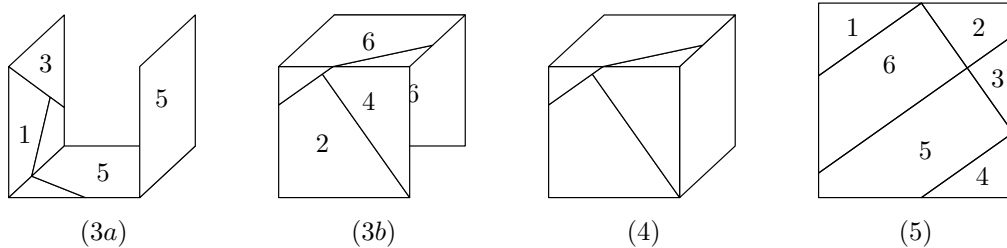
$$\frac{BE}{AB} = \frac{AD}{AP}, \quad BE = \frac{AB \cdot AD}{AP} = \frac{AP^2}{AP} = AP.$$

elde edilir. Böylece (2)'de gösterilen kare çizilebilir. (2) ile (3)'ün karşılaştırılması, $ABCD$ ile kenarı a olan karenin eş alanlı olduğunu gösterir. Parça sayısı altıdır, yani yediden küçüktür. Küp



Şekil 10.1: Kareden dikdörtgene parçalama: küp açımını (1), üzerine kare çizilmiş dikdörtgen (2) ve yeniden düzenlenmiş dikdörtgen (3). İçteki düz çizgiler kesimleri, kesikli ızgara çizgileri katları gösterir.

(3a), (3b) ve (4)'teki gibi elde edilir. Önce dikdörtgeni kullanmadan kareyi doğrudan kesmek için (5) kullanılabilir.



Şekil 10.2: Katlama görünümüleri (3a), (3b), birleştirilmiş küp (4) ve karenin kesim deseni (5). Katlama görünümüleri şematiktir; düzlemsel desen kuruluştan üretilmiştir.

Editöryal kuruluş ayrıntıları. Yeniden çizimde $u = 1$, $A = (0, 0)$, $B = (3, 0)$, $C = (3, 2)$, $D = (0, 2)$, $P = (\sqrt{2}, 2)$, $E = (1, \sqrt{2})$ kullanılmıştır. Karenin bir kenarı AP üzerinde, karşı kenarı B 'den, komşu bir kenarı C 'den geçer. 0, 1, 2 yüksekliklerindeki yatay kesimler ve $x = 3$ sınırı

numaralı altı parçayı verir. 1. parçayı $(-\sqrt{2}, -2)$, 2. ve 3. parçaları $(-3, 0)$, 4. parçayı $(-3+\sqrt{2}, 2)$ kadar ötelemek dikdörtgeni doldurur; 5. ve 6. parçalar sabit kalır. Bu koordinatlar, eski çizimin oranlarına dayanmadan kesimleri belirler.

387: Tümevarımla Bir Kanıt

Mathematics Magazine **33** (1959–1960), 233; öneri: Eylül 1959

Kaynak PDF s. 203–205.

Öneren: *D. S. Mitrinovich, University of Belgrade, Yugoslavya*

Her negatif olmayan n tam sayısı için aşağıdaki eşitliği tümevarımla kanıtlayınız:

$$\left[\frac{\partial^n}{\partial t^n} \left(\frac{1}{1-t} e^{-xt/(1-t)} \right) \right]_{t=0} = e^x \frac{d^n}{dx^n} (x^n e^{-x}).$$

Çözüm: *Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye (işleç işaretleri ve indisleri düzeltilmiştir).* Eşitlik $n = 0$ için açıktır. $n = p$ için geçerli olduğunu varsayalım. $D = d/dx$ yazalım. Leibniz formülünden

$$\begin{aligned} e^x D^p (x^p e^{-x}) &= e^x \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} D^k x^p D^{p-k} e^{-x} \\ &= \sum_{k=0}^p (-1)^{p-k} \binom{p}{k} \frac{p!}{(p-k)!} x^{p-k} \\ &= \sum_{\lambda=0}^p (-1)^\lambda \binom{p}{\lambda} \frac{p!}{\lambda!} x^\lambda. \end{aligned} \quad (1)$$

$u = e^{-x/(1-t)}$ alalım. O zaman

$$\frac{1}{1-t} e^{-xt/(1-t)} = -e^x \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = -x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

x, t türevlerinin sırasını değiştirip $t = 0$ alırsak

$$\left[\partial_t^p \left(\frac{1}{1-t} e^{-xt/(1-t)} \right) \right]_{t=0} = (-1)^{p+1} e^x D(x D^2)^p e^{-x}. \quad (2)$$

elde edilir. Böylece tümevarım önermesi

$$D(x D^2)^p e^{-x} = P_p(x) e^{-x}, \quad P_p(x) = \sum_{\lambda=0}^p a_\lambda x^\lambda, \quad a_\lambda = (-1)^{p+\lambda+1} \binom{p}{\lambda} \frac{p!}{\lambda!}. \quad (3)$$

ile eşdeğerdir. $p + 1$ 'e geçmek için şu hesaba dikkat edelim:

$$\begin{aligned} D(x D^2)^{p+1} e^{-x} &= D x D [D(x D^2)^p e^{-x}] \\ &= D x D (P_p e^{-x}) \\ &= [x P_p'' + (1 - 2x) P_p' + (x - 1) P_p] e^{-x}. \end{aligned}$$

Parantez içindeki x^λ katsayısı

$$b_\lambda = (\lambda + 1)^2 a_{\lambda+1} - (2\lambda + 1) a_\lambda + a_{\lambda-1},$$

olup aralık dışındaki katsayılar sıfır alınır. $1 \leq \lambda \leq p-1$ için bu ifade

$$\begin{aligned} b_\lambda &= (-1)^{p+\lambda+2} \frac{(p!)^2}{(\lambda!)^2(p-\lambda+1)!} [(p-\lambda)(p-\lambda+1) \\ &\quad + (2\lambda+1)(p-\lambda+1) + \lambda^2] \\ &= (-1)^{p+\lambda+2} \binom{p+1}{\lambda} \frac{(p+1)!}{\lambda!}. \end{aligned}$$

olur. Sınır katsayıları b_0, b_p, b_{p+1} da aynı formülü doğrudan verir. Dolayısıyla

$$D(xD^2)^{p+1}e^{-x} = \sum_{\lambda=0}^{p+1} (-1)^{p+\lambda+2} \binom{p+1}{\lambda} \frac{(p+1)!}{\lambda!} x^\lambda e^{-x},$$

elde edilir; bu, (3)'ü $p+1$ için kanıtlayarak tümevarımı tamamlar.^[E084]

400: Bir Üçgen Kuruluşu

Mathematics Magazine **34** (1960–1961), 53; öneri: Ocak 1960

Kaynak PDF s. 205.

Öneren: *W. B. Carver, Cornell University*

Düzlemde bir nokta, bir çember ve herhangi bir eğri veriliyor. Her birinin üzerinde bir köşesi bulunan bir eşkenar üçgen çiziniz.

II. Çözüm: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye. Verilen nokta, çember ve eğri $A, (b), (c)$ olsun. ABC bir çözümse (c) üzerindeki C , (b) üzerindeki B 'nin A çevresinde 60° veya -60° döndürülmesiyle elde edilir. Dolayısıyla (c) üzerindeki aranan köşeler, (c) ile (b) 'nin bu iki döndürülmüş konumunun kesişimleridir. A 'daki dejenere kesişimler dışlandığında üçgenler hemen kurulur.

Diğer çözenler: Harry M. Gehman, University of Buffalo; Rostyslaw J. Lewyckij, University of Toronto; Harvey Walden (kısmi çözüm); ve problemi öneren.

401: Bir Fibonacci Dizisi

Mathematics Magazine **34** (1960–1961), 55; öneri: Ocak 1960

Kaynak PDF s. 206–209.

Öneren: *John M. Howell, Los Angeles City College*

a, b, c, d gerçekte sayılar olmak üzere $F(0) = c$, $F(1) = d$ ve $n \geq 2$ için $F(n) = aF(n-1) + bF(n-2)$ veriliyor. $F(n)$ için genel bir ifade bulunuz.

II. Çözüm: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye. Ardışık olarak şu değerler bulunur:

$$\begin{aligned} F(0) &= c, & F(1) &= d, \\ F(2) &= ad + bc, \\ F(3) &= (a^2 + b)d + abc, \\ F(4) &= (a^3 + 2ab)d + (a^2b + b^2)c. \end{aligned}$$

Genel olarak $n \geq 2$ için

$$\begin{aligned} F(n) &= \left[\binom{n-1}{0} a^{n-1} + \binom{n-2}{1} a^{n-3} b + \binom{n-3}{2} a^{n-5} b^2 + \dots \right] d \\ &\quad + \left[\binom{n-2}{0} a^{n-2} + \binom{n-3}{1} a^{n-4} b + \binom{n-4}{2} a^{n-6} b^2 + \dots \right] bc \\ &= d \sum_{j=0}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \binom{n-1-j}{j} a^{n-1-2j} b^j + bc \sum_{j=0}^{\lfloor (n-2)/2 \rfloor} \binom{n-2-j}{j} a^{n-2-2j} b^j, \end{aligned}$$

elde edilir; bu, tümevarımla gösterilir. Sonlu toplamlar yalnızca negatif olmayan kuvvetler içerir; a veya b sıfırken de bunlar polinom terimleri olarak yorumlanır.

III. Alternatif çözüm: Hüseyin Demir (determinantlar düzeltilmiştir). Denklemleri $F(n), F(n-1), \dots, F(2)$ bilinmeyenleri cinsinden yazalım:

$$\begin{aligned} F(n) - aF(n-1) - bF(n-2) &= 0, \\ &\vdots \\ F(4) - aF(3) - bF(2) &= 0, \\ F(3) - aF(2) &= bd, \\ F(2) &= ad + bc. \end{aligned}$$

Katsayı matrisi köşegeni 1, birinci ve ikinci üst köşegenleri $-a, -b$ olan üst üçgensel bir matristir; determinantı 1'dir. Cramer kuralında ilk sütun $(0, \dots, 0, bd, ad + bc)^T$ ile değiştirilir. Bu determinantın açılımı

$$F(n) = (ad + bc)D_{n-2} + bdD_{n-3}, \quad n \geq 2, \text{ [E085]}$$

verir; burada $D_{-1} = 0, D_0 = 1$ ve

$$D_k = \det \begin{pmatrix} a & b & 0 & \dots & 0 \\ -1 & a & b & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & a & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & b \\ 0 & \dots & 0 & -1 & a \end{pmatrix}_{k \times k}.$$

Gerçekten, $D_k = aD_{k-1} + bD_{k-2}$ olup gereken yinelemeyi verir.

IV. Alternatif çözüm: Hüseyin Demir. Paydaların sıfır olmadığı yerlerde $u_n = F(n)/F(n-1)$ alalım. O hâlde

$$u_1 = \frac{d}{c}, \quad u_n = a + \frac{b}{u_{n-1}} = a + \frac{b}{a + \frac{b}{\ddots + \frac{b}{d/c}}}.$$

$j = 1, \dots, n$ için $F(j) = u_j F(j-1)$ eşitliklerini çarparsak

$$F(n) = c u_1 u_2 \dots u_n.$$

elde edilir. Bu oran biçimi yalnızca paydaları tanımlıyken geçerlidir; polinom ve determinant formülleri bütün gerçek başlangıç verilerini kapsar.^[E085]

Diğer çözenler: D. A. Breault, Sylvania Electric Products, Inc., Waltham, Massachusetts; R. G. Buschman, University of Oregon; F. D. Parker, University of Alaska; Charles F. Pinzka, University of Cincinnati; Chih-yi Wang, University of Minnesota; ve problemi öneren.

412: Projektif Eşleme

Mathematics Magazine **34** (1961), 175; öneri: Mayıs 1960

Kaynak PDF s. 210.

Öneren: *D. Moody Bailey, Princeton, West Virginia*

P , ABC 'nin çevrel çemberi üzerinde olsun. BP, CP ışınları CA, AB 'yi E, F 'de kessin. Yönlü doğru parçaları kullanarak ve oranların tanımlı olduğu durumda

$$\frac{b^2}{a^2} \frac{BF}{FA} + \frac{c^2}{a^2} \frac{CE}{EA} = -1,$$

eşitliğini kanıtlayınız; burada a, b, c karşı kenar uzunluklarıdır.

Çözüm: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye. E, F noktaları arasında projektif eşleme vardır. $e = CE/EA$, $f = BF/FA$ yazalım; aralarındaki çift doğrusal bağıntı

$$\mathcal{A}ef + \mathcal{B}e + \mathcal{C}f + \mathcal{D} = 0.$$

olsun. P sırasıyla A, B, C 'ye yaklaşsın. A 'da e, f ikisi de sonsuz olduğundan $\mathcal{A} = 0$ 'dır. B 'de limit doğrusu BE dış simedyan olduğundan $e = -a^2/c^2$, $f = 0$ elde edilir. Dolayısıyla

$$-\mathcal{B}\frac{a^2}{c^2} + \mathcal{D} = 0, \quad \mathcal{B} = \frac{c^2}{a^2}\mathcal{D}.$$

Benzer biçimde $\mathcal{C} = (b^2/a^2)\mathcal{D}$ 'dir. Yerine koyma sonucu kanıtlar. Limit konumları, tanımsız olağan oranların değerleri olarak değil eşlemeyi belirlemek için kullanılmıştır.^[E086]

Diğer çözenler: Josef Andersson, Vaxholm, İsveç; Leon Bankoff, Los Angeles, California; A. F. Hordam, University of New England, Armidale, NSW, Avustralya; ve problemi öneren.

427: Köşe Doğruları Arasında Bir Bağntı

Mathematics Magazine **34** (1961), 303; öneri: Kasım 1960

Kaynak PDF s. 211.

Öneren: *D. Moody Bailey, Princeton, West Virginia*

P 'den geçen B, C köşe doğruları CA, AB 'yi E, F 'de kessin. BC 'nin orta noktası M olsun. MP, CA 'yı N 'de ve AB 'yi O 'da kessin. EF uzatılarak BC 'yi G 'de kessin; B 'den AG 'ye çizilen paralel CF 'yi H 'de kessin. Tanımlı, dejenere olmayan kesişimler için $HO \parallel CA$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye. A, B, C, M, F 'yi sabit tutup geometrik olarak ilişkili P, O, N, G, E, H noktalarını değiştirelim. M 'den izdüşüm $O \leftrightarrow P$; B 'den izdüşüm $P \leftrightarrow E$; F 'den izdüşüm $E \leftrightarrow G$ verir. AG doğru demeti paralel BH demetine, oradan da CF üzerindeki H 'ye karşılık gelir. Dolayısıyla $O \leftrightarrow H$ projektiftir. Ortak F noktası kendisine karşılık geldiğinden bu eşleme perspektiftir: OH sabit bir L 'den geçer. O, AB üzerinde sonsuzdayken H de CF üzerinde sonsuzdadır; dolayısıyla L sonsuzdadır ve OH 'nin yönü sabittir. $O = B$ iken limit konumu $P = E = G = C$ ve $OH = BH \parallel CA$ verir. Önerme kanıtlanmıştır.^[E087]

Diğer çözenler: problemi öneren.

428: Rakamların Permütasyonları

Mathematics Magazine **34** (1961), 303; öneri: Kasım 1960

Kaynak PDF s. 211–212.

Öneren: Murray S. Klamkin, AVCO, Wilmington, Massachusetts

$N = 142857$ sayısının $2N, 3N, 4N, 5N, 6N$ katları kendi rakamlarının permütasyonlarıdır. $2M, 3M, 4M, 5M, 6M, 7M$ katlarının hepsi M 'nin rakamlarının permütasyonları olacak biçimde bir M sayısı var mıdır?

I. Çözüm: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye (tarihsel gerekçe; geçerli bir yokluk kanıtı değildir). Yayımlanan gerekçe, yedi katın yedi permütasyon vermesinden M 'nin yedi basamaklı olması gerektiğini varsayar. Ardından $M = \overline{abcdefg} = 10G + g$, $G = \overline{abcdef}$ yazar ve katlardan birinin $\overline{gabcdef} = 10^6g + G$ devirli kaydırması olduğunu varsayar. Bu varsayımlar altında

$$p(10G + g) = 10^6g + G, \quad G = \frac{(10^6 - p)g}{10p - 1} = \frac{N_p}{D_p}g.$$

Kaynağın aritmetik tablosu şöyledir:

p	N_p	D_p	Sadeleştirilmiş bölüm bilgisi
1	999999	9	$N_p/D_p = 111111$
2	999998	19	indirgenemez
3	999997	29	indirgenemez
4	999996	$39 = 3 \cdot 13$	$(N_p/3)/D_p$ indirgenemez
5	999995	$49 = 7 \cdot 7$	indirgenemez
6	999994	59	indirgenemez
7	999993	$69 = 3 \cdot 23$	$(N_p/3)/D_p$ indirgenemez

Buradan tek mümkün G 'nin altı eş rakamdan oluştuğu, dolayısıyla çözüm bulunmadığı sonucuna varılır. Ne yedi basamak varsayımı ne de belirtilen devirli kaydırmanın bulunması probleminden çıkar. Yokluk sonucu yanlıştır.^[E088]

Editöryal karşıörnek. Olağan 18 basamaklı tam sayı

$$M = 105263157894736842$$

istenen koşulu sağlar:

$2M$	210526315789473684
$3M$	315789473684210526
$4M$	421052631578947368
$5M$	526315789473684210
$6M$	631578947368421052
$7M$	736842105263157894

Altı satırın tümü M 'nin devirli permütasyonlarıdır; başta sıfır kabulüne gerek yoktur.

Editör notu (özgün dergi). II. Dermott A. Breault'nun yorumu, Sylvania Electric Products, Inc., Waltham, Massachusetts. Kaynak, aynı özelliğin $M = 5882352941176470$ için 16. kata, $L = 3448275862068965517241379310$ için 28. kata kadar geçerli olduğunu ileri sürüp bunların $1/17$ ve $1/29$ 'un devirleriyle ilişkisini açıklar. Ayrıca p asal ve $1/p$ 'nin devir uzunluğu $p - 1$ olduğunda devrin $1, \dots, p - 1$ ile çarpılmasının rakamları permüte ettiğini öne sürer.

Yoruma editöryal düzeltme. Yukarıdaki iki basılı tam sayı olağan tam sayı anlamında bu özelliği sağlamaz; iki katları bile bir basamak kazanır. İlgili sabit uzunluklu devirler, sıfır başta

olacak biçimde 0588235294117647 ve 0344827586206896551724137931'dir. Tam devirli bir asal için çarpma, baştaki sıfırlar sayılarak bu sabit uzunluklu bloğun devirli permütasyonlarını verir. Yukarıdaki karşörnekte bu belirsizlik yoktur.^[E088]

432: Köşe Doğruları

Mathematics Magazine **34** (1961), 365; öneri: Ocak 1961

Kaynak PDF s. 212–213.

Öneren: Lee Tih-Ming, Taipei, Tayvan

ABC 'nin içindeki O noktasını köşelere birleştiriniz. BC, CA, AB 'ye sırasıyla OX, OY, OZ dikmelerini indiriniz. $D = AO \cap YZ$, $E = BO \cap ZX$, $F = CO \cap XY$ olsun. Aşağıdaki eşitliği gösteriniz:

$$\frac{AZ}{ZB} \frac{BX}{XC} \frac{CY}{YA} = \frac{ZD}{DY} \frac{YF}{FX} \frac{XE}{EZ}.$$

II. Çözüm: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye. Yönlü oranlar ve dejenere olmayan keşişimler kullanıldığında O 'nun üçgenin içinde olması gerekmez.^[E089] Şöyle tanımlayalım:

$$\alpha = \angle BAO, \beta = \angle CBO, \gamma = \angle ACO, \quad \alpha' = \angle OAC, \beta' = \angle OBA, \gamma' = \angle OCB.$$

AZD, ADY üçgenlerindeki sinüs teoremi

$$\frac{ZD}{\sin \alpha} = \frac{AZ}{\sin D}, \quad \frac{DY}{\sin \alpha'} = \frac{YA}{\sin D}, \quad \frac{ZD}{DY} = \frac{AZ}{YA} \frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'}.$$

verir. Bu bağıntıyı ve iki devirli benzerini çarpalım:

$$\frac{ZD}{DY} \frac{YF}{FX} \frac{XE}{EZ} = \frac{AZ}{ZB} \frac{BX}{XC} \frac{CY}{YA} \left(\frac{\sin \alpha}{\sin \alpha'} \frac{\sin \beta}{\sin \beta'} \frac{\sin \gamma}{\sin \gamma'} \right).$$

AO, BO, CO noktadaş olduğundan trigonometrik Ceva teoremine göre parantez içi 1'dir. Böylece oranların tanımlı olduğu her yerde özdeşlik kanıtlanır. Paydalar kaldırıldığında sürekli limit konumlarında da karşılık gelen çarpım özdeşliği elde edilir.

Diğer çözenler: Brother Alfred, St. Mary's College, California; Josef Andersson, Vaxholm, İsveç; C. W. Trigg, Los Angeles City College; Dale Woods, Oklahoma State University; ve problemi öneren.

435: Üçgenlerde Uç Değerler

Mathematics Magazine **34** (1961), 368; öneri: Ocak 1961

Kaynak PDF s. 213–214.

Öneren: M. S. Klamkin, AVCO, Wilmington, Massachusetts

Bir elipse içten çizilebilen en büyük ve en küçük eşkenar üçgenleri belirleyiniz.

Çözüm: Hüseyin Demir, Kandilli, Ereğli, Kdz., Türkiye. $A_1A_2A_3$,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a > b > 0, \quad (1)$$

elipsine içten çizilmiş eşkenar bir üçgen olsun. Çevrel çemberi

$$(x - u)^2 + (y - v)^2 = r^2. \quad (2)$$

ile verilsin. $c^2 = a^2 - b^2$ yazalım. Çember, katlılıklar hesaba katılarak, elipsi dördüncü bir $A_4 = (x_4, y_4)$ noktasında keser. y elenince baş terimleri $c^4x^4 - 4a^2c^2ux^3 + \dots$ olan bir dördüncü derece denklem; x elenince $c^4y^4 + 4b^2c^2vy^3 + \dots$ elde edilir. Eşkenar üçgenin ağırlık merkezi (u, v) olduğundan

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3u, \quad y_1 + y_2 + y_3 = 3v.$$

Böylece

$$x_4 = \frac{(a^2 + 3b^2)u}{c^2}, \quad y_4 = -\frac{(b^2 + 3a^2)v}{c^2}. \quad (3)$$

bulunur. (1)'de yerine koyunca merkezler elipsi

$$\frac{u^2}{\alpha^2} + \frac{v^2}{\beta^2} = 1, \quad \alpha = \frac{ac^2}{a^2 + 3b^2}, \quad \beta = \frac{bc^2}{b^2 + 3a^2}, \quad \alpha > \beta. \quad (4)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} r^2 &= (x_4 - u)^2 + (y_4 - v)^2 \\ &= (a - \alpha)^2 \frac{u^2}{\alpha^2} + (b + \beta)^2 \frac{v^2}{\beta^2}. \end{aligned}$$

İki katsayı uç yarıçapların kareleridir. $b + \beta > a - \alpha$ olduğundan en büyük değer $(u, v) = (0, \pm\beta)$, en küçük değer $(\pm\alpha, 0)$ noktalarında alınır:

$$r_{\max} = b + \beta = \frac{4a^2b}{3a^2 + b^2}, \quad r_{\min} = a - \alpha = \frac{4ab^2}{a^2 + 3b^2}.$$

En büyük üçgenlerin bir köşesi küçük eksenin, en küçüklerin bir köşesi büyük eksenin ucundadır. Bu eksen üçgenin bir simetri eksenidir. $a > b$ iken her türden iki üçgen vardır. $a = b$ ise içten çizilen bütün eşkenar üçgenlerin boyutları aynıdır ve sonsuz sayıda yönelim vardır.^[E090]

Diğer çözenler: Josef Andersson, Vaxholm, İsveç; J. W. Clawson, Collegeville, Pennsylvania (iki çözüm); ve J. W. Mellender, University [kurum bilgisi sağlanan kopyada kesilmiştir].

445: Yayımlanmış Bir Kanıt Düzeltme

Mathematics Magazine **35** (1962), 317; atıflar: Mart ve Kasım 1961

Kaynak PDF s. 215.

Yorum: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye

Kanıtta küçük bir değişiklik gerekir. Şöyle okunmalıdır: A, B, P 'nin OM doğrusu üzerindeki dik izdüşümleri A', B', P' olsun. Kanıtın kalan kısmındaki bütün P harfleri P' ile değiştirilmelidir; sonuç şöyledir:

$$\frac{MA^2 - k}{MB^2 - k} = \frac{2OM \cdot A'P'}{2OM \cdot B'P'} = \frac{A'P'}{B'P'} = \frac{PA}{PB}.$$

Editöryal kaynak notu. Sağlanan derlemede yalnızca bu düzeltme bulunmaktadır; ilgili problem önerisi ve ilk kanıt yoktur. Eksik şekil düzeni uydurulmadan gösterim korunmuştur.^[E091]

476: Çevreyi ve Alanı İkiye Bölen Doğru*Mathematics Magazine* **35** (1962), 312; öneri: Mart 1962

Kaynak PDF s. 216–218.

Öneren: Kaidy Tan, Fukien Normal College, Çin

Verilen bir dörtgenin hem çevresini hem alanını ikiye bölen bir doğru çiziniz.

Çözüm: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye (uygulanabilirlik koşulları düzeltilmiştir). Dışbükey durumu ele alalım. Kesen doğru ya iki komşu ya da iki karşıt kenarı keser; iki durum da bir uç noktanın köşede bulunmasını kapsar. $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$, $DA = d$; $K = AC \cap BD$, $AK = \alpha$, $KC = \gamma$, $AC = p = \alpha + \gamma$ yazalım.

I. Komşu kenarlar. $M \in AB$, $N \in AD$ olsun. $CC' \parallel BD$ çizilsin ve AB uzantısını C' 'de kessin. Alanlar

$$[ABCD] = [ABD] + [BCD] = [ABD] + [BC'D] = [AC'D].$$

bağıntısını sağlar. AC' 'nin orta noktası I olsun; $IN \parallel MD$ çizilsin. O hâlde

$$[AMN] = [AIN] + [IMN] = [AIN] + [IDN] = [AID] = \frac{1}{2}[ABCD].$$

$AM = m$, $AN = n$ ile benzer üçgenlerden

$$\frac{AC'}{AC} = \frac{AB}{AK} = \frac{a}{\alpha}, \quad AC' = \frac{pa}{\alpha}, \quad mn = AI \cdot AD = \frac{pad}{2\alpha}.$$

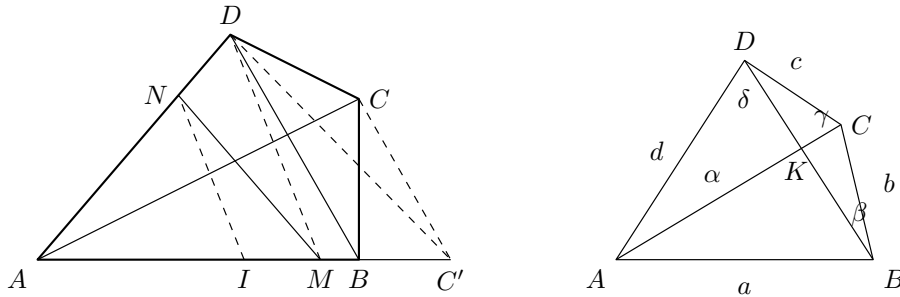
elde edilir. Çevrenin ikiye bölünmesi $m + n = (a + b + c + d)/2$ gerektirir. Dolayısıyla m, n ,

$$2x^2 - (a + b + c + d)x + \frac{pad}{\alpha} = 0.$$

denkleminin kökleridir. Köklerin her iki ataması $0 \leq m \leq a$, $0 \leq n \leq d$ koşullarıyla sınanmalıdır. Gerekli sonuçlar $b + c \leq a + d$, $p \leq 2\alpha$ (eşdeğer olarak $\gamma \leq \alpha$) ve

$$(a + b + c + d)^2 - 8pad/\alpha \geq 0.$$

olur. Kurulan parçanın istenen kenarlarda bulunup bulunmadığını, yalnızca bu daha zayıf gerekli koşullar değil köklerin aralık kontrolleri belirler.^[E092]



Şekil 10.3: 476 numaralı problem için komşu kenarlar kuruluşu ve köşegen gösterimi.

II. Karşıt kenarlar. Şekildeki konumda AB, DC uzatılıp O' 'da kesiştirilsin. $M \in AB$ için A', B' noktaları ODC üzerinde olacak biçimde $BB' \parallel MC$, $AA' \parallel MD$ çizilsin. Alan özdeşlikleri

$$[ABCD] = [AMD] + [MCD] + [BCM] = [A'MD] + [MCD] + [B'CM] = [MB'A'].$$

verir. N , $A'B'$ 'nin orta noktasıysa MN alanı ikiye böler. Şöyle tanımlayalım:

$$OM = m, ON = n, OA = a', OB = b', OC = c', OD = d', OA' = a'', OB' = b''.$$

Benzerlik $m/c' = b'/b'', m/d' = a'/a''$ ve dolayısıyla

$$2n = a'' + b'' = \frac{a'd' + b'c'}{m}, \quad 2mn = a'd' + b'c'.$$

verir. Çevrenin ikiye bölünmesi $MA + AD + DN = MB + BC + CN$, yani

$$(m - a') + d + (n - d') = (b' - m) + b + (c' - n).$$

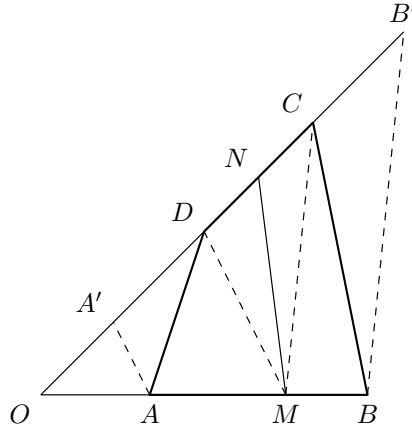
koşuludur. Dolayısıyla

$$2(m + n) = a' + b' + c' + d' + b - d,$$

ve m, n ,

$$2x^2 - (a' + b' + c' + d' + b - d)x + (a'd' + b'c') = 0.$$

denkleminin kökleridir. Bir aday ancak kökler gerçekse ve bir atama $a' \leq m \leq b', d' \leq n \leq c'$ sağlıyorsa geçerlidir. Kaynağın kullandığı üçgen eşitsizlikleri bunları kendiliğinden sağlamaz.^[E092]



Şekil 10.4: İkiye bölen MN doğrusu ve A', B' yardımcı noktalarıyla karşıt kenarlar kuruluşu.

Paralel karşıt kenarlar için editöryal tamamlama. $AB \parallel CD$ iken sonlu bir O yoktur. Aşağıdaki koordinat kuruluşu bu durumu ve diğer dışbükey konumları da kapsar. A' 'yı başlangıç alıp $M = tB$, $N = D + v(C - D)$, $0 \leq t, v \leq 1$ yazalım. $s = (a + b + c + d)/2$ ve olağan alan $T = [ABCD]$ olsun. Çevreyi ikiye bölme $at + cv = s - d$, alanı ikiye bölme ise

$$t(B \times D) + tv B \times (C - D) + v(C \times D) = T.$$

koşuludur. $v = (s - d - at)/c$ yerine konup en fazla ikinci dereceden denklem çözülür ve yalnızca $0 \leq t, v \leq 1$ sağlayan çözümler tutulur. Diğer karşıt kenar çifti ve dört komşu kenar durumu da aynı biçimde denetlenir. Bunlar dışbükey dörtgenin bütün doğru kesitlerini kapsar; sağlanan gerekçe genel dışbükey olmayan dörtgenleri ele almaz.^[E092]

646: Tam dörtkenar

Mathematics Magazine **40** (1967), 226; öneri: Ocak 1967

Kaynak PDF s. 218.

Öneren: *V. F. Ivanoff, San Carlos, California*

Bir tam dörtkenarın karşıt köşe çiftleri $A, A'; B, B'; C, C'$ olsun. Aşağıdaki eşitliği kanıtlayınız:

$$\frac{AB \cdot AB'}{A'B \cdot A'B'} = \frac{AC \cdot AC'}{A'C \cdot A'C'}.$$

I. Çözüm: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye. Eşitliği şu biçimde yazalım:

$$\frac{AB}{AC} \frac{AB'}{AC'} \frac{A'C'}{A'B} \frac{A'C}{A'B'} = 1.$$

Her oranı ilgili üçgende sinüs teoremiyle verilen eşdeğeriyle değiştirirsek çarpım

$$\frac{\sin C}{\sin B} \frac{\sin C'}{\sin B'} \frac{\sin B}{\sin C'} \frac{\sin B'}{\sin C} = 1,$$

özdeşliğine dönüşür.

653: Üstel fonksiyonun türevi

Mathematics Magazine **42** (1969), 283; öneri: Mart 1967

Kaynak PDF s. 218–219.

Öneren: *Sam Newman, Atlantic City, New Jersey*

Aşağıdaki bağıntıyla tanımlanan, üsleri sağdan gruplanmış üstel kule için dy_n/dx türevini bulunuz:

$$y_0 = x, \quad y_n = x^{y_{n-1}} \quad (n \geq 1), \quad x > 0.$$

III. Çözüm: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye. $y_1 = x^x$, $y_0 = x$ ve $y_{-1} = 1$ olmak üzere $y_n = x^{y_{n-1}}$ yineleme bağıntısını kullanalım. Logaritma alıp türevleyince

$$\frac{y'_n}{y_n} = \frac{y'_{n-1}}{y_{n-1}} (y_{n-1} \ln x) + \frac{y_{n-1}}{x}.$$

elde edilir. Bunu ardışık indisler için yazıp uygun çarpanlarla çarparak toplayalım. Sonuç şudur:

$$y'_n = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^n \left(\prod_{j=n-k-1}^n y_j \right) (\ln x)^k.$$

$k = n$ terimi $y_{-1} = 1$ çarpanını içerir; formül $y'_0 = 1$ sonucunu da verir. $x = 1$ için sıfırcı kuvvetli terim, polinomlardaki olağan anlamıyla yorumlanır.^[E093]

Diğer çözenler: Pierre Bouchard, Université de Montréal, Kanada; Nicholas C. Bystrom, St. Paul, Minnesota; Richard W. Feldman, Lycoming College, Pennsylvania; David Fetter, City College of New York; Reinaldo E. Giudici, University of Pittsburgh; Michael Goldberg, Washington, D.C.; Sandra A. Gossom, University of Tennessee; J. M. Howell, Los Angeles City College; Richard A. Jacobson, Houghton College, New York; Lew Kowarski, Morgan State College, Maryland; Fred Lambie, Lexington, Massachusetts; Douglas Lind, University of Virginia; Edwin A. Power, University College, London, İngiltere; ve problemi öneren.

Editör notu (özgün dergi). Bir dizi yanlış veya okunamayan çözüm alınmıştır.

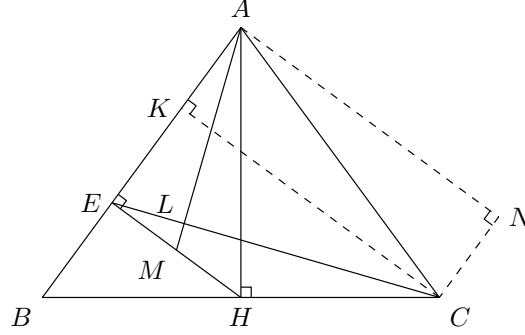
1199: İkizkenar üçgende dik doğrular

Mathematics Magazine **58** (1985), 243; öneri: Eylül 1984

Kaynak PDF s. 220.

Öneren: *Aristomenis Siskakis, University of Illinois*

$AB = AC$ olan bir ABC ikizkenar üçgeninde, A köşesinden indirilen yüksekliğin ayağı H , H noktasından AB doğruya indirilen dikmenin ayağı E ve EH doğru parçasının orta noktası M olsun. $AM \perp EC$ olduğunu gösteriniz.



Şekil 10.5: Yükseklik çizimi, $HCAE$ kirişler dörtgeni ve yardımcı $AKCN$ dikdörtgeni.

I. Çözüm: Hüseyin Demir, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye. C köşesinden indirilen yükseklik CK olsun. Benzer EHA ve KBC dik üçgenlerinde, karşılıklı AM ve CE kenarortayları, HA ve BC hipotenüsleriyle eşit açılar yapar. Kenarortaylar L noktasında kesişsin. $HCAE$ dörtgeni bir kirişler dörtgenidir. Dolayısıyla $\angle ALC = \angle AHC = 90^\circ$ olur.

II. Çözüm: Hüseyin Demir. Harmonik doğru demetlerini kullanalım. C köşesinden indirilen yükseklik CK olsun ve $AKCN$ dikdörtgenini çizelim. $HE \parallel AN$ olduğundan ve AM , HE doğru parçasını ortaladığından

$$(AB, AH; AM, AN) = -1.$$

elde edilir. Benzer biçimde, $BK \parallel CN$ olduğundan ve CE , BK doğru parçasını ortaladığından

$$(CK, CB; CE, CN) = -1.$$

olur. Bu iki harmonik demette, karşılıklı üç doğru çifti birbirine diktir. Dolayısıyla dördüncü çift olan AM, CE de birbirine diktir. İlgili doğruların uzantıları, yönlü veya projektif yorumla ele alınır.

Editör notu (özgün dergi). Problem, problemi öneren ve sekiz öğrenci dâhil başka altmış iki kişi tarafından da çözülmüş; bu kişiler yetmiş üç çözüm göndermiştir. Joseph Konhauser, problemin *Monthly* dergisinde E1476 numarasıyla yer aldığını ve 69. ciltte (1962), s. 233'te üç çözümünün yayımlandığını belirlemiştir. Başka dört çözüm sahibi bu kaynağı belirtmeyi unutmuştur. P. J. Pedler (Avustralya) ve J. H. Webb (Güney Afrika), problemi Loren C. Larson'ın *Problem Solving Through Problems* kitabında, s. 27'de; Geoffrey A. Kandall ise M. N. Aref ve W. Wernick'in *Problems and Solutions in Elementary Geometry* kitabında, s. 32, alıştırma 92'de bulmuştur. O. Bottema (Hollanda) ve Webb şu ters önermeleri vermiştir: (1) herhangi bir üçgende $AM \perp EC$ olması için gerek ve yeter koşul $AB = AC$ olmasıdır; (2) AB doğruyu üzerindeki herhangi bir E noktası için $AM \perp EC$ olması, ancak ve ancak $HE \perp AB$ olması veya A noktasının BE doğru parçasının orta noktası olmasıyla mümkündür. Diğer noktalar problem ifadesindeki gibi tanımlıdır.

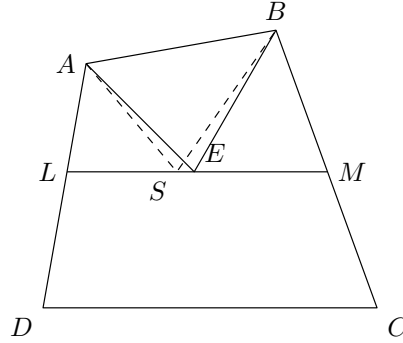
1256: Kirişler dörtgeni

Mathematics Magazine **61** (1988), 54; öneri: Aralık 1986

Kaynak PDF s. 221–222.

Öneren: *R. S. Luthar, University of Wisconsin Center, Janesville*

ABCD bir dışbükey kirişler dörtgeni olsun. A, B köşelerindeki iç açıortaylar E noktasında kesişsin. E noktasından CD doğrusuna paralel çizilen doğru, AD doğrusunu L ve BC doğrusunu M noktasında kessin. $LA + MB = LM$ olduğunu kanıtlayınız.



Şekil 10.6: Açıortaylar ve paralel doğru parçası; Demir ve Tezer'in kanıtındaki yardımcı S noktası.

II. Çözüm: *H. Demir ve C. Tezer, Orta Doğu Teknik Üniversitesi, Ankara, Türkiye.* $\angle DAB = 2\alpha$, $\angle ABC = 2\beta$, $\angle BCD = 2\gamma$, $\angle CDA = 2\delta$ diyelim. O hâlde $\angle ELA = 2\delta$, $\angle BME = 2\gamma$ ve $\alpha = \pi/2 - \gamma$, $\beta = \pi/2 - \delta$ olur. Önce $\alpha > \beta$ olduğunu varsayalım; gerekirse uçların rollerini değiştirelim.

LM üzerinde, AD doğrusunun M ile aynı tarafında, $LS = LA$ olacak biçimde S noktasını seçelim. Böylece $\angle ASL = \angle LAS = \beta$ olur; dolayısıyla $ASEB$ bir kirişler dörtgenidir. $\angle LAS = \beta < \alpha = \angle LAE$ olduğundan S , L ile E arasındadır. Ayrıca

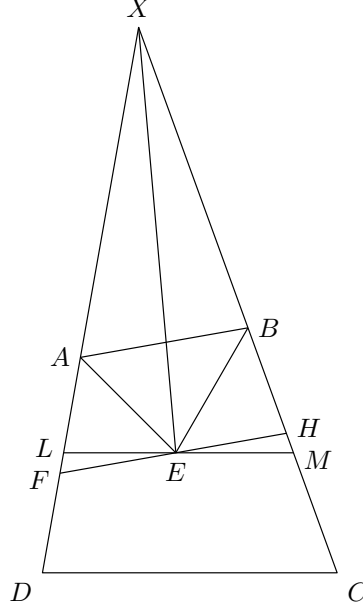
$$\begin{aligned}\angle SBM &= \angle SBE + \angle EBM \\ &= \angle SAE + \angle EBM \\ &= \angle LAE - \angle LAS + \beta = \alpha = \angle BSM.\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece MBS ikizkenardır ve $MS = MB$ olur. Sonuç olarak $LM = LS + SM = LA + MB$ elde edilir. $\alpha = \beta$ eşitlik durumu süreklilikten çıkar (bu durumda $S = E$ olur).^[E094]

III. Çözüm: *John P. Hoyt, Lancaster, Pennsylvania.* Şekildeki yerleşimde DA, CB doğrularını X noktasında kesişinceye kadar uzatalım. E noktasından AB doğrusuna paralel FH doğrusunu, $F \in XD$ ve $H \in XC$ olacak biçimde çizip XE doğru parçasını birleştirelim. E , XAB üçgeninin iki dış açıortayının kesişim noktası olduğundan, XE doğrusu $\angle AXB$ açısını ortalara. MLX ve HFX üçgenlerinin karşılıklı açıları eşittir ve ortak bir açıortay doğru parçaları vardır; dolayısıyla bu üçgenler eşdir. Açı eşitlikleri, kirişler dörtgeninin karşıt açılarının bütünler olmasından çıkar. Böylece $ME = FE$, $HE = LE$ ve $HM = LF$ olur.

$FH \parallel AB$ olduğundan ve AE doğrusu $\angle DAB$ açısını ortaladığından, $\angle FAE = \angle AEF$ olur. Dolayısıyla FAE ikizkenardır ve $AF = FE$ olur. Benzer biçimde $BH = EH$ elde edilir. O hâlde

$$\begin{aligned}LA + MB &= (AF - LF) + (BH + HM) \\ &= (AF + BH) + (HM - LF) \\ &= AF + BH = FE + EH = LM.\end{aligned}$$



Şekil 10.7: Dış açıortay XE ve $FH \parallel AB$ ile Hoyt'un çizimi.

elde edilir. X noktasının sonlu olduğu bu şekil, belirtilen yerleşimi ele alır; paralel kenar durumu ilk kanıtla veya limit alınarak kapsanır.^[E094]

Diğer çözenler: Frank Allen; Farid G. Bassiri (öğrenci); Andreas Bender (öğrenci), İsviçre; Nirdosh Bhatnagar; David Earnshaw (Kanada); Howard Eves; Herta T. Freitag; Richard A. Gibbs; J. T. Groenman (Hollanda); Michael B. Handelsman; P. L. Hon (Hong Kong); King Jamison; Geoffrey A. Kandall; Tsz-Mie Ko (öğrenci); Mary S. Krimmel; L. Kuipers (İsviçre); Kee-wai Lau (Hong Kong); J. C. Linders (Hollanda); David Morin (öğrenci, dört çözüm); Anna Michaelides Penk; Farhood Pouryoussefi (öğrenci, İran); Harry D. Ruderman; Kiran Lall Shrestha (Nepal); J. M. Stark; M. Vowe (İsviçre); Harry Weingarten; ve Brent Young (öğrenci).

Editör notu (özgün dergi). Çözümlerin çoğunda, etkileyici çeşitlilikte özdeşlikler kullanılarak trigonometrik kanıtlar verilmiştir. Gregg Patruno'ya (ABD) ait salt geometrik bir çözüm, Murray Klamkin'in *International Mathematical Olympiads, 1978–1985* kitabında, New Mathematical Library, no. 31, MAA (1985 yılı Problem 1'in çözümü) yer alır.

Mathesis'teki Problemler ve Çözümler

Sınav sorusu 10

Mathesis **69** (1960), 249–250

Kaynak PDF s. 224.

Hüseyin Demir, Ereğli, Türkiye

ABC üçgeninin yükseklikleri h_a, h_b, h_c , çevrel ve iç teğet çemberlerinin yarıçapları sırasıyla R, r olsun. A, B, C açılarındaki dış teğet çemberlerin BC, CA, AB kenarlarına değme noktaları sırasıyla A', B', C' olsun. $A'B'C'$ üçgeninin çevrel çemberinin yarıçapı R' aşağıdaki bağıntıyla verilir:

$$R' = \frac{1}{2r} \sqrt{2R(2R - h_a)(2R - h_b)(2R - h_c)}.$$

Çözüm (R. D.). İç teğet çemberin merkezi I 'nin çevrel çemberin merkezi O 'ya göre simetriğinin pedal üçgeni $A'B'C'$ olsun. Bu üçgenin alanı S' ile ABC üçgeninin alanı S arasında şu bağıntı vardır:

$$S' = S \frac{R^2 - OI^2}{4R^2} = S \cdot \frac{r}{2R}. \quad (1)$$

$AB' = p - c = r \cot(C/2)$ ve $AC' = p - b = r \cot(B/2)$ olduğundan, $AB'C'$ üçgeninden

$$\begin{aligned} B'C'^2 &= a'^2 = r^2 \left[\left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2} \right)^2 - 4 \cot \frac{B}{2} \cot \frac{C}{2} \cos^2 \frac{A}{2} \right] \\ &= r^2 \frac{\cos^2(A/2)}{\sin^2(B/2) \sin^2(C/2)} (1 - \sin B \sin C) \\ &= a^2 \left(1 - \frac{bc}{4R^2} \right) \end{aligned}$$

ve $bc = 2Rh_a$ olduğundan

$$a'^2 = \frac{a^2}{2R} (2R - h_a).$$

elde edilir. Aşağıdaki eşitliği (1) ile karşılaştırmak,

$$S'^2 = \frac{a'^2 b'^2 c'^2}{16R'^2} = \frac{a^2 b^2 c^2}{16R^2} \cdot \frac{1}{8RR'^2} (2R - h_a)(2R - h_b)(2R - h_c)$$

R' için belirtilen ifadeyi elde etmeye yeter.

Sınav sorusu 11

Mathesis **69** (1960), 250–251

Kaynak PDF s. 225.

Hüseyin Demir

$n > 4$ bir tam sayı, $n - 1, n + 1$ ikiz asallar ve $\varphi(n)$, n sayısının Euler totient fonksiyonu olsun. O hâlde aşağıdaki eşitsizlik geçerlidir:

$$3\varphi(n) \leq n.$$

Çözüm (R. Deaux). Bu özellik, doğrudan görülen şu önermenin özel bir hâlidir: 6 ile bölünebilen her n tam sayısı, Euler totient değerinin üç katından büyük veya ona eşittir. Gerçekten, n sayısının asal çarpanları $2, 3, c, \dots$ ise Euler'in

$$\varphi(n) = n \left(1 - \frac{1}{2}\right) \left(1 - \frac{1}{3}\right) \left(1 - \frac{1}{c}\right) \dots$$

eşitliğinden $\varphi(n) \leq n/3$ çıkar. Eşitlik, ancak n sayısının asal çarpanları yalnızca 2 ve 3 olduğunda sağlanır.

Problem ifadesinden önce n 'nin çift olduğu çıkar. $n = \mathcal{M}3 + 1$ olamaz; aksi hâlde asal olan $n - 1$ sayısı 3'e eşit olur ve dışlanan $n = 4$ durumu elde edilir. $n = \mathcal{M}3 - 1$ de olamaz; aksi hâlde asal olan $n + 1$ sayısı 3'e eşit olur, dolayısıyla asal olmayan $n - 1 = 1$ elde edilir. O hâlde $n = \mathcal{M}3$ ve dolayısıyla $\mathcal{M}6$ olur.

Bu baskının notu. Tarihsel $\mathcal{M}k$ gösterimi, k 'nın bir katını belirtir.

Sınav sorusu 12

Mathesis **69** (1960), 251

Kaynak PDF s. 226.

Hüseyin Demir

1° İki ortak X, Y noktasından geçen ve bir q tam dörtkenarının kenarlarının oluşturduğu bcd, cda, dab, abc üçgenlerinin sırasıyla çevresine çizilmiş dört $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ koniğinin üçüncü bir ortak Z noktası vardır.

2° X, Y noktaları, q tam dörtkenarının köşegen üçkenarı t 'nin e, f kenarları üzerinde ise Z noktası üçüncü kenar g üzerindedir ve XYZ, t üçgenleri homolojiktir.

Çözüm (R. Deaux). 1° önermesini daha önce biz ifade edip kanıtladık (*Mathesis*, 1947, s. 209). Bu önerme, X, Y noktaları ile q tam dörtkenarının altı köşesinden geçen $(a, \alpha), (b, \beta), (c, \gamma), (d, \delta)$ kübiklerinin dokuzuncu bir ortak Z noktasına sahip olmasından çıkar. X, e üzerinde ve Y, f üzerinde ise (e, f, g) kübiği ilk sekiz noktayı, dolayısıyla zorunlu olarak g üzerinde bulunan Z noktasını da içerir. efg , örneğin δ koniğine içten çizilmiş abc üçgeniyle homolojik olduğundan, Steiner'in bir teoremine göre efg , δ koniğinin efg kenarlarıyla ikinci kesişim noktalarından oluşan XYZ üçgeniyle de homolojiktir.

Soru 3954*Mathesis* **69** (1960), 255

Kaynak PDF s. 226.

*Hüseyin Demir**Aşağıdaki matris eşitliğini kanıtlayınız:*

$$\begin{bmatrix} \cos^2 \theta & -\sin 2\theta & \sin^2 \theta \\ \cos \theta \sin \theta & \cos 2\theta & -\sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \sin 2\theta & \cos^2 \theta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos^2 n\theta & -\sin 2n\theta & \sin^2 n\theta \\ \cos n\theta \sin n\theta & \cos 2n\theta & -\sin n\theta \cos n\theta \\ \sin^2 n\theta & \sin 2n\theta & \cos^2 n\theta \end{bmatrix},$$

*Burada n bir pozitif tam sayıdır.***Soru 3957***Mathesis* **69** (1960), 375

Kaynak PDF s. 226.

Hüseyin Demir

Bir n tam sayısının bölenlerinin karelerinin Euler totient değerleri toplamı, n^2 sayısının bölenlerinin cebirsel toplamına eşittir; bu toplamda her bölenin işareti, asal çarpanlarının üsleri toplamı çift ise $+$, tek ise $-$ olarak alınır.

Diğer Yayınlar

Kaynak PDF s. 228.

Hüseyin Demir'in Diğer Yayınları

- [1] H. Demir. “Les cercles podaires dans le polygone inscriptible.” *Mathesis* **68** (1959), 51–54.
- [2] H. Demir. “A theorem analogous to Morley’s theorem.” *Mathematics Magazine* **38** (1965), 228–230.
- [3] H. Demir. “Maximum area of a region bounded by a polygon with given sides.” *Mathematics Magazine* **39** (1966), 228–231.
- [4] H. Demir. “On the geometry of n dimensions and extensions in E^2 of Erdős–Mordel–Oppenheim inequality.” *METU Journal of Pure and Applied Sciences* **1** (1968), 175–197.
- [5] H. Demir. “A trigonometric proof of Morley’s theorem.” *Delta* **1** (1968), 11–14.
- [6] H. Demir. “Incircles within.” *Mathematics Magazine* **59**(2) (1986), 77–83.
- [7] H. Demir ve C. Tezer. “More on incircles.” *Mathematics Magazine* **62**(2) (1989), 107–114.
- [8] H. Demir ve C. Tezer. “Reflections on a problem of V. Thébault.” *Geometriae Dedicata* **39**(1) (1991), 79–92.
- [9] B. V. Kutuzov. *Geometri. Cilt I*. No. 19, Türk Matematik Derneği Yayınları. Türk Matematik Derneği, İstanbul, 1963. Çeviren: Hüseyin Demir.
- [10] B. V. Kutuzov. *Geometri. Cilt II*. No. 20, Türk Matematik Derneği Yayınları. Türk Matematik Derneği, İstanbul, 1963. Çeviren: Hüseyin Demir.
- [11] B. V. Kutuzov. *Geometri. Cilt III*. No. 21, Türk Matematik Derneği Yayınları. Türk Matematik Derneği, İstanbul, 1964. Çeviren: Hüseyin Demir.

Kaynak derleme, *Geometri* kitapları için Türk Matematik Derneğinin şu adresini vermektedir: <https://tmd.org.tr/tmd-yayinlari-kitaplar/>

Kaynak derlemede [1, 4, 5] numaralı yayınların çevrim içi olarak kolay bulunamadığı belirtilmiş ve erişim için şu adres verilmiştir: <http://sertoz.bilkent.edu.tr/HuseyinDemir.html>.

Hüseyin Demir'in Kurduğu Problemlerin Tam Listesi

Kaynak PDF s. 230–233.

117 kayıt, derleyenin tam listesindeki numaralandırmayı korur. Kaynak künyelerinde noktalama birliği sağlanmıştır; iki yıl aralığı ve bir cilt numarasına ilişkin düzeltmeler Ek A'da belgelenmiştir.^[E018]

American Mathematical Monthly: İleri Düzey Problemler

Sıra	Problem	Cilt	Yıl	Sayfa
1	4102	50	1943	638
2	4125	51	1944	252
3	4134	51	1944	475
4	4193	53	1946	160
5	4215	53	1946	470
6	4679	63	1956	191
7	4695	63	1956	426
8	4710	63	1956	669
9	4735	64	1957	277
10	4818	65	1958	779

American Mathematical Monthly: Temel Düzey Problemler

Sıra	Problem	Cilt	Yıl	Sayfa
11	E1134	61	1954	568
12	E1160	62	1955	182
13	E1197	63	1956	39
14	E1209	63	1956	186
15	E1217	63	1956	342
16	E1778	72	1965	420
17	E1779	72	1965	420
18	E1877	73	1966	410
19	E1878	73	1966	410
20	E2100	75	1968	670
21	E2101	75	1968	670
22	E2109	75	1968	780
23	E2110	75	1968	780
24	E2124	75	1968	899
25	E2160	76	1969	300

Sıra	Problem	Cilt	Yıl	Sayfa
26	E2213	77	1970	79
27	E2311	78	1971	793
28	E2312	78	1971	793
29	E2363	79	1972	662
30	E2462	81	1974	281
31	E2625	83	1976	812
32	E3135	93	1986	215
33	E3164	93	1986	566
34	E3422	98	1991	158
35	E3469	98	1991	955

Mathematics Magazine: Öneriler

Sıra	Problem	Cilt	Yıl	Sayfa
36	208	28	1954–1955	27
37	217	28	1954–1955	103
38	227	28	1954–1955	160
39	234	28	1954–1955	234
40	242	28	1954–1955	284
41	248	29	1955–1956	46
42	258	29	1955–1956	163
43	266	29	1955–1956	222
44	298	30	1956–1957	164
45	304	30	1956–1957	223
46	334	31	1957–1958	228
47	349	32	1958–1959	47
48	372	32	1958–1959	220
49	380	32	1958–1959	278
50	384	33	1959–1960	51
51	398	33	1959–1960	165
52	407	33	1959–1960	225
53	415	33	1959–1960	296
54	419	34	1960–1961	49
55	425	34	1960–1961	109
56	437	34	1961	174
57	440	34	1961	237
58	458	34	1961	364
59	472	35	1962	55
60	487	35	1962	186
61	498	35	1962	309
62	509	36	1963	133
63	517	36	1963	197
64	529	36	1963	264
65	537	37	1964	55
66	544	37	1964	119
67	563	37	1964	276
68	572	38	1965	52

Sıra	Problem	Cilt	Yıl	Sayfa
69	587	38	1965	179
70	599	38	1965	241
71	600	38	1965	317
72	609	39	1966	69
73	628	39	1966	246
74	639	39	1966	306
75	649	40	1967	100
76	680	41	1968	42
77	724	42	1969	96
78	738	42	1969	214
79	743	42	1969	267
80	756	43	1970	103
81	763	43	1970	166
82	775	43	1970	278
83	806	44	1971	228
84	839	45	1972	228
85	859	46	1973	103
86	916	47	1974	286
87	963	49	1976	43
88	998	49	1976	252
89	1197	57	1984	238
90	1206	58	1985	46
91	1211	58	1985	111
92	1298	61	1988	195
93	1305	61	1988	261
94	1327	62	1989	274
95	1356	63	1990	274
96	1371	64	1991	132
97	1377	64	1991	197
98	1405	65	1992	265

Mathematics Magazine: Kısa Problemler

Sıra	Problem	Cilt	Yıl	Sayfa
99	Q117	28	1954–1955	37
100	Q138	28	1954–1955	241
101	Q141	28	1954–1955	292
102	Q166	29	1955–1956	229
103	Q188	30	1956–1957	172
104	Q227	32	1958–1959	32
105	Q234	32	1958–1959	113
106	Q242	32	1958–1959	229
107	Q266	33	1959–1960	302
108	Q281	34	1961	303
109	Q284	34	1961	303
110	Q341	37	1964	251
111	Q343	37	1964	251

Sıra	Problem	Cilt	Yıl	Sayfa
112	Q710	59	1986	112

***Mathesis:* Sınav Soruları**

Sıra	Problem	Cilt	Yıl	Sayfa
113	Sınav 10	69	1960	249–250
114	Sınav 11	69	1960	250
115	Sınav 12	69	1960	251

***Mathesis:* Sorular**

Sıra	Problem	Cilt	Yıl	Sayfa
116	3954	69	1960	255
117	3957	69	1960	375

Kaynak listenin tarihi: “Son güncelleme: 26 Haziran 2026”.

Önceki Baskıdaki Hatalar ve Düzeltmeler

Bu ek, Ali Sinan Sertöz’ün Eylül 2026 tarihli genişletilmiş derlemesinde belirlenen hata ve tutarsızlıkları belgeler. 95 kaydın tamamı, İngilizce ana baskıdaki E numaraları korunarak Türkçeye aktarılmış ve ilgili problem, çözüm veya listeyle ilişkilendirilmiştir. Her kayıt etkilenen metni, özgün okumayı veya eksikliği, bu baskıdaki düzeltmeyi ve gerekçesini açıklar. Metindeki üst simgeler bu kayıtlara bağlantı verir.

Kaynak sayfa numaraları, ön sayfalar dâhil 233 sayfalık özgün derlemenin fiziksel PDF sayfalarını gösterir; ana metinde eski basılı sayfa numarası için bu sayıdan yedi çıkarılır. Dergilerin daha önce bildirdiği tarihsel düzeltmeler bu nitelikleriyle belirtilir. Sağlanan düzeltilmiş nüsha da zaten tamamlanmış olan Q227 ifadesinin önceki eksikliği de kayda geçirilmiştir. Genel dizgi değişiklikleri matematiksel hata olarak sunulmaz; yeni editöryal ekler özgün derginin yazarlarına mal edilmez. Bu liste birikimli bir çalışma kayıdıdır; matematiksel denetim eksiksiz olduğu iddiasını taşımaz.

Hatalar ve belgelenmiş düzeltmeler

E001 4102; kaynak s. 12. “Böylece (2) ispatlanmış olacaktır” ifadesindeki atıf, o sırada ispatlanan kısma uygun olarak “(3)” biçiminde düzeltilmiştir.

E002 4125; kaynak s. 14. Çözüm başlığındaki [1944, 352], problem önerisi ve derleyenin listesiyle tutarlı olacak biçimde [1944, 252] olarak düzeltilmiştir.

E003 4134; kaynak s. 15–16. Özgün metindeki “inscribed triangle” ifadesi, ispatta içteğet çemberinin değme noktalarının oluşturduğu üçgen için kullanılır; Türkçe ifade bu anlamı açıklar. Birinci kısımdaki bölüm $A_i = \pi/3$ iken tanımsızdır. Eşdeğer

$$C_i^n - \pi/3 = (-1)^{n-2^n}(A_i - \pi/3)$$

özdeşliği bu durumu da kapsar. Kaynak s. 16’daki teleskopik açı toplamında iki yerdeki C_1C_2 , sol taraftaki limitte kullanılan kenara uygun olarak C_2C_3 ile değiştirilmiştir.

E004 4679; kaynak s. 20. Simson doğrusu denklemindeki ilk eşitlik işareti, toplama işareti yerine basılmıştır; düzeltilmiştir. A_j ’den A_3A_4 ’e indirilen dikmenin ayağının koordinatları

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}(\cos \theta_3 + \cos \theta_4 + \cos \theta_j - \cos(\theta_3 + \theta_4 - \theta_j)), \\ y &= \frac{1}{2}(\sin \theta_3 + \sin \theta_4 + \sin \theta_j - \sin(\theta_3 + \theta_4 - \theta_j)) \end{aligned}$$

olduğundan, düzeltilmiş sol taraf doğrudan doğrulanır.

E005 E1878; kaynak s. 41. E1878 başlığı altında E1877’nin bir önceki sayfadaki çözümü yanlışlıkla tekrarlanmıştır. Bu tekrar kaldırılmış; yerine açıkça editöryal ispat olarak belirtilen bir çözüm konmuştur. Problem önerisinin künyesi korunmuş, yanlış tekrarlarla birlikte verilen ve doğrulanamayan çözüm künyesi kullanılmamıştır.

- E006 E2110; kaynak s. 27 ve 45.** Sonucun geçerli olması için A, B, C noktalarının üçü birden çakışmamalıdır. Aynı eşkenar üçgenin üç döngüsel sıralaması, varsayımı $A = B = C$ olacak biçimde sağlayabilir. Determinant hesabı $z \mapsto \alpha z + \beta$ biçiminde afin bir dönüşüm verir; bu ancak $\alpha \neq 0$ olduğunda yön koruyan benzerliktir. Gerekli koşul Türkçe problem ifadesine ve çözümüne eklenmiştir.
- E007 E2160; kaynak s. 48.** $\sum x_i = 2\Delta$ yerine doğru alan bağıntısı $\sum a_i x_i = 2\Delta$ yazılmıştır. Yinelenen çarpım birleştirilmiş; $\sin P_i$ ile bölme içeren ispatın sınır durumlarının süreklilikle elde edildiği açıklanmıştır.
- E008 E2213; kaynak s. 50.** Nagel özelliğine ilişkin örnekte $(6, 24)$ köşesi $(38/7, 24)$ olarak düzeltilmiştir. Diğer köşeler $(0, 0)$, $(19, 0)$ ve $(0, 24)$ 'tür. Böylece kenar uzunlukları 19, $193/7$, $38/7$, 24 olur ve $3 \cdot 19 = 193/7 + 38/7 + 24$ sağlanır. Nagel noktası $N = (7, 12)$ 'dir.
- E009 E2363; kaynak s. 55.** Problem künyesindeki 663, öneri ve tam problem listesiyle tutarlı olarak 662 yapılmıştır. $\cos A$ ifadesi $\cos A'$ olarak düzeltilmiştir. Kaynaktaki diğer iki bağıntı için verilen permütasyon çifti doğru olmadığından bunların döngüsel permütasyonlarla elde edildiği açıklanmıştır.
- E010 E2462, Dodge'un ispatı; kaynak s. 60.** Eşitsizliğin sağ tarafındaki $2r_2 + r_3$, eksik katsayı tamamlanarak $2r_2 + 2r_3$ yapılmıştır.
- E011 Dodge'un Birinci Lemması; kaynak s. 61.** Yaklaşık minimum değeri 0,044 yerine 0,004419'dur. Tam değer $1 - \sqrt{5/4} - \sin 15^\circ$ olarak verilmiştir. Türev hesabında açılı değişkeninin radyan cinsinden olduğu, dereceyle verilen değerlerin buna karşılık geldiği açıklanmıştır.
- E012 Dodge'un dörtgen sonucu; kaynak s. 63.** Noktanın bir köşede bulunmasına izin verildiğinden $R_i > 0$ koşulu $R_i \geq 0$ olarak düzeltilmiştir.
- E013 E3422; kaynak s. 67.** İkinci giriş denklemindeki eksik s tamamlanarak $(-f)(1 + p's) = p's + s$ elde edilmiştir. $p + p' \neq 0$ gerekçesi, yalnızca s 'nin gerçel olmamasına değil, teğetlerin sonlu bir T noktasında kesişmesine bağlanmıştır. F 'nin çember üzerinde olduğu yozlaşmış durum, özgün gerekçenin yeterli olmadığını gösterir. $s^2 = -1$ durumunda paydalar kaldırılarak işlem yapılır; teklik, farklı teğetlerin kesişiminden gelir.
- E014 E2625; kaynak s. 64.** Üçgenler, başlangıçtaki π polaritesine değil $\tau = \sigma\pi$ polaritesine göre birbirinin polarıdır. Sonuçtaki " K 'ye göre" ifadesi buna uygun olarak düzeltilmiştir.
- E015 E3469; kaynak s. 69.** Orta noktaların sıralamasında atlanan 3 eklenmiş; liste 1, 2, 3, 4, 5, 6 olarak tamamlanmıştır.
- E016 E1687; kaynak s. 76–77.** Gösterilen matrislerde koordinatlar sütunlara değil satırlara yazıldığından ilgili sözcük düzeltilmiştir. Matrisin ikinci yazılışındaki üç yanlış eksi işareti artı yapılarak $1 + a'$, $1 + b'$, $1 + c'$ terimleri geri konmuştur. Bunlar (β) ile ve doğrulanan çarpım matrisiyle uyumludur. Matris çarpımında tutarlı normalizasyon gerektiği belirtilmiştir. Son cümledeki P , kesişim noktası T olarak düzeltilmiştir. Genel projektif dönüşümler alan oranlarını korumaz. Bu nedenle alan koordinatlarının eşitliği afin durumla sınırlandırılmıştır.
- E017 E1142; kaynak s. 73.** Paydaki 16 çarpımı 4 olarak düzeltilmiştir. $x = \sin \alpha$, $y = \sin \beta$, $z = \sin \gamma$ ve K , kenarları x, y, z olan üçgenin alanı ise gösterilen determinant $-16K^2$ 'dir. Üç birim ana doğru vektörünün uçları arasındaki giriş uzunlukları $2x, 2y, 2z$, bunların çevrel yarıçapı ise $\sin \phi = xyz/(2K)$ 'dir. Dolayısıyla $\sin^2 \phi = -4x^2y^2z^2/\det$ elde edilir. Doğrudan bir kontrol olarak, birbirine dik üç ana doğru için $\alpha = \beta = \gamma = 45^\circ$ ve $\sin^2 \phi = 2/3$ olur; eski çarpan yanlış $8/3$ değerini verirdi.

- E018 Kaynak s. 80, 85, 231 ve s. 81, 232.** *Mathematics Magazine*'ın 33. cildindeki 384 ve 398 numaralı öneriler için 1969–1960 olarak basılan yıl aralığı, aynı cildin diğer kayıtları ve kronolojik sıra ile tutarlı olacak biçimde 1959–1960 olarak düzeltilmiştir. 756 numaralı önerinin “43I” biçiminde basılan cilt numarasındaki gereksiz harf çıkarılmış ve 43 yapılmıştır. Düzeltmeler hem bölüm içindeki künyelere hem de tam problem listesine uygulanmıştır.
- E019 Q227; kaynak s. 183 ve 187.** Daha önce bildirilen kesilmiş problem ifadesi, sağlanan düzeltilmiş nüshada tamdır. “Hepsi asal, fakat ne hepsi eşit ne de hepsi birbirinden farklı” anlamındaki son koşul doğrudan LaTeX ile dizilerek korunmuştur. Kaynak s. 187'deki $f(n) = 1 - \varphi(n)$ yanıtı, $f(1) = 0$ ve sonrasında pozitif olmayan değerler verir. İşaret + olarak düzeltilmiş, elde edilen on dört değer çözümde açıkça denetlenmiştir.
- E020 Q117; kaynak s. 186.** $1^2 + \dots + 8^2$ ile $8 \cdot 9 \cdot 17/6$ arasındaki toplama işareti eşitlik işaretiyle değiştirilmiştir. İki ifadenin her biri 204'e eşittir; toplamaları değildir.
- E021 Q166; kaynak s. 186.** Çözüm başlığında sayfa numarası 29 verilmiş, öneride ve tam listede ise 229 yazılmıştır. İlgili kısa problem künyesi esas alınarak eksik ilk rakam tamamlanmıştır.
- E022 Q188; kaynak s. 187.** Önceki cümlede “ α 'nın 12 katı” denmesine rağmen ilk saat denkleminde sağ taraf 12α yerine 12 basılmıştır. Eksik çarpan tamamlanmıştır. Gece yarısını dışlamak için saat indislerinin sıfır olmasına izin verilmiştir. $(p, p') = (11, 11)$ çifti, gerekli yarı açık aralıklara aykırı olarak $\alpha = \alpha' = 1$ verdiği için dışlanmıştır. Geçerli bir yer değiştirme ile farklı bir zaman elde edilmesi arasındaki ayrım açıkça belirtilmiştir.
- E023 Q341; kaynak s. 188.** Olağan $\varphi(1) = 1$ tanımıyla, $\{1, \dots, n\}$ kümesinden seçilen farklı elemanlı sırasız aralarında asal çiftlerin sayısı $\sum_{k=1}^n \varphi(k)$ değil, $\sum_{k=2}^n \varphi(k)$ 'dir. Sayma gerekçesindeki alt sınır düzeltilmiştir. $\binom{n}{2}$ paydası ile problemdeki $n(n+1)/2$ paydası, sonlu n için aynı oranı değil, aynı limiti verir. Limit gerekçesi buna göre ifade edilmiştir; $6/\pi^2$ yanıtı değişmez.
- E024 384; kaynak s. 85 ve 115.** Satır toplamaları 1 olan matrisler tersinir olmak zorunda değildir: her elemanı $1/n$ olan matris, $n > 1$ için tekildir. Bu nedenle tümü bir grup oluşturmaz. Tarihsel çözüm de tersinirlik gereğini belirtir. İfadeye “tersinir gerçel” koşulu, sonsuz mertebe iddiası için de $n \geq 2$ eklenmiştir. $A\mathbf{1} = \mathbf{1}$ ise $A^{-1}\mathbf{1} = \mathbf{1}$ olduğundan ters almaya göre kapalılık sağlanır. $n = 1$ için grup yalnızca (1) matrisinden oluşur.
- E025 425; kaynak s. 86.** İkiz asallar 3 ve 5, $n = 4$ verir; ancak $3\varphi(4) = 6 > 4$ 'tür. Eksik $n > 4$ koşulu eklenmiştir. Aynı iddianın Mathesis sınav sorusu 11'deki ifadesinde bu koşul açıkça vardır.
- E026 440; kaynak s. 87 ve 125.** Kaynak, $\rho = (R/r - 1)/2$ yerine hem toplamın üst sınırında hem karekök içinde $n = \lfloor \rho \rfloor$ kullanır. Karekök içinde yuvarlama yapmak, kısmen dolu uzaklık katmanlarındaki bazı çemberleri kaybettirir. Sutcliffe'in yayımlanmış çözümüyle uyumlu olarak yalnızca toplam sınırı yuvarlanmıştır. Örneğin $R/r = 1 + 2\sqrt{3}$ için 13 çember içerilirken eski formül 7 verir. Açık bir 60° sektörde kafes merkezlerinin merkezden uzaklıklarının kareleri $(2r)^2(p^2 + pq + q^2)$, $p, q \geq 1$ biçimindedir; uygun q tam sayıları çözüldüğünde düzeltilmiş terim elde edilir.
- E027 372; kaynak s. 85 ve 112–113.** Toplam i, j ile indislenmesine karşın kosinüsün içindeki ilk açı θ_1 yazılmıştır; bu, θ_i olarak düzeltilmiştir. Ardışık indisler için gereken terim $\cos(\theta_i + \theta_{i+1})$ 'dir. Çözümde aynı ilk indis hatası yinelenir; tümevarım adımıyla ayrıca θ_{p-1} yerine θ_{p+1} , toplamın iki katından önceki eksi yerine artı ve toplam içindeki $\sin \theta_1$ yerine $\sin \theta_i$ gerekir. Bu değişiklikler problem ifadesine ve çözüme uygulanmıştır.

- E028 437; kaynak s. 86 ve 123.** Kaynak $(a + b)^{[n]}$ yazar ve $[n]$ 'yi n 'nin ikili yazılışındaki 1'lerin sayısı olarak açıklar; ancak iddia edilen 2 kuvvetinin üssünü belirtmez. Derginin açıklamasındaki yeniden ifadeyle uyumlu olarak, $(a + b)^n$ 'deki tek katsayı sayısı $2^{s_2(n)}$ biçiminde açıkça yazılmıştır. "İspatlayınız veya çürütünüz" yönergesi korunmuştur.
- E029 587; kaynak s. 90.** $-\pi < \theta < \pi$ aralığı $\theta = 0$ 'ı içerir; bu noktada sol taraf 1'dir. Sıkı eşitsizlik için tanım aralığı $0 < |\theta| < \pi$ yapılmıştır. Eşdeğer olarak tam açık aralık korunup $<$ yerine $\leq$ yazılabilir; bu durumda eşitlik yalnızca sıfırda sağlanır.
- E030 517; kaynak s. 88 ve 133–134.** İddia, doğru parçalarıyla sınırlı FMN üçgeni ve $N'M'MN$ yamuğu için yanlıştır. İki bölgenin ortak sınırı parabolün MN yayı olmalıdır. Dergi, çözümlerden sonraki düzeltmede bu ayrımı Breault, Nolan ve Zirkel'e atfederek açıkça belirtir. Bu koşul problem ifadesine eklenmiştir.
- E031 208; kaynak s. 99.** İlk geometrik bölüm $x^{2n-2} + x^{2n-4}$ ile başlamalı, soldaki ikinci polinom $x^{2n+1} + 1$ olmalıdır. İlk kosinüs çarpımındaki açı $k\pi/(2n)$ olarak düzeltilmiş; ikinci sinüs çarpımı özdeşliğindeki eksik eşitlik işareti eklenmiştir. Birimin köklerinden gelen çarpanlara ayırmalar ilk çözümün üç son değeriyle uyumludur.
- E032 227; kaynak s. 101.** R_1, R_2, R_3 formüllerindeki altı köşegen dışı ağırlık katsayısında $k_i - 1$ yerine $1 - k_i$ yazılmıştır. Bu, doğru r_i formülleriyle $R_i = W_i - r_i + r_{i+1}$ bağıntısının devirli açılımından çıkar ve $\sum R_i = \sum W_i$ denge kontrolünü sağlar.
- E033 234; kaynak s. 102.** Toplamın üst sınırı m yerine n olmalıdır; $m \geq n$ ve karenin sınırlayıcı kutusunun bir kenarında en fazla n kafes noktası vardır. Sonraki toplamalar ve yanıt zaten n kullanır. (b) kısmına çözüm gelmediğini belirten tarihsel not korunmuş, açıkça editöryal olarak tanımlanan yeni bir sonlu toplam çözümü eklenmiştir.
- E034 242; kaynak s. 102.** B'' formülündeki ilk pay $B' + kA'$ yerine $C' + kA'$ olmalıdır; devirli kuruluş ve hemen sonraki açılmış pay bunu doğrular.
- E035 217; kaynak s. 99.** Antisimetrik determinantın karesel parantezindeki üçüncü çarpımın işareti eksi olmalı veya ters yönlü A_4A_2 kullanılmalıdır. Düzeltilmiş parantez Ptolemaios bağıntısıdır.
- E036 248; kaynak s. 104.** Ara türev satırında CM_1, CM_2 ile çarpma yerine, önceki ve sonraki satırlarla uyumlu olarak bölme gerekir. İfadeler $(ds_i/d\alpha)/CM_i$ olarak düzeltilmiştir.
- E037 258; kaynak s. 105–106.** C' 'nin yükseklik denkleminin sağ tarafı $-a \cos(t + 3A/2)$ olmalıdır. Elips paydaları ve yarı eksenlerindeki sinüs ve kosinüs çarpanları buna göre yer değiştirmiştir. Doğru parametrizasyon $x = a \sin t \sin(3A/2)/\sin(A/2)$, $y = -a \cos t \cos(3A/2)/\cos(A/2)$ 'dir ve ikinci çözümdeki $1 \pm 2 \cos A$ ile uyumludur. Uzunluklar için mutlak değerler, $A = 60^\circ, 120^\circ$ için sıfır yarı eksen durumları belirtilmiştir. İkinci çözümün bozuk ara yarıçap zinciri yerine sonuçtaki uzunluk formülleri verilmiştir.
- E038 266; kaynak s. 83 ve 107–108.** Edy'nin çözümü ve Bankoff hakkındaki dergi notunun açıkladığı gibi, ifadede 2π modülünde yönlü açılar gerekir. Bağıntılar sıradan işaretsiz açılar için sınırsız biçimde geçerli değildir. Problemde açı kuralı açıklanmıştır. Guy'ın çözümünün son bağıntısında $\angle AMB$ ile $\angle AM'B$ arasında eşitlik yerine toplama işareti gerekir; bu çözüm düzeltmesi de uygulanmıştır.
- E039 298; kaynak s. 109.** Yinelenen problem ifadesindeki $f''(x) = 0$, önerinin 84. sayfasındaki $f''(x) > 0$ koşuluyla değiştirilmiştir. Bu, çözümdeki pozitif yoğunlukla da tutarlıdır.

- E040 380; kaynak s. 114.** (11)'de $x = (b^2/a^2)z - b(c-b)u/(ca)$ ifadesinin son terimi artı olmalıdır. (8) ve $u = abc/(ab + bc + ca)$ bunu verir. $z = au/c$ yerine konunca $x = bu/a$ çıkar; eski işaret genel olarak bu kontrolü sağlamaz.
- E041 334; kaynak s. 112.** Alan hesabının ikinci satırında atlanan $-a^2\theta/2$ daire dilimi katkısı geri konmuştur. Böylece açılım $a^2(\theta - \sin \theta) = ax$ olur. Son yanıt zaten doğrudur.
- E042 415; kaynak s. 119.** $p = n - p'$ dönüşümünden sonraki toplamın ters yazılmış sınırları ve sinüs argümanındaki eksik x düzeltilmiştir. Doğru toplam $\sum_{p'=0}^n \binom{n}{n-p'} \sin((2p' - n)x)$ olup binom simetrisi ve sinüsün tekliliyle $-s'$ 'ye eşittir.
- E043 419; kaynak s. 120–121.** Sabit, sürtünmesiz bir yola bağlı parçacığın yerçekimi altındaki toplam enerjisi korunur. Sabit, sıfırdan farklı sürat sabit yükseklik gerektirir; düşey düzlemde yol yataydır. Tarihsel izdüşüm gerekçesi bu hareketi açıklamaz. Ayrıca kaynakta $\int_{y_0}^y \sqrt{y_0/(t - y_0)} dt$ integrali yanlışlıkla $\frac{1}{2}\sqrt{y_0}\sqrt{y - y_0}$ olarak hesaplanmıştır; doğru değer $2\sqrt{y_0}\sqrt{y - y_0}$ 'dir. $y = 4x^2/y_0 + y_0$ parabolünün tepe noktasındaki teğet de düşey değil yataydır. Geçersiz tarihsel gerekçe açıkça işaretlenmiş, düzeltilmiş yanıt ve açıklamalarla birlikte korunmuştur.
- E044 425; kaynak s. 121–123.** Breault, $(6, m) = 1$ varsaymadan $\varphi(6m) = 2\varphi(m)$ kullanmıştır; Klarner bunu $m = 2$ ile zaten eleştirir. Doğru hesap $\varphi(6m) = 2m \prod_{p|m, p \neq 2,3} (1 - 1/p)$ olup her $m \geq 1$ için gereken eşitsizliği verir. Tarihsel yorumdaki yanlış eşitliğin hatalı yöntemden çıkan değer olduğu açıklanmıştır.
- E045 425, Carlitz'in çözümü; kaynak s. 122.** (2)'nin son terimi $1/(3n)$ yerine $n/3 = 2^\alpha 3^{\beta-1}m$ olmalıdır. Ters yöndeki $n = 3^\alpha k$ ayrışımına $(k, 3) = 1$ koşulu eklenmiştir. $\varphi(n) = n/3$ ile $n = 2^\alpha 3^\beta$, $\alpha, \beta \geq 1$ arasındaki eşdeğerlik değişmemiştir.
- E046 E1288; kaynak s. 124–125.** Kanıtta kullanılan uç durumlar için $L(0) = 0$ ve $h = 0, n$ 'de kapsama kuralları açıklanmıştır. $C(a/b)$ kuralı bölüm pozitif tam sayı olduğunda kullanılır. Moser'in p tabanına genellemesi için p asal olmalıdır. Bileşik tabanlara karşıörnek olarak $p = 4, n = 6$ için 4 ile aralarında asal dört katsayı vardır, oysa taban rakamlarından gelen çarpım altıdır.
- E047 440; kaynak s. 125.** Sutcliffe'in toplamındaki karekök altında $3/5$ yerine $3/4$ gerekir. Hem $\frac{1}{2}\sqrt{4\rho^2 - 3p^2}$ açılımı hem de 126. sayfadaki hesap bunu doğrular. Yuvarlanmamış yarıçap değişkeni tam kısmından ayrılarak ρ ile gösterilmiştir.
- E048 440; kaynak s. 127.** Sutcliffe'in sayımının kısmen içerilen çemberleri de saydığı iddiası yanlıştır. $R - r$ merkez uzaklığı sınırı tam içerilme koşuludur. $R/r = 1 + 2\sqrt{3}$ için altısı sınıra içten teğet 13 çember içerilir; eski formül 7 verir. Tarihsel yorum korunmuş, ardından düzeltme verilmiştir.
- E049 472; kaynak s. 128.** Parabolün merkezi yoktur; çember için genel bir M konumunda kesişim tek değildir; eksen noktalarında limit kuralı gerekir. Bu nedenle problem uygun elips ve hiperbol durumlarıyla sınırlandırılmıştır. Hiperbol için $a^2 = 3b^2$ ve $b^2 = 3a^2$ yozlaşmaları dışlanmıştır. Çözümde M' 'nin koordinatları yerine I' 'nin katsayıları kullanılarak tanımlanan yarı eksenler de yanlıştır. Doğru elips katsayıları $a(a^2 + 3b^2)/(a^2 - b^2)$ ve $b(3a^2 + b^2)/(a^2 - b^2)$ olup bunların karelerinin farkı $a^2 - b^2$ 'dir. Hiperbol katsayıları ise $a(a^2 - 3b^2)/(a^2 + b^2)$ ve $b(b^2 - 3a^2)/(a^2 + b^2)$ 'dir. İşaretli katsayıların mutlak değerleri yarı eksen uzunluklarını verir. Çözüm bu katsayılar ve istisnai durumlarla yeniden dizilmiştir.
- E050 487; kaynak s. 129–130.** Jordan blokları tartışmasında kök derecesi, blok sayısı ve matris boyutu karıştırılmıştır. Köşegen 2×2 özel durumu köşegenleştirilebilirlik gerektirir.

Tekrarlı özdeğerlerin polinom köklere engel olduğu savı yanlıştır: I 'nın $\pm I$ polinom kökleri vardır; skaler olmayan 2×2 matrisin her kökü de kendisinin bir polinomudur. Değişmeli matrisler uzayının boyutu kök ailesinin bağımsız parametre sayısı değildir. Açık blok kökleri ve kesin gösterim kullanılmış; tüm 2×2 karekökleri için editöryal formüller, skaler ve tekil durumlarla birlikte eklenmiştir. İfadeler $\mathbb{C}$ üzerindedir; gerçek kökler gerçek girişli olanlardır.

E051 498; kaynak s. 131. Son ifadede $f(\delta)f(D)$ yerine yazılan $p^{r'+s'}$ kuvvetlerinin çarpımı, fonksiyon değerlerini değil δD 'yi hesaplar. $f(p^{r'})f(p^{s'})$ çarpanları kullanılmalıdır. Eşitlik, yalnızca üs toplamlarının değil sırasız üs çiftlerinin eşitliğinden çıkar. Pozitif tam sayı girdiler belirtilmiştir.

E052 509; kaynak s. 132–133. Tarihsel arama $T = 2, 3, 4, 5$ 'i eleyip $T = 6$ için çözüm bulur; daha büyük değerlerin tümünü açıkça dışlamaz. On bir tabanında farklı rakamlar ve sıfır olmayan ilk basamaklarla kapsamlı tarama tam bir atama verir:

$$(U, N, I, T, E, D, S, A, M, R, C) = (8, 10, 2, 6, 5, 3, 9, 1, 7, 4, 0).$$

Tekliği doğrulayan bu ek hesap editöryal olarak belirtilmiştir.

E053 517; kaynak s. 134. Kugelmass'ın gerekçesi genel projektif dönüşümlerin alan oranını koruduğunu ileri sürer ve limitte alanları yüksekliklerle değiştirir. Genel projektif dönüşümler alan oranlarını veya Öklid odak–doğrultman verilerini korumaz; limit ve monotonluk savları da gerekçesizdir. Tarihsel gerekçe geçersiz olarak işaretlenmiştir. Parker'ın geçerli eğrisel alan kanıtına odak üzerinden integral eklenmiştir. Bölge ayrımı E030'da da kayıtlıdır.

E054 529; kaynak s. 135–136. Sikloidin bir yayı yalnızca bir yarım çember; kardioidin doğrunun bir tarafındaki bir turu yalnızca bir yarım elips çizer. Problem artık geometrik yeri içeren koniği ve çizilen kısmı sorar. Tam konik için gereken ek harekete ilişkin tarihsel açıklama çözümde korunmuştur. Sivri uçlardaki değerler limit olarak anlaşılır.

E055 537; kaynak s. 136–137. Kaynaktaki $A = (2 - \sqrt{2})/2$ ve $2B = \sqrt{3}(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2/2$ formülleri şekille tutarsızdır. Doğruları $A = (\sqrt{2} - 1)^2/(2\sqrt{3})$ ve $2B = \sqrt{3}(\sqrt{3} - \sqrt{2})^2/4$ 'tür. Birim çevrel çemberde üst çıkıntının yüksekliği $1 - 1/\sqrt{2}$, tabanı bunun $2/\sqrt{3}$ katıdır; alt çıkıntıların yatay dik kenarı $(\sqrt{3} - \sqrt{2})/2$, dikey dik kenarı bunun $\sqrt{3}$ katıdır. Toplam yaklaşık 0.093272 olup kaynaktaki 0.0933 ile uyumludur. $2C$ değişmemiştir.

E056 544; kaynak s. 137. Yüzler basamağındaki $O + T + S = NI$ koşuluna, onlar basamağından gelen 1 elde eklenmelidir: $O + T + S + 1 = 10N + I$. $217 + 392 + 408 = 1017$ yanıtı bunu sağlar. Farklı onluk rakamların kapsamlı taraması, verilen sıralama ve bölünebilme koşulları altında tekliği doğrular.

E057 563; kaynak s. 89 ve 139. Sıradan açılarla yazılan eşitlikler için “çevrel çemberin herhangi bir noktası” koşulu çok geniştir. Çözüm, B' ile A' arasındaki küçük açık yayı kullanır; bu koşul $0 < a < 30^\circ$ ve gerekli sıralamaları sağlar. Yozlaşmış uç noktalar dışlanarak koşul açıkça yazılmıştır. Örneğin $A = (-1, 0)$, $B' = (-1/2, \sqrt{3}/2)$, $A' = (1/2, \sqrt{3}/2)$, $B = (1, 0)$, $M = (0, -1)$ alınırsa MAF açısı 75° olur; bunun üç katı sıradan MEF açısına eşit olamaz.

E058 587; kaynak s. 141–142. Elipsin $x^2/\pi + y^2/4 = 1$ denklemindeki ilk payda π^2 olmalıdır. İçbükeyliklerin aynı yönde olması tek başına kapsama vermez. Sayısal durağan nokta hesabı, $\sin \theta/\theta$ 'nın $(0, \pi)$ üzerinde kesin azaldığını gösteren kanıtla tamamlanmıştır; bu, F 'nin tek minimumunu ve uç değerler arasındaki kesin sınırı sağlar. Sıfırdaki eşitlik ayrıca E029'da kayıtlıdır.

- E059 600; kaynak s. 144.** Alan hesabının sonunda $S/(2R)$ yerine $Sr/(2R)$ gerekir; çünkü $S = sr$ ve $T = 2sr^2/(4R)$ 'dir. Kaynaktaki sonraki hesap zaten doğru ifadeyi kullanır.
- E060 680; kaynak s. 149.** Önerilen merkez geometrik yerini varsayıp tutarlılığı sınamak başka merkezleri dışlamaz. $q = \cos^2 t/a^2 + \sin^2 t/b^2$ ve dış normal çarpımı $\lambda > 0$ ile teğetlik denklemleri $(\lambda^2 - a^2b^2)(1 + \lambda q)^2 = 0$ biçimine gelir. Böylece $\lambda = ab$ ve zorunlu olarak $C = ((a + b) \cos t, (a + b) \sin t)$ bulunur. Ters yön ve dıştan teğetlik de kanıtlanmıştır.
- E061 738; kaynak s. 151–152.** Tam hız denklemleri akıntının AB 'ye paralel ve 5 mil/saat olmasını zorunlu kılar. Bu durumda yol, birbirinden farklı paralel kıyıları bağlayamaz. Dolayısıyla tarihsel yanıt yalnızca sıfır genişlikli limit durumudur; problemde verilerin tutarsızlığı işaretlenmiştir. Kaynaktaki çözüm bir hesabın ortasından başlar ve yazar adı yoktur; eksik metin veya atıf uydurulmaz. Eğik hareket için dönüş süratinin $13 - s$ olduğu gerekçelendirilmemiştir. Alternatif hesapta genişliği gösteren m 'nin birimi mil/saat değil mildir. Çözüm parçası ve birim düzeltmesi aktarılmıştır.
- E062 743; kaynak s. 153–154.** Schmeichel'in ayrıt orta noktası karşı örneği $2\sqrt{3}/3$ katsayısını çürütür; süreklilik, iç noktalarda da karşı örnekler verir. Goldberg'ın merkez hesabı doğrudur, fakat önceki maksimum iddiası geçerli değildir. Yayımlanan $2\sqrt{2}/3$ ikame katsayısı, merkezde eşitlik iddiasıyla bağdaşmaz; merkezde oran $2\sqrt{3}/3$ 'tür. Bu nedenle tarihsel öneri yanlış olarak işaretlenmiştir. Keskin düzeltilmiş eşitsizlik ve eşitlik durumları bu baskıda çözümlenmiş değildir; doğrulanmamış bir ikame teorem verilmez.
- E063 763; kaynak s. 156.** Dirichlet serisinin $|s| > 1$ altında yakınsadığı iddiası yanlıştır ($s = -2$ karşıörnektir). Koşul $\operatorname{Re} s > 1$, gerçek s için $s > 1$ olmalıdır. $33/22$ çarpımı $33/32$ olarak düzeltilmiştir: $1 - 2^{-10} = (1 - 2^{-5})(33/32)$. Eski işaretli Bernoulli indislemesi günümüzdeki B_{2n} 'den ayrılmıştır.
- E064 775; kaynak s. 157.** $p^{-1}B(1/p, 1+1/q)$, $(pq)^{-1}B(1/p, 1/q)$ değil $(p+q)^{-1}B(1/p, 1/q)$ 'ya eşittir; $p = q = 1$ eski değeri çürütür. Tersin varlığı için kesin azalma belirtilmiştir. Süreklilik tek başına türev hesabını haklı kılmaz; genel özdeşlik alan parçalanması veya Stieltjes integraliyle, özel fonksiyonlar içinse genelleştirilmiş integral olarak türev hesabıyla elde edilir.
- E065 806; kaynak s. 158–159.** Dik ikizkenar üçgende küçük üçgenler yozlaşır ve içteğet merkezleri tanımsız olur. Bu durum dışlanmış, koniğin yozlaşabileceği belirtilmiştir. Tarihsel çözümdeki yansıma teoremi üç yansımış nokta çifti için ifade edilmelidir; eksen üzerinde sabit noktaları olan her yansımaya değişmez kümeye uygulanamaz. Merkezî simetri determinanı ancak üç sabit satır bağımsız ise sıfırdan farklı bir ikinci derece denklem tanımlar; bağımlı durumda çekirdek uzayıyla kuruluş gerekir. Bu ayrıntılar ve ek analitik kanıt Bölüm 7'ye aktarılmıştır.
- E066 859; kaynak s. 161–162.** Nelson'ın on iki çözümü *FOUR*'un başında sıfır bulunan iki çözümü içerir; diğer on çözüm bunları dışlar. Kurallar açıklanmıştır. İkinci tablonun yedinci sütunu F yerine I olmalıdır. Beşinci ve altıncı satırda $T = 3$ yerine $T = 4$, dolayısıyla *THREE* = 40233 gerekir. Kapsamlı tarama on iki atamayı, sıfır olmayan ilk basamaklı onunu ve asallıkla bölünmeme koşullarının verdiği tekliği doğrular.
- E067 1206; kaynak s. 166.** Aritmetik-geometrik ortalama karşılaştırmasındaki $<$, eşitlik mümkün olduğundan (örneğin $n = 1$) $\leq$ yapılmıştır. $x > 1$ için $1 - 1/x < \ln x$ olduğundan son kesin sınır korunur. İntegral yaklaşıklığı, bölünlenmenin en büyük aralık uzunluğu sifra giderken alınan limit olarak açıklanmıştır.

- E068 1211; kaynak s. 168–169.** Karesi alınmış tanjant formülü 90° 'de tanımsızdır ve bütünler açıları ayırmaz; eğim hesabı sıfır olabilecek niceliklere böler. İşaretili $\cot \alpha = (x^2 + y^2 - a^2 - b^2)/(2\sqrt{b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2})$ bağıntısı, düşey teğet ve eksen durumları dâhil her dış noktayı kapsar, dar ve geniş açıları ayırır. Ortoptik çember 90° geometrik yeri, ilk elips ise yalnızca $\alpha \rightarrow 180^\circ$ sınırındır. Derginin eksik olduğunu belirttiği istisnai durumlar böylece tamamlanmıştır.
- E069 1298; kaynak s. 171.** $q^2 = |PR|^2$ formülündeki $\beta + \delta$, ardışık PQ, QR yaylarının açıları gereğince $\beta + \gamma$ olmalıdır. Doğru $q^2 = 4r^2 \sin^2((\beta + \gamma)/2)$ ifadesi önceki (3) ile uyumludur.
- E070 1356; kaynak s. 175.** Kaynak $M \neq A$ koşulunu verir, fakat N için yinelemez. AM, AN doğrularının tanımlanması için iki farklı ikinci kesişimin de var olması gerekir; bu koşul açıkça eklenmiştir. A' 'da teğetlik mümkündür: örneğin $B = (0, 0), C = (1, 0), P = (1/4, 0), Q = (3/4, 0)$ ve $A = (1/2, \sqrt{2}/4)$. Böyle yozlaşmış durumlar dışlanır.
- E071 1377; kaynak s. 178.** Yalnızca DEF 'nin ABC 'ye içten çizildiğini söylemek, köşelerin kenarlara gerekli karşılığını belirtmez. $D \in BC, E \in CA, F \in AB$ koşulları açıkça eklenmiştir. Dergiye göre düzeltilmiş 1371 daha önce yayımlanmış, fakat düzeltilmemiş yineleme kabul edilmiş öneriler dosyasında kalmıştır. İki tarihsel problem de korunur; derginin bu açıklaması çözüm bölümüyle birlikte aktarılmıştır.
- E072 1405; kaynak s. 180.** Paydası $1/r_i - 1/r$ olan oranlar yerine eşdeğer $(1/r_1 - 1/r)/a = (1/r_2 - 1/r)/b = (1/r_3 - 1/r)/c$ kullanılmıştır. Yalnızca pozitif kenarlara bölünen bu biçim geçişliliği doğrudan gösterir ve belirtilmemiş sıfır olmayan payda koşulunu önler. Geometrik olarak dejenere bir durumda kenarlar dışındaki teğetlerin varlığı ileri sürülmez.
- E073 Bölüm 10 listesi; kaynak s. 190.** 226 numaralı problem için sayfa numarası 488 verilmiştir. Kaynak s. 194'teki katkı başlığında bulunan 48 değeri benimsenmiştir.
- E074 192; kaynak s. 190–191.** Açı zincirinde tanımlanmamış K noktası kullanılır. Gerekli nokta $CA \cap A'B'$ 'dir. İkinci kesişim I, A' noktasından ayrılmış; açılar π modülüne göre yönlü olarak ele alınmıştır. İkinci çembersel dörtlde basılan B , açı yerine koymasında gerçekten kullanılan I olarak düzeltilmiştir. Çemberlerin ortak noktasına dayanan gerekçe açıkça yazılmıştır. İddia, belirtilen çevrel çemberlerin varlığını ve dejenere olmayan bir kesişim düzenini gerektirir. Örneğin simetri merkezi AB 'nin orta noktası seçilirse $A = B'$ olur ve ilk sözde üçgende köşeler çakışır. İstisnai limit durumları burada sınıflandırılmıştır.
- E075 203; kaynak s. 191.** Kübik denklemde ikinci derece terimin bulunmaması yalnızca üç x koordinatının toplamının sıfır olduğunu gösterir; tek başına üçgenin eşkenar olduğunu kanıtlamaz. Editöryal ek olarak belirtilen trigonometrik tamamlama iddiayı kanıtlar, kaynağın y 'yi yok etme işleminde dışladığı $b = 0$ durumunu ve dördüncü kesişimlerin çakışmasını da kapsar. İkinci denklemin çember belirtmediği dejenere $a = b = 0$ durumu dışlanmıştır.
- E076 204; kaynak s. 192–193.** İkinci üçldeki p_z , çözüm tablosuna uygun olarak p_a yapılmıştır. 2(a) kısmındaki ters değer $1/k(b_p)$ değil, $1/k(B_p)$ 'dir. T, p_b cevianı üzerinde olduğundan, CAA_m üçgenini kesen doğru, yinelenen BTB_q değil BTB_p 'dir. Negatif oranlar yönlü doğru parçası oranlarıdır; gösterimler tutarlı hâle getirilmiştir. Dört Ceva koşulu, verilen kenar bağıntısına indirgenir.
- E077 221; kaynak s. 194.** a harfi hem spiralin ölçeği hem de bir uç noktanın uzaklığı için kullanılmış, ayrıca a, b açisal integral sınırlarına da yazılmıştır. Ölçek C , açisal sınırlar

θ_0, θ_1 olarak yeniden adlandırılmış; a, b son bağıntıdaki ana doğru boyunca ölçülen uzaklıklar anlamında korunmuştur. Formül, kesişme açısının dar olduğu ve bu uzaklığın arttığı durum için verilmiştir; ana doğru ve paralel çember uç durumları ayrıca açıklanmıştır.

- E078 270; kaynak s. 196.** Ara tersinim bağıntısında n^2 içeren paydanın ρ_n^2 içermesi gerekir. Tersinim kuvveti $4R^2$ olduğundan, sonraki bağıntının payı $4R^2\rho_n$ olmalıdır; kaynaktaki bulunan $R^2\rho_n$ tan α , önceki denklemden çıkmaz. Son yarıçap formülü düzeltilmiş hesapla uyumludur.
- E079 273; kaynak s. 190 ve 197.** Derleyenin listesi ve başlığı 272 derken aktarılan dergi kaydı açıkça 273 demektir. Dergideki numara benimsenmiştir. Sağlanan çözüm, harmonik oran eşitliğinden sonra sonuç gerekçesi verilmeden kesilir. Bu parça korunmuş, ayrıca bir koordinat kanıtıyla tamamlanmıştır; eksik tarihsel metin tahminle yeniden kurulmamıştır.
- E080 332; kaynak s. 197.** İddia, katsayıların rasyonel (veya tam sayı) olmasını gerektirir; $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ üzerinde yanlıştır. Kaynaktaki “tam bir çarpanın en büyük derecesi” ifadesi sözcüğü sözcüğüne doğru değildir. Asıl engel, indirgenemez 24. derece Φ_{90} çarpanıdır: rasyonel katsayılı 22. derece bir bölen bu çarpanı içeremez; diğer çarpanların toplam derecesi ise 21’dir.
- E081 353; kaynak s. 198–199.** İki durumda “dıştan” ve “içten” sözcükleri yer değiştirmiştir; farklı ve eşit yarıçaplı çemberler yalnızca dıştan teğet olabilir. Çakışan çemberler ve doğruya dönüşen limitler, olağan teğet çember çiftleri değildir. Kübik denkleme indirgeme geçerlidir, fakat $\sqrt{27\sqrt{a^2 - b^2}}$ içeren son karşılaştırma eşdeğer bir diskriminant ölçütü değildir. Örneğin $a = b = 2, u = 1$ için tek gerçek kök vardır; söz konusu karşılaştırma ise üç kök öngörür. Tam kübik diskriminant ve kabul edilebilir kök aralığı verilmiştir. Rasyonel koordinatlı bir örnek indirgenemez bir kübik verdiğinden, genel bir cetvel–pergel çizimi olanaksızdır.
- E082 374; kaynak s. 200.** $\overrightarrow{PA_1'} = -n\overrightarrow{PA_1}$ ve $\overrightarrow{AA_2'} = m\overrightarrow{AA_1'}$ için katsayılar $(1-m)(1-m+mn)$ ve m^2n^2 olmalıdır. Bunlar yönlü vektörel alanların açılımından çıkar ve $m = 1/2, n = 3$ ile A_1, B_1, C_1 doğrudan olduğunda kanıtlanan eşitliğe indirgenir. Vektörel çarpımlarda 2 çarpanının kaybolmaması için kullanılan gösterimin yönlü alanın iki katını belirttiği açıklanmıştır.
- E083 383; kaynak s. 201–202.** BE, AB' ’ye değil AP' ’ye dik olmalıdır. ABE, APD üçgenlerinin benzerliği ve $BE = AP$ eşitliği bunu gerektirir. Kaynak s. 201–202’deki yedi şekil panelinin tamamı yeniden çizilmiştir; düzlemsel kesimler, belirtilen $3u$ ve $2u$ kenarlı dikdörtgen ile kenarı $u\sqrt{6}$ olan kareden üretilmiştir. Koordinatlar ve ötelemeler, altı parçalı ayırmanın eski şematik oranlardan bağımsız olarak yeniden oluşturulmasını sağlar.
- E084 387; kaynak s. 203–205.** Problem ifadesinin sağındaki türevler t ’ye değil x ’e göre. $u = e^{-x/(1-t)}$ için $u_t = -xu_{xx}$ ve $(1-t)^{-1}e^{-xt/(1-t)} = -e^x u_x$ olur; aktarılan çıkarımda her iki eksi işareti de eksiktir. Dolayısıyla $D(xD^2)^p e^{-x}$ ifadesindeki katsayı işaretleri, basılan $(-1)^\lambda$ değil $(-1)^{p+\lambda+1}$ olmalıdır. Düzeltilmiş tümevarım, katsayı yineleme bağıntısı dâhil aynı operatör yöntemini korur ve son üssü $p - 1$ yerine $p + 1$ yapar.
- E085 401; kaynak s. 206–209.** Yineleme $n = 2$ ’den başlar ve $F(2) = ad - bc$ değil $F(2) = ad + bc$ olur. Üç köşegenli determinantlarda üst yan köşegen b iken alt yan köşegen -1 olmalıdır; basılan $b, -b$ çifti b^2 üretir. İkinci determinantın mertebesi $n - 1$ değil $n - 3$ ’tür. Elde edilen formül, $D_0 = 1, D_{-1} = 0$ olmak üzere $(ad + bc)D_{n-2} + bdD_{n-3}$ ’tür. Sürekli kesir kanıtı açıkça paydaların sıfır olmadığı durumla sınırlandırılmıştır.

- E086 412; kaynak s. 210.** $P = A$ iken verilen olağan oranlarda paydalar sıfırdır; $P = B, C$ iken kesenlerden biri limitte teğete dönüşür. Bu konumlar, projektif bağıntıyı tanımsız oranlarda yerine koymayla değil limit yoluyla belirler. Kaligrafik harfler, çift doğrusal bağıntının katsayılarını üçgenin köşelerinden ayırır.
- E087 427; kaynak s. 211.** Son satırda, istenen sonuçla çelişen $OH = BH \parallel AB$ yazılmıştır. $O = B$ iken limitte $G = C$ olur; dolayısıyla çizim $BH \parallel AG = AC$ verir. Sondaki AB, CA olarak düzeltilmiştir.
- E088 428; kaynak s. 211–212.** Rakamları permütasyonla elde edilen yedi katın bulunması, sayının yedi basamaklı olmasını gerektirmez; kanıtta kullanılan belirli döngüsel kaydırmanın ortaya çıkması da güvence altında değildir. Olağan tam sayı 105263157894736842 ve gösterilen altı katı bir karşı örnek verir. Breault'nun basılı iki sayısı da olağan tam sayı olarak uygun değildir; iki katları bir basamak kazanır. Kastedilen $1/17$ ve $1/29$ devirleri sıfırla başlar ve uzunlukları 16 ve 28'dir. Döngüsel kat yorumu, bu sabit uzunlukların korunmasını gerektirir. Tarihsel kanıt ve yorum açıkça bu nitelikleriyle sunulmuş, düzeltmeler ayrıca açıklanmıştır.
- E089 432; kaynak s. 212–213.** Bazı kesişimler veya paydalar tanımsız olabileceği hâlde çözüm “düzlemdeki bütün noktalar” sonucuna varır. Yönlü oranlar kanıtı dejenere olmayan dış nokta düzenlerine genişletir; paydalar temizlendiğinde sürekli limitin bulunduğu yerlerde karşılık gelen çarpım özdeşliği elde edilir. Tanımsız bir olağan orana değer atanmaz.
- E090 435; kaynak s. 213–214.** Dördüncü derece denklemde c tanımlanmadan kullanılır; $c^2 = a^2 - b^2$ tanımı eklenmiştir. Dört ekstremum iddiası $a > b > 0$ varsayar; çembere içten çizilmiş eşit büyüklükte sonsuz sayıda eşkenar üçgen vardır. Son çözüm sahibinin kurum bilgisi “J. W. Mellender, University” ifadesinden sonra kesilmiştir; eksik olduğu açıkça işaretlenmiştir.
- E091 445; kaynak s. 215.** Bu kayıt, yeniden kurulmuş bir hata değil, eksik bağlamı belgeler. Yalnızca Demir'in daha önceki bir kanıtı düzeltmesi verilmiş; ne problem önerisi ne de söz konusu kanıt aktarılmıştır. Düzeltme ve formülü aslına sadık biçimde dizilmiştir; temel geometrik düzen ve k 'nın anlamı yalnızca bu parçadan belirlenemez.
- E092 476; kaynak s. 216–218.** $m = AM$ ve $AB = a$ olduğundan komşu kenar sınırı $m \leq b$ değil $m \leq a$ 'dır. Karşıt kenarlar için çevre denkleminde AD katkısı $-d$ değil $+d$ olmalıdır. İkinci aralık koşulu yinelenen m 'ye değil n 'ye ilişkindir. Köklerin gerçekliği ve gerçekten kenar aralıklarında bulunmaları denetlenmelidir; sıralanan gerekli eşitsizlikler tek başına seçilen bir çift için varlığı kanıtlamaz. Sonlu O kesişimi, karşıt kenarların paralellliğini dışladığından bu durum için ayrı bir koordinat çizimi verilmiştir. Yeniden kurulan gerekçe dışbükey dörtgenleri kapsar; dışbükey olmayan bütün durumların da bundan çıktığı ileri sürülmez.
- E093 653; kaynak s. 218–219.** Üstel kulenin ayrıacı yerine, çözümde kullanılan açık yineleme bağıntısı yazılmıştır: kulede $n+1$ tane x bulunur, $y_0 = x$ ve $y_{-1} = 1$ 'dir. Logaritmik türev $x > 0$ için geçerlidir. Toplam ve y_{-1} 'i içeren son çarpım açık sınırlarla yazılmıştır.
- E094 1256; kaynak s. 221–222.** Verilen kanıt dışbükeyliği ve $\alpha > \beta$ koşulunu varsayar. Dışbükeylik problem ifadesine eklenmiş; uçların rollerinin değiştirilmesi ve $\alpha = \beta$ limitiyle ilk kanıt tamamlanmıştır. Hoyt'un şekli, DA, CB doğrularının sonlu bir kesişimini gerektirir; paralel kenarlar, tanımsız bir sonlu X noktası kullanmak yerine ilk gerekçeyle veya onun limit durumuyla kapsanmıştır.

E095 Bölüm 10 listesi; kaynak s. 190. Bölüm başındaki listede, kaynak s. 210–218’de gerçekten aktarılan 412, 427, 428, 432, 435, 445 ve 476 numaralı problemlere katkılar bulunmaz. Bu yedi kayıt, aktarımların başında basılan künyelerle listeye eklenmiş ve bölümdeki kayıt sayısı 25’e çıkarılmıştır.